ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO

R. PARK y T. PAULAY

Departamento de Ingeniería Civil
Universidad de Canterbury
Christchurch, Nueva Zelandia



Noriega Editores

EDITORIAL LIMUSA

MÉXICO • ESPAÑA • VENEZUELA • ARGENTINA
COLOMBIA • PUERTO RICO

Versión autorizada en español de la
obra publicada en inglés por
John Wiley & Sons, bajo el título:
REINFORCED CONCRETE STRUCTURES
© by John Wiley & Sons, Inc. ISBN 0 – 471 – 65917 – 7

Versión española;
SERGIO FERNANDEZ EVEREST
Ingeniero de Sistemas de IBM de México

Revisión:
JOSE DE LA CERA A.
Ingeniero Civil de la Facultad de Ingeniería
de la Universidad Nacional Autónoma de México.
Diplom-Ingenieur de la Universidad Técnica de Munich,
Alemania Federal. Profesor de Tiempo Completo
e Investigador del Departamento de Ingeniería
Civil de la Universidad Autónoma Metropolitana

La presentación y disposición en conjunto de
ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO
son propiedad del editor. Ninguna parte de esta obra
puede ser reproducida o transmitida, mediante ningún sistema
o método, electrónico o mecánico (incluyendo el fotocopiado,
la grabación o cualquier sistema de recuperación y almacenamiento
de información), sin consentimiento por escrito del editor.

Derechos reservados:

© 1988, EDITORIAL LIMUSA, S. A. de C. V.
Balderas 95, Primer piso, 06040, México, D. F.

Miembro de la Cámara Nacional de la
Industria Editorial. Registro Núm. 121

Primera edición: 1978
Primera reimpresión: 1980
Segunda reimpresión: 1983
Tercera reimpresión: 1986
Cuarta reimpresión: 1988
Impreso en México
(7176)

ISBN 968 – 18 – 0100 – 8

PROLOGO

Esperamos que el contenido y tratamiento del tema de estructuras de concreto reforzado en este libro sea de interés tanto para los estudiantes y profesores como para los profesionales de ingeniería estructural.

El libro se basó en dos ediciones de notas de seminario tituladas *Ultimate Stength Design of Reinforced Concrete Structures* (*vol. I*) impresas por la Universidad de Canterbury para los seminarios de estudios de extensión impartidos para los ingenieros en estructuras en Nueva Zelanda. Las ediciones iniciales de las notas del seminario se han extendido y actualizado apreciablemente. Muchos años de enseñanza de la teoría y el diseño y en el diseño e investigación, nos han ayudado a formar ideas y proporcionar material de fondo para el libro.

En el texto se enfatiza el comportamiento básico de los elementos de concreto reforzado y de sus estructuras (en particular sus características de resistencia y deformación hasta la carga máxima). Tratamos de que el lector tenga un conocimiento completo de los fundamentos del concreto reforzado ya que este antecedente es esencial para comprender extensa y adecuadamente los códigos de construcción y procedimientos de diseño. El ingeniero de diseño puede desilusionarse debido a que el texto no abunda en una diversidad de gráficas, tablas y ejemplos de diseño; sin embargo, se dispone de esa información en otras fuentes. El propósito fundamental del texto es transmitir la comprensión básica de las características del material aplicado.

El código actual de construcción del Instituto Norteamericano de Concreto (ACI 318-71) es uno de los códigos de concreto reforzado más aceptados. Lo han adoptado algunos países y ha influido notablemente en los

códigos de muchos otros. Por esta razón se hacen extensas referencias a las provisiones del ACI, aunque se establecen comparaciones con otros códigos de construcción cuando es necesario. Este libro no está orientado a los códigos, el énfasis radica en por qué deben tomarse determinadas decisiones de ingeniería más que en qué forma deben ejecutarse. Creemos que los ingenieros deben poder evaluar racionalmente los procedimientos de diseño, en vez de seguir ciegamente las provisiones de los códigos.

En todo el libro se enfatizan los enfoques de resistencia y servicio en el diseño, debido a que creemos que se trata del método más práctico.

El libro comienza con un estudio de los criterios del diseño básico así como de las propiedades del concreto y acero. Se presenta con cierta profundidad un estudio de la resistencia y deformación de los miembros estructurales de concreto reforzado con flexión flexión y carga axial, cortante y torsión, seguido de un estudio de la adherencia y anclaje. Luego se examinal el comportamiento bajo carga de servicio de miembros de concreto reforzado, enfatizando el control de las deflexiones y las grietas. A este material le sigue un estudio de marcos y muros de cortante. Debido a que creemos que no basta el dimensionamiento correcto de las componentes para asegurar un diseño exitoso, el libro finaliza con un estudio relativo al detallado de las componentes y juntas estructurales.

No intentamos estudiar el diseño de los tipos específicos de estructura. Por medio del entendimiento del comportamiento de las componentes del concreto reforzado y del análisis estructural, el diseñador debe poder emprender el diseño de la variedad común de estructuras y encontrar soluciones a problemas especiales.

Una característica del libro, que lo distingue de otros textos sobre concreto reforzado, es la forma en que estudia los efectos de la carga sísmica y la manera de lograr procedimientos de diseño para estructuras resistentes a ella. El diseño sísmico adquiere mayor importancia al apreciar que las zonas sísmicas pueden ser mayores de lo que se supone en la actualidad. El diseño sísmico comprende más que una consideración de las cargas laterales estáticas adicionales en la estructura. Es necesario prestar atención adecuada a los detalles, así como tener un buen entendimiento de los mecanismos posibles de falla para poder diseñar estructuras que puedan soportar sismos intensos. Las consideraciones del comportamiento bajo cargas sísmicas intesas, implican entender las características de deformación de los miembros y estructuras en el rango inelástico, al igual que el desarrollo de la resistencia, y se da su debido lugar a estas áreas en el texto.

Se han omitido estudios detallados de las losas debido a que se está preparando un extenso tratado sobre el tema.

Esperamos que el libro sirva como texto a los profesores que preparan una guía para cursos a nivel universitario sobre concreto reforzado. En

cada tema se ha tratado de darle el tratamiento adecuado a fin de que puedan usar esta obra los estudiantes graduados en cursos avanzados de concreto reforzado. Se espera que muchos ingenieros, especialmente los que encaran la tremenda tarea de tener que diseñar estructuras resistentes a sismos, también encuentren en este libro una referencia útil.

Agradeceríamos cualesquier comentarios o críticas constructivas que los lectores puedan hacer, así como sugerencias o indicaciones sobre los errores que detecten.

Hemos recibido mucha ayuda, estímulo e inspiración de muchas personas. Damos gracias a nuestros colegas de la Universidad de Canterbury, principalmente al profesor H. J. Hopkins, quien fomentó un gran interés en el concreto entre la comunidad universitaria; al Dr. A. J. Carr, que leyó parte del manuscrito; y a la Sra. Alice Watt, cuya paciencia para mecanografiar el manuscrito apreciamos considerablemente. También reconocemos los esfuerzos de los técnicos del Departamento de Ingeniería Civil de la Universidad de Canterbury y de nuestros estudiantes de postgrado que soportaron la mayor carga de las pruebas mencionadas, al igual que del trabajo fotográfico y de dibujo, por lo que consideramos su esfuerzo con aprecio. Agradecemos a nuestros colegas en Nueva Zelanda 0. A. Clogau, G. F. McKenzie e I. C. Armstrong, del Ministerio de obras públicas de Nueva Zelanda; y los ingenieros asesores A. L. Andrews, J. F. Hollings, R. J. P. Garden y K. Williamson. También damos gracias a nuestros colegas en los Estados Unidos, Europa y Australia M. P. Collins, R. F. Furlong, W. L. Gamble, P. Lampert, J. MacGregor, G. Base, V. V. Bertero, F. Leonhardt y H. Rüsch. Asimismo, agradecemos a las autoridades de la Universidad de Canerbury, a la Potland Cement Association, El Instituto Norteamericano de Hierro y Acero, La Sociedad Norteamericana de Ingenieros Civiles y el Instituto Norteamericano del Concreto.

Por último, nunca hubiéramos podido lograr esta empresa sin la paciencia, estímulo y comprensión de nuestras esposas.

R. Park
T. Paulay

Christchurch, Nueva Zelanda

CONTENIDO

1 EL ENFOQUE DEL DISEÑO 1

1.1 Desarrollo de los procedimientos de diseño por esfuerzo de trabajo y resistencia máxima 1

1.2 Diseño por resistencia y servicio 3

1.3 Método de diseño por resistencia y servicio del ACI 5

1.3.1 Recomendaciones sobre resistencia, 5

1.3.2 Recomendaciones sobre servicio, 7

1.3.3 Recomendaciones sobre ductilidad, 7

1.4 Consideraciones sobre resistencia de los miembros 8

1.4.1 Desarrollo de la resistencia de los miembros, 8

1.4.2 Resistencia ideal, 9

1.4.3 Resistencia confiable, 9

1.4.4 Resistencia probable, 9

1.4.5 Sobrerresistencia, 10

1.4.6 Relaciones entre distintas resistencias, 10

1.5 Bibliografía 11

2 RELACIONES ESFUERZO-DEFORMACION PARA EL CONCRETO Y EL ACERO 13

2.1 Concreto 13

2.1.1 Comportamiento bajo esfuerzo uniaxial, 13

2.1.2 Comportamiento bajo esfuerzos combinados, 20

2.1.3 Confinamiento del concreto por el refuerzo, 22

2.1.4 Flujo plástico del concreto, 32

2.1.5 Contracción del concreto, 36

2.2 Refuerzo de acero 39
2.2.1 Perfiles y tamaños de varillas, 39
2.2.2 Comportamiento monotónico de esfuerzos, 40
2.2.3 Comportamiento bajo esfuerzos repetidos, 45
2.2.4 Comportamiento de esfuerzos alternados, 45
2.3 Bibliografía 48
3 SUPOSICIONES BASICAS DE LA TEORIA DE LA RESISTENCIA A FLEXION 51
3.1 Suposiciones del comportamiento básico 51
3.2 Bloque de esfuerzos rectangular equivalente 56
3.3 Deformación del concreto en la resistencia máxima a flexión 58
3.4 Areas comprimidas no rectangulares 59
3.5 Efectos de las tasas lentas de carga y de la carga sostenida 61
3.6 Resumen de recomendaciones para determinar la resistencia de secciones con flexión y carga axial 62
3.7 Bibliografía 63
4 RESISTENCIA DE LOS MIEMBROS SOMETIDOS A FLEXION 65
4.1 Secciones rectangulares 65
4.1.1 Análisis de secciones simplemente reforzadas, 65
4.1.2 Diseño de secciones simplemente reforzadas, 73
4.1.3 Análisis de secciones doblemente reforzadas, 83
4.1.4 Diseño de secciones doblemente reforzadas, 88
4.2 Secciones *T* e *I* 97
4.2.1 Análisis de secciones *T* e *I*, 97
4.2.2 Diseño de las secciones *T* e *I*, 100
4.2.3 Ancho efectivo de las vigas *T*, 103
4.3 Secciones con varillas a distintos niveles o acero sin una resistencia de cedencia bien definida 105
4.4 Secciones sometidas a flexión biaxial 111
4.5 Inestabilidad lateral de las vigas 118
4.6 Bibliografía 121
5 RESISTENCIA DE MIEMBROS SOMETIDOS A FLEXION Y CARGA AXIAL 123
5.1 Introducción 123
5.2 Columnas cortas cargadas axialmente 123
5.3 Columnas cortas cargadas excéntricamente con flexión uniaxial 128
5.3.1 Introducción 128
5.3.2 Análisis de secciones rectangulares con varillas en una o dos caras 131
5.3.3 Diseño de secciones rectangulares con varillas en una o dos caras 141

5.3.4 Secciones rectangulares con varillas en las cuatro caras 149
5.3.5 Secciones con varillas en arreglo circular 153
5.3.6 Gráficas y tablas de diseño 157
5.4 Columnas cortas cargadas excéntricamente con flexión biaxial 160
5.4.1 Teoría general 160
5.4.2 Métodos aproximados de análisis y diseño por flexión biaxial 164
5.4.3 Gráficas de diseño 168
5.5 Columnas esbeltas 178
5.5.1 Comportamiento de columnas esbeltas 178
5.5.2 Enfoque del diseño "exacto" para columnas esbeltas 185
5.5.3 Enfoque del diseño aproximado para columnas esbeltas: El método amplificador de momentos 186
5.6 Bibliografía 198
6 DEFORMACION MAXIMA Y DUCTILIDAD DE MIEMBROS SOMETIDOS A FLEXION 201
6.1 Introducción 201
6.2 Relaciones momento-curvatura 202
6.2.1 Curvatura de un miembro 202
6.2.2 Determinación teórica de la relación momento-curvatura 205
6.3 Ductilidad de secciones de viga de concreto no confinado 210
6.3.1 Cedencia momento máximo y curvatura 210
6.3.2 Requerimientos de ductilidad especificados para las vigas 223
6.4 Ductilidad de secciones de columna de concreto no confinado 224
6.5 Miembros con concreto confinado 228
6.5.1 Efecto del confinamiento del concreto 228
6.5.2 Parámetro del bloque de esfuerzos de compresión para el concreto confinado mediante aros 231
6.5.3 Curvas teóricas momento-curvatura para secciones con concreto confinado 236
6.6 Deformaciones de flexión de los miembros 244
6.6.1 Cálculo de las deformaciones a partir de las curvaturas 244
6.6.1 Cálculo de las deformaciones a partir de las curvaturas 244
6.6.2 Efectos adicionales en las deformaciones de miembros calculadas a partir de las curvaturas 245
6.6.3 Deformaciones máximas idealizadas calculadas a partir las curvaturas 250
6.6.4 Expresiones empíricas para la rotación plástica máxima calculada a partir de las curvaturas 253
6.6.5 Enfoque alterno para el cálculo de las deformaciones en base a la suma de rotaciones discretas en las grietas 259
6.7 Deformaciones de miembros con cargas cíclicas 262

6.7.1 Relaciones momento-curvatura 262
6.7.2 Comportamiento de la curva carga-deformación 273
6.8 Aplicación de la teoría 277
6.9 Bibliografía 277

7 RESISTENCIA Y DEFORMACION DE MIEMBROS SOMETIDOS A CORTANTE 279

7.1 Introducción 279
7.2 El concepto de esfuerzos cortantes 280
7.3 El mecanismo de resistencia a cortante en vigas de concreto reforzado sin refuerzo en el alma 285
7.3.1 La formación de grietas diagonales 285
7.3.2 Equilibrio en el claro de cortante de una viga 285
7.3.3 Los mecanismos principales de la resistencia a cortante 287
7.3.4 Efectos del tamaño 297
7.3.5 Mecanismos de falla a cortante 297
7.3.6 El diseño por cortante de vigas sin refuerzo en el alma 300
7.4 El mecanismo de resistencia a cortante en vigas de concreto reforzado con refuerzo en el alma 302
7.4.1 El papel del refuerzo en el alma 302
7.4.2 Analogía de la armadura 302
7.4.3 El diseño por cortante de vigas con refuerzo en el alma 309
7.5 La interacción de flexión y cortante 311
7.5.1 El efecto del cortante en los requerimientos del acero de flexión 312
7.5.2 Cortante en articulaciones plásticas 317
7.5.3 Efectos de interacción en vigas de gran peralte 320
7.6 La interacción de fuerzas cortantes, de flexión y axiales 320
7.6.1 Cortante y compresión axial 320
7.6.2 Cortante y tensión axial 322
7.7 Deformaciones por cortante 325
7.7.1 Miembros no agrietados 325
7.7.2 Deformaciones por cortante en miembros agrietados 326
7.8 Cortante de entrecara 328
7.8.1 Transferencia de cortante a través de entrecaras no agrietadas de concreto 330
7.8.2 Transferencia de cortante a través de entrecaras preagrietadas de concreto 331
7.8.3 Transferencia de cortante a través de juntas de construcción 339
7.9 Los efectos de carga repetida y cíclica en la resistencia a cortante 340
7.9.1 Efectos del refuerzo en el alma 343

7.9.2 Efectos en la transferencia de cortante de entrecara 346
7.10 Miembros y cargas especiales 347
7.11 Bibliografía 354

8 RESISTENCIA Y DEFORMACION DE MIEMBROS SOMETIDOS A TORSION 357

8.1 Introducción 357
8.2 Concreto simple sujeto a torsión 359
8.2.1 Comportamiento elástico 359
8.2.2 Comportamiento plástico 362
8.2.3 Secciones tubulares 365
8.3 Vigas sin refuerzo en el alma sujetas a flexión y torsión 369
8.4 Torsión y cortante en vigas sin refuerzo en el alma 370
8.5 Miembros a torsión que requieren refuerzo en el alma 373
8.6 Cortante y torsión combinadas en vigas con refuerzo en el alma 382
8.7 Flexión y torsión combinadas 389
8.8 Regidez torsional 396
8.9 Torsión en estructuras estáticamente indeterminadas 402
8.10 Bibliografía 403

9 ADHERENCIA Y ANCLAJE 405

9.1 Introducción 405
9.1.1 Consideraciones básicas 405
9.1.2 Anclaje 406
9.1.3 Adherencia por flexión 407
9.2 La naturaleza de la resistencia por adherencia 408
9.2.1 Características básicas de la resistencia por adherencia 408
9.2.2 La posición de las varillas con respecto al colado del concreto que las rodea 411
9.2.3 Perfiles de varillas y condición de su superficie 414
9.2.4 El estado de esfuerzo en el concreto circundante 414
9.2.5 La falla por fisuración 416
9.2.6 Confinamiento 417
9.2.7 Cargas repetidas y cíclicas alternadas 419
9.3 La determinación de la resistencia utilizable por adherencia 420
9.4 El anclaje de las varillas 424
9.4.1 Anclaje rectos para varillas con tensión 424
9.4.2 Anclajes de gancho para varillas con tensión 425
9.4.3 Anclaje para varillas con compresión 430
9.5 Requerimientos de anclaje para adherencia por flexión 431
9.6 Empalmes 432
9.6.1 Introducción 433
9.6.2 Empalmes a tensión 435

9.6.3 Empalmes a compresión 435
9.6.4 Empalmes mecánicos o de contacto 437
9.7 Bibliografía 438
10 COMPORTAMIENTO BAJO CARGA DE SERVICIO 441
10.1 Rendimiento bajo carga de servicio 441
10.2 Teoría elástica para esfuerzos en miembros debidos a flexión 442
10.2.1 Módulo efectivo de elasticidad 442
10.2.2 Suposiciones de la teoría elástica 443
10.2.3 Análisis de vigas usando el enfoque del par interno 444
10.2.4 Análisis de vigas por el método de la sección transformada 452
10.2.5 Diseño de vigas utilizando el método alterno (teoría elástica) 457
10.2.6 Análisis de columnas cortas 466
10.2.7 Esfuerzos de contracción 473
10.3 Control de deflexiones 478
10.3.1 La necesidad del control de las deflexiones 478
10.3.2 Método de control de las deflexiones 479
10.3.3 Cálculo de deflexiones 481
10.3.4 Métodos más exáctos para calcular deflexiones 487
10.4 Control de grietas 493
10.4.1 La necesidad de controlar las grietas 493
10.4.2 Causas del agrietamiento por agrietamiento 494
10.4.3 Mecanismo del agrietamiento por flexión 496
10.4.4 Control de grietas por flexión en el diseño 507
10.5 Bibliografía 512

11 RESISTENCIA Y DUCTILIDAD DE LOS MARCOS 515
11.1 Introducción 515
11.2 Redistribución de momentos y rotación de articulación plástica 516
11.3 Análisis completo de marcos 522
11.4 Métodos para determinar las distribuciones de momento flexionantes, fuerzas cortantes, y fuerzas axiales bajo carga máxima para utilizar en el diseño 524
11.4.1 El diagrama de momento flexionante elástico 525
11.4.2 El diagrama de momento flexionante elástico modificado por la redistribución de los momentos 527
11.4.3 Diseño límite 532
11.5 Métodos del diseño al límite 535
11.5.1 Informe del Comité 428 del ACI-ASCE 535
11.5.2 Métodos disponibles de diseño al límite 539
11.5.3 Método general para calcular las rotaciones requeridas en las articulaciones plásticas. 542

11.5.4 Cálculo de los momentos y esfuerzos bajo carga de servicio 549
11.5.5 Comentarios sobre el diseño al límite 565
11.6 Diseño por cargas sísmicas 565
11.6.1 Conceptos básicos 565
11.6.2 Requerimientos de ductilidad de desplazamiento 568
11.6.3 Requerimientos de ductilidad de curvatura 573
11.6.4 Determinación de la demanda de ductilidad de curvatura de marcos de niveles múltiples utilizando mecanismos de colapso estático 575
11.6.5 Determinación de la demanda de ductilidad de curvatura de marcos de niveles múltiples utilizando análisis dinámicos no lineales 585
11.6.6 Factores adicionales en el análisis por ductilidad 590
11.6.7 Provisiones especiales del código del ACI para el diseño sísmico de marcos dúctiles 602
11.6.8 Estudio de las provisiones especiales del código del ACI para el diseño sísmico de marcos dúctiles 605
11.6.9 Un procedimiento alterno para calcular el refuerzo transversal especial para el confinamiento en las zonas de articulación plásticas de columnas 614
11.6.10 Disipación de la energía sísmica mediante dispositivos especiales 622
11.6.11 Diseño por capacidad para la carga sísmica de marcos. 623
11.7 Bibliografía 630

12 MUROS DE CORTANTE EN EDIFICIOS DE NIVELES MULTIPLES 633
12.1 Introducción 633
12.2 El comportamiento de muros en voladizo 634
12.2.1 Muros altos con secciones transversales rectangulares 634
12.2.2 Muros de cortante bajos con secciones transversales rectangulares 641
12.2.3 Muros de cortante en voladizo con patines 651
12.2.4 Interacción momento-carga axial en secciones de muros de cortante 653
12.2.5 Interacción entre muros de cortante en voladizo 655
12.3 Interacción de muros de cortante y muros con juntas rígidas 658
12.4 Muros de cortante con aberturas 659
12.5 Muros de cortante acoplados 661
12.5.1 Introducción 661
12.5.2 El análisis laminar utilizado para predecir la respuesta elástica lineal 662

12.5.3 Comportamiento elastoplástico de muros de cortante acoplados 665
12.5.4 Experimentos con muros de cortante acoplados 682
12.5.5 Resumen de principios del diseño 683
12.6 Bibliografía 685
13 EL ARTE DE DETALLAR **689**
13.1 Introducción 689
13.2 Propósito del refuerzo 690
13.3 Cambios direccionales de las fuerzas internas 691
13.4 El detallado de las vigas 695
13.4.1 Sitios para el anclaje 695
13.4.2 Interacción del refuerzo por flexión y cortante 700
13.4.3 El detallado de los puntos de soporte y de carga 706
13.4.4 Recorte del refuerzo a flexión 711
13.5 El detallado de miembros a compresión 712
13.6 Ménsulas 715
13.6.1 Comportamiento 715
13.6.2 Mecanismo de falla 718
13.6.3 Diseño y detallado de ménsulas 720
13.6.4 Otros tipos de ménsulas 723
13.7 Vigas de gran peralte 726
13.7.1 Introducción 726
13.7.2 Vigas simplemente apoyadas 729
13.7.3 Vigas continuas de gran peralte 731
13.7.4 Refuerzo del alma en vigas de gran peralte 734
13.7.5 Introducción de cargas concentradas 738
13.8 Juntas de vigas-columnas 742
13.8.1 Introducción 742
13.8.2 Juntas de rodilla 743
13.8.3 Juntas exteriores de marcos planos de plantas múltiples 752
13.8.4 Juntas interiores de marcos planos de plantas múltiples 763
13.8.5 Sugerencias para detallar juntas 774
13.8.6 Juntas de marcos espaciales de plantas múltiples 778
13.9 Conclusiones 785
13.10 Bibliografía 785
INDICE **789**

I

El enfoque del diseño

1.1 DESARROLLO DE LOS PROCEDIMIENTOS DE DISEÑO POR ESFUERZO DE TRABAJO Y RESISTENCIA MAXIMA

Varios de los primeros estudios sobre los miembros de concreto reforzado se basaron en teorías de resistencia máxima, por ejemplo, la teoría de la resistencia a la flexión de Thullie de 1897 y la teoría de la distribución parabólica de esfuerzos de Ritter de 1899. Sin embargo, alrededor de 1900 se aceptó en forma general la teoría de la línea recta (elástica) de Coignet y Tedesco, en parte principalmente debido a que la teoría elástica era el método convencional de diseño para otros materiales y en parte a que se pensaba que la variación lineal del esfuerzo conducía a una formulación matemática más sencilla. Además las pruebas habían mostrado que la utilización de la teoría elástica con valores elegidos cuidadosamente para los esfuerzos permisibles de trabajo conducía a una estructura que mostraba comportamiento satisfactorio bajo las cargas de servicio y que tenía un margen adecuado de seguridad contra el colapso. En consecuencia, la teoría elástica ha sido la base del diseño del concreto reforzado durante muchos años.

Recientemente se ha renovado el interés en la teoría de la resistencia máxima como base del diseño. Después de más de medio siglo de experiencia práctica y pruebas de laboratorio, conocemos mejor el comportamiento del concreto estructural, a la vez que se han manifestado las deficiencias del método de diseño de la teoría elástica (esfuerzo de trabajo). Esto ha dado como resultado un ajuste periódico al método de diseño por esfuerzo de trabajo, aunque cada vez es más evidente que el método de diseño se debe basar en las propiedades inelásticas reales del concreto y del acero. Por tanto, el diseño basado en la resistencia máxima se aceptó como una alternativa al diseño por esfuerzo de trabajo en los códigos de construcción para el concreto reforzado del Instituto Norteamericano del Concreto (ACI) en 1956 y del Reino Unido en 1957. Se pueden resumir estos dos enfoques del diseño como sigue:

Diseño por esfuerzo de trabajo (teoría elástica)

Las secciones de los miembros de la estructura se diseñan suponiendo una variación lineal para la relación esfuerzo - deformación lo que asegura que bajo las cargas de servicio los esfuerzos del acero y del concreto no exceden los esfuerzos permisibles de trabajo. Los esfuerzos permisibles se consideran como fracciones fijas de la resistencia máxima o de la resistencia de cedencia de los materiales; por ejemplo, para la compresión por flexión se puede suponer 0.45 de la resistencia de cilindro del concreto. Los momentos flexionantes y fuerzas que actúan en las estructuras estáticamente indeterminadas se calculan suponiendo comportamiento elástico lineal.

Diseño por resistencia máxima

Las secciones de los miembros de las estructuras se diseñan tomando en cuenta las deformaciones inelásticas para alcanzar la resistencia máxima (o sea el concreto a la resistencia máxima y generalmente el acero en cedencia) cuando se aplica una carga máxima a la estructura, igual a la suma de cada carga de servicio multiplicada por su factor respectivo de carga. Los factores típicos de carga utilizados en la práctica son 1.4 para la carga muerta y 1.7 para la carga viva. Los momentos flexionantes y fuerzas que actúan en las estructuras estáticamente indeterminadas bajo carga máxima se calculan suponiendo comportamiento elástico lineal de la estructura hasta la carga máxima. En forma alterna, los momentos flexionantes y fuerzas se calculan tomando parcialmente en cuenta la redistribución de las acciones que pueden ocurrir debido a las relaciones no lineales entre las acciones y deformaciones en los miembros bajo cargas elevadas.

Algunas de las razones para la tendencia hacia el diseño por resistencia máxima son las siguientes:

1. Las secciones de concreto reforzado se comportan inelásticamente bajo cargas elevadas, en consecuencia, la teoría elástica no puede dar una predicción segura de la resistencia máxima de los miembros, ya que las deformaciones inelásticas no se toman en consideración; en consecuencia, para las estructuras diseñadas por el método del esfuerzo de trabajo, se desconoce el factor exacto de carga (carga máxima/carga de servicio), el que varía de estructura a estructura.

2. El diseño por resistencia última permite una selección más racional de los factores de carga. Por ejemplo, se puede utilizar un factor de carga bajo para cargas conocidas con mayor precisión, tales como cargas muertas, y un factor de carga más elevado para cargas conocidas con menos precisión, las cargas vivas por ejemplo.

3. La curva esfuerzo-deformación para el concreto es no lineal y depende del tiempo. Por ejemplo, las deformaciones por flujo plástico para el concreto bajo esfuerzo sostenido constante pueden ser varias veces mayores que la deformación elástica inicial. En consecuencia, el valor de la relación modular (relación del módulo elástico del acero al del concreto) utilizada en el diseño por esfuerzo de trabajo es una aproximación burda. Las deformaciones por flujo plástico pueden provocar una redistribución apreciable del esfuerzo en las secciones de concreto reforzado, lo que implica que los esfuerzos que existen realmente bajo cargas de servicio a menudo tienen poca relación con los esfuerzos de diseño. Por ejemplo, el acero de compresión en las columnas puede alcanzar la resistencia de cedencia durante la aplicación prolongada de cargas de servicio, aunque este efecto no es evidente del análisis elástico si se utilizan los valores recomendados normalmente para la relación modular. El diseño por resistencia máxima no requiere conocer la relación modular.

4. El diseño por resistencia máxima utiliza reservas de resistencia resultantes de una distribución más eficiente de los esfuerzos permitidos por las deformaciones inelásticas, y en ocasiones indica que el método elástico es muy conservador. Por ejemplo, el acero de compresión en las vigas doblemente reforzadas por lo general alcanza la resistencia de cedencia bajo carga máxima, y sin embargo, la teoría elástica puede indicar un esfuerzo bajo en este acero.

5. El diseño por resistencia máxima utiliza con mayor eficiencia el refuerzo de alta resistencia, y se pueden utilizar peraltes más pequeños en vigas sin acero de compresión.

6. El diseño por resistencia máxima permite al diseñador evaluar la ductilidad de la estructura en el rango inelástico. Este es un aspecto importante cuando se considera la redistribución posible de los momentos de flexión en el diseño por cargas de gravedad y en el diseño por cargas sísmicas o de explosiones.

1.2 DISEÑO POR RESISTENCIA Y SERVICIO

En fechas más recientes se ha reconocido que el enfoque de diseño para el concreto reforzado debe idealmente combinar las mejores características de los diseños por resistencia máxima y por esfuerzo de trabajo, ya que, si solamente se proporcionan las secciones por los requerimientos de resistencia máxima, hay el peligro de que aunque el factor de carga sea adecuado, el agrietamiento y las deflexiones bajo cargas de servicio puedan ser excesivas. El agrietamiento puede ser excesivo si los esfuerzos en el acero son elevados o si las varillas están mal distribuidas. Las deflexiones

pueden ser críticas si se utilizan secciones de poco peralte, las que son posibles en el diseño por resistencia máxima, junto con esfuerzos elevados. En consecuencia, para garantizar un diseño satisfactorio, se deben comprobar los anchos de las grietas y las deflexiones bajo cargas de servicio para asegurar que estén dentro de valores límites razonables, dictados por los requerimientos funcionales de la estructura. Esta comprobación requiere utilizar la teoría elástica.

En 1964, el Comité Europeo del Concreto dio sus recomendaciones para un código internacional de práctica para el concreto reforzado. Este documento presentó el concepto de diseño por estado límite, proponiendo que la estructura se diseñe con referencia a varios estados límites. Los estados límites más importantes son: resistencia bajo carga máxima, deflexiones y anchos de grietas bajo carga de servicio. Este enfoque está adquiriendo aceptación en muchos países. En consecuencia, la teoría de la resistencia máxima está convirtiendose en el enfoque prodominante para dimensionar las secciones, utilizando la teoría elástica solamente para asegurar el servicio. También cabe notar que la teoría de la resistencia máxima se ha utilizado para proporcionar secciones en la URSS y en algunos otros países europeos desde hace varios años. Es probable que el uso del diseño por resistencia máxima se siga extendiendo, y parece que no transcurrirán muchos años antes de que se siga el ejemplo del Comité Europeo del Concreto y que desaparezca el método del esfuerzo de trabajo de los códigos de construcción para el concreto reforzado.

Los códigos de construcción de 1956 y 1963 del Instituto Norteamericano del Concreto permitían utilizar el método del esfuerzo de trabajo o el de la resistencia máxima. En cambio, el código[1.2] de 1971 del ACI enfatiza el diseño en base a la resistencia con comprobaciones por servicio. Sin embargo, el código de 1971 también permite otro método de diseño en que se utiliza el esfuerzo de trabajo para diseñar vigas en flexión y ecuaciones de resistencia máxima factorizadas para diseñar miembros para las demás acciones. Es evidente que la única razón de permitir este método alterno ha sido el tratar de mantenerse dentro del marco general del diseño convencional. En este sentido, es probable que los códigos futuros del ACI omitan completamente este procedimiento alterno. También es interesante notar un cambio en la terminología en el código del ACI de 1971. Rara vez aparece la palabra "máxima". Por ejemplo, se escribe la palabra "resistencia" en vez de "resistencia máxima."

En este libro se adopta el enfoque de la resistencia y servicio del código de 1971 del ACI, debido a que se considera que enfatiza el comportamiento real del concreto reforzado y que es el enfoque más lógico para el diseño. Siempre que es posible, se describen los fundamentos de las recomendaciones del código ACI. Cuando es necesario, se suplementan las recomendaciones del código a la luz de nuevos resultados de investigación de que se dispone, y se proporciona cierta comparación con otros códigos.

1.3 METODO DE DISEÑO POR RESISTENCIA Y SERVICIO DEL ACI

1.3.1 Recomendaciones sobre resistencia

El código[1.2] del ACI de 1971 separa las recomendaciones de resistencia para la seguridad estructural en dos partes: factores de carga y factores de reducción de capacidad.

Factores de carga

Los factores de carga tienen el propósito de dar seguridad adecuada contra un aumento en las cargas de servicio más allá de las especificadas en el diseño para que sea sumamente improbable la falla. Los factores de carga también ayudan a asegurar que las deformaciones bajo las cargas de servicio no sean excesivas. Los factores de carga utilizados para carga muerta, carga viva, presión lateral de la tierra y de fluidos, cargas de viento y sismos, difieren en magnitud. Los factores de carga son distintos para diversos tipos de cargas debido a que, por ejemplo, es menos probable que la carga muerta de una estructura se exceda que la carga viva indicada. La carga máxima de la estructura debe ser igual por lo menos a la suma de cada carga de servicio multiplicada por su factor respectivo de carga. El código ACI de 1971 recomienda que la resistencia requerida U para resistir la carga muerta D y la carga viva L sea por lo menos igual a

$$U = 1.4D + 1.7L \tag{1.1}$$

Cuando se necesita considerar la carga de viento W en el diseño, la resistencia requerida U debe ser por lo menos igual a

$$U = 0.75(1.4D + 1.7L + 1.7W) \tag{1.2}$$

en que se deben considerar los casos en que L adquiera su valor total o cero, y

$$U = 0.9D + 1.3W \tag{1.3}$$

cuando las acciones resultantes de D y W sean de signos opuestos. Si se necesita incluir la carga sísmica E, también se deben satisfacer las ecs. 1.2 y 1.3 sustituyendo $1.1E$ por W. En el código se proporcionan los requerimientos de resistencia para otros tipos de cargas.

En la forma indicada, los factores de carga no varían con la gravedad de la consecuencia de la falla. Por ejemplo, se podría esperar que el factor de carga utilizado en un hospital fuera mayor que el utilizado para una fábrica. Sin embargo, se supone que las cargas prescritas de servicio in-

cluyen el efecto de la gravedad de la falla. Sin embargo, los factores de carga establecidos deben considerarse como valores mínimos. Si las consecuencias de falla son especialmente graves o si no puede estimarse razonablemente la carga de servicio, es posible que sea conveniente emplear valores incrementados.

Factores de reducción de capacidad

Los factores de reducción de capacidad φ se proporcionan para tomar en cuenta inexactitudes en los cálculos y fluctuaciones en las resistencias del material, en la mano de obra y en las dimensiones. Cada uno de estos factores bien puede estar dentro de límites tolerables, pero combinados pueden producir menor capacidad en los elementos diseñados. La ecuación básica de resistencia para una sección puede decirse que da la resistencia ideal, siempre que la ecuación sea científicamente correcta, que los materiales tengan la resistencia especificada y que los tamaños sean como se muestran en los dibujos. La resistencia confiable de la sección a utilizar en los cálculos de diseño se considera como la resistencia ideal multiplicada por φ donde el valor del factor de reducción de capacidad φ depende de la importancia de las cantidades variables. Los valores recomendados por el código ACI de 1971 son:

flexión, con o sin tensión axial o tensión axial $\varphi = 0.90$
flexión con compresión axial o compresión axial:
si es reforzada con hélice $\varphi = 0.75$
en casos contrarios $\varphi = 0.70$
(se puede aumentar linealmente φ hasta 0.9
para secciones con compresión axial pequeña que
tienda a cero)
cortante y torsión $\varphi = 0.85$

En el código se dan otros valores.

Las variables adicionales que se han considerado para prescribir los factores de reducción de capacidad incluyen la seriedad de la consecuencia de la falla de los miembros respecto a toda la estructura, y el grado de advertencia implícito en el modo de falla. Las vigas tienen el más alto valor de φ debido a que están diseñadas para fallar en forma dúctil con cedencia del acero de tensión. Normalmente la advertencia de este tipo de falla se daría por considerable agrietamiento y grandes deflexiones, y ya que la variabilidad de la resistencia del acero es menor que la del concreto, se puede predecir con gran exactitud la resistencia a flexión. Las columnas tienen los valores más bajos de φ puesto que pueden fallar en modo frágil cuando la resistencia del concreto es el factor crítico. Adicionalmente, la falla de una columna puede significar el desplome de toda la estructura, y es difícil realizar la reparación de columnas. Las columnas reforzadas con hélice son más dúctibles que las de estribos, por lo que se les ha asignado un mayor valor de φ El valor de φ para cortante y torsión es intermedio,

ya que la contribución del concreto a la resistencia es menos crítica que en el caso de miembros a compresión y la teoría que predice la resistencia es menos exacta que la correspondiente a la de flexión.

La carga máxima en el diseño se calcula en base a la resistencia confiable. En base a la resistencia ideal, el factor global de seguridad para una estructura cargada por carga muerta y viva es

$$\frac{1.4D + 1.7L}{D + L}\frac{1}{\varphi} \tag{1.4}$$

El factor global de seguridad respecto a la resistencia ideal de la sección (en el caso de flexión, con o sin tensión axial) varía desde 1.56 para $L/D = 0$ hasta 1.82 para $L/D = 4$, en que el valor más alto se aplica apropiadamente a las condiciones de mayor carga viva. Para miembros con flexión y compresión axial, el factor global de seguridad varía entre 2.00 y 2.34 para L/D entre 0 y 4, lo que proporciona mayor seguridad global a un elemento estructural más crítico.

La resistencia ideal se calcula utilizando las resistencias especificadas del concreto y del acero. Debido a que estos valores de resistencia normalmente se exceden en una estructura real, se dispone de una reserva adicional de resistencia.

1.3.2 Recomendaciones sobre servicio

La evaluación del comportamiento de la estructura bajo carga de servicio es una consideración muy importante cuando los miembros se proporcionan en base a la resistencia requerida, lo que se debe a que los miembros con pequeñas secciones y secciones con poco acero de compresión, pueden satisfacer los requerimientos de resistencia, pero conducen a esfuerzos y deformaciones elevados bajo carga de servicio. En consecuencia, se debe verificar que las deflexiones bajo carga de servicio estén dentro de los límites aceptables. El control del agrietamiento también es muy importante para fines de apariencia y durabilidad. En consecuencia, los anchos de las grietas bajo carga de servicio no deben exceder los límites especificados. Es difícil especificar límites aceptables para las deflexiones y los anchos de grieta; no obstante, en el código del ACI de 1971[1.2] se proporcionan recomendaciones para ambos.

1.3.3 Recomendaciones sobre ductilidad

Una consideración importante adicional a la de resistencia y servicio es la de ductilidad. Es importante asegurar que en el caso extremo de que una estructura se cargue a la falla, ésta se comporte en forma dúctil. Esto significa asegurar que la estructura no falle en forma frágil sin advertencia, sino que sea capaz de sufrir grandes deformaciones bajo cargas cercanas la máxima. Estas grandes deflexiones dan amplia advertencia de falla, y

manteniendo la capacidad de transmisión de carga se puede impedir el desplome total y salvar vidas. Además el comportamiento dúctil de los miembros permite utilizar en el diseño redistribuciones de momentos flexionantes que toman en cuenta la redistribución posible del patrón de momentos elásticos a flexión.

En las áreas en que se requiere diseñar por carga sísmica, la ductilidad constituye una consideración de extrema importancia, debido a que la norma actual de los códigos para cargas sísmicas (v. gr. el código de Contrucción Uniforme[1.3] es diseñar estructuras que sólo resistan elásticamente los sismos moderados; en el caso de sismos intensos se confía en la disponibilidad de suficiente ductilidad después de la cedencia para permitir a la estructura sobrevivir sin desplome. En consecuencia, las recomendaciones para cargas sísmicas sólo se pueden justificar si la estructura tiene suficiente ductilidad para absorber y disipar energía mediante deformaciones inelásticas cuando ella se sujeta a cargas cíclicas.

Para asegurar el comportamiento dúctil, los diseñadores deben dar especial atención a los detalles, tales como cuantía de refuerzo longitudinal, anclaje del refuerzo y confinamiento del concreto comprimido, evitando así los tipos frágiles de falla (por ejemplo la falla debida a cortante). El código ACI de 1971[1.2] hace recomendaciones acerca de la cuantía de acero longitudinal que produce secciones dúctiles, a la vez que permite cierta redistribución de los momentos flexionantes del diagrama de momentos elásticos. Adicionalmente y por primera vez, el código incluye un apéndice que da recomendaciones especiales para el diseño sísmico.

1.4 CONSIDERACIONES SOBRE RESISTENCIA DE LOS MIEMBROS

1.4.1 Desarrollo de la resistencia de los miembros

A menudo en el diseño es necesario evaluar los límites posibles superio. e inferior de la resistencia probable de las componentes estructurales. Esto es lo que sucede cuando se quiere lograr una secuencia específica en la obtención de resistencia en los miembros de una estructura cargada a la falla. Por ejemplo, en una junta de viga-columna en un marco continuo, para evitar una falla de columna con sus posibles consecuencias catastróficas, siempre es conveniente que se desarrolle la resistencia de la viga antes que la resistencia de la columna. Evitar todos los tipos de falla no dúctil es una característica especial del diseño sísmico; consecuentemente, es importante conocer la variación posible de las resistencias problables de los miembros estructurales.

Las estructuras reales contienen variaciones en las resistencias del concreto y acero respecto de los valores especificados, y hay desviaciones

inevitables en las medidas especificadas debido a tolerancias constructivas. Por otra parte, se han hecho ciertas suposiciones en la deducción de las ecuaciones de la resistencia, por lo que es difícil calcular con exactitud la resistencia real de una estructura; sin embargo, es posible definir niveles de resistencia probable de los miembros, las que se pueden utilizar en distintos tipos de diseño. En las secciones siguientes se definen los niveles de resistencia ideal, resistencia confiable, resistencia probable y sobrerresistencia.

1.4.2 Resistencia ideal S_i

La resistencia ideal o nominal de una sección de un miembro S_i se obtiene teóricamente prediciendo el comportamiento de falla de la sección de la geometría supuesta de ésta y de las resistencias especificadas de los materiales. La mayor parte de este libro se ocupa de la deducción de la resistencia ideal, con la que se pueden relacionar en forma conveniente otros niveles de resistencia.

1.4.3 Resistencia confiable S_d

En las recomendaciones de resistencia descritas en la sección 1.3.1 se aclaró el propósito del factor φ de reducción de capacidad. El factor de reducción de capacidad permite relacionar la resistencia confiable S_d con la resistencia ideal mediante la expresión

$$S_d = \varphi S_i \tag{1.5}$$

en que φ. el factor de reducción de capacidad, es menor que 1.

1.4.4 Resistencia probable S_p

La resistencia probable S_p toma en consideración que las resistencias de los materiales generalmente son mayores que las resistencias especificadas. Por ejemplo, la resistencia de cedencia del acero puede ser hasta 20% mayor que la especificada, y la del concreto hasta 30% o incluso superior a una edad mayor o si el material se comprime triaxialmente. Mediante pruebas rutinarias se pueden obtener las resistencias probables de los materiales, pruebas que normalmente se desarrollan durante la construcción de la estructura. Si la información se requiere en la etapa de diseño ésta se debe basar en la experiencia previa tenida con los materiales. Se puede relacionar la resistencia probable con la resistencia ideal mediante la expresión

$$S_p = \varphi_p S_i \tag{1.6}$$

en que φ_p es el factor de resistencia probable que toma en consideración el hecho de que los materiales sean más fuertes que los especificados y es mayor que 1.

1.4.5 Sobrerresistencia S_o

La sobrerresistencia S_o toma en cuenta todos los factores posibles que pueden provocar aumentos de resistencia; éstas incluyen una resistencia del acero más elevada que la de cedencia especificada más la resistencia adicional del acero debida al endurecimiento por deformación bajo grandes deformaciones, una resistencia del concreto más elevada que la especificada, tamaños de secciones más grandes que los supuestos, compresión axial en los miembros a flexión debida a restricción lateral, y refuerzo adicional impuesto para fines constructivos y que no se toma en cuenta en los cálculos. Se puede relacionar la sobrerresistencia con la resistencia ideal mediante la expresión

$$S_o = \varphi_o S_i \tag{1.7}$$

en que φ_o es el factor de sobrerresistencia que toma en consideración todas las fuentes de aumento de resistencia y es mayor que 1.

1.4.6 Relaciones entre distintas resistencias

El más alto nivel de protección para asegurar que la componente *A*, que recibe carga de la componente *B*, no falle antes de que se desarrolle la resistencia de la componente *B*, se obtiene cuando la resistencia confiable de la componente *A* excede la sobrerresistencia de la componente *B*, $S_{dA} \geqslant S_{oB}$. La relación $S_{iA} \geqslant S_{oB}$, proporciona un nivel más bajo de protección y la relación $S_{pA} \geqslant S_{oB}$. proporciona un nivel todavía más bajo de protección. La mejor forma de expresar el grado de protección que dan estos casos es mediante la relación de las resistencias probables, S_{pA}/S_{pB}, de las dos componentes. Para los anteriores niveles de protección, de alto a bajo, se encuentra a partir de las ecuaciones 1.5 a 1.7 que:

$$\frac{S_{dA}}{S_{oB}} = \frac{\varphi_A S_{pA}/\varphi_{pA}}{\varphi_{oB} S_{pB}/\varphi_{pB}} \geqslant 1 \quad \therefore \quad \frac{S_{pA}}{S_{pB}} \geqslant \frac{\varphi_{pA}\varphi_{oB}}{\varphi_{pB}\varphi_A} \tag{1.8a}$$

$$\frac{S_{iA}}{S_{oB}} = \frac{S_{pA}/\varphi_{pA}}{\varphi_{oB} S_{pB}/\varphi_{pB}} \geqslant 1 \quad \therefore \quad \frac{S_{pA}}{S_{pB}} \geqslant \frac{\varphi_{pA}\varphi_{oB}}{\varphi_{pB}} \tag{1.8b}$$

$$\frac{S_{pA}}{S_{oB}} = \frac{S_{pA}}{\varphi_{oB} S_{pB}/\varphi_{pB}} \geqslant 1 \quad \therefore \quad \frac{S_{pA}}{S_{pB}} \geqslant \frac{\varphi_{oB}}{\varphi_{pB}} \tag{1.8c}$$

Por ejemplo, si $\varphi_A = 0.9$, $\varphi_{pA} = \varphi_{pB} = 1.1$, y $\varphi_{oB} = 1.3$, las relaciones de la resistencia probable de la componente *A* a la resistencia probable de la componente *B* necesarias para asegurar que la componente *B* no falle son $(1.1 \times 1.3)/(1.1 \times 0.9) = 1.44$, $1.1 \times 1.3/1.1 = 1.30$, y $1.3/1.1 = 1.18$, de acuerdo con las ecuaciones 1.8a, 1.8b y 1.8c respectivamente, que indican los distintos niveles de protección para la componente *B*.

1.5 BIBLIOGRAFIA

1.1 CEB, "Recommendations for an International Code of Practice for Reinforced Concrete," Comité Européen du Beton (CEB), París, 1964. (La Cement and Concrete Association de Londres dispone de una traducción al ingles)
1.2 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinfored Concrete (ACI 318-71)." American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.
1.3 ICBO, "Uniform Building Code," edición 1970, Vol. 1, International Conference of Building Officials, Pasadena, Calif., pág. 651 pp.

2

Relaciones esfuerzo-deformación para el concreto y el acero

2.1 CONCRETO

2.1.1 Comportamiento bajo esfuerzo uniaxial.

Bajo condiciones prácticas, en raras ocasiones se esfuerza al concreto en sólo una dirección (esfuerzo uniaxial), esto es en la mayoría de los casos estructurales se esfuerza simultáneamente al concreto en varias direcciones. Sin embargo, hay casos en que se puede justificar el suponer una condición de esfuerzo uniaxial.

Comportamiento del esfuerzo de compresión

Por lo general la resistencia a compresión del concreto se obtiene de cilindros con una relación de altura a diámetro igual a 2. Los cilindros se cargan longitudinalmente a una tasa lenta de deformación para alcanzar la deformación máxima en 2 ó 3 minutos. El cilindro estándar normal tiene 12 plg (305 mm) de altura por 6 plg (152 mm de diámetro y la resistencia a compresión que se logra a los 28 días generalmente varía entre 2000 y 8000 lb/plg^2(13.8 a 55.2 N/mm). También se utilizan cilindros o cubos de tamaños más pequeños, en especial para el control de producción, y la resistencia a compresión de estas unidades es más alta. Con los factores apropiados de conversión obtenidos de pruebas, se pueden convertir los resultados a valores de resistencia de cilindro estándar equivalentes.

La figura 2.1 presenta curvas típicas esfuerzo - deformación obtenidas de cilindros de concreto cargados en compresión uniaxial en una prueba desarrollada durante varios minutos. Las curvas casi son lineales hasta aproximadamente un medio de la resistencia a compresión. El pico de la curva para concreto de alta resistencia es relativamente agudo, pero para concreto de baja resistencia la curva tiene un copete plano. La deformación en el esfuerzo máximo es aproximadamente 0.002. A deformaciones más elevadas, después de alcanzarse el esfuerzo máximo, todavía

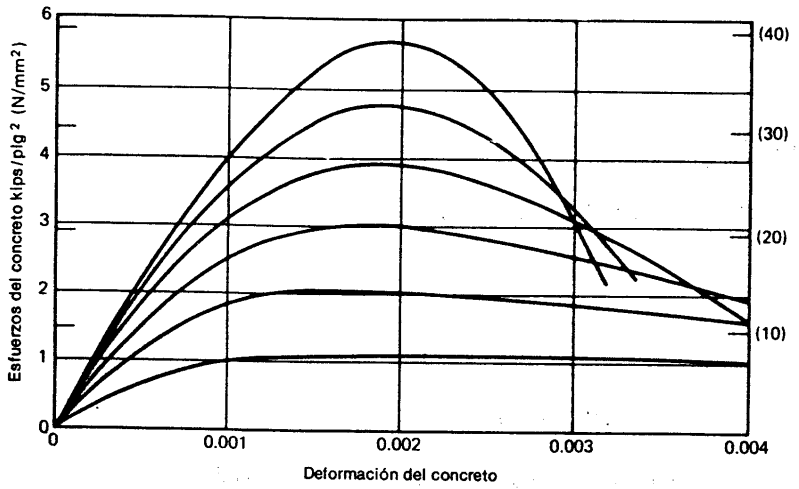


Figura 2.1. Curvas esfuerzo-deformación para cilindros de concreto cargados en compresión uniaxial.

pueden transmitirse esfuerzos aunque se hacen visibles en el concreto grietas paralelas a la dirección de la carga. El concreto probado en máquinas flexibles de prueba a veces falla explosivamente debido a que no puede absorber la liberación de energía de deformación de la máquina de prueba cuando la carga disminuye después del esfuerzo máximo. Para poder trazar la extensión total de la rama descendente de la curva de esfuerzo - deformación se necesita utilizar una máquina dura de pruebas.

El módulo de elasticidad para el concreto E_c se puede tomar como[2.1]

$$E_c = w^{1.5} 33 \sqrt{f'_c} \text{ lb/pgl}^2 \qquad (2.1)$$

(1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2), en que w es la densidad del concreto en libras por pie cúbico (1 lb/p^3 = 16.02 kg/m^3) y f'_c es la resistencia a compresión de cilindro en lb/plg^2. Pauw[2.2] determinó la ecuación 2.1, que es la de pruebas con cargas de corta duración y que es válida para valores de w entre 90 y 155 lb/pie ; asimismo, esa ecuación da el módulo secante a un esfuerzo de aproximadamente $0.5f'_c$. Para concreto de peso normal, se puede considerar que E_c es $57{,}000\sqrt{f'_c}$ lb/plg ó $4730\sqrt{f'_c}$ N/mm^2.

Las pruebas de Rüsch[2.3] han indicado que el perfil de la curva esfuerzo deformación antes del esfuerzo máximo depende de la resistencia del concreto (fig. 2.2). Sin embargo, una aproximación muy usada para el perfil de la curva esfuerzo deformación antes del esfuerzo máximo es una parábola de segundo grado. Por ejemplo, en la fig. 2.3 se muestra la curva esfuerzo deformación citada frecuentemente debida a hognestad[2.4], en que f''_c es el esfuerzo máximo alcanzado en el concreto. El grado de comportamiento de la rama descendente depende del límite de la deformación

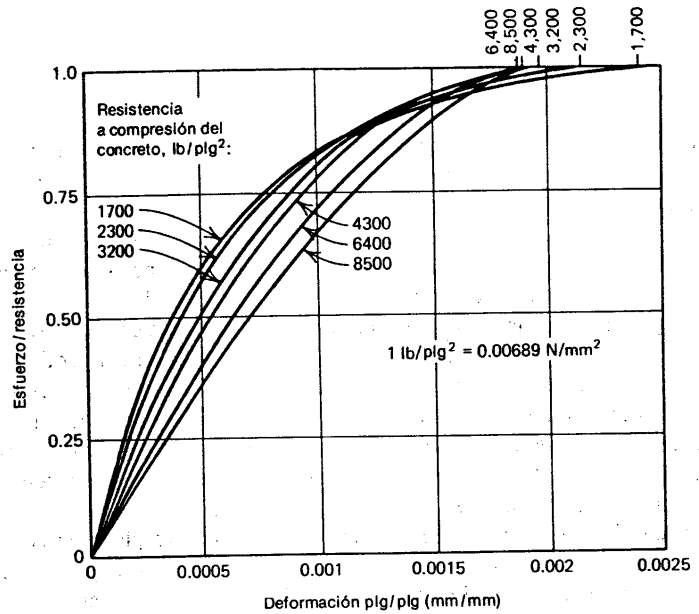


Figura 2.2. Relación entre la relación esfuerzo a resistencia y la deformación para concretos de distintas resistencias.[2.3]

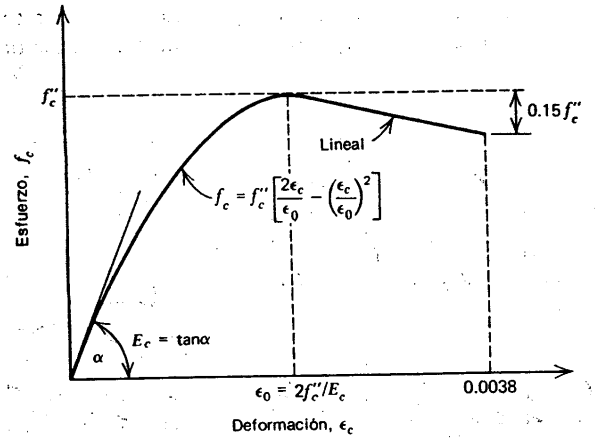


Figura 2.3. Curva idealizada esfuerzo deformación para el concreto en compresión uniaxial [2.4]

útil del concreto supuesta. Esta aspecto se estudia más extensamente en los capítulos 3 y 6 con relación a los cálculos para la resistencia a flexión y deformaciones máximas de los miembros. El esfuerzo máximo a compresión alcanzado en el concreto de un miembro a flexión f_c'' puede diferir de la resistencia f_c' del cilindro debido a la diferencia en el tamaño y forma del concreto comprimido. En el capítulo 3 se estudia más ampliamente la resistencia del concreto en miembros con flexión.

Cuando la carga se aplica con una tasa rápida de deformación aumentan tanto el módulo de elasticidad como la resistencia del concreto. Por ejemplo, se ha reportado[2.5] que para una tasa de deformación de 0.01/seg. la resistencia del concreto puede elevarse hasta en un 17%.

Las cargas repetidas a compresión de elevada intensidad producen un efecto pronunciado de histéresis en la curva esfuerzo-deformación. La figura 2.4 da los datos de prueba obtenidos por Sinha, Gerstle, y Tulin [2.6] para tasas lentas de deformación. Esas pruebas, y las de Karsan y Jirsa [2.7] indicaron que la curva envolvente era casi idéntica a la curva obtenida de una sola aplicación continua de carga.

Rüsch[2.8], quien desarrolló pruebas de carga a largo plazo en concreto no confinado, encontró que la resistencia a compresión bajo una carga sostenida equivale aproximadamente al 80% de la resistencia a corto plazo, en que la resistencia a corto plazo es la de un espécimen de igual edad y colado idénticamente que se carga a la falla en un periodo de 10 minutos cuando ha fallado el espécimen bajo carga sostenida. En la práctica, generalmente las resistencias del concreto consideradas en el diseño de estructuras se basan en la resistencia anticipada a corto plazo a 28 días. La reducción en la resistencia debido a la carga a largo plazo está parcialmente compensada cuando menos, por la propiedad del concreto de alcanzar una mayor resistencia a mayores edades. Además, el factor φ de re-

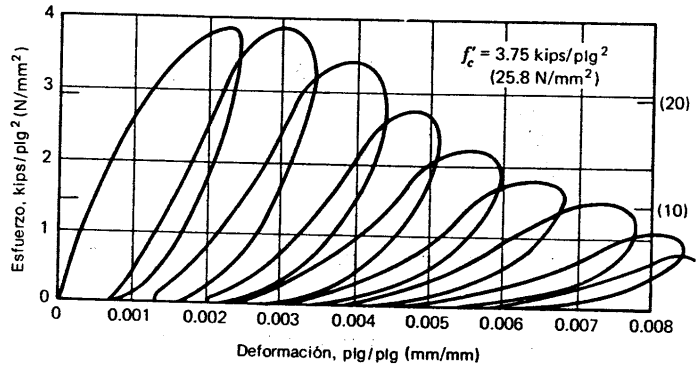


Figura 2.4. Curvas esfuerzo-deformación para cilindros de concreto con carga cíclica de compresión axial repetida de alta intensidad.[2.6]

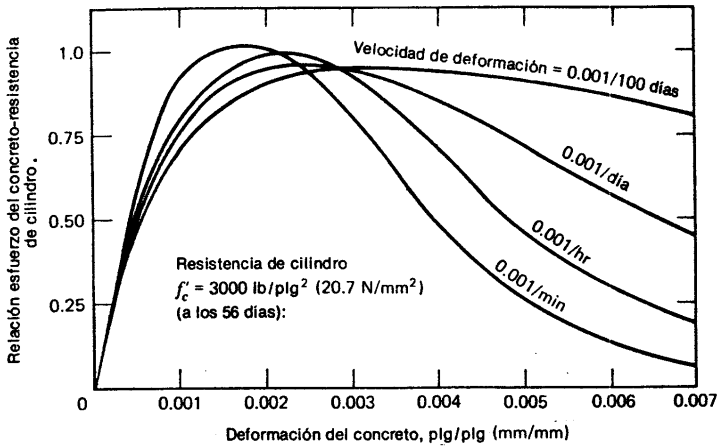


Figura 2.5. Curvas esfuerzo-deformación para concreto con distintas tasas de carga axial de compresión.[2.8]

ducción de capacidad es bajo cuando la resistencia a compresión del concreto es crítica. Las deformaciones de flujo plástico debidas a las cargas a largo plazo provocan modificaciones en la forma de la curva esfuerzo deformación. Algunas curvas que obtuvo Rüsch[2.8] para distintas tasas de cargas (fig. 2.5) indican que con una tasa decreciente de deformación unitaria, el valor del esfuerzo máximo alcanzado disminuye gradualmente, la rama descendente de la curva cae menos rápidamente y la deformación a la que se alcanza el esfuerzo máximo aumenta.

Comportamiento del esfuerzo de tensión

Es posible obtener directamente de los especímenes a tensión la resistencia a tensión del concreto, que generalmente es el 20% o menor que la resistencia a la compresión. Sin embargo, debido a las dificultades experimentales de lograr la tensión axial en los especímenes y a las incertidumbres respecto de los esfuerzos secundarios inducidos por los dispositivos de sujeción, rara vez se utiliza la prueba a tensión directa, incluso para propósitos de investigación.

Es posible medir de manera indirecta la resistencia a tensión del concreto en términos del esfuerzo calculado de tensión a que se rompe un espécimen colocado horizontalmente en una máquina de prueba y cargado a lo largo de un diámetro (prueba brasileña). En la figura 2.6 se muestra el método de prueba y los esfuerzos inducidos a lo largo del diámetro cargado, mismos que se obtienen de acuerdo con la teoría de elasticidad. El esfuerzo de ruptura de tensión a través del diámetro se encuentra de la relación $2P/(\pi hd)$, en que P es la carga aplicada durante la ruptura h la lon-

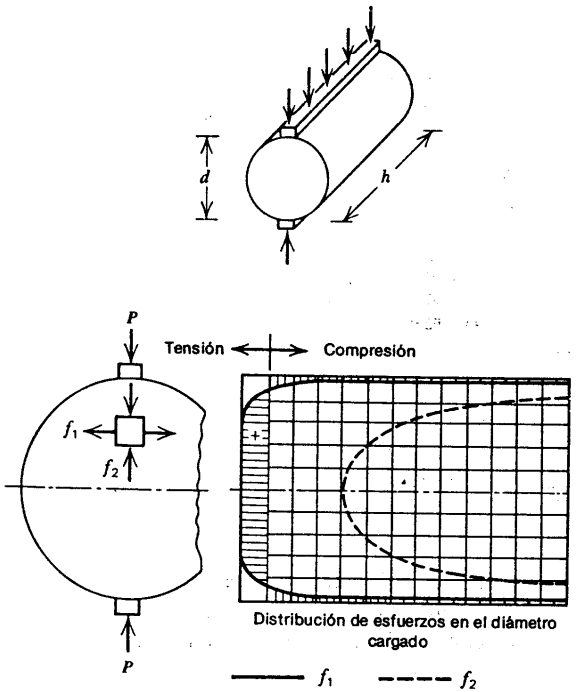


Figura 2.6. Prueba brasileña para la resistencia a tensión.

gitud del cilindro, y d el diámetro del mismo.

También es posible evaluar la resistencia a tensión del concreto por medio de pruebas de flexión realizadas en vigas de concreto simple. Normalmente las vigas tienen una sección transversal cuadrada de 6 plg (150 mm) por lado. La resistencia a tensión en flexión, conocida como el módulo de ruptura f_r se calcula de la fórmula de flexión M/Z, en que M es el momento flexionante en el momento de la falla del espécimen y Z es el módulo de sección de la sección transversal. Por lo general la resistencia a tensión de cilindro obtenida en la prueba brasileña va de 50 a 75% del módulo de ruptura. La diferencia se debe primordialmente a que la distribución de esfuerzos en el concreto del miembro a flexión no es lineal cuando la falla es inminente. Una relación aproximada para el módulo de ruptura es

$$f_r = K\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \qquad (2.2)$$

en que f'_c es la resistencia del cilindro en lb/plg^2 (1 lb/plg^2/ = 0.00689 N/m^2). La K para concreto de arena y grava puede variar entre 7 y 13;

a menudo se supone un límite inferior de $K=7.5$. Es evidente que a un aumento en la resistencia a compresión no le acompaña un aumento correspondiente proporcional del módulo de ruptura.

Debido a la baja resistencia a tensión del concreto, generalmente se desprecia el concreto a tensión en los cálculos de resistencia de los miembros de concreto reforzado. Sin embargo, cuando se toma en cuenta, la curva esfuerzo deformación por tensión se puede idealizar como una línea recta hasta la resistencia a tensión. Dentro de este rango se puede suponer que el módulo de elasticidad en tensión es el mismo que a compresión.

Relación de Poisson

Por lo general se encuentra que la relación entre la deformación transversal y la deformación en la dirección de la carga uniaxial aplicada, conocida como la relación de Poisson, oscila de 0.15 a 0.20 para el concreto. Sin embargo, se han determinado valores de 0.10 y 0.30. No parece existir información segura relativa a la variación de la relación de Poisson con las propiedades del concreto, aunque generalmente es común considerar que esta relación es más baja para el concreto de alta resistencia.

A esfuerzos elevados de compresión las deformaciones transversales aumentan rápidamente, debido al agrietamiento interno paralelo a la dirección de carga dentro del espécimen. En la figura 2.7 están graficadas las deformaciones medidas en un espécimen probado hasta la falla. El volumen del espécimen disminuye durante casi todo el rango de carga; sin embargo, a esfuerzos próximos a la resistencia a compresión del espécimen, las deformaciones transversales son tan elevadas que el volumen del espécimen comienza a aumentar, lo que indica el agotamiento de la resis-

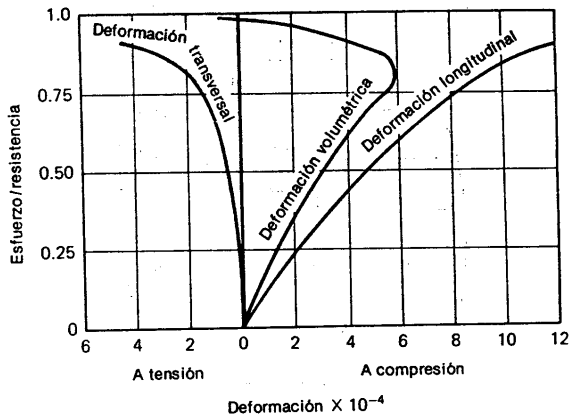


Figura 2.7. Deformaciones medidas en un espécimen de concreto cargado uniaxialmente a compresión.

tencia. La falla de un espécimen cargado uniaxialmente en compresión, por lo general está acompañada por desgajamiento en la dirección paralela a la carga y un aumento de volumen.

2.1.2 Comportamiento bajo esfuerzos combinados

En muchas estructuras se sujeta al concreto a esfuerzos directos y cortantes que actúan en varias direcciones. Considerando el equilibrio de las fuerzas que actúan en un elemento de concreto, se demuestra (v. gr., vea Popov[2.9]) que se puede reducir cualquier condición de esfuerzos combinados a tres esfuerzos normales que actúan en tres planos mutuamente perpendiculares. Estos tres esfuerzos normales son los esfuerzos principales, y los esfuerzos cortantes que actúan en estos planos son cero.

A pesar de considerable investigación, todavía no se ha desarrollado una teoría inobjetable para la resistencia a la falla del concreto para el caso general de estado tridimensional de esfuerzos. Se ha intentado hacer modificaciones a las teorías convencionales de resistencia de materiales, aunque no hay una sola teoría exactamente aplicable a todos los casos. Sin embargo, en muchas aplicaciones una de las teorías más simples de falla no es lo suficientemente exacta.

Comportamiento del esfuerzo biaxial

Una condición de esfuerzo biaxial ocurre si los esfuerzos principales sólo actúan en dos direcciones; es decir que los esfuerzos actúan en un plano y el tercer esfuerzo principal es cero. La figura 2.8 presenta las combinaciones de esfuerzo normal en dos direcciones que provocaron falla, como

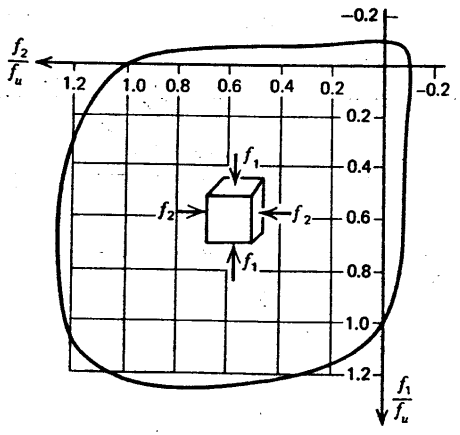


Figura 2.8. Resistencia biaxial del concreto, f_u = resistencia uniaxial.[2.10]

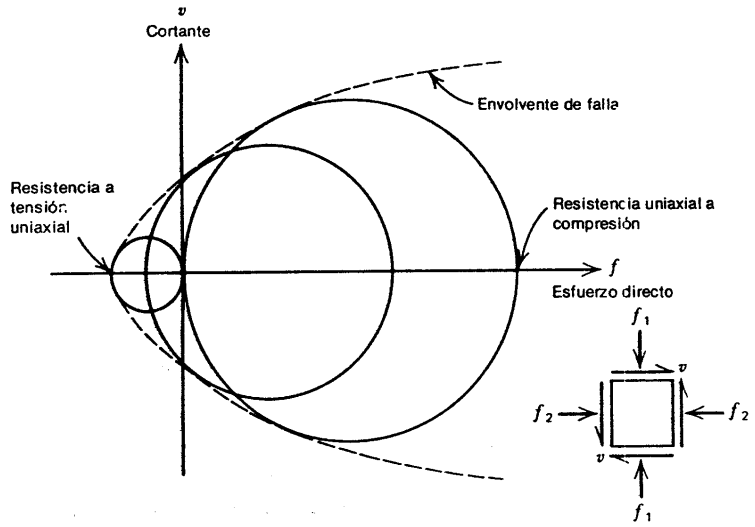


Figura 2.9. Resistencia del concreto bajo un sistema general de esfuerzo plano.

encontraran Kupfer, Hilsdorf y Rüsch.[2.10] Estos investigadores llegaron a la conclusión de que la resistencia del concreto sujeto a compresión biaxial puede ser hasta 27% mayor que la resistencia uniaxial. Para esfuerzos biaxiales iguales de compresión el aumento de resistencia es aproximadamente 16%. La resistencia bajo tensión biaxial es aproximadamente igual a la resistencia a tensión uniaxial. Sin embargo, nótese que las cargas combinadas a tensión y compresión reducen tanto el esfuerzo de tensión como de compresión a la falla.

En planos distintos a los principales, los esfuerzos normales están acompañados por esfuerzos cortantes. La teoría[2.11] de falla de Mohr se ha utilizado para predecir la resistencia para este caso de esfuerzos combinados. La figura 2.9 indica cómo una familia de círculos de Mohr que representan condiciones de falla en tensión simple, compresión simple y otras combinaciones, se localizan dentro de una envolvente. Cualquier combinación de esfuerzos que tenga un círculo de Mohr tangente a esta envolvente, o que la intersecte, se puede considerar como una condición de falla.

En la figura 2.10 se muestra una curva de falla para elementos con esfuerzo normal en una dirección combinados con esfuerzos cortantes, tal como la encontraron Bresler y Pister.[2.12] La curva indica que la resistencia a compresión del concreto se reduce en presencia de esfuerzos cortantes. Por ejemplo, esta condición puede influir en la resistencia del concreto en la zona a compresión de vigas y columnas cuando hay cortante.

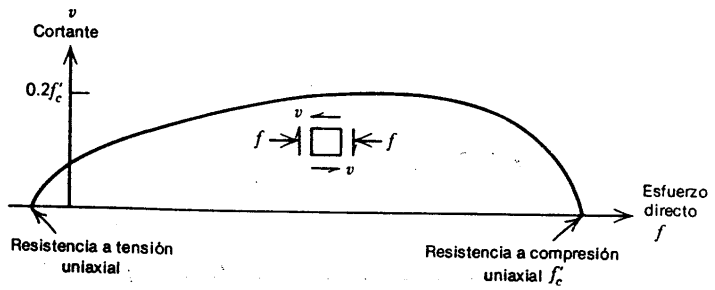


Figura 2.10. Combinaciones de esfuerzo normal y cortante que provocan la falla del concreto.

Comportamiento del esfuerzo de compresión triaxial

La resistencia y ductilidad del concreto se aumenta considerablemente bajo condiciones de compresión triaxial. Richart, Brandtzaeg y Brown [2.13] encontraron la siguiente relación para la resistencia de cilindros de concreto cargados axialmente a la falla mientras se les sujetó a presión de fluido de confinamiento

$$f'_{cc} = f'_c + 4.1f_l \tag{2.3}$$

en que f'_{cc} = resistencia a compresión axial del espécimen confinado
f'_c = resistencia a compresión uniaxial del espécimen no confinado
f_l = presión de confinamiento lateral.

Otras pruebas efectuadas por Balmer [2.14] han dado valores para el coeficiente de esfuerzo lateral que van desde 4.5 hasta 7.0 con un valor promedio de 5.6, en vez del de 4.1 que encontraron Richart y otros. Los valores elevados para el coeficiente ocurrieron a bajas presiones laterales.

La figura 2.11 muestra las curvas esfuerzo deformación axial que obtuvieron Richart y otros [2.13] para las pruebas de compresión triaxial efectuadas en cilindros de concreto. Los cilindros se confinaron lateralmente mediante presión de un fluido. Para cada curva se mantuvo constante la presión del fluido mientras se aumentaba el esfuerzo de compresión axial hasta la falla y se medían las deformaciones axiales. Las pruebas se realizaron a corto plano. Es evidente que un aumento en la presión lateral produce aumentos muy significativos en ductilidad al igual que en resistencia. Este efecto se debe a la presión lateral que confina al concreto y reduce la tendencia al agrietamiento interno y al aumento en el volumen hasta poco antes de la falla.

2.1.3 Confinamento del concreto por el refuerzo

En la práctica, se puede confinar al concreto mediante refuerzo transversal, comúnmente en forma de hélices o aros de acero espaciados a poca

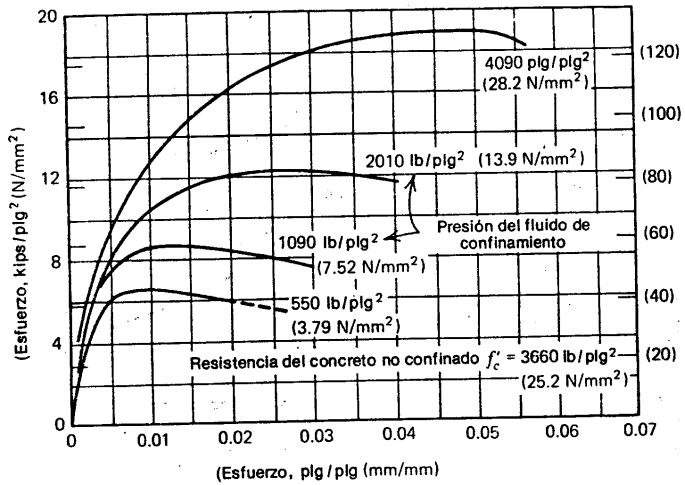


Figura 2.11. Curvas esfuerzo-deformación de pruebas de compresión triaxial en cilindros de concreto. [2.13]

distancia. En este caso, a bajos niveles de esfuerzo en el concreto, el refuerzo transversal apenas se esfuerza; en consecuencia, el concreto no está confinado. El concreto queda confinado cuando a esfuerzos que se aproximan a la resistencia uniaxial, las deformaciones transversales se hacen muy elevadas debido al agrietamiento interno progresivo y el concreto se apoya contra el refuerzo transversal, el que entonces aplica una reacción de confinamiento al concreto. En consecuencia, el refuerzo transversal proporciona confinamiento pasivo; las pruebas realizadas por muchos investigadores, han demostrado que el confinamiento por el refuerzo transversal puede mejorar considerablemente las características esfuerzo deformación del concreto a deformaciones elevadas. Por ejemplo, Richart y otros autores [2.15] encontraron que la ecuación 2.3 para la resistencia del concreto confinado por la presión de un fluido, se aplica aproximadamente al concreto confinado por hélices. La figura 2.12 muestra curvas esfuerzo deformación obtenidas de tres conjuntos de cilindros de concreto confinados por hélices que probaron Iyengar y otros. [2.16] Cada conjunto tenía una resistencia no confinanda distinta del concreto. Es muy apreciable el aumento en la resistencia y ductilidad con la cuantía del acero de confinamiento. Las pruebas han demostrado que las hélices confinan al concreto con mucha mayor eficiencia que los aros rectangulares o cuadrados. En la figura 2.13 tenemos curvas carga deformación para prismas de concreto, que probaron Bertero y Felippa, [2.17] que contenían distintas cantidades de estribos cuadrados. El efecto de la distinta cuantía de acero transversal en la ductilidad es bastante apreciable, aunque el efecto en la resistencia es mucho menor.

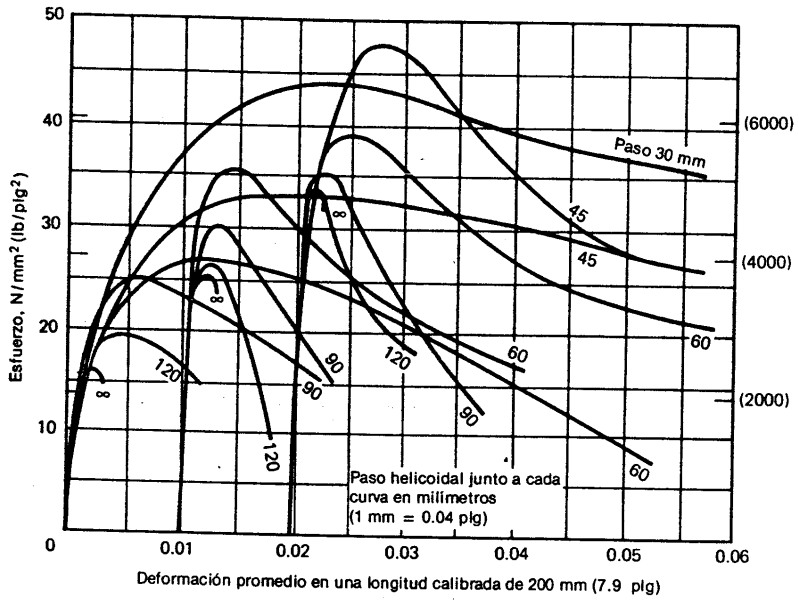


Figura 2.12. Curvas esfuerzo-deformación para cilindros de concreto de 150 mm (5.9 plg) de diámetro por 300 mm (11.8 plg) de altura, confinados por hélices de varillas de acero suave de 6.5 mm (0.26 plg) de diámetro.[2.16]

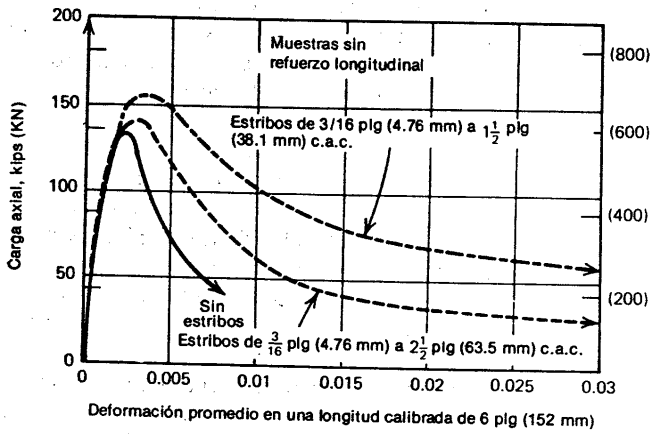


Figura 2.13. Curvas carga axial-deformación para prismas cuadrados de concreto de 4 1/2 plg (108 mm) por lado con distinto contenido de estribos cuadrados.[2.17]

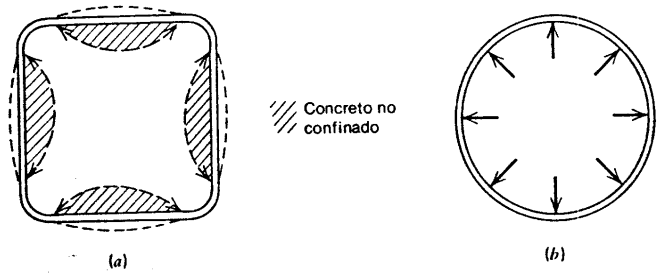


Figura 2.14 Confinamiento por aros cuadrados y hélices (a) aro cuadrado, (b) hélice

La causa de la considerable diferencia entre el confinamiento por hélices de acero y el confinamiento por los aros rectangulares o cuadrados de acero está ilustrada en la figura 2.14. Debido a su forma, las hélices están en tensión axial de aro y proporcionan una presión continua de confinamiento alrededor de la circunferencia, que a grandes deformaciones transversales se aproxima al confinamiento de un fluido. Sin embargo, como regla, los aros cuadrados sólo pueden aplicar reacciones de confinamiento cerca de las esquinas de los aros, debido a que la presión del concreto contra los lados de los aros tiende a flexionar los lados hacia afuera, como en la figura 2.14. En consecuencia, una porción considerable de la sección transversal del concreto puede no estar confinada. Debido al arqueo interno entre las esquinas, el concreto está confinado efectivamente sólo en las esquinas y en la región central de la sección. Sin embargo, el acero cuadrado de confinamiento sí produce un aumento significativo en la ductilidad y muchos investigadores han observado cierto aumento en la resistencia.

De las figuras 2.12 y 2.13 es evidente que el confinamiento por refuerzo transversal tiene poco efecto en la curva esfuerzo - deformación antes de que se alcance la resistencia uniaxial del concreto. El perfil de la curva de esfuerzo - deformación a deformaciones elevadas es una función de muchas variables, en que las principales son las siguientes:

1. La relación del volumen del acero transversal al volumen del núcleo del concreto, debido a que un elevado contenido de acero transversal involucra una elevada presión de confinamiento transversal.
2. La resistencia a la cedencia del acero transversal, puesto que esto proporciona un límite superior a la presión de confinamiento.
3. La relación del espaciamiento del acero transversal a las dimensiones del núcleo de concreto, debido a que un espaciado más pequeño conduce a un confinamiento más efectivo, como lo ilustra la figura 2.15. El concreto está confinado por el arqueado del concreto entre las varillas transversales;

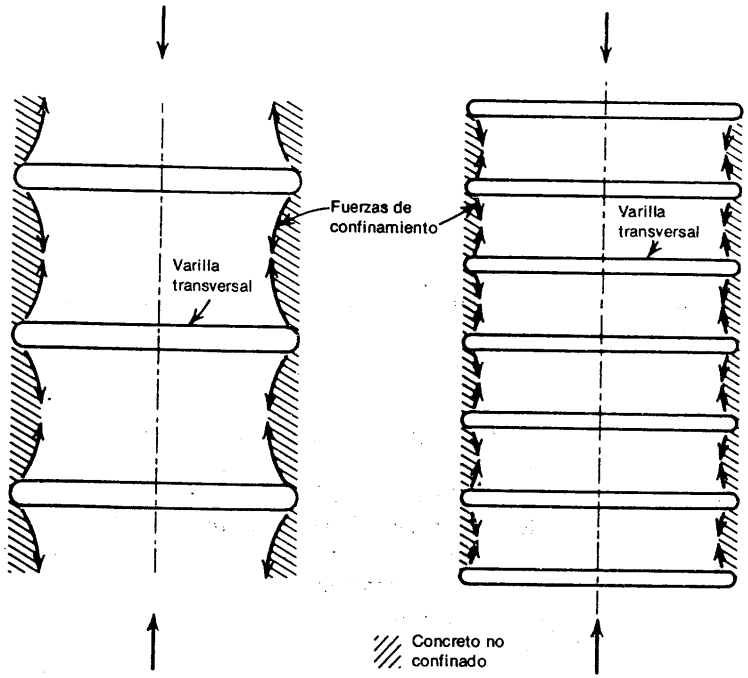


Figura 2.15 Efecto del espaciamiento del acero transversal en la eficiencia del confinamiento

y si el espaciado es grande, es evidente que no puede confinarse un volumen grande de concreto, por lo que éste puede desconcharse.

4. La relación del diámetro de la varilla transversal a la longitud no soportada de las varillas transversales en el caso de estribos o aros rectangulares, debido a que un diámetro grande de varilla conduce a confinamiento más efectivo. Este efecto está ilustrado en la figura 2.14. Las varillas transversales de diámetro pequeño actúan solamente como amarres entre las esquinas, debido a que la regidez por flexión del aro es pequeña y éstos se arquean hacia afuera en vez de confinar en forma efectiva al concreto en las regiones entre las esquinas. Con una relación mayor de diámetro de la barra transversal a su longitud no soportada, el área de concreto confinado efectivamente es mayor debido a la mayor rigidez por flexión del lado del aro. En el caso de una hélice esta variable no tiene significado; gracias a su forma, la hélice trabaja en tensión axial y aplica una presión radial uniforme al concreto.

5. La cuantía y tamaño del refuerzo longitudinal, debido a que ese acero también confina al concreto. Las varillas longitudinales generalmente tienen diámetro grande, y por lo general la relación de diámetro de varilla a longitud no soportada es tal que las varillas pueden confinar efectivamente el concreto. Sin embargo, las varillas longitudinales deben colocarse bien ajustadas contra el acero transversal, ya que este proporciona las reacciones de confinamiento a las varillas longitudinales, y si se necesita mover las varillas longitudinales para ponerlas en contacto efectivo con el acero transversal, se reduce la eficiencia del confinamiento.

6. La resistencia del concreto, debido a que el concreto de baja resistencia es algo más dúctil que el concreto de alta resistencia (véase la figura 2.1).

7. La tasa de carga, debido a que las características de esfuerzo deformación del concreto dependen del tiempo.

El concreto no está confinado fuera del acero transversal, y se puede esperar que este concreto de recubrimiento tenga características esfuerzo-deformación distintas a las del concreto dentro del acero transversal. El recubrimiento generalmente comienza a desconcharse cuando se alcanza la resistencia no confinada, especialmente si la cuantía de acero transversal es elevado, debido a que la presencia de un gran número de varillas transversales crea un plano o superficie de debilidad entre el núcleo y el recubrimiento lo que precipita el desconchamiento. En consecuencia, para cuantías altas de acero transversal, la contribución del recubrimiento a elevadas deformaciones debe ignorarse. Se puede suponer que el recubrimiento tiene las características del concreto no confinado hasta una deformación supuesta de desconchamiento y que no contribuye a la resistencia total bajo deformaciones más elevadas. Si es baja la cuantía de acero transversal, el recubrimiento tiende a desconcharse con menos facilidad y a colaborar más con el núcleo confinado. En ese caso se puede tomar en cuenta algo del concreto de la cubierta a deformaciones elevadas.

A continuación se estudian algunas proposiciones para la resistencia y ductilidad del concreto confinado por refuerzo.

Concreto confinado por hélices

Suponiendo que las hélices están suficientemente próximas para aplicar una presión casi uniforme, se puede calcular la presión de confinamiento a partir de la tensión de aro desarrollada por el acero espiral. La figura 2.16 muestra un cuerpo libre de media vuelta de una hélice. La presión lateral f_l en el concreto alcanza un máximo cuando el refuerzo espiral alcanza la

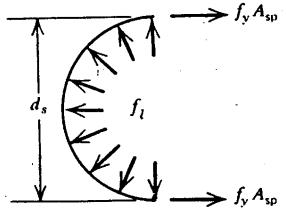


Figura 2.16 Confinamiento del concreto mediante refuerzo helicoidal.

resistencia de cedencia f_y. Si d_s es el diámetro y s el paso de la hélice, y A_{sp} es el área de la varilla espiral, el equilibrio de las fuerzas que actúan en la media vuelta de hélice mostrada en la figura 2.16 requiere que

$$2f_y A_{sp} = d_s s f_l \quad \therefore \quad f_l = \frac{2f_y A_{sp}}{d_s s} \tag{2.4}$$

Sustituyendo la ecuación 2.4 en la 2.3, vemos que la resistencia a compresión axial del concreto confinado por una hélice es

$$f'_{cc} = f'_c + 8.2\frac{f_y A_{sp}}{d_s s} \tag{2.5}$$

El aumento en ductilidad del concreto confinado por una hélice también es apreciable. Iyengar[2.16] y otros han propuesto relaciones esfuerzo-deformación para el concreto confinado por hélices en base a datos empíricos obtenidos de prueba.

Concreto confinado por aros rectangulares

Distintos investigadores han propuesto relaciones esfuerzo - deformación para el concreto confinado por aros rectangulares. La figura 2.17 muestra algunas de las curvas propuestas. En la curva trilineal de Chan[2.18] *OAB* representa la curva para el concreto no confinado y la rama *BC* depende del esfuerzo transversal. Blume y otros al[2.19] han adoptado también una curva trilineal, en que *OA* representa la curva para el concreto no confinado hasta $0.85f'_c$ y *ABC* (que a veces se remplaza por una sola línea recta) depende de la cuantía y del esfuerzo de cedencia del confinamiento transversal. Baker [2.20] recomendó una parábola hasta un esfuerzo máximo, que depende del gradiente de deformación a través de la sección, y luego una rama horizontal hasta una deformación que depende del gradiente de deformación y de la cuantía de acero transversal. Roy y Sozen[2.21] sugirieron reemplazar la rama descendente con una línea recta con una deformación en $0.5f'_c$ relacionada linealmente con la cuantía de acero transversal. La curva de Soliman y Yu[2.22] consiste en una parábola y dos líneas rectas con esfuerzos y deformaciones en los puntos críticos relacionados con la cuantía de acero transversal, con el espaciamiento y con el área confinada. Sargin y otros[2.23] han propuesto una ecuación general que proporciona una curva continua esfuerzo - deformación relacionada con la cuantía, el espaciamiento y resistencia de cedencia del acero transversal y además con el gradiente de deformación a través de la sección y la resistencia del concreto.

En base a la evidencia experimental existente, Kent y Park [2.24] han propuesto la curva esfuerzo deformación de la figura 2.18 para concreto confinado por aros rectangulares. Esta relación combina muchas de las

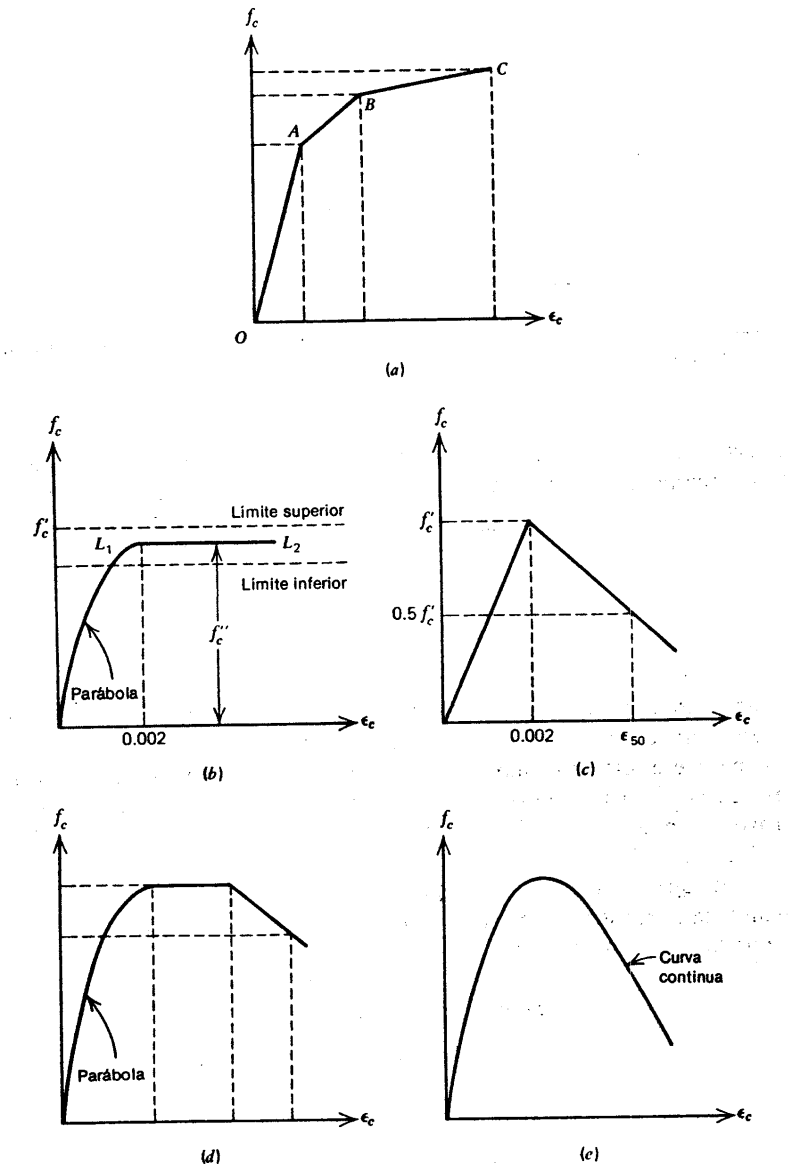


Figura 2.17. Algunas curvas esfuerzo deformación propuestas para el concreto confinado por aros rectangulares. (a) Chan[2.18] y Blume y otros[2.19] (b) Baker,[2.20] (c) Roy y Sozen[2.21] (d), Soliman y Yu[2.22] (e) Sargin y otros[2.23]

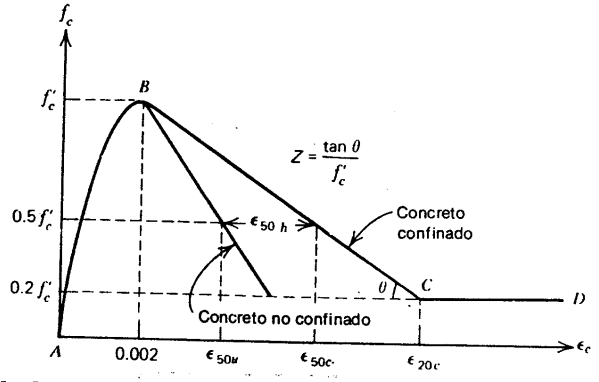


Figura 2.18. Curva esfuerzo deformación para concreto confinado por aros rectangulares, Kent y Park.[2.24]

características de las curvas propuestas antes. Las características de la curva propuesta son como sigue:

$$\text{region } AB\text{: } \varepsilon_c \leq 0.002$$

$$f_c = f'_c\left[\frac{2\varepsilon_c}{0.002} - \left(\frac{\varepsilon_c}{0.002}\right)^2\right] \tag{2.6}$$

Esta parte ascendente de la curva está representada por una parábola de segundo grado y supone que el acero de confinamiento no afecta el perfil de esta parte de la curva o la deformación al esfuerzo máximo. También se supone que el esfuerzo máximo que alcanza el concreto confinado es la resistencia f'_c del cilindro. Hay evidencia de que los aros rectangulares provocan un aumento en la resistencia; por ejemplo, véanse las refs. 2.16, 2.17, 2.18, 2.22 y 2.23. Sin embargo, este aumento puede ser pequeño, al grado de que en las pruebas de Roy y Sozen[2.21] no se encontró aumento alguno en la resistencia. En la mayoría de los casos, el esfuerzo máximo supuesto f'_c es conservador.

$$\text{región } BC\text{: } 0.002 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{20c}$$

$$f_c = f'_c[1 - Z(\varepsilon_c - 0.002)] \tag{2.7}$$

donde

$$Z = \frac{0.5}{\varepsilon_{50u} + \varepsilon_{50h} - 0.002} \tag{2.8}$$

$$\varepsilon_{50u} = \frac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} \tag{2.9}$$

$$\varepsilon_{50h} = \frac{3}{4}\rho_s\sqrt{\frac{b''}{s_h}} \tag{2.10}$$

donde f'_c = resistencia del cilindro de concreto en lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2), ρ_s = relación del volumen de refuerzo transversal al volumen del núcleo de concreto medido al exterior de los aros, b'' = ancho del núcleo confinado medido al exterior de los aros, y s_h = espaciamiento de los aros. El parámetro Z define la pendiente de la rama descendente recta. La pendiente de la rama descendente se especifica por la deformación presente cuando el esfuerzo ha caído hasta $0.5f'_c$, y se obtiene[2.24] de evidencia experimental existente. La ecuación 2.9 para ε_{50u} toma en cuenta el efecto de la resistencia del concreto en la pendiente de la rama descendente del concreto no confinado, ya que el concreto de alta resistencia es más frágil que el concreto de baja resistencia. La ecuación 2.10 para ε_{50h} da la ductilidad adicional debida a los aros rectangulares y se obtuvo de los resultados experimentales de tres investigaciones.[2.21, 2.22, 2.17] Un estudio[2.22] dio resultados que incluían el efecto del gradiente de deformación a través de la sección (especímenes cargados excéntricamente), pero como el efecto no fue marcado, no aparece en las ecuaciones. Al analizar los resultados de las tres investigaciones se supuso que el recubrimiento se había desconchado ya cuando el esfuerzo había caído hasta la mitad del esfuerzo máximo. Se supuso que el núcleo confinado llegaba hasta los ejes centrales de los lados de los aros, aunque es evidente que se tendrá solo un pequeño error si se considera que el núcleo confinado llega hasta el borde exterior de los aros. Esto podría explicar la presencia de cierto recubrimiento a deformaciones altas.

$$\text{región } CD\text{: } \varepsilon_c \geq \varepsilon_{20c} \tag{2.11}$$

$$f_c = 0.2f'_c$$

Esta ecuación toma en cuenta la habilidad del concreto de soportar ciertos esfuerzos a deformaciones muy altas.

La figura 2.19 muestra la influencia de aros de acero rectangulares en la curva esfuerzo - deformación dada por las ecuaciones 2.6 a 2.11 cuando la resistencia del cilindro de concreto es de 4000 lb/plg^2 (27.6 N/mm^2) y $s_h/b'' = 0.5$. Es claro que hay una considerable mejora en el comportamiento de la rama descendente para pequeñas cantidades de aros rectangulares, pero esta mejora es consistentemente menos significativa al agregar más aros.

Las ecuaciones 2.7 a 2.10 se dedujeron de resultados en especímenes con las variables dentro de los siguientes rangos: $s_h/b = 0.35$ a 2.0, $\rho_s = 0.35$ a 2.4% y f'_c principalmente dentro del rango 3000 a 4000 lb/plg^2 (20.7 a 27.6 N/mm^2), aunque algunos valores de f'_c estuvieron dentro del rango 7800 a 8600 lb/plg^2 (53.8 a 59.3 N/mm^2).

Es evidente que se requiere más trabajo experimental en los especímenes de concreto confinado para proporcionar más datos para el análisis

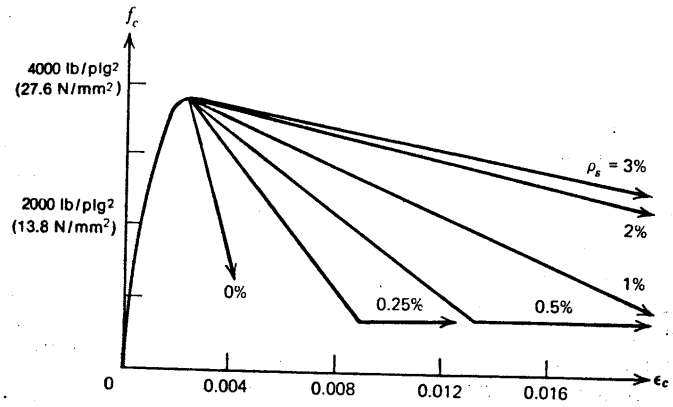


Figura 2.19. Influencia de la cantidad de aros en la curva esfuerzo deformación para el concreto cuando $s_h/b'' = 0.5$ y $f'_c = 4000$ lb/plg² (27.6 N/mm²).[2.24]

estadístico y poder incluir más variables. En especial se necesitan con urgencia pruebas con distintos arreglos del acero transversal, incluyendo aros traslapados y aros con amarres cruzados suplementarios. Mientras tanto se pueden considerar las ecuaciones propuestas para el concreto confinado por aros rectangulares sólo como aproximaciones, aunque se cree que darán resultados razonables.

2.1.4 Flujo plástico del concreto

La figura 2.5 muestra que la relación esfuerzo - deformación del concreto es función del tiempo. El concreto bajo esfuerzo sufre con el tiempo un aumento gradual de deformación, debido al flujo plástico del concreto. La deformación final de flujo plástico puede ser varias veces mayor que la deformación elástica inicial. Por lo general, el flujo plástico tiene poco efecto en la resistencia de una estructura, aunque provoca una redistribución de esfuerzos en los miembros de concreto reforzado bajo cargas de servicio y conduce a un aumento en las deflexiones. Las deformaciones debidas al flujo plástico a veces son benéficas. Por ejemplo, los esfuerzos en el concreto provocados por asentamientos diferenciales de las estructuras se reducen por el flujo plástico. El flujo plástico en tensión también demora el agrietamiento por contracción en el concreto. En el capítulo 10 se estudia el método de cálculo de los esfuerzos y deformaciones debidas al flujo plástico.

La deformación por flujo plástico del concreto bajo esfuerzo de compresión axial constante se muestra en la figura 2.20. Como lo revela ésta, el flujo plástico se desarrolla con una tasa decreciente. Si se eliminara la carga, se recuperaría la deformación elástica de inmediato. Sin embargo,

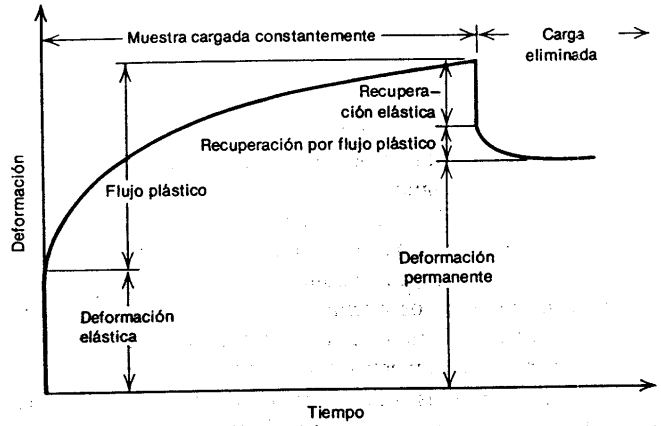


Figura 2.20. Curva típica del flujo plástico en el concreto con esfuerzo axial constante de compresión.

esta deformación elástica recuperada es menor que la deformación elástica inicial, debido a que el módulo elástico aumenta con la edad. A la recuperación elástica le sigue una recuperación de flujo plástico, que es una pequeña porción de la deformación total por flujo plástico.

La evidencia experimental indica que la deformación por flujo plástico que ocurre en determinado periodo es proporcional al esfuerzo aplicado, siempre que el nivel de esfuerzo no sea alto. La evidencia de las investigaciones es conflictiva con respecto al nivel de esfuerzo en el que cesa la linearidad entre el flujo plástico y el esfuerzo aplicado. Algunos experimentos evidencian pérdida de linearidad para esfuerzos de compresión de apenas $0.2f'_c$; otros, sugieren un valor hasta de $0.5f'_c$. Sin embargo, la suposición de una relación lineal entre la deformación por flujo plástico y el esfuerzo aplicado produce exactitud aceptable para el rango usual de esfuerzos por carga de servicio utilizado en el diseño estructural.

La magnitud de la deformación por flujo plástico depende de la composición del concreto, el medio ambiente y la historia esfuerzo - tiempo.

Se puede describir la composición del concreto en términos del tipo y proporciones del agregado, tipo y contenido de cemento, relación agua/cemento, y aditivos. El tipo del agregado puede tener un efecto marcado en el flujo plástico, debido a las diferentes propiedades elásticas y de absorción de los agregados. Por ejemplo, usar agregados de arenilla puede producir el doble de la deformación por flujo plástico que para un agregado de piedra caliza.[2.26] Los agregados son volumétricamente más estables que la pasta de cemento; en consecuencia, un aumento en el contenido de agregados conduce a una disminución en las deformaciones por flujo plástico. Un aumento en la relación agua cemento y un aumento en

el contenido de cemento aumenta el flujo plástico, al igual que un contenido elevado de aire atrapado.

Se puede describir el medio ambiente en términos de humedad y tamaño y forma del miembro. La humedad relativa ambiental tiene influencia significativa en el flujo plástico. Las deformaciones por flujo plástico son bajas cuando la humedad relativa es alta. El flujo plástico se reduce si se restringe la pérdida del agua del miembro, por lo que el tamaño y forma de un miembro afectan la cantidad de flujo plástico que ocurre. Adicionalmente, ya que las regiones exteriores de un miembro grande restringen la pérdida del agua de las regiones internas del mismo miembro, se reduce el flujo plástico en los miembros grandes. Se puede representar la influencia del tamaño y forma del miembro de concreto mediante la relación del volumen al área superficial, o mediante un espesor equivalente.

Es posible describir la historia esfuerzo - tiempo en términos de la edad en la etapa de primera carga y del tiempo bajo carga. La carga a una edad prematura provoca elevadas deformaciones por flujo plástico. Al aumentar la edad en que se aplica la primera carga, hay una señalada disminución en la deformación por flujo plástico. Las deformaciones por flujo plástico aumentan con la duración de la carga.

Hay varios métodos empíricos para calcular las deformaciones por flujo plástico. Los métodos usados más extensamente son los del Comite 209[2.26] del ACI, y los de CEB-FIP[2.27] Los métodos dan el coeficiente de flujo plástico del concreto C_t en función de las variables dependientes, donde C_t es la relación de la deformación por flujo plástico a la deformación elástica inicial. No hay margen para el tipo de agregado en ninguno de los dos métodos. A continuación se describe el enfoque del comité 209 del ACI. Se debe tener presente que aunque el enfoque se basa en un repaso exhaustivo de la literatura pertinente, el problema es esencialmente de carácter estadístico, ya que la dispersión de los datos de prueba y los valores reales pueden mostrar variaciones significativas con respecto a los valores medios propuestos.

De acuerdo con el Comite 209[2.26] del ACI, para concreto de peso normal y para todos lo concretos ligeros (utilizando tanto curado humedo como de vapor y cementos de tipo I y III), se puede escribir el coeficiente de flujo plástico C_t (definido como la relación de la deformación por flujo plástico a la deformación elástica inicial) en todo momento como

$$C_t = C_u K_t K_a K_h K_{th} K_s K_f K_e \tag{2.12}$$

A continuación se definen los coeficientes para la ecuación 2.12.

Coeficiente de flujo plástico último, C_u

El valor de C_u puede variar extensamente. El comité 209 del ACI, encontró que C_u varía de 1.30 a 4.15 con un valor promedio de 2.35. Este valor promedio solamente debe suponerse en ausencia de datos más exactos para el concreto que se desea utilizar.

Coeficiente de duración de la carga, K_t

$$K_t = \frac{t^{0.6}}{10 + t^{0.6}} \tag{2.13}$$

en que t = tiempo en días después de la aplicación de carga (K_t = 0.44, 0.60, 0.69, 0.78, y 0.90 para t = 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año y 5 años respectivamente)

Coeficiente de edad a la carga K_a

$$K_a = 1.25 t_i^{-0.118} \quad \text{para concreto curado en la humedad} \tag{2.14a}$$

o

$$K_a = 1.13 t_i^{-0.095} \quad \text{para concreto curado con vapor} \tag{2.14b}$$

en que t_i = edad del concreto en días cuando se aplicó la carga por primera vez K_a = 1.00, 0.90, 0.82, y 0.74 para el concreto curado en la humedad cargado a los 7, 10, 30 y 90 días respectivamente; (K_a = 1.00, 0.95, 0.83, y 0.74 para concreto curado con vapor cargado a 1 a 3, 10, 30 y 90 días respectivamente)

Coeficiente de humedad relativa, K_h

$$K_h = 1.27 - 0.0067H \quad \text{para } H > 40\% \tag{2.15}$$

en que H = humedad relativa en por ciento (K_h = 1.00, 0.87, 0.73, y 0.60 para $\leqslant$ 40; 60, 80, y 100% de humedad relativa)

Coeficiente del mínimo espesor del miembro, K_{th}

K_{th} = 1.00 para 6 plg o menor, y 0.82 para 12 plg. (1 plg)

Coeficiente del revenimiento del concreto, K_s

K_s = 0.95 para 2 plg, 1.00 para 2.7 plg, 1.02 para 3 plg, 1.09 para 4 plg, y 1.16 para 5 de revenimiento (1 plg = 25.4 mm)

Coeficiente de finos, K_f

K_f = 0.95 para 30%, 1.00 para 50%, y 1.05 para 70% de finos por peso.

Coeficiente del contenido del aire, K_e

K_e = 1.00 hasta 6%, 1.09 para 7%, y 1.17 para aire al 8%

No es necesario tener en cuenta el contenido de cemento para concretos con contenidos de cemento entre 470 y 750 lb/yd^3 (1 lb/yd^3 = 0.593 kg/m^3).

Ejemplo 2.1

Estimar la deformación por flujo plástico que se puede esperar en un muro de concreto de 12 plg (304 mm) de espesor cargado a una edad de 10 días durante un periodo de 5 años a una humedad relativa de 60%. El concreto tiene un revenimiento de 3 plg (76 mm), un contenido de finos de 34% por peso, un contenido de aire de 5%, y está curado en la humedad.

Solución

De la ec. 2.12 tenemos

$$C_t = 2.35 \times 0.9 \times 0.95 \times 0.87 \times 0.91 \times 1.02 \times 0.96 \times 1.00 = 1.56$$

En consecuencia, la deformación por flujo plástico probable es 1.56 veces mayor que la deformación elástica inicial.

2.1.5 Contracción del concreto

El concreto se contrae cuando pierde humedad por evaporación. Las deformaciones por contracción son independientes del estado de esfuerzos en el concreto. Si se limitan, las deformaciones por contracción pueden provocar el agrietamiento del concreto y por lo general provocan un aumento en las deflexiones de los miembros estructurales con el tiempo. Se pospone hasta el capítulo 10 el cálculo de los esfuerzos y deformaciones debidos a la contracción.

En la figura 2.21 se muestra una curva que indica el aumento en la deformación por contracción con el tiempo. La contracción ocurre a una tasa decreciente. Las deformaciones finales por contracción varían considerablemente, por lo común de 0.0002 a 0.0006 aunque a veces llega hasta 0.0010.

En gran medida, la contracción es un fenómeno reversible. Si se satura el concreto con agua después de haberse contraído, se dilatará casi a su volumen original. En consecuencia, las condiciones secas y húmedas alternadas provocan cambios alternativos en el volumen del concreto. Este fenómeno es parcialmente responsable de las deflexiones fluctuantes en estructuras (v. gr. puentes de concreto) expuestas a cambios estacionales cada año.

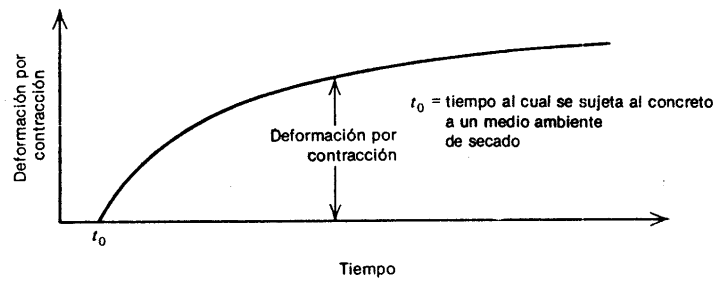


Figura 2.21. Curva típica de contracción en el concreto.

Como regla, el concreto que exhibe un flujo plástico elevado también exhibe una elevada contracción. En consecuencia, la magnitud de la deformación por contracción depende de la composición del concreto y del medio ambiente en forma muy análoga a como se discutió antes para el flujo plástico.

Tanto el comité 209[2.26] del ACI como CEB-FIP[2.27] han propuesto métodos empíricos para estimar las deformaciones por contracción. En seguida se describe el primer enfoque anterior.

De acuerdo con el comité 209[2.26] del ACI, para el concreto de peso normal y para todos los concretos ligeros (utilizando curado húmedo y de vapor y cementos de tipos I y III), la deformación de contracción no restringida en cualquier momento t está dada por

$$\varepsilon_{sh} = \varepsilon_{shu} S_t S_h S_{th} S_s S_f S_e S_c \qquad (2.16)$$

el significado de cada coeficiente se aclara a continuación.

Deformación de contracción última, ε_{shu}

El valor de ε_{shu} puede variar ampliamente. El comité 209 del ACI, encontró que ε_{shu} está comprendido entre 0.000415 y 0.00107, con valores medios de 0.00080 para concreto curado en la humedad ó 0.00073 para el concreto curado con vapor. Se deben suponer estos valores promedio solamente en ausencia de datos más exactos para el concreto que se va a utilizar.

Coeficiente del tiempo de contracción, S_t

En cualquier momento después de una edad de 7 días, para el concreto curado en la humedad

$$S_t = \frac{t}{35 + t} \tag{2.17a}$$

en que t = tiempo en días desde una edad de 7 días (S_t = 0.46, 0.72, 0.84, 0.91, y 0.98 para t = 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año y 5 años respectivamente) o, en cualquier momento después de una edad de 1 a 3 días para el concreto curado con vapor,

$$S_t = \frac{t}{55 + t} \tag{2.17b}$$

en que t = tiempo en días desde una edad de 1 a 3 días (S_t = 0.35, 0.62, 0.77, 0.87, y 0.97 para t = 1 mes, 3 meses, 6 meses, 1 año, y 5 años respectivamente) Para la contracción considerada a partir de edades mayores que las dadas antes, se puede determinar la diferencia utilizando la ecuación 2.17a o 2.17*b* para cualquier periodo después de ese tiempo. Es decir, que la contracción para el concreto curado en la humedad sea, en un periodo de 1 mes a 1 año igual a la contracción que hay en un periodo de 7 días a 1 año menos la contracción de 7 días a 1 mes. El anterior procedimiento supone que se ha curado el concreto en la humedad de 3 a 7 días. Para la contracción del concreto curado en la humedad desde 1 día, se necesita multiplicar la contracción por 1.2; se puede utilizar una interpolación lineal entre 1.2 a 1 día y 1.0 a 7 días.

Coeficiente de humedad relativa, S_h

$$S_h = 1.4 - 0.01H \quad \text{para } 40 < H < 80\% \tag{2.18a}$$

o

$$S_h = 3.0 - 0.03H \quad \text{para } 80 < H < 100\% \tag{2.18b}$$

en que H = humedad relativa en por ciento (S_h = 1.00, 0.80, 0.60, 0, para $\leqslant$ 40, 60, 80, y humedad relativa 100%)

Coeficiente del espesor mínimo del miembro, S_{th}

S_{th} = 1.00 para 6 plg o menor y 0.84 para 9 plg (1 plg = 25.4 mm)

Coeficiente del revenimiento del concreto, S_s

S_s = 0.97 para 2 plg, 1.00 para 2.7 plg, 1.01 para 3 plg, 1.05 para 4 plg, y 1.09para 5 plg (1 plg = 25.4 mm)

Coeficiente de finos, S_f

S_f = 0.86 para 40%, 1.00 para 50%, 1.04 para 70% de fines por peso

Coeficiente del contenido de aire, S_e

S_e = 0.98 para 4%, 1.00 para 6% y 1.03 para 10% de aire.

Factor de contenido de cemento, S_c

S_c = 0.87 para 376 lb/yd^3, 0.95 para 564 lb/yd^3, 1.00 para 705 lb/yd^3, y 1.09 para 940 lb/yd^3 (1 lb/yd^3 = 0.593 kg/m^3)

Ejemplo 2.2

Estimar la deformación por contracción libre que se puede esperar en un muro de concreto de 9 plg (230 mm) de espesor desde la edad de 7 días durante un periodo de 5 años a una humedad relativa de 60%. El concreto tiene un revenimiento de 3 plg (76 mm), un contenido de finos de 34% por peso, un contenido de cemento de 600 lb/yd^3 (356 kg/m^3), un contenido de aire de 5% y se curó en la humedad durante 5 días después de colarlo.

Solución

De la ecuación 2.16 se obtiene

$$\varepsilon_{sh} = 0.0008 \times 0.98 \times 0.80 \times 0.84 \times 1.01 \times 0.78 \times 0.99 \times 0.96$$
$$= 0.000394$$

2.2 Refuerzo de acero

2.2.1 Perfiles y tamaños de varillas

Las varillas de refuerzo de acero generalmente tienen sección transversal redonda. Para restringir el movimiento longitudinal de las varillas relativo al concreto que las rodea, se rolan costillas o protuberancias llamadas corrugaciones en la superficie de la varilla. Mediante investigación experimental se han determinado los requerimientos mínimos para las corrugaciones (espaciamiento, altura y distribución perimetral) que indican las especificaciones del acero. Las especificaciones [2.28] del ASTM requieren que las corrugaciones tengan un espaciamiento promedio que no sea mayor que 0.7 del diámetro nominal de la varilla y una altura mínima de 0.04 al 0.05 del diámetro nominal de la varilla; deben además encontrarse distribuidas por lo menos en un 75% del perimetro nominal de la varilla. Las corrugaciones se insertan de manera que el ángulo al eje de la varilla no sea menor que 45°. Por lo general hay también costillas longitudinales presentes en la superficie de la varilla.

Las varillas corrugadas de acero se producen en tamaños que van de los números 3 al 18 en que el número de la varilla significa el número de octavos de pulgada (1/8 plg = 3.18 mm) incluídos en el diámetro nominal de la varilla. Las dimensiones nominales de una varilla corrugada equivalen a las de una varilla simple que tiene el mismo peso por longitud unitaria que la varilla corrugada. La tabla 2.1 indica las varillas corrugadas producidas siguiendo las especificaciones[2.28] del ASTM.

En las losas de refuerzo, cascarones y pavimentos es común utilizar tela de alambre fabricada de alambres de acero que corren en dos direcciones perpendiculares y están soldados en sus intersecciones, así como otros tipos de refuerzos de alambre.

2.2.2 Comportamiento monotónico de esfuerzos

Curvas típicas esfuerzo-deformación para varillas de acero utilizadas en la construcción del concreto reforzado (fig. 2.22) se obtuvieron de varillas de acero cargadas monotónicamente a tensión. Las curvas exhiben una porción inicial elástica lineal, una plataforma de cedencia (es decir una zona más allá de la cual la deformación aumenta con poco o ningún aumento del esfuerzo), una región de endurecimiento por deformación en la que el esfuerzo nuevamente aumenta con la deformación, y finalmente una región en la que el esfuerzo decae hasta que ocurre la fractura.

El módulo de elasticidad del acero está dado por la pendiente de la porción elástica lineal de la curva. El módulo de elasticidad del acero de refuerzo E_s generalmente se toma igual a 29×10^6 lb/plg^2 (0.2×10^6 N/mm^2).[2.1]

Tabla 2.1 Tamaños de varillas corrugadas de acero

Núm. varilla	Peso unitario		Dimensiones nominales			
			Diámetro		Area transversal	
	lb/pie	(kg/m)	plg	(mm)	plg^2	(mm^2)
3	0.376	(0.560)	0.375	(9.52)	0.11	(71)
4	0.668	(0.994)	0.500	(12.70)	0.20	(129)
5	1.043	(1.552)	0.625	(15.88)	0.31	(200)
6	1.502	(2.235)	0.750	(19.05)	0.44	(284)
7	2.044	(3.042)	0.875	(22.22)	0.60	(387)
8	2.670	(3.973)	1.000	(25.40)	0.79	(510)
9	3.400	(4.960)	1.128	(28.65)	1.00	(645)
10	4.303	(6.403)	1.270	(32.26)	1.27	(819)
11	5.313	(7.906)	1.410	(35.81)	1.56	(1006)
14	7.65	(11.384)	1.693	(43.00)	2.25	(1452)
18	13.60	(20.238)	2.257	(57.33)	4.00	(2581)

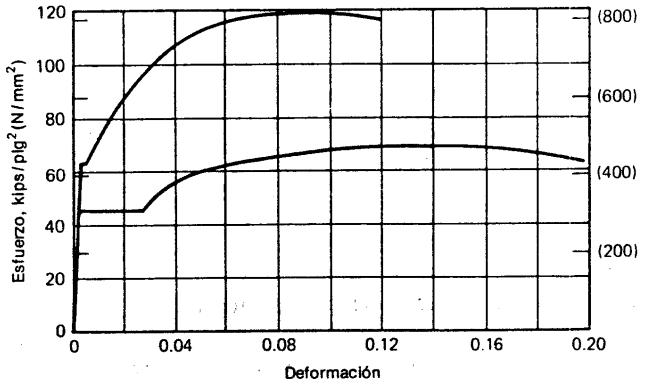


Figura 2.22. Curvas típicas esfuerzo deformación para el refuerzo de acero.

Una propiedad muy importante del refuerzo de acero es el esfuerzo en el punto de cedencia, conocido como la resistencia de cedencia. Ocasionalmente a la cedencia le acompaña una disminución abrupta en el esfuerzo, de manera que un diagrama esfuerzo-deformación tiene la forma que aparece en la figura 2.23. En tal caso, a los esfuerzos en A y en B se les conoce como las resistencias de cedencia superior e inferior respectivamente. La posición del punto superior de cedencia depende de la velocidad de la prueba, la forma de la sección y la forma del espécimen. Por lo general se considera que la resistencia de cedencia inferior es la verdadera característica del material y se denomina simplemente como la resistencia de cedencia. Para los aceros que no tienen una plataforma bien definida de cedencia, generalmente se considera la resistencia a la cedencia como

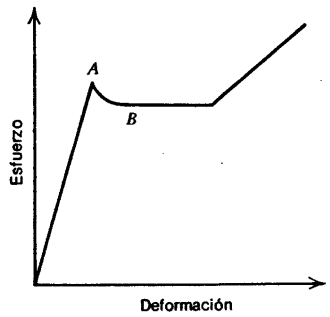


Figura 2.23. Curva esfuerzo-deformación que ilustra los puntos superior e inferior de cedencia.

el esfuerzo que corresponde a una deformación específica, como se ilustra en la figura 2.24.

Por lo general, la longitud de la plataforma de cedencia es función de la resistencia del acero. Los aceros de alta resistencia con alto contenido de carbono generalmente tienen una plataforma más corta de cedencia que los aceros de menor resistencia y menor contenido de carbono. En forma semejante, el trabajado en frío del acero puede producir un acortamiento de la plataforma de cedencia, a grado tal que el endurecimiento por deformación comienza inmediatamente después de principiar la cedencia. Los aceros de alta resistencia también tienen una elongación previa a la fractura más pequeña que los aceros de baja resistencia.

Las varillas de acero corrugado producidas respetando las especificaciones[2.28] del ASTM tienen una resistencia de cedencia especificada (mínima de 40, 50, 60 ó 75 kips/plg^2 (276, 345, 414 ó 517 N/mm^2); se les conoce como grados 40, 50, 60 y 75 respectivamente. Para los aceros que carecen de un punto de cedencia bien definido, se considera que su resistencia de cedencia es el esfuerzo que corresponde a una deformación de 0.005 para los grados 40, 50 y 60,[2.28] y a una de 0.0035 para el grado [2.1] Las resistencias últimas (resistencias a tensión) que corresponden a los grados 40, 50, 60 y 75 son por lo menos 70, 80, 90 y 100 kips/plg^2 (483, 552, 621 y 290 N/mm^2).[2.28] Los alambres de acero normalmente tienen resistencias de cedencia y última en la parte superior de los rangos recién dados. La deformación mínima a la fractura del acero también está definida en las especificaciones, ya que es esencial para la seguridad de la estructura que el acero sea suficientemente dúctil para que pueda sufrir grandes deformaciones antes de fracturarse. Las especificaciones[2.28] del ASTM para varillas corrugadas requieren una elongación, definida por la extensión permanente de una longitud calibrada, de 8 plg (203 mm) en la fractura de la muestra, expresada como un porcentaje de la longitud del

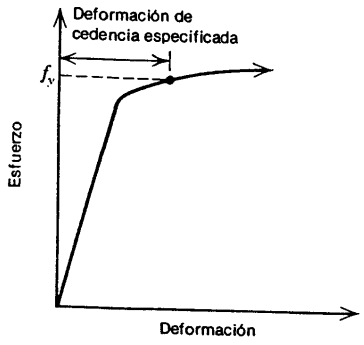


Figura 2.24. Punto de cedencia de un acero sin plataforma de cedencia bien definida.

calibre, que varía con el origen, grado y diámetro de la varilla de acero y va de 4.5% hasta 12%.

La resistencia especificada de cedencia normalmente se refiere a un mínimo garantizado. Por lo general la resistencia de cedencia real de las varillas es algo mayor que este valor especificado. En algunos casos (v. gr. en la evaluación de la resistencia sísmica de los miembros) es indeseable tener una resistencia de cedencia mucho mayor que la considerada en el diseño. Esto se debe a que la resistencia a flexión incrementada de un miembro, por ejemplo, produce mayores fuerzas cortantes actuando en el miembro bajo carga última, lo que puede producir una falla cortante frágil del miembro en vez de una falla a flexión dúctil. En consecuencia, las especificaciones para el acero estructural en zonas sísmicas también deberían requerir que no se exceda determinada resistencia de cedencia para cierto grado del acero.

Por lo general, se supone que las curvas esfuerzo-deformación para el acero a tensión y compresión son idénticas. Las pruebas han demostrado que ésta es una suposición razonable.

El efecto de una tasa elevada de carga es aumentar la resistencia de cedencia. Por ejemplo, se ha informado[2.5] que para una tasa de deformación de 0.01/seg. se puede aumentar la resistencia inferior de cedencia hasta en 14%.

En el diseño es necesario idealizar el perfil de la curva esfuerzo-deformación. Por lo general la curva se simplifica idealizándola como dos líneas rectas, como en la figura 2.25*a*, ignorando la resistencia superior de cedencia y el aumento en el esfuerzo debido al endurecimiento por deformación. Esta es la curva esfuerzo-deformación que supone el código [2.1]ACI para el acero. Si la deformación plástica, que ocurre a un esfuerzo casi constante después de la cedencia, es mucho mayor que la extensión elástica máxima, esta curva supuesta da muy buena exactitud. Esta simplificación es especialmente exacta para el acero que tiene una baja resistencia de cedencia. Si el acero se endurece por deformación poco después del inicio de la cedencia, esta curva supuesta subestima el esfuerzo del acero a deformaciones elevadas. En algunos casos puede ser necesario evaluar el esfuerzo del acero a deformaciones mayores que la de cedencia, y así poder calcular con mayor exactitud la resistencia de los miembros bajo estas deformaciones. Esto es especialmente cierto en el diseño sísmico en que los requerimientos de ductilidad pueden implicar la posibilidad de alcanzar deformaciones muchas veces más grandes que la deformación de cedencia. En las figuras 2.25*b* y 2.25*c* se muestran idealizaciones más exactas utilizables para la curva esfuerzo-deformación. Para utilizar estas idealizaciones son necesarios los valores de los esfuerzos y deformaciones al inicio de la cedencia, al del endurecimiento por deformación y a la ruptura. Estos puntos se pueden determinar en las curvas esfuerzo-deformación obtenidas en pruebas.

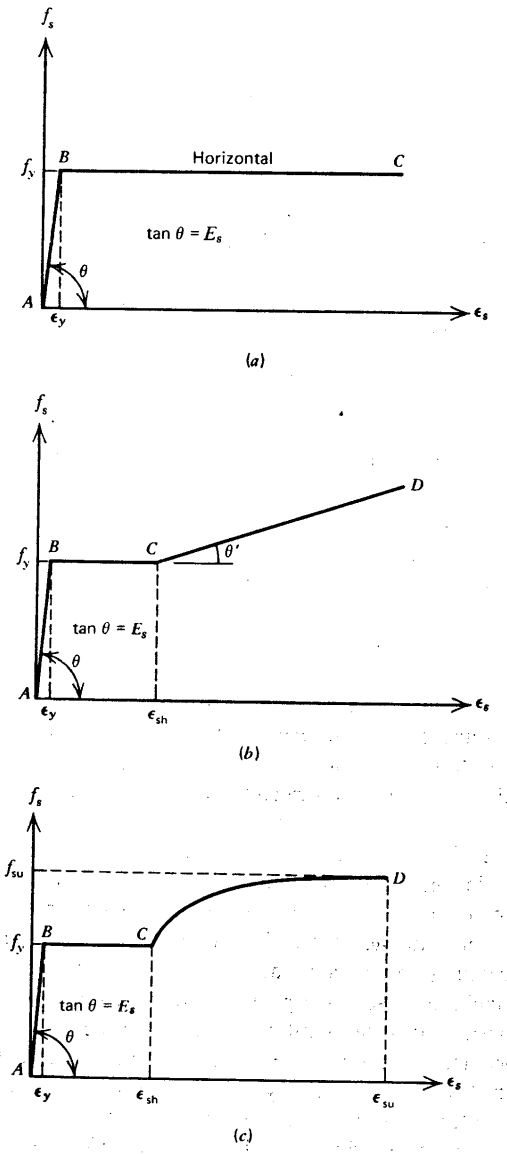


Figura 2.25. Idealizaciones de la curva esfuerzo-deformación para el acero en tensión o compresión. (a) Aproximación elástica perfectamente plástica (b) aproximación trilineal (c) curva completa.

2.2.3 Comportamiento bajo esfuerzos repetidos

La figura 2.22 es la curva esfuerzo-deformación para una muestra de acero cargada en tensión o en compresión axial hasta la falla en una sola corrida de carga. Si se quita la carga antes de la falla, la muestra se recupera a lo largo de un camino esfuerzo-deformación paralelo a la porción elástica original de la curva. Si se carga de nuevo, la muestra sigue el mismo camino hasta la curva original, como en la figura 2.26, quizás con una pequeña deformación histerética y/o un efecto de endurecimiento por deformación. Se sigue entonces de cerca la curva virgen, tal como si no hubiera ocurrido la descarga. En consecuencia, la curva monotónica esfuerzo-deformación da una buena idealización para la curva envolvente para cargas repetidas del mismo signo.

2.2.4 Comportamiento bajo esfuerzos alternados

Si se aplica carga axial alternada (tensión-compresión) a una muestra de acero en el rango de cedencia, se obtiene una curva esfuerzo-deformación del tipo presentado en la figura *2.27a.* La figura muestra el efecto Bauschinger, en que la curva esfuerzo-deformación bajo cargas alternadas deja de ser lineal a un esfuerzo mucho más bajo que la resistencia inicial de cedencia. Este comportamiento del acero está fuertemente influido por la historia previa de deformación; el tiempo y la temperatura también lo afectan. El camino de la descarga sigue la pendiente elástica inicial. La idealización frecuentemente usada rama elástica-rama perfectamente plástica para las cargas alternadas (fig. 2.27*b*) es solamente una aproximación. Las curvas de cargas alternadas son importantes al tener en cuenta los efectos de las cargas sísmicas de alta intensidad en los miembros.

Kato y otros autores,[2.29] basándose en la observación de datos experimentales de esfuerzos y deformaciones, obtienen la curva idealizada esfuerzo - deformación para cargas alternadas a partir de las curvas monotónicas para la tensión y compresión en la forma ilustrada en la figura

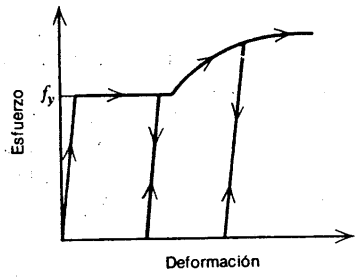


Figura 2.26. Curva esfuerzo deformación para el acero bajo cargas repetidas.

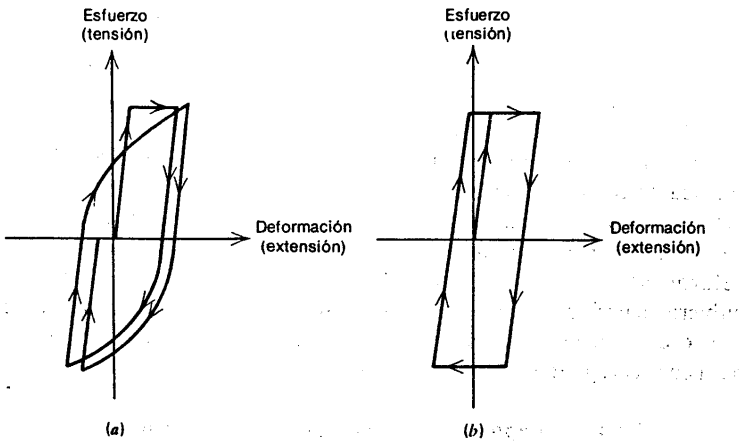


Figura 2.27. (a) Efecto Bauschinger para el acero bajo cargas alternadas (b) Idealización elástica-perfectamente plástica para el acero bajo cargas alternadas.

2.28. El diagrama de las cargas alternadas (fig. 2.28*a*) está dividido en curvas que corresponden a las cargas actuando por primera vez, en ramas de descarga (líneas rectas) y en curvas correspondientes a cargas de ciclos anteriores (curvas suavizadas por el efecto Bauschinger). Se pueden graficar en secuencia las partes del diagrama del mismo signo, como se muestra en la figura 2.28*b*. Conectando los segmentos de las ramas de primeras cargas de extremo a extremo (fig. 2.28*c*) se obtiene un diagrama semejante a las curvas monotónicas. Hay una diferencia en la parte inicial de la curva en compresión, que tiene una curvatura considerable en comparación con la curva monotónica. Kato y otros[2.29] representaron las curvas suavizadas, debido al efecto Bauschinger, mediante hipérbolas que parten de un esfuerzo nulo. Utilizando esta idealización, es posible obtener aproximadamente las curvas esfuerzo -deformación para carga alternada aproximadamente de las curvas monotónicas.

Aktan y otros[2.30] y Kent y Park[2.31] han utilizado las relaciones de Ramberg-Osgood[2.32] para idealizar el perfil de las ramas suavizadas de la curva esfuerzo - deformación. En el método de Kent y Park, se supone que las ramas de descarga de la curva para esfuerzos de ambos signos siguen la pendiente elástica inicial; después de la excursión a la primera cedencia, las partes de carga de la curva esfuerzo - deformación quedan representadas por la siguiente forma de la relación de Ramberg-Osgood:

$$\varepsilon_s - \varepsilon_{si} = \frac{f_s}{E_s}\left(1 + \left|\frac{f_s}{f_{ch}}\right|^{r-1}\right) \qquad (2.19)$$

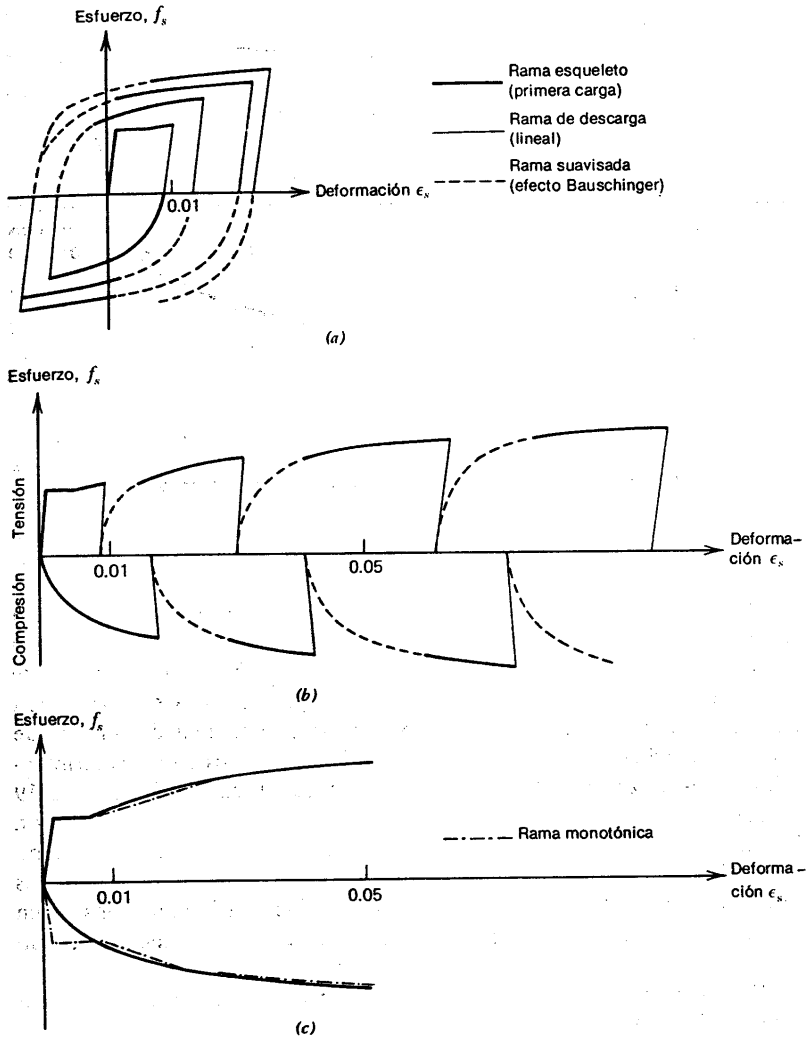


Figura 2.28. Curvas esfuerzo-deformación para el acero con cargas alternadas[2.29] (a) curva de carga invertida. (b) curvas desarrolladas (c) curvas esqueleto.

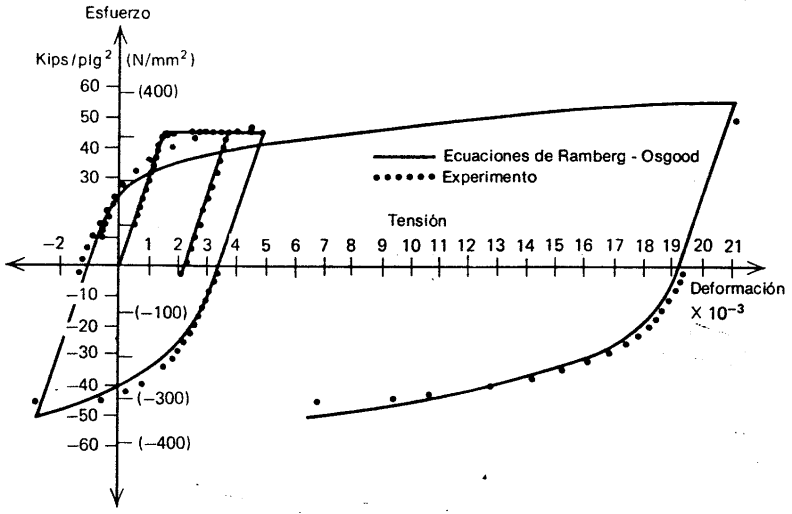


Figura 2.29. Curvas esfuerzo-deformación para el acero con cargas alternadas.[2.31]

en que ε_s = deformación unitaria del acero, ε_{si} = deformación unitaria del acero a esfuerzo cero al principio de la corrida de carga, f_s = esfuerzo del acero, E_s = módulo de elasticidad del acero, f_{ch} = esfuerzo que depende de la resistencia de cedencia y de la deformación plástica del acero producida en la corrida anterior de carga y r = parámetro que depende del número de orden de corridas de carga. La figura 2.29 compara los datos experimentales de esfuerzos y deformaciones con la curva dada por la ec. 2.19 utilizando valores empíricos para f_{ch} y r[2.31] Aktan y otros [2.30] utilizaron la ecuación de Ramberg-Osgood para definir tanto la rama de carga como la de descarga de las curvas y obtuvieron buena concordancia con los resultados de prueba. También diseñaron otra idealización que consiste en conjuntos de líneas rectas paralelas a la pendiente elástica e inclinadas con ella.

Es evidente que el grado de complejidad de la idealización utilizada depende de las necesidades de la aplicación específica.

2.3 BIBLIOGRAFIA

2.1 ACI Commitee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.

2.2 A. Pauw, "Static Modulus of Elasticity of Concrete as Affected by Density," *Journal ACI,* Vol. 57, No. 6, Diciembre de 1960, págs. 679-687

2.3 H. Rüsch, "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone," Deutscher Ausschuss fur Stahlbetonbau, Boletín No. 120, Berlín, 1955, pág. 94

2.4 E. Hognestad, "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members," University of Illinois Engineering Experimental Station, Serie de Boletín No. 399, Noviembre 1951, pág. 128

2.5 ACI Commitee 439, "Effect of Steel Strenght and Reinforcement Ratio on the Mode of Failure and Strain Energy Capacity of Reinforced Concrete Beams," *Journal ACI,* Vol. 66, No. 3. Marzo 1969, págs 165-173.

2.6 B. P. Sinha, K. H. Gerstle, y L. G. Tulin, "Stress-Strain Relationships for Concrete Under Cyclic Loading," *Journal ACI,* Vol. 61, No. 2, Febrero 1964, págs. 195-211.

2.7 I. D. Karsan y J. O. Jirsa, "Behaviour of Concrete Under Compressive Loadings," *Journal of Structural División, ASCE,* Vol. 95, STI2, Diciembre 1969, págs. 2543-2563.

2.8 H. Rüsch. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete," *Journal ACI.* Vol. 57, No. 1, Julio 1960, págs. 1-28.

2.9 E. P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968, págs. 571

2.10 H. Kupfer, H. K. Hilsdorf, y H. Rüsch, "Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress," *Journal ACI,* Vol. 66, No. 8, Agosto 1969, págs. 656-666.

2.11 H. J. Cowan, "The Strength of Plain, Reinforced and Prestressed Concrete Under the Action of Combined Stresses, with Particular Reference to the Combined Bending and Torsión of Rectangular Sections," *Magazine of Concrete Research,* No. 14, Diciembre 1953, págs. 75-86.

2.12 B. Bresler y K. S. Pister, "Strength of Concrete Under Combined Stresses," *Journal ACI,* Vol. 55, No. 3, Septiembre 1958, págs. 321-345.

2.13 F. E. Richart, A. Brandtzaeg, y R. L. Brown, "A Study of the Failure of Concrete Under Combined Compressive Stresses," University of Illinois Engineering Experimental Station, Boletín No. 185, 1928, pág. 104.

2.14 G. G. Balmer, "Shearing Strength of Concrete Under High Triaxial Stress —Computation of Mohr's Envelope as a Curve," Structural Research Laboratory Report No. SP-23, U.S. Bureau of Reclamation, 1949, pág 13 más tablas y cifras

2.15 F. E. Richart, A. Brandtzaeg, y R. L. Brown, "The Failure of Plain and Spirally Reinforced Concrete in Compression," University of Illinois Engineering Experimental Station, Boletín No. 190, 1929 pág. 74.

2.16 K.T.R.J. Iyengar, P. Desayi, y K. N. Reddy, "Stress-Strain Characteristics of Concrete Confined in Steel Binders," *Magazine of Concrete Research,* Vol. 22, No. 72, Septiembre 1970, págs. 173-184.

2.17 V. V. Bertero y C. Felippa, Discussión of "Ductility of Concrete" by H. E. H. Roy and M. A. Sozen, *Proccedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete,* ASCE-ACI, Miami, Noviembre 1964, págs. 227-234.

2.18 W. L. Chan, "The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks," *Magazine of Concrete Research,* Vol. 7, No. 21, Noviembre 1955, págs. 121-132.

2.19 J. A. Blume, N. M. Newmark, y L. H. Corning, "Design of Multistorey Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions," Portland Cement Association, Chicago, 1961, pág. 318.
2.20 A. L. L. Baker y A. M. N. Amarakone, "Inelastic Hyperstatic Frames Analysis," *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete,* ASCE-ACI, Miami, Noviembre 1964, págs. 85-142.
2.21 H. E. H. Roy y M. A. Sozen, "Ductility of Concrete," *Proccedings of the International Symposium on Flexural Mechanics of Reinforced Concrete,* ASCE-ACI, Miami, Noviembre 1964, págs. 213-224.
2.22 M. T. M. Soliman y C. W. Yu, "The Flexural Stress-Strain Relationship of Concrete Confined by Rectangular Transverse Reinforcement," *Magazine of Concrete Research,* Vol. 19, No. 61, Diciembre 1967, págs. 223-238.
2.23 M. Sargin, S. K. Ghosh, y V. K. Handa, "Effects of Lateral Reinforcement upon the Strength and Deformation Properties of Concrete," *Magazine of Concrete Research,* Vol. 23, No. 75-76 junio-septiembre, 1971, págs. 99-110.
2.24 D. C. Kent y R. Park, "Flexural Members with Confined Concrete," *Journal of the Structural División, ASCE,* Vol. 97, ST7, Julio 1971, págs. 1969-1990.
2.25 A. M. Neville, "Properties of Concrete," Pitman, Londres, 1963, pág. 532.
2.26 ACI Committee 209, "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperatura Effects in Concrete Structures," *Designing for the Effects of Creep, Shrinkage and Temperature in Concrete Structures,* SP-27, American Concrete Institute, Detroit, 1971, págs. 51-93.
2.27 CEB-FIP, "International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures," Comité Européen du Béton-Fédération Internationale de la Précontrainte, Paris, 1970. (La Cement and Concrete Association, Londres, dispone de una tradución al inglés, pág. 88).
2.28 ASTM, *1973 Annual Book of ASTM Standards,* Part 4, American Society for Testing and Materials, Philadelphia, 1973. (Los estándares para varillas de acero deformado son A615-72, págs. 684-689; A616-72, págs. 690-694; A617-72, págs. 695-699.)
2.29 B. Kato, H. Akiyama, y Y. Yamanouchi, "Predictable Properties of Material Under Incremental Cyclic Loading," Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well-Defined Repeated Loads, *Reports of Working Commissions,* Vol. 13, International Association for Bridge and Structural Engineering, Lisboa, 1973, págs. 119-124.
2.30 A. E. Aktan, B. I. Karlsson, y M. A. Sozen, "Stress-Strain Relationships of Reinforcing Bars Subjected to Large Strain Reversals," Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 397, University of Illinois, Urbana, Junio 1973.
2.31 D. C. Kent y R. Park, "Cyclic Load Behaviour of Reinforcing Steel, "*Strain* (Journal of the British Society for Strain Measurement), Vol. 9, No. 3, julio 1973, págs 98-103.
2.32 W. Ramberg y W. R. Osgood, "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters," Technical Note 902, National Advisory Committee for Aeronautics, julio 1943.

3

Suposiciones básicas de la teoría de la resistencia a flexión

3.1 SUPOSICIONES DEL COMPORTAMIENTO BASICO

Al desarrollar una teoría general de la resistencia a flexión de las secciones de concreto reforzado se hacen cuatro suposiciones básicas:

1. Las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión.
2. Se conoce la curva esfuerzo - deformación para el acero.
3. Se puede despreciar la resistencia a tensión del concreto.
4. Se conoce la curva esfuerzo - deformación para el concreto, que define la magnitud y distribución del esfuerzo a compresión.

La primera suposición, que es el principio de Bernoulli, implica que la deformación longitudinal en el concreto y el acero en los distintos puntos a través de una sección es proporcional a la distancia del eje neutro. Numerosas pruebas en miembros de concreto reforzado han demostrado que esta suposición es bastante correcta en todas las etapas de carga hasta alcanzar la falla a flexión, siempre que exista buena adherencia entre el concreto y el acero. Ciertamente es exacta en la zona a compresión del concreto. Una grieta en la zona a tensión del concreto implica que ha ocurrido cierto deslizamiento entre el refuerzo de acero y el concreto que le rodea, lo que quiere decir que la suposición no se aplica completamente al concreto en la vecindad de una grieta. Sin embargo, si se mide la deformación del concreto en una longitud calibrada que incluya varias grietas, se encuentra que el principio de Bernoulli es válido para esta deformación promedio de tensión. La figura 3.1 muestra las distribuciones de deformación en medidas de secciones de columnas de concreto reforzado cerca de las regiones de falla para distintos incrementos de cargas. Las secciones de las columnas cuadradas eran de 10 plg (254 mm) de lado y las redondas de 12 plg (305 mm) de diámetro. Las deformaciones en el acero se midieron en una longitud calibrada de 1 plg (25 mm) y las del concreto en una de 6 plg (150 mm). Se debe esperar cierta desviación de la linearidad, debido a

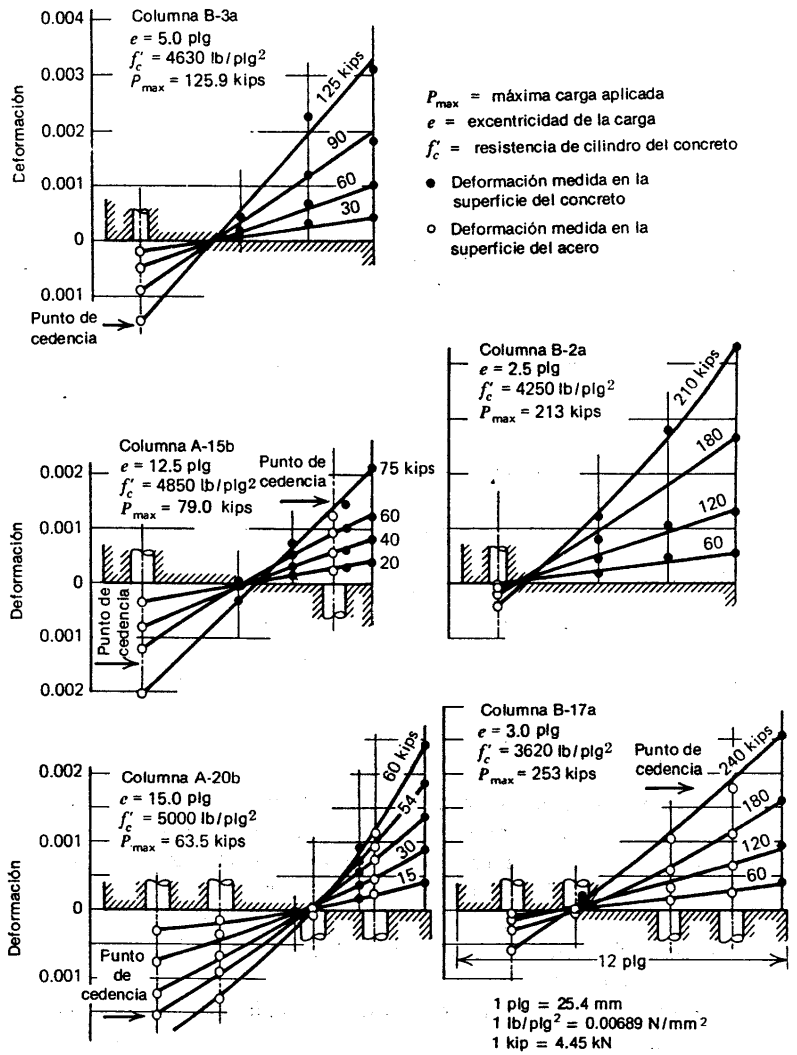


Figura 3.1 Distribución de deformaciones a través de secciones de columna de concreto reforzado para distintos incrementos de cargas.[3.1]

las pequeñas inexactitudes en las mediciones de las deformaciones individuales y los pequeños errores en la localización de las líneas del calibrador. De la figura 3.1 es evidente que los perfiles de deformación medida son razonablemente lineales. Ciertamente la suposición de que las secciones planas permanecen planas es suficientemente exacta para fines

de diseño. La suposición no es válida para vigas de gran peralte o en regiones de cortante elevado.

La segunda suposición significa que están bien definidas las propiedades esfuerzo - deformación del acero. Normalmente se supone una curva bilineal esfuerzo - deformación (vea la figura 2.25a); en consecuencia se desprecia el endurecimiento por deformación. En las especificaciones para el acero no se estipula el punto en que comienza el endurecimiento por deformación, por lo que es difícil incluirlo.Normalmente sería insensato confiar en cualquier aumento en la resistencia debida al endurecimiento por deformación debido a que esto estaría asociado con deformaciones muy grandes de los miembros. Cuando un aumento en la resistencia pueda provocar una condición desfavorable (es decir que produjera una falla frágil por cortante en vez de una falla dúctil a flexión en el diseño sísmico), el diseñador puede tomar en cuenta la resistencia adicional debido al endurecimiento por deformación, refiriéndose a la curva real esfuerzo - deformación para el acero.

La tercera suposición es casi exacta. Cualquier esfuerzo a tensión existente en el concreto debajo del eje neutro, es pequeño y tiene un pequeño brazo de palanca.

La cuarta suposición es necesaria para evaluar el verdadero comportamiento de la sección. Ya que las deformaciones en el concreto comprimido son proporcionales a la distancia desde el eje neutro, el perfil de las curvas esfuerzo - deformación de la figura 2.1 indica la forma del bloque de esfuerzo a compresión en distintas etapas de carga. La figura 3.2 presenta el aspecto cambiante del bloque de esfuerzos al aumentar el momento flexionante en una sección de viga. La sección alcanza su resistencia a flexión (momento máximo de resistencia) cuando la fuerza total de compresión en el concreto multiplicada por su brazo interno de palanca *jd* es un máximo. Se pueden definir las propiedades del bloque de esfuerzo

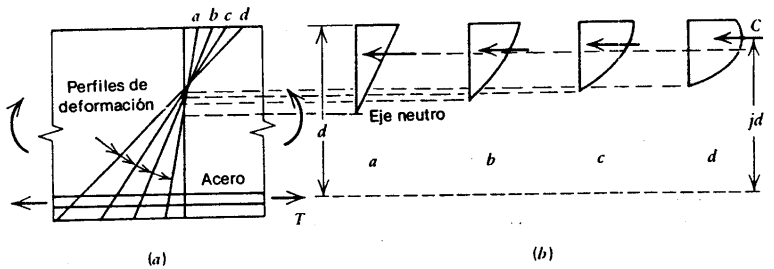


Figura 3.2. Distribución de deformaciones y esfuerzos en el concreto comprimido de una sección al aumentar el momento flexionante hasta la resistencia a flexión. (*a*) Elemento de viga. (*b*) Distribuciones del esfuerzo de compresión en el concreto correspondientes a los perfiles *a*, *b*, *c* y *d* de deformación.

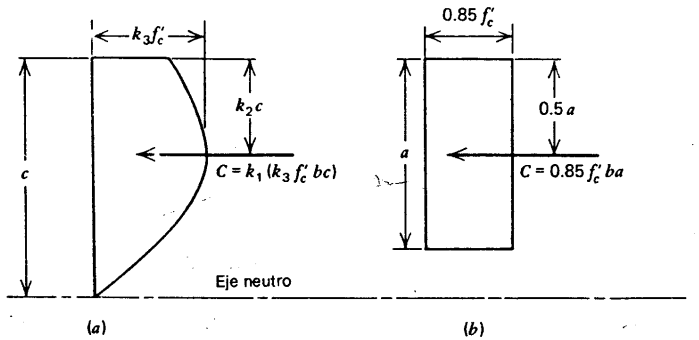


Figura 3.3. Distribución del esfuerzo de compresión en la zona comprimida de una sección de concreto rectangular. (*a*) Distribución real. (*b*) Distribución rectangular equivalente.

a compresión en la sección de momento máximo mediante los parámetros k_1, k_2, y k_3, como se muestra en la figura 3.3*a*. Para una sección rectangular de ancho b y peralte efectivo d, la fuerza total de compresión en el concreto se expresa como $k_1 k_3 f'_c bc$ y el brazo interno de palanca es $d - k_2 c$, en que c es la profundidad del eje neutro. Se ha investigado mucho para determinar la magnitud de estos parámetros para el concreto no confinado. El trabajo más notable ha consistido en pruebas a corto plazo realizadas por Hognestad y otros en la Asociación de Cemento Portland (PCA)[3.2] y por Rüsch.[3.3] Los especímenes utilizados en las pruebas de la PCA fueron semejantes a los que aparecen en la figura 3.4. La región de prueba del espécimen se cargó excéntricamente aumentando los dos empujes P_1 y P_2. Se variaron independientemente los empujes P_1 y P_2 de manera que se mantuviera el eje neutro (es decir, la fibra con deformación cero) en la cara inferior del espécimen en toda la prueba; en consecuencia, se simuló la distribución de esfuerzo en la zona a compresión de un miembro con

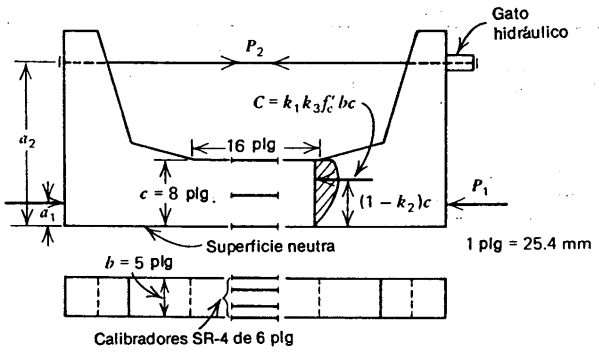


Figura 3.4. Espécimen de prueba de la Asociación de Cemento Portland. [3.2]

flexión. Igualando las fuerzas internas y externas y momentos, fue posible calcular directamente los valores de k_1, k_2, y k_3 obteniendo también la curva esfuerzo - deformación para el concreto ensayado. También se determinaron las curvas esfuerzo - deformación para el concreto partiendo de cilindros cargados axialmente y se encontró que eran semejantes a las curvas esfuerzo - deformación para el concreto en los especímenes. Sin embargo, para concreto de más alta resistencia, el esfuerzo máximo alcanzado en las muestras a la resistencia $k_3 f'_c$ de flexión fue ligeramente inferior a la resistencia en el espécimen. Las pruebas también determinaron la deformación unitaria ε_c del concreto en la fibra extrema a compresión bajo la resistencia de flexión. En la tabla 3.1 se proporcionan los valores que se encontraron para los parámetros del bloque de esfuerzos de concreto con agregados de arena-grava que variaron con la resistencia f'_c de cilindro. Estas cantidades corresponden a los valores máximos de $k_1 k_3$ encontrados en cada prueba.

Tabla 3.1 Parámetros del bloque de esfuerzos en la resistencia última a flexión de secciones rectangulares que encontraron las pruebas de la PCA en especímenes no confinados [3.2]

f'_c					
lb/plg²	N/mm²	k_1	k_2	k_3	ε_c
2000	13.8	0.86	0.48	1.03	0.0037
3000	20.7	0.82	0.46	0.97	0.0035
4000	27.6	0.79	0.45	0.94	0.0034
5000	34.5	0.75	0.44	0.92	0.0032
6000	41.4	0.71	0.42	0.92	0.0031
7000	48.3	0.67	0.41	0.93	0.0029

Las conclusiones de las pruebas de la PCA—es decir, que la curva esfuerzo - deformación para el concreto en compresión axial tiene notable similitud con la que se encuentra en especímenes cargados excéntricamente —se han cuestionado ocasionalmente. Por ejemplo, Sturman, Shan y Winter [3.4] realizaron pruebas en muestras cargadas excéntricamente y llegaron a la conclusión de que el pico de la curva para las muestras excéntricas ocurre a un esfuerzo 20% mayor y a una deformación 50% mayor que para las muestras concéntricas. La presencia de un gradiente de deformación puede no tener efecto significativo, pero en caso de tenerlo, este produce una mejora en las propiedades del bloque de esfuerzos a compresión. También cabe notar que la presencia de un gradiente de deformación demora la aparición de agrietamiento longitudinal en la zona a compresión.

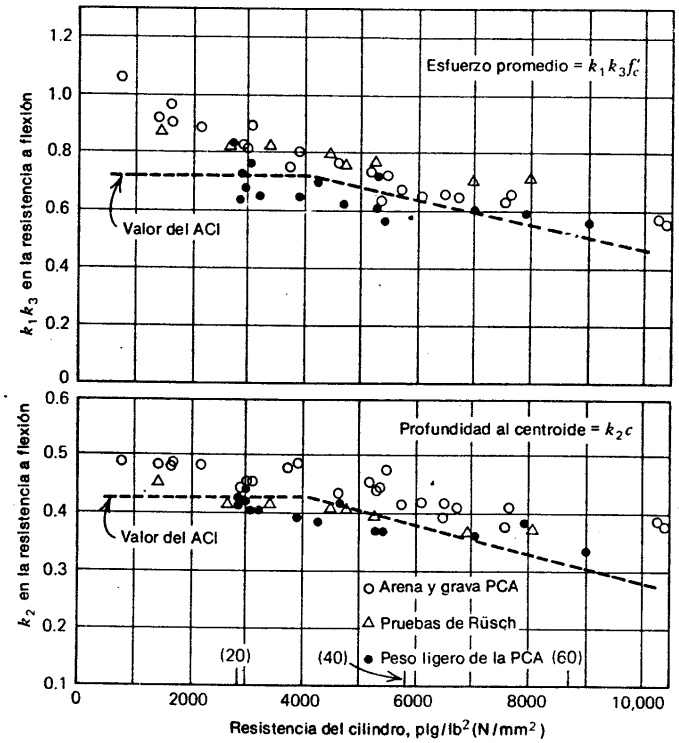


Figura 3.5. Propiedades de la distribución de esfuerzos de compresión en el concreto en la resistencia a flexión de una sección rectangular; comparación de los parámetros del ACI con los resultados de pruebas. [3.7]

3.2 BLOQUE DE ESFUERZOS RECTANGULAR EQUIVALENTE

Cierto número de investigadores (v. gr. Whitney[3.5]) han sugerido reemplazar el perfil actual del bloque de esfuerzo de concreto a compresión por un rectángulo equivalente, como medida de simplificación. Para obtener la resistencia a flexión, sólo se necesita conocer la magnitud (k_1k_3) y la posición (k_2) de la fuerza de compresión del concreto. El bloque de esfuerzo rectangular equivalente logra esto y facilita considerablemente los cálculos. La práctica norteamericana representada por el código [3.6] ACI, ha sido reemplazar el bloque actual de esfuerzos por un rectángulo equivalente (fig. 3.3*b*). El rectángulo tiene un esfuerzo medio de $0.85f'_c$ y una profundidad a, en que $a/c = \beta_1 = 0.85$ para $f'_c \leqslant 4000$ lb/plg² (17.6N/mm²); se reduce a β_1 continuamente en 0.05 por cada 1000 lb/plg² (6.89² N/mm²) de resistencia excedente de 4000 lb/plg² (27.6 N/mm²). La reducción de β_1 para el concreto de alta resistencia se debe principalmente al perfil menos favorable de la curva esfuerzo - deformación en ese tipo de concreto (véanse las figs. 2.1 y 2.2).

Para que las fuerzas resultantes de compresión de los bloques real y equivalente de esfuerzos de la figura 3.3 tengan la misma magnitud y línea de acción, los valores de los parámetros deben ser

$$C = k_1k_3 f'_c bc = 0.85f'_c ba \qquad \therefore \quad k_1k_3 = 0.85\frac{a}{c} = 0.85\beta_1 \qquad (3.1)$$

y

$$k_2c = 0.5a \qquad \therefore \quad k_2 = 0.5\frac{a}{c} = 0.5\beta_1 \qquad (3.2)$$

Los valores de k_1k_3 y k_2 obtenidos de las ecuaciones 3.1 y 3.2 con los valores recomendados del ACI para β_1 se comparan con los valores reales encontrados en las pruebas sobre muestras no confinadas por la PCA[3.2] y Rüsch [3.3] en la figura 3.5. Esta comparación proviene de una publicación debida a Mattock, Kriz y Hognestad. [3.7] Se ve que los valores recomendados para las propiedades del bloque rectangular de esfuerzos concuerdan bastante bien con los valores experimentales. La dispersión de los resultados experimentales indica claramente que no se justifica utilizar valores más complicados para los parámetros del bloque rectangular de esfuerzos. Además, hay muy pocos resultados experimentales en la figura 3.5 para resistencias del cilindro superiores a 8000 lb/plg² (55.2 N/mm²). Sin embargo, de la tendencia de los resultados en la figura es claro que los parámetros del bloque de esfuerzos del ACI son conservadores para resistencias de cilindro superiores a 8000 lb/plg². En efecto, podría considerarse que los parámetros del ACI son sumamente conservadores a elevadas resistencias del concreto.

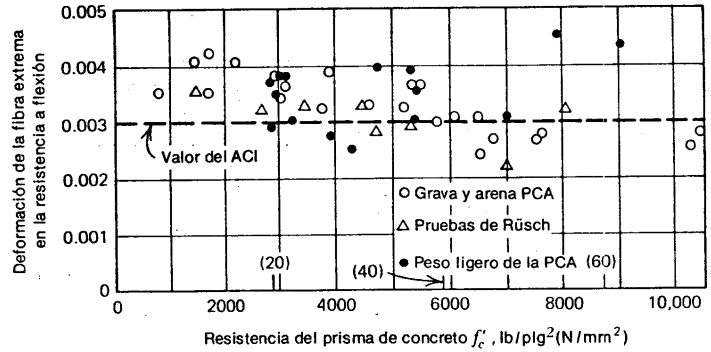


Figura 3.6. Deformación del concreto en la fibra extrema de compresión en la resistencia a flexión de una sección rectangular; comparación del valor del ACI con los resultados de pruebas. [3.7]

3.3 DEFORMACION DEL CONCRETO EN LA RESISTENCIA MAXIMA A FLEXION

La práctica norteamericana (ACI 318-71[3.6]) es recomendar una deformación utilizable máxima de 0.003 en la fibra extrema a compresión del concreto en la resistencia a flexión de la sección. Muchos investigadores han medido la deformación cuando k_1k_3 o el momento de resistencia de la sección son máximos. En la figura 3.6, que se obtuvo de la referencia 3.7, se muestran los valores obtenidos por la PCA[3.2] y por Rüsch[3.3] en muestras no confinadas. La figura indica que 0.003 es un valor razonablemente conservador. A esta deformación, el concreto comprimido en un miembro a flexión normalmente no muestra grietas visibles o desconchamiento, aunque la deformación es mayor que la correspondiente al esfuerzo máximo. Un cilindro cargado axialmente por lo general se agrieta mucho si se le deforma más alla del esfuerzo máximo, pero en las pruebas a flexión las grietas no se hacen visibles sino hasta alcanzar una mayor deformación, probablemente debido a la presencia del material menos deformado más próximo al eje neutro.

La resistencia calculada a flexión de una viga de concreto reforzado generalmente no es sensible al valor de la deformación máxima supuesta del concreto. La figura 3.7, tomada de Blume, Newmark y Corning,[3.8] destaca claramente esta cuestión: para una sección transversal de viga de

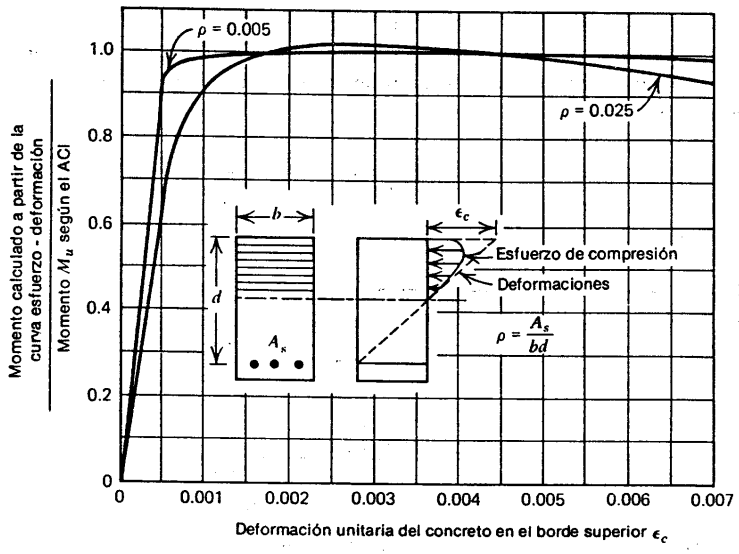


Figura 3.7. Curvas momento - deformación para una viga de concreto simplemente reforzada en base a las pruebas de compresión en cilindros.[3.8]

concreto reforzado simplemente y para dos cuantías de acero a tensión distintas, se ha graficado la relación del momento resistente calculado de una curva esfuerzo - deformación para el concreto al momento resistente calculado de acuerdo con el código ACI contra la deformación en la fibra extrema a compresión. La curva esfuerzo - deformación utilizada en el primer cálculo provino de cilindros que tenían una resistencia de aproximadamente 3600 lb/plg^2 (24.8 N/mm^2). El área bajo la curva esfuerzo - deformación y su centroide se determinaron para distintas deformaciones, estableciendo con ello los valores k_1k_3 y k_2 para una diversidad de deformaciones de la fibra extrema ε_c. Entonces se calcularon las capacidades de momentos de la sección, para los dos contenidos de acero, para distintas deformaciones en la fibra extrema, y se compararon con la resistencia a flexión, calculada de acuerdo con el código ACI. A una deformación a compresión en la fibra extrema de 0.007, la disminución en el momento de resistencia fue inferior a 1% para $\rho = 0.005$ y menor que 6% para $\rho = 0.025$. En consecuencia, el valor elegido para la deformación de la fibra extrema del concreto tiene poca influencia en la resistencia a flexión de las vigas dentro de límites extensos. Sin embargo, para columnas cargadas excéntricamente que fallan en compresión, los cambios en los parámetros del bloque de esfuerzos, que ocurren conforme la deformación de la fibra extrema aumenta, ocasionan que el cambio en resistencia a flexión con la deformación sea mayor.

En cambio, es evidente que la curvatura en una sección depende mucho del valor que se tome para la deformación de la fibra extrema. Para el cálculo de la curvatura última, parecería razonable tomar un valor mayor que 0.003. Blume, Newmark y Corning[3.8] recomiendan un valor de 0.004 para cálculos de curvatura última en concreto no confinado.

3.4 AREAS COMPRIMIDAS NO RECTANGULARES

Para los miembros en que el área comprimida de la sección de concreto no es rectangular, tales como vigas T y L con el eje neutro en el alma, o vigas y columnas con momentos flexionantes biaxiales, no son estrictamente aplicables los parámetros recomendados para el bloque equivalente rectangular de esfuerzos de áreas comprimidas rectangulares. Esto se debe a que el esfuerzo medio y el peralte del bloque rectangular equivalente de esfuerzos para distintas formas de área comprimida son distintos; adicionalmente, es distinta la deformación de la fibra extrema de concreto bajo el momento máximo. La figura 3.8 da la deformación a compresión de la fibra extrema en el concreto bajo el momento máximo para varias secciones transversales típicas calculada por Rüsch.[3.9] La curva representa la curva esfuerzo - deformación para el concreto y el perfil del bloque de esfuerzos a compresión en la sección. Se tomaron en cuenta dos casos matemáticamente extremos de posición del eje neutro. Los círculos sólidos

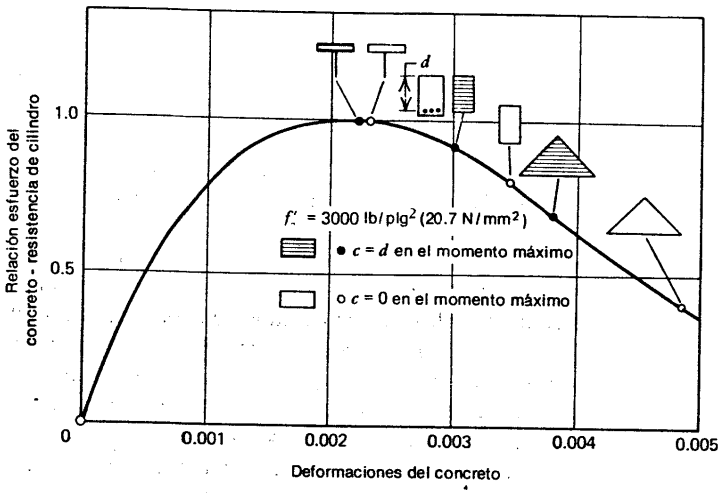


Figura 3.8. Efecto del perfil de una sección en la deformación del concreto en la fibra extrema de compresión a momento máximo. [3.9]

representan el caso del eje neutro en el centroide del acero a tensión; los círculos abiertos denotan el caso del eje neutro en la fibra extrema a compresión. El caso real de la mayoría de los miembros, se aloja entre estos dos extremos. La figura 3.8 claramente revela el efecto del perfil del área comprimida en la deformación de la fibra extrema bajo momento máximo. Por ejemplo, para una zona triangular a compresión, como ocurre en la flexión biaxial de columnas, la deformación a momento máximo puede ser del doble que para una sección *T*. Esta diferencia se debe a que, para la zona triangular, la mayor parte del área comprimida esta próxima al eje neutro, por lo que el momento máximo ocurre a una deformación relativamente grande de la fibra extrema, en tanto que para la sección *T* sucede lo contrario.

Trabajos posteriores de Rüsch y Stöckl[3.10] han producido parámetros del bloque de esfuerzos para áreas no rectangulares comprimidas. Sin embargo, de esta obra y de la de Mattock y Kritz[3.11] es evidente que a menos que se sobrerrefuerce intensamente la sección, se puede estimar con bastante exactitud la resistencia a flexión de las vigas con áreas comprimidas no rectangulares utilizando los parámetros del bloque de esfuerzos y la deformación de la fibra extrema obtenida de las áreas rectangulares comprimidas, debido a que no se afectan significativamente el brazo de palanca y las fuerzas internas. Para columnas con áreas comprimidas no rectangulares, utilizar parámetros en base a áreas comprimidas rectangulares puede no producir exactitud aceptable, debido a que las fuerzas de compresión son mayores y la distribución del esfuerzo de compresión del concreto tiene mayor influencia en la resistencia a flexión de la sección. Para secciones de columna sujetas a flexión biaxial, por ejemplo, puede ser necesario utilizar parámetros más exactos que se deriven de principios fundamentales implícitos en la curva esfuerzo - deformación para el concreto. Resumiendo, los parámetros que se obtienen para las áreas comprimidas rectangulares dan suficiente exactitud en el diseño de vigas, aunque deben utilizarse con cuidado para columnas que tengan áreas comprimidas no rectangulares.

3.5 EFECTOS DE LAS TASAS LENTAS DE CARGA Y DE LA CARGA SOSTENIDA

Los parámetros del bloque de esfuerzos que reportan la PCA[3.2] y Rüsch[3.3] se encontraron de pruebas de carga a corto plazo. Son interesantes los efectos de la tasa lenta de carga y de las cargas sostenidas. En la figura 2.5 se muestran varias curvas esfuerzo - deformación con las tasas lentas de carga. Sin embargo, no se puede considerar que estas curvas representen el perfil de los bloques de esfuerzos a compresión de los miembros a flexión, ya que cada una es para una tasa de deformación constante, en tanto que en un miembro con carga externa aplicada lentamente, la tasa de deformación varía a través de la zona a compresión, siendo un máximo en la fibra extrema de compresión y cero en el eje neutro. Sin embargo, se pueden calcular los parámetros del bloque de esfuerzos a compresión para tasas lentas de cargas partiendo de las curvas esfuerzo - deformación para distintas tasas de deformación. La mayor diferencia con respecto a los parámetros de carga a corto plazo se presenta en el caso de cargas sostenidas. Rüsch[3.9] ha reportado los resultados de pruebas en prismas de concreto que indican la influencia de cargas sostenidas en los parámetros del bloque de esfuerzos a compresión. La carga sostenida provoca una reducción en la resistencia del concreto y una mayor deformación a compresión en el desarrollo de la resistencia a flexión del miembro. En la discusión de la publicación [3.9] de Rüsch, Hognestad utilizó los parámetros del bloque de esfuerzos de carga sostenida de Rüsch para demostrar que la resistencia de las columnas podía ser hasta 10% menor que la dada utilizando los parámetros del bloque de esfuerzos rectangular con carga a corto plazo, aunque no fue notable la influencia de las cargas sostenidas en la resistencia de las vigas. Ya que no es irrazonable tener un factor de carga ligeramente menor para el caso de una sobrecarga sostenida, y puesto que el factor φ de reducción de capacidad utilizado para el diseño de columnas es bajo, es obvio que los parámetros del bloque de esfuerzos que se encuentran de las pruebas de cargas a corto plazo son satisfactorios para el diseño bajo todas las condiciones de carga.

3.6 RESUMEN DE RECOMENDACIONES PARA DETERMINAR LA RESISTENCIA DE SECCIONES CON FLEXION Y CARGA AXIAL

Se pueden resumir las suposiciones hechas para determinar la resistencia de secciones con flexión y carga axial como sigue:

1. Las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión.
2. Se puede considerar que la distribución del esfuerzo en el concreto es un rectángulo con un esfuerzo medio de $0.85f'_c$ y una profundidad desde el borde comprimido de $\beta_1 c$, en que c es la profundidad del eje neutro. El valor de β_1 es 0.85 para $f'_c \leqslant 4000$ lb/plg^2 (27.6 N/mm^2) y se reduce continuamente a razón de 0.05 por cada 1000 lb/plg^2 (6.89 N/mm^2) de resistencia que exceda los 4000 lb/plg^2 (27.6 N/mm^2).
3. Se puede despreciar la resistencia a tensión del concreto.
4. La deformación del concreto en la fibra extrema a compresión en la resistencia a flexión del miembro se puede considerar igual a 0.003.
5. Se puede considerar que el esfuerzo en el acero a resistencias inferiores a la de cedencia es igual a la deformación del acero multiplicada por el módulo de elasticidad de 29 X 10^6 lb/plg^2 (0.20 X 10^6 N/mm^2). Para deformaciones más elevadas a las correspondientes a la resistencia de cedencia, se puede considerar que el esfuerzo en el acero permanece igual a la resistencia de cedencia.
6. Se puede utilizar la distribución anterior de deformaciones y esfuerzos de compresión del concreto para vigas con áreas comprimidas no rectangulares; sin embargo, para columnas con áreas comprimidas no rectangulares, puede ser necesario utilizar parámetros más exactos, basados en la curva esfuerzo - deformación del concreto.
7. Se puede despreciar el efecto por cargas sostenidas.

La distribución del esfuerzo a compresión en el concreto también se puede tomar como cualquier perfil que resulte en una predicción confiable de la resistencia a flexión del miembro. Otras relaciones que se emplearon antes entre el esfuerzo a compresión y la deformación son curvas bilineales, parabólicas y parabólicas-lineales combinadas. El CEB-FIP [3.12] recomienda una curva común en Europa que consista en una parábola de segundo grado hasta una deformación de 0.002 seguida de una rama horizontal recta hasta una deformación de 0.0035. Sin embargo, el código ACI[3.6] recomienda la distribución rectangular de esfuerzos a compresión (véase la suposición 2 anterior) tomando en cuenta el efecto de la resistencia del concreto en el perfil del bloque de esfuerzos y que conduce a una deducción simple de las ecuaciones de la resistencia a flexión.

Otra diferencia entre la práctica del ACI y la europea consiste en la deformación máxima recomendada para el acero. Por ejemplo, las recomendaciones del CEB-FIP [3.12] limitan la deformación máxima a tensión en el acero en la resistencia a flexión del miembro a 0.01, en tanto que el código ACI [3.6] no impone limitación a la magnitud de la deformación del acero a tensión en la resistencia a flexión (véase la suposición 5). Esta restricción de la deformación del acero tiene poca influencia en la magnitud de la resistencia calculada a flexión, pero limita la deformación última calculada de un miembro. Ya que la deformación última del refuerzo de acero es mucho mayor que 0.01, es difícil ver la necesidad de esta restricción.

3.7 BIBLIOGRAFIA

3.1 E. Hognestad, "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members." University of Illinois Engineering Experimental Station Boletín No. 399, 1951, pág. 128.
3.2 E. Hognestad, N. W. Hanson, y D. McHenry, "Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design," *Journal ACI*, Vol. 52, No. 6, diciembre de 1955, págs. 455 - 479.
3.3 H. Rüsch, "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone," Boletín No. 120, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlín, 1955, pág. 94.
3.4 G. M. Sturman, S. P. Shah, y G. Winter, "Effect of Flexural Strain Gradients on Micro - cracking and Stress - Strain Behaviour of Concrete," *Journal ACI*, Vol. 62, No. 7, julio de 1965, págs. 805 - 822.
3.5 C. S. Whitney, "Plastic Theory of Reinforced Concrete Design", *Proceedings ASCE*, diciembre de 1940; *Transactions ASCE*, Vol. 107, 1942, págs. 251-326.
3.6 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318 - 71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.
3.7 A. H. Mattock, L. B. Kriz, y E. Hognestad, "Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design," *Journal ACI*, Vol. 57, No. 8, febrero de 1961, págs. 875 - 926.
3.8 J. A. Blume, N. M. Newmark, y L. H. Corning, "Design of Multistorey Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions," Portland Cement Association, Chicago 1961, pág. 318.
3.9 H. Rüsch, "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete," *Journal ACI*, Vol. 57, No. 1, julio de 1960, págs. 1-28. Discusión en *Journal ACI*, Vol. 57, No. 9, marzo de 1961, págs. 1147-1164.
3.10 H. Rüsch y S. Stöckl, "Versuche zur Festigkeit der Biegedruckzone Einflüsse der Querschnittsform," Boletín No. 207, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Berlín, 1969, págs. 27-68.
3.11 A. H. Mattock y L. B. Kriz, "Ultimate Strength of Nonrectangular Structural Concrete Members," *Journal ACI*, Vol. 57, No. 7, enero de 1961, págs. 737-766.
3.12 CEB - FIP, "International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures," Comité Européen du Beton Fédération Internationale de la Précontrainte. Paris, 1970. (La Cement and Concrete Association, de Londres, dispone de una traducción al inglés, pág. 88).

4

Resistencia de miembros sometidos a flexión

Las vigas son elementos estructurales que transmiten cargas externas transversales que provocan momentos flexionantes y fuerzas cortantes en su longitud. La resistencia a flexión de las secciones de las vigas se estudia en este capítulo.

4.1 SECCIONES RECTANGULARES

4.1.1 ANALISIS DE SECCIONES SIMPLEMENTE REFORZADAS

En la figura 4.1 aparece una sección de concreto simplemente reforzada, cuando se alcanza la resistencia a flexión en la sección. La fuerza resultante interna de tensión es

$$T = A_s f_s \tag{4.1}$$

en que A_s = área del acero y f_s = esfuerzo en el acero.

Como el espesor del acero es pequeño comparado con el peralte de la sección, se supone que el esfuerzo en toda el área del acero es uniforme e igual al esfuerzo en el centroide del área del acero.

La fuerza resultante interna de compresión es

$$C = 0.85 f'_c ab$$

donde a = peralte del bloque de esfuerzos rectangular equivalente
b = ancho de la sección
f'_c = resistencia del cilindro a compresión del concreto.

La expresión

$$jd = d - 0.5a \tag{4.3}$$

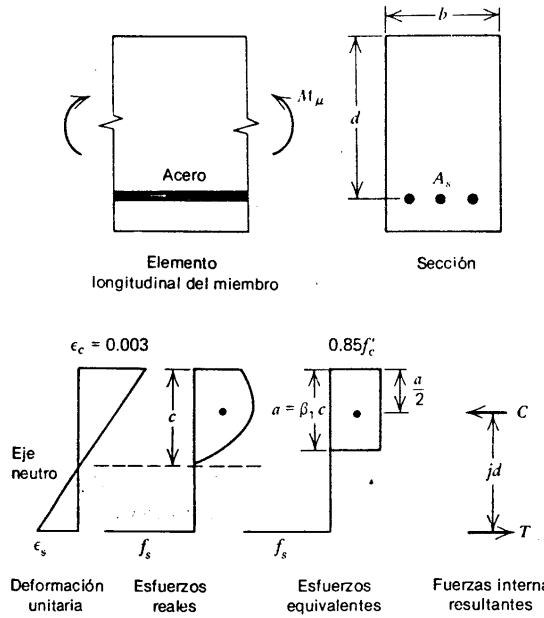


Figura 4.1. Sección de concreto simplemente reforzada cuando se alcanza la resistencia a flexión.

da la distancia entre las fuerzas internas resultantes, conocida como el brazo de palanca interno, en que d es la distancia desde la fibra extrema de compresión al centroide del área de acero, y se conoce como el peralte efectivo.

En consecuencia, el momento de resistencia es

$$M_u = Tjd = Cjd \tag{4.4}$$

A continuación se estudian los tipos de falla posible a flexión (tensión, compresión y balanceada) y la resistencia ideal a flexión de la sección.

Falla a tensión

Si el contenido de acero de la sección es bajo, el acero alcanza la resistencia f_y de cedencia antes que el concreto alcance su capacidad máxima. La fuerza del acero $A_s f_y$ permanece entonces constante a mayores cargas. Una ligera carga adicional ocasiona una elongación plástica grande del acero a través de las grietas de flexión, lo que produce un agrietamiento ancho y un aumento grande en la deformación en la fibra extrema a compresión del concreto. Debido a este aumento en la deformación, la distribución del esfuerzo de compresión en el concreto

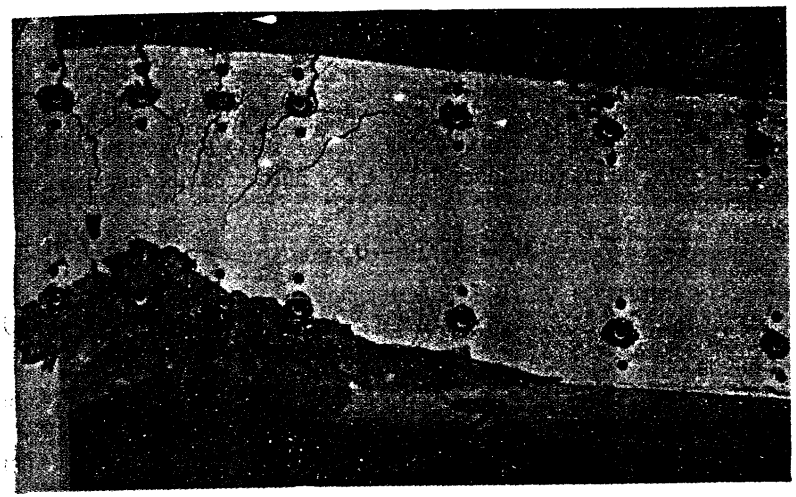


Figura 4.2. Falla a flexión de una viga de concreto reforzado.

deja de ser lineal, lo que produce un aumento en el esfuerzo medio del bloque de esfuerzos de compresión, y una reducción en la profundidad del eje neutro puesto que se debe mantener el equilibrio de las fuerzas internas. La reducción de la profundidad del eje neutro provoca un ligero aumento en el brazo de palanca, y por tanto en el momento de resistencia. La resistencia a flexión de la sección (momento máximo de resistencia) se alcanza cuando la deformación en la fibra extrema a compresión del concreto es aproximadamente 0.003, como se estudió en la sección 3.3. Con un mayor aumento en la deformación, gradualmente se reduce el momento de resistencia y comienza el aplastamiento en la región comprimida del concreto. La figura 3.2 muestra los cambios en la forma del bloque de esfuerzos del concreto durante la carga hasta la resistencia a flexión; la figura 4.2 muestra una viga en una junta de viga - columna después de probarla hasta la falla. En la viga ha ocurrido una falla a flexión debida a un momento positivo flexionante. (Las terminales a los lados de la viga permitieron realizar las mediciones de deformación). A este tipo de falla se le podría denominar más apropiadamente una "falla a tensión primaria", ya que la falla se inicia por cedencia del acero a tensión. Sin embargo, por brevedad se utiliza el término "falla a tensión". Nótese que el acero no se fractura en la resistencia a flexión de la sección, a menos que la cuantía de acero sea sumamente pequeña. Las deformaciones de acero muy altas, capaces de provocar la fractura, están asociadas con profundidades sumamente pequeñas del eje neutro.

Para una falla a tensión, $f_s = f_y$ en que f_y es la resistencia de cedencia del acero; por equilibrio, $C = T$. Consecuentemente, de las ecuaciones 4.1 y 4.2 obtenemos

$$0.85f'_c ab = A_s f_y \quad \therefore \quad a = \frac{A_s f_y}{0.85f'_c b} \tag{4.5}$$

Por lo tanto, de las ecuaciones 4.3 y 4.4 se pueden escribir las siguientes ecuaciones

$$M_u = A_s f_y(d - 0.5a)$$

$$= A_s f_y\left(d - 0.59\frac{A_s f_y}{f'_c b}\right) \tag{4.6a}$$

$$= \rho b d^2 f_y\left(1 - 0.59\frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{4.6b}$$

$$= bd^2 f'_c \omega(1 - 0.59\omega) \tag{4.6c}$$

en que $\rho = \frac{A_s}{bd}$ y $\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c}$

Falla a compresión

Si el contenido de acero de la sección es grande, el concreto puede alcanzar su capacidad máxima antes de que ceda el acero. En tal caso aumenta considerablemente la profundidad del eje neutro, lo que provoca un aumento en la fuerza de compresión. Esto se compensa ligeramente por una reducción en el brazo de palanca. Nuevamente se alcanza la resistencia a flexión de la sección cuando la deformación en la fibra a compresión extrema del concreto es aproximadamente 0.003. Entonces la sección falla repentinamente en forma frágil. Puede haber poca advertencia visible de la falla, debido a que los anchos de las grietas de flexión en la zona a tensión del concreto en la sección de falla son pequeñas, debido al bajo esfuerzo del acero.

Para una falla a compresión, $f_s < f_y$ ya que el acero permanece dentro del rango elástico. Se puede determinar el esfuerzo del acero en términos de la profundidad del eje neutro, considerando los triángulos semejantes del diagrama de deformaciones de la figura 4.1.

$$\frac{\varepsilon_s}{0.003} = \frac{d - c}{c} \quad \therefore \quad \varepsilon_s = 0.003\frac{d - c}{c} \tag{4.7}$$

$$\therefore \quad f_s = \varepsilon_s E_s = 0.003\frac{d - c}{c}E_s \tag{4.8a}$$

O, ya que $a = \beta_1 c$,

$$f_s = 0.003\frac{\beta_1 d - a}{a}E_s \tag{4.8b}$$

Por equilibrio, $C = T$, y por tanto de las ecuaciones 4.1 y 4.2 se tiene

$$0.85f'_c ab = A_s f_s = 0.003\frac{\beta_1 d - a}{a}E_s A_s$$

$$\therefore \quad \left(\frac{0.85f'_c}{0.003E_s\rho}\right)a^2 + ad - \beta_1 d^2 = 0 \tag{4.9}$$

Se puede obtener a de la ecuación 4.9, y de las ecuaciones 4.3 y 4.4 podemos obtener que

$$M_u = 0.85f'_c ab(d - 0.5a) \tag{4.10}$$

Falla balanceada

Para una cuantía específica de acero, éste alcanza la resistencia de cedencia f_y y simultáneamente el concreto alcanza la deformación a compresión de la fibra extrema de 0.003.

Entonces $\varepsilon_s = f_y/E_s$, y de los triángulos semejantes del diagrama de deformación de la figura 4.1 se puede escribir

$$\frac{f_y/E_s}{0.003} = \frac{d - c_b}{c_b}$$

en que c_b = profundidad del eje neutro para una falla balanceada

$$\therefore \quad c_b = \frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y}d \tag{4.11}$$

ó

$$a_b = \frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y}\beta_1 d \tag{4.12}$$

donde a_b = peralte del bloque de esfuerzos rectangulares equivalente para una falla balanceada

Por equilibrio, $C = T$; en consecuencia se tiene

$$0.85f'_c a_b d = A_s f_y = \rho_b b d f_y$$

en que

$$\rho_b = \frac{A_s}{bd}$$

para una falla balanceada

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c a_b}{f_y d} \tag{4.13}$$

Substituyendo la ecuación 4.12 en la ecuación 4.13 se obtiene

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \tag{4.14}$$

En el caso general cuando ρ para la sección es distinta de ρ_b, el tipo de falla que ocurre depende de si ρ es menor o mayor que ρ_b. La figura 4.3 muestra los perfiles de deformación en una sección en la resistencia a flexión para tres cuantías distintas de acero. La profundidad del eje neutro depende de la cuantía de acero, como lo indican las ecuaciones 4.5 y 4.9. Una inspección de la figura 4.3 revela que si ρ para la sección es menor que ρ_b, entonces $c < c_b$ y $\varepsilon_s > f_y/E_s$; en consecuencia ocurre una falla a tensión. Análogamente, si $\rho > \rho_b$ entonces $c > c_b$ y $\varepsilon_s < f_y/E_s$, y entonces ocurre una falla a compresión.

∴ cuando $\rho < \rho_b$, ocurre una falla a tensión

y

cuando $\rho > \rho_b$, ocurre una falla a compresión

Nótese que estas ecuaciones de resistencia dan la resistencia ideal a flexión de la sección, si las ecuaciones son científicamente correctas si los materiales tienen la resistencia especificada y si los tamaños reales son como se han supuesto.

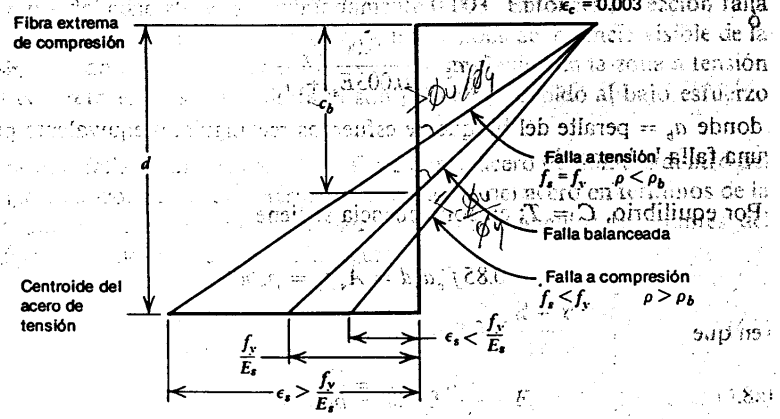


Figura 4.3. Perfiles de deformación en la resistencia a flexión de una sección.

Ejemplo 4.1

Una sección rectangular simplemente reforzada tiene un ancho de 10 plg²(254 mm) y un peralte efectivo de 18 plg (457 mm). El concreto tiene una resistencia de cilindro a compresión de 3000 lb/plg (20.7 N/mm²). El acero tiene un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb/plg (0.20×10^6 N/mm²) y una resistencia a la cedencia de 40,000 lb/plg (275.8 N/mm²). Calcular la resistencia ideal a flexión para las siguientes áreas de acero: (1) 4 plg²(2581 mm²), (2) 8 plg²(5161 mm²), y (3) la correspondiente a la falla balanceada

Solución

De la ecuación 4.14 podemos escribir

$$\rho_b = \frac{0.85 \times 3000 \times 0.85}{40{,}000} \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{0.003 \times 29 \times 10^6 + 40{,}000}$$

$$= 0.0371$$

1. $A_s = 4$ plg²

$$\therefore \rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4}{10 \times 18} = 0.0222 < \rho_b$$

En consecuencia, ocurre una falla a tensión.

De la ecuación 4.6*a* tenemos

$$M_u = 4 \times 40{,}000 \left(18 - 0.59 \frac{4 \times 40{,}000}{3000 \times 10}\right)$$

$$= 2.37 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}^2 \ (268 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

2. $A_s = 8$ plg²

$$\rho = \frac{8}{10 \times 18} = 0.0444 > \rho_b$$

En consecuencia, ocurre una falla a compresión.

De la ecuación 4.9 tenemos

$$\frac{0.85 \times 3000}{0.003 \times 29 \times 10^6 \times 0.0444} a^2 + 18a - 0.85 \times 18^2 = 0$$

$$\therefore a^2 + 27.27a - 417.3 = 0$$

La solución de la ecuación cuadrática da $a = 10.93$ plg (278 mm) (la otra raíz de la ecuación es negativa).

De la ecuación 4.10 tenemos

$$M_u = 0.85 \times 3000 \times 10.93 \times 10(18 - 0.5 \times 10.93)$$
$$= 3.49 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (394 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

3. $\rho = \rho_b = 0.0371$

De la ecuación 4.6*b* escribimos

$$M_u = 0.0371 \times 10 \times 18^2 \times 40{,}000\left(1 - 0.59\frac{0.0371 \times 40{,}000}{3000}\right)$$
$$= 3.41 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (385 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

La curva de la figura 4.4 ilustra la variación en la resistencia a flexión con el área de acero para la sección del ejemplo. La curva se determinó utilizando las ecuaciones como en el ejemplo 4.1 para una diversidad de áreas de acero e incluyendo la región de la falla a compresión. Es evidente que en la región de falla a tensión el momento de resistencia no aumenta linealmente con el área de acero. Esto se debe a que aunque la fuerza del

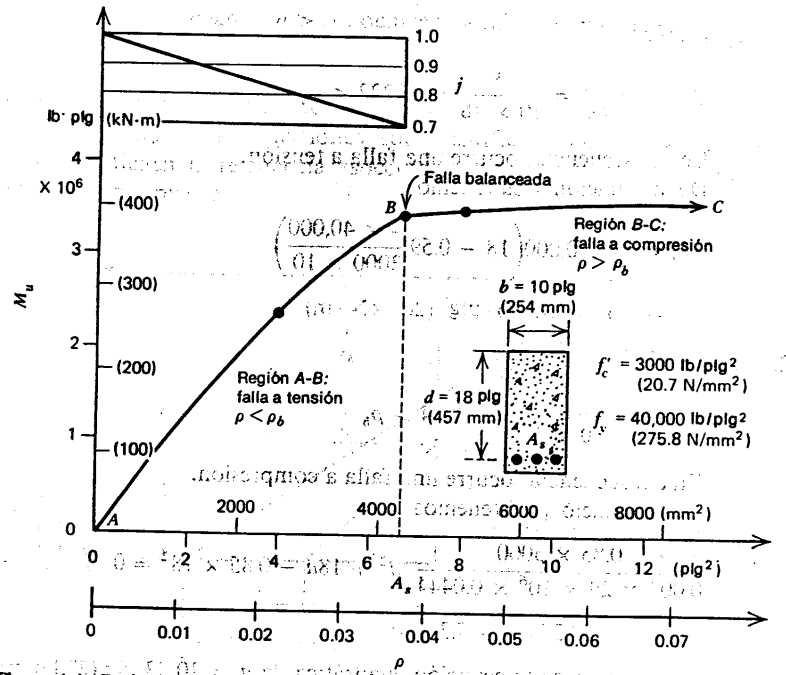


Figura 4.4. Resistencia a flexión de una sección de concreto simplemente reforzada con distintas cuantías de acero.

acero aumenta linealmente, hay una reducción en el brazo de palanca al aumentar la cuantía de acero. En el ejemplo, el coeficiente *j* del brazo de palanca, véase la figura 4.3, se reduce desde 1.00 cuando el área del acero es cero a 0.71 en la falla balanceada. En la región de falla a compresión el aumento en el momento de resistencia con el área de acero es sumamente pequeño, debido a que tanto el esfuerzo del acero como el brazo de palanca disminuyen al aumentar el área de acero en esta región. En consecuencia, hay poca resistencia a flexión adicional que ganar al aumentar el área de acero por encima de la correspondiente a una falla balanceada.

Es interesante notar que Whitney[4.1] propuso en 1937 las siguientes ecuaciones de resistencia: si

$$\rho \leq \rho_b, \quad M_u = \rho b d^2 f_y\left(1 - 0.59\frac{\rho f_y}{f'_c}\right) \tag{4.15}$$

ó

$$\rho > \rho_b, \quad M_u = 0.333 b d^2 f'_c \tag{4.16}$$

en donde

$$\rho_b = 0.456\frac{f'_c}{f_y} \tag{4.17}$$

Whitney basó estas ecuaciones en un bloque de esfuerzos de concreto rectangular, que él mismo dedujo, y que era idéntico al empleado en la actualidad. La ecuación de falla a la tensión de Whitney (ec. 4.15) es la misma que la ecuación 4.6 utilizada actualmente. Whitney encontró su valor para la cuantía balanceada de acero determinando de pruebas en vigas la cuantía de acero más allá de la cual un aumento de ella no producía un aumento aparente en la resistencia a la flexión. La ecuación 4.17 es esta cuantía de acero, y la fórmula de falla a compresión de Whitney (ec. 4.16) es el momento límite de resistencia. Aunque los encontró empíricamente, los valores de Whitney para ρ_b y M_u cuando $\rho > \rho_b$ son razonablemente exactos. Usando las ecuaciones 4.9, 4.10 y 4.14 se puede demostrar que para f_y en el rango de 40,000 a 60,000 lb/plg² (276 a 414 N/mm²) y f'_c en el rango 3000 a 6000 lb/plg² (20.7 a 41.4 N/mm²), el valor exacto para el coeficiente en la expresión de Whitney para ρ_b (ecuación 4.17) varía entre 0.377 y 0.495, y el coeficiente en la ecuación 4.16 para el momento de resistencia para una falla a compresión varía entre 0.294 y 0.351 en la falla balanceada.

4.1.2 Diseño de secciones simplemente reforzadas

En la sección 1.3 se estudió la utilización de las ecuaciones de resistencia con los factores de carga y factores de reducción de capacidad para garantizar la seguridad estructural.

Las fallas a la compresión son peligrosas en la práctica, debido a que ocurren repentinamente, dando poca advertencia visible además de ser frágiles. Sin embargo, las fallas a la tensión están precedidas por grietas grandes del concreto y tienen un carácter dúctil. Para asegurar que todas las vigas tengan características deseables de advertencia visible si la falla es inminente, al igual que ductilidad razonable en la falla, se recomienda [4.2] que el área del acero a tensión en las vigas simplemente reforzadas no exceda 0.75 del área para una falla balanceada. Es necesario limitar el área del acero a una fracción del área balanceada debido a que, como lo indica la ecuación 4.14, si la resistencia de cedencia del acero es mayor o la resistencia del concreto es menor, puede ocurrir una falla a compresión en una viga que esté cargada a la resistencia última.

En consecuencia, las vigas simplemente reforzadas se diseñan de manera que $\rho \leqslant 0.75\rho_b$ en que ρ_b está dada por la ecuación 4.14. En consecuencia, la cuantía de acero permisible máxima ρ_{max} es

$$\rho_{max} = 0.75 \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} \tag{4.18}$$

al sustituir $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 (0.20×10^6 N/mm^2) se obtiene

$$\rho_{max} = \frac{0.638 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{87{,}000}{87{,}000 + f_y} \tag{4.19a}$$

con esfuerzos en lb/plg^2, ó

$$\rho_{max} = \frac{0.638 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{600}{600 + f_y} \tag{4.19b}$$

con esfuerzos en newtons por milímetro cuadrado.
Adicionalmente, el valor permisible máximo para ω es

$$\omega_{max} = \frac{\rho_{max} f_y}{f'_c} \tag{4.20}$$

Se puede especificar igualmente el requerimiento de que $\rho \leqslant 0.75\rho_b$ como $a \leqslant 0.75a_b$, en que la ecuación 4.12 da el peralte del bloque de esfuerzos rectangulares para la falla balanceada a_b. Esto quiere decir que el peralte máximo permitido del bloque rectangular de esfuerzos de compresión es

$$a_{max} = 0.75a_b = 0.75 \frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} \beta_1 d \tag{4.21}$$

En el diseño, se utiliza una resistencia confiable de $\varphi \times$ resistencia ideal, en que φ es el factor de reducción de la capacidad. En consecuencia, de las ecuaciones 4.5 y 4.6, el momento resistente último de diseño es

$$M_u = \varphi A_s f_y \left(d - 0.59 \frac{A_s f_y}{f'_c b} \right) \tag{4.22a}$$

$$= \varphi \rho b d^2 f_y \left(1 - 0.59 \frac{\rho f_y}{f'_c} \right) \tag{4.22b}$$

$$= \varphi \omega b d^2 f'_c (1 - 0.59\omega) \tag{4.22c}$$

en que $\rho = \dfrac{A_s}{bd}$ y $\omega = \dfrac{\rho f_y}{f'_c}$

En el diseño, las variables en las ecuaciones 4.22 pueden ser b, d y A_s. Es evidente que hay un grupo de secciones satisfactorias que tienen las mismas resistencias, de manera que antes de que el diseñador pueda obtener una solución, se debe suponer el valor de una o más de estas variables.

Se pueden elaborar una gran cantidad de auxiliares de diseño en forma de tablas y gráficas, o se pueden encontrar ya publicadas. La tabla 4.1 da los valores para ρ_{max}, ω_{max}, y a_{max}/d de las ecuaciones 4.18, 4.20 y 4.21 para un rango de resistencias comúnmente usadas del acero y del concreto. Si el valor usado de ρ, ω, ó a/d en el diseño es menor que el valor máximo anotado en la tabla 4.1 para la resistencia dada del acero o del concreto, la cuantía de acero es satisfactoria. En las figuras 4.5*a* y 4.5*b* se grafican las curvas de Everard y Tanner [4.3] para ρ_{max} y ω_{max} contra la resistencia del acero a la cedencia para distintas resistencias del concreto.

La tabla 4.2, también de Everard y Tanner, [4.3] da una solución de la forma siguiente para la ecuación 4.6*c*:

$$\frac{M_u}{bd^2 f'_c} = \omega(1 - 0.59\omega) \tag{4.23}$$

Tabla 4.1 Coeficientes para secciones de concreto simplemente reforzadas.

f'_c lb/plg^2 (N/mm^2)	f_y lb/plg^2 (N/mm^2)	ρ_{max}	ω_{max}	a_{max}/d
3000 (20.7)	40,000 (276)	0.0278	0.371	0.437
3000 (20.7)	60,000 (414)	0.0160	0.322	0.377
4000 (27.6)	40,000 (276)	0.0371	0.371	0.437
4000 (27.6)	60,000 (414)	0.0214	0.321	0.377
5000 (34.5)	40,000 (276)	0.0437	0.350	0.411
5000 (34.5)	60,000 (414)	0.0252	0.302	0.355

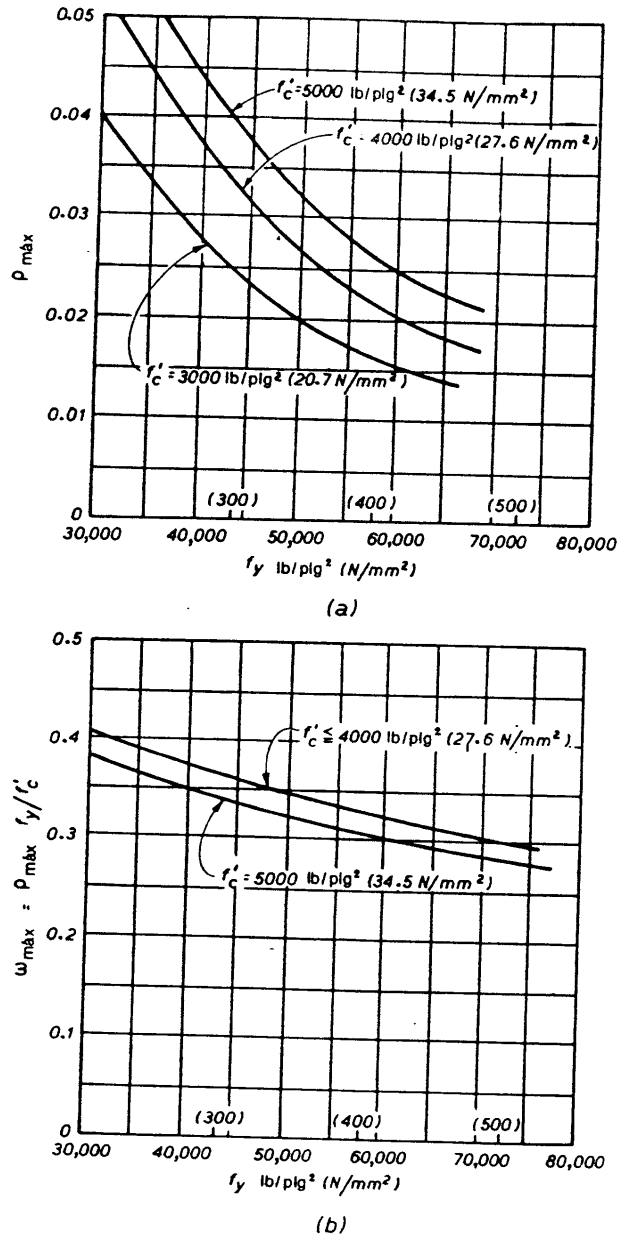


Figura 4.5. Curvas de diseño para una sección rectangular simplemente reforzada.[4.3] (*a*) ρ_{max}. (*b*) ω_{max}.

Tabla 4.2 Resistencia a flexión de una sección rectangular simplemente reforzada[a,b]

ω	.000	.001	.002	.003	.004	.005	.006	.007	.008	.009
	$M_u/f'_c bd^2$									
.0	0	.0010	.0020	.0030	.0040	.0050	.0060	.0070	.0080	.0090
.01	.0099	.0109	.0119	.0129	.0139	.0149	.0159	.0168	.0178	.0188
.02	.0197	.0207	.0217	.0226	.0236	.0246	.0256	.0266	.0275	.0285
.03	.0295	.0304	.0314	.0324	.0333	.0343	.0352	.0362	.0372	.0381
.04	.0391	.0400	.0410	.0420	.0429	.0438	.0448	.0457	.0467	.0476
.05	.0485	.0495	.0504	.0513	.0523	.0532	.0541	.0551	.0560	.0569
.06	.0579	.0588	.0597	.0607	.0616	.0625	.0634	.0643	.0653	.0662
.07	.0671	.0680	.0689	.0699	.0708	.0717	.0726	.0735	.0744	.0753
.08	.0762	.0771	.0780	.0789	.0798	.0807	.0816	.0825	.0834	.0843
.09	.0852	.0861	.0870	.0879	.0888	.0897	.0906	.0915	.0923	.0932
.10	.0941	.0950	.0959	.0967	.0976	.0985	.0994	.1002	.1011	.1020
.11	.1029	.1037	.1046	.1055	.1063	.1072	.1081	.1089	.1098	.1106
.12	.1115	.1124	.1133	.1141	.1149	.1158	.1166	.1175	.1183	.1192
.13	.1200	.1209	.1217	.1226	.1234	.1243	.1251	.1259	.1268	.1276
.14	.1284	.1293	.1301	.1309	.1318	.1326	.1334	.1342	.1351	.1359
.15	.1367	.1375	.1384	.1392	.1400	.1408	.1416	.1425	.1433	.1441
.16	.1449	.1457	.1465	.1473	.1481	.1489	.1497	.1506	.1514	.1522
.17	.1529	.1537	.1545	.1553	.1561	.1569	.1577	.1585	.1593	.1601
.18	.1609	.1617	.1624	.1632	.1640	.1648	.1656	.1664	.1671	.1679
.19	.1687	.1695	.1703	.1710	.1718	.1726	.1733	.1741	.1749	.1756
.20	.1764	.1772	.1779	.1787	.1794	.1802	.1810	.1817	.1825	.1832
.21	.1840	.1847	.1855	.1862	.1870	.1877	.1885	.1892	.1900	.1907
.22	.1914	.1922	.1929	.1937	.1944	.1951	.1959	.1966	.1973	.1981
.23	.1988	.1995	.2002	.2010	.2017	.2024	.2031	.2039	.2046	.2053
.24	.2060	.2067	.2075	.2082	.2089	.2096	.2103	.2110	.2117	.2124
.25	.2131	.2138	.2145	.2152	.2159	.2166	.2173	.2180	.2187	.2194
.26	.2201	.2208	.2215	.2222	.2229	.2236	.2243	.2249	.2256	.2263
.27	.2270	.2277	.2284	.2290	.2297	.2304	.2311	.2317	.2324	.2331
.28	.2337	.2344	.2351	.2357	.2364	.2371	.2377	.2384	.2391	.2397
.29	.2404	.2410	.2417	.2423	.2430	.2437	.2443	.2450	.2456	.2463
.30	.2469	.2475	.2482	.2488	.2495	.2501	.2508	.2514	.2520	.2527
.31	.2533	.2539	.2546	.2552	.2558	.2565	.2571	.2577	.2583	.2590
.32	.2596	.2602	.2608	.2614	.2621	.2627	.2633	.2639	.2645	.2651
.33	.2657	.2664	.2670	.2676	.2682	.2688	.2694	.2700	.2706	.2712
.34	.2718	.2724	.2730	.2736	.2742	.2748	.2754	.2760	.2766	.2771
.35	.2777	.2783	.2789	.2795	.2801	.2807	.2812	.2818	.2824	.2830
.36	.2835	.2841	.2847	.2853	.2858	.2864	.2870	.2875	.2881	.2887
.37	.2892	.2898	.2904	.2909	.2915	.2920	.2926	.2931	.2937	.2943
.38	.2948	.2954	.2959	.2965	.2970	.2975	.2981	.2986	.2992	.2997
.39	.3003	.3008	.3013	.3019	.3024	.3029	.3035	.3040	.3045	.3051
.40	.3056									

[a] De la referencia 4.3.

[b] El valor de M_u no incluye el efecto de φ.

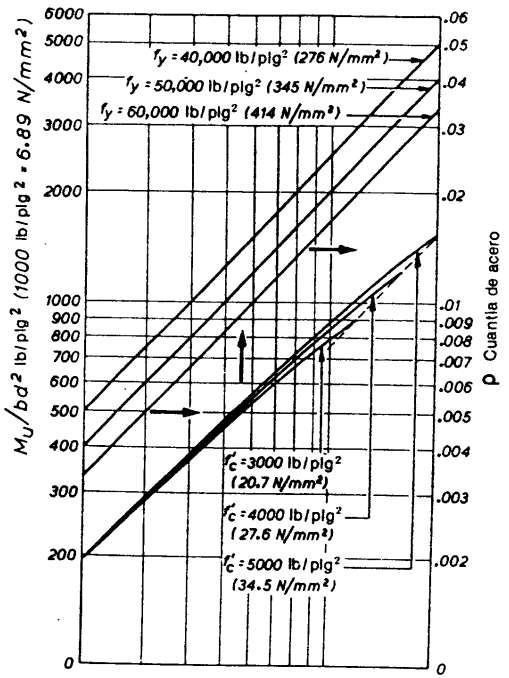


Figura 4.6. Resistencia a flexión de una sección rectangular simplemente reforzada.[4.4]

La primera columna de la tabla 4.2 da el valor de ω con dos decimales, y la primera hilera da el tercer decimal de ω. El resto de la tabla da los valores correspondientes para $M/bd^2f'_c$. Utilizando la tabla 4.2, se puede lograr el diseño de una sección rectangular para una resistencia a flexión determinada suponiendo un valor para ρ ú ω y resolviendo b y d. En caso contrario, se pueden suponer b y d y encontrar b y ω La tabla 4.2 es la solución para la resistencia ideal, por lo que debe modificarse el valor de M_u mediante $\varphi = 0.9$.

La figura 4.6, que es una gráfica que publicaron originalmente Whitney y Cohen,[4.4] también da una solución para la ecuación 4.23. Se puede entrar a la gráfica con el valor requerido de M_u/bd^2, barrer horizontalmente hasta encontrar el valor de f'_c luego verticalmente al valor de f_y y por último horizontalmente hasta el valor de ρ por utilizar. Si se supone ρ se puede encontrar M_u/bd^2 invirtiendo el procedimiento. Nuevamente, ya que la figura 4.6 es la solución para la resistencia ideal, se debe modificar M_u mediante el factor de reducción de capacidad.

El ACI[4.5] ha publicado un conjunto muy completo de auxiliares de diseño. La publicación contiene un extenso conjunto de tablas y gráficas

para valores especificados de f'_c y f_y lo que permite a uno obtener soluciones sumamente rápidas para las secciones.

También es posible utilizar un método de prueba y error para el diseño de secciones en el que se estima el brazo de palanca interno, $jd = d - 0.5a$. Este método puede ser conveniente debido a que el brazo de palanca interno no es muy sensible a la variación de la cuantía de acero dentro de los límites prácticos, como lo ilustra la figura 4.4. Más aun, este procedimiento le ayuda a uno a visualizar la localización de la resultante de la fuerza interna de compresión. El diseño mediante este método implica estimar jd, determinar la cuantía resultante de acero, determinar el peralte resultante del bloque a de esfuerzos rectangular para el área del acero, y verificar que a sea menor que a_{max} y que el valor supuesto inicialmente para jd sea correcto o al menos conservador.

En general, si se desea diseñar una sección de peralte mínimo, la cuantía de acero requerida será la máxima permisible, ρ_{max}. De la figura 4.5 es evidente que este tipo de diseño requiere una cuantía muy alta de acero. A menos que sea inevitable el usar un peralte muy pequeño, no es económico utilizar ρ_{max} y es preferible utilizar una sección más peraltada con menos acero. Además, las deflexiones de una viga con el mínimo peralte posible pueden ser excesivas y ser necesario el revisarlas. Una buena guía para obtener miembros razonablemente proporcionados son las relaciones de claro/peralte listadas en el código[4.2], del ACI, las que, si son excedidas requieren que se revise la deflexión del miembro.

Es posible diseñar vigas simplemente reforzadas mucho menos peraltadas al utilizar el método del diseño por resistencias que cuando se utiliza el método de diseño elástico basado en esfuerzos permisibles. (El método eléstico de diseño se describe en la sección 10.2.5). Por ejemplo, supóngase que f'_c = 3000 lb/plg² (20.7 N/mm²) y f_y = 40,000 lb/plg² (276 N/mm²). Una viga diseñada por el método elástico del ACI 318-71, f'_c con esfuerzos permisibles de 0.45 [4.2] en el concreto y 0.5 f_y en el acero alcanzados simultáneamente en el momento flexionante de la carga de servicio requiere una cuantía de acero, ρ = 0.00128. Sin embargo, el diseño por resistencias requiere una ρ_{max} = 0.0278, por lo que se puede utilizar una sección mucho menos peraltada. En consecuencia, existe un buen grado de libertad al elegir el tamaño de las secciones simplemente reforzadas en el diseño por resistencia.

Nótese que aunque se hizo ρ_{max} $0.75\rho_b$, para evitar la posibilidad de fallas a compresión, hay el peligro de utilizar acero "demasiado fuerte". Por ejemplo, una viga simplemente reforzada, que contiene la máxima cuantía permisible ρ_{max} de acero, con una resistencia de cedencia de diseño de 40,000 lb/plg² (276 N/mm²), falla en compresión, si la resistencia real de cedencia es mayor que 49,600 lb/plg² (342 N/mm²). En consecuencia, una resistencia de cedencia superior a la especificada podría conducir a una falla frágil, aunque a un momento superior de flexión. En forma

análoga, una resistencia inferior del concreto a la especificada puede conducir a una falla a compresión a un momento flexionante más bajo.

También es razonable estipular una cuantía mínima de refuerzo que siempre debería ser excedida. Ello es necesario debido a que si la cuantía de refuerzo es muy baja, la resistencia a flexión calculada en una sección de concreto reforzado es inferior al momento flexionante requerido para agrietar la sección, la falla es repentina y frágil. Para impedirlo, se recomienda[4.2] que la ρ en las vigas no sea inferior a $200/f_y$, en que f_y está en lb/plg², o $1.38/f_y$, en que f_y está en N/mm²). Esta cantidad se encontró igualando el momento de agrietamiento de la sección, (utilizando el módulo de ruptura de la sección de concreto simple), al momento de resistencia calculado en una sección de concreto reforzado y despejando la cuantía de acero.[4.6]

Ejemplo 4.2

Se desea que una sección rectangular simplemente reforzada de 12 plg (305 mm) de ancho transmita momentos flexionantes de carga de servicio de 0.75×10^6 lb plg (74.7 kN · m) por carga muerta y 1.07×10^6 lb plg (120.8 kN · m) por carga viva. Utilizando $f'_c = 3000$ lb/plg² (20.7 N/mm²) y $f_y = 60{,}000$ lb/plg² (414 N/mm²) diseñar la sección para (1) el peralte mínimo (2) un peralte efectivo de 27.4 plg (696 mm), y (3) un peralte total de 30 plg (762 mm) utilizando el método de prueba y error.

Solución

Según la ecuación 1.1, la resistencia U requerida es $U = 1.4D + 1.7L$, en que D y L son los momentos por carga muerta y viva de servicio respectivamente. En consecuencia, la resistencia a flexión debe ser

$$M_u = 1.4 \times 0.75 \times 10^6 + 1.7 \times 1.07 \times 10^6$$
$$= 2.87 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \quad (324 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

1. *Peralte mínimo*

El peralte es un mínimo si ρ es la máxima permitida. De la ecuación 4.19 tenemos

$$\rho = \rho_{max} = \frac{0.638 \times 3000 \times 0.85}{60{,}000} \frac{87{,}000}{87{,}000 + 60{,}000} = 0.0160$$

De la ecuación 4.22*b* tenemos

$$2.87 \times 10^6 = 0.9 \times 0.0160 \times 12$$

$$\times 60{,}000\left(1 - 0.59\frac{0.0160 \times 60{,}000}{3000}\right)d^2$$

$\therefore \quad d = 18.5$ plg (470 mm)

$\therefore \quad A_s = \rho bd = 0.160 \times 12 \times 18.5 = 3.55$ plg² (2290 mm²)

Ya que $200/f_y = 200/60{,}000 = 0.0033 < \rho$, es evidente que el área de refuerzo es satisfactoria. Se utilizaría un conjunto de varillas que tuviese esta área.

2. *Peralte efectivo de* 27.4 plg (696 mm)

De la ecuación 4.22*b* escribimos

$$2.87 \times 10^6 = 0.9 \times 12 \times 27.4^2 \times 60{,}000\rho\left(1 - 0.59\frac{60{,}000}{3000}\rho\right)$$

$\therefore \quad 11.8\rho^2 - \rho + 0.0059 = 0$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene $\rho = 0.00638$ como la raíz requerida.

$\therefore \quad A_s = \rho bd = 0.00638 \times 12 \times 27.4 = 2.10$ plg² (1353 mm²)

Es evidente que $\rho < \rho_{max}$ y $\rho > 200/f_y$; en consecuencia, el área de refuerzo es satisfactoria. Se utilizaría un conjunto de varillas que tuviera esta área.

3. *Peralte total de* 30 plg (762 mm)

El área del acero se determinará empíricamente. Supóngase un recubrimiento de 2 plg de concreto y una hilera de varillas del núm. 8 (25.4 mm de diámetro), que da preliminarmente $d = 30 - 2 - 0.5 = 27.5$ plg. Supóngase $j = 0.87$ (es decir, 0.26 < 0.377 0.26). De la tabla 4.1 encontramos que $a/d = 0.26$). $= a_{max}/d$; en consecuencia, la sección no está sobrerreforzada.

Sustituyendo en $M_u = \varphi A_s f_y jd$ el brazo de palanca supuesto, el área aproximada del acero es

$$A_s = \frac{2.87 \times 10^6}{0.9 \times 60{,}000 \times 0.87 \times 27.5} = 2.22 \text{ plg}^2$$

Esto se logra fácilmente en una capa de varillas. Se puede calcular la a/d resultante de esta área de acero utilizando la ecuación 4.5:

$$\frac{a}{d} = \frac{2.22 \times 60{,}000}{0.85 \times 3000 \times 12 \times 27.5} = 0.158$$

Ya que este valor de a/d es inferior al supuesto de 0.26, el brazo de palanca supuesto es más pequeño que el valor real, y la cuantía determinada de acero será inferior a $0.75\rho_b$. Ahora se puede hacer la selección de varillas. Obviamente utilizar tres varillas núm. 8, que dan 2.35 plg, será más que suficiente.

Ahora inténtese dos varillas del núm. 7 (22.2 mm de diámetro) y dos del núm. 6 (19.1 mm diámetro) lo que da $A_s = 2.08$ plg^2 (1342 mm^2). Entonces $a/d = 2.08 \times 0.158/2.22 = 0.148, j = 1 - 0.5 \times 0.148 = 0.926$, y la resistencia a flexión de la sección sería

$$M_u = \varphi A_s f_y jd = 0.9 \times 2.08 \times 60{,}000 \times 0.926 \times 27.6$$
$$= 2.87 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}$$

que es igual a la resistencia requerida a flexión. Se puede demostrar que para las propiedades de resistencia utilizadas en el ejemplo, siempre se satisfarán las limitaciones de la cuantía de acero si $0.1 < a/d < 0.35$. Los diseñadores recuerdan fácilmente estos valores redondeados.

En la parte 1 del ejemplo anterior se necesitó resolver una ecuación cuadrática para determinar la cuantía de acero (o áreas) para una sección de dimensiones dadas. La ecuación cuadrática tiene dos raíces reales, y siempre se toma la raíz más pequeña en el diseño. En la figura 4.7 se ilustra la razón de ello, donde aparece una gráfica de M_u contra ρ para una sección reforzada simple. La curva sólo es válida cuando $0 < \rho < \rho_{max}$, pero la solución de la cuadrática da como raíz alternativa el valor de ρ para el punto en que la rama descendente de la curva se reduce al momento de diseño.

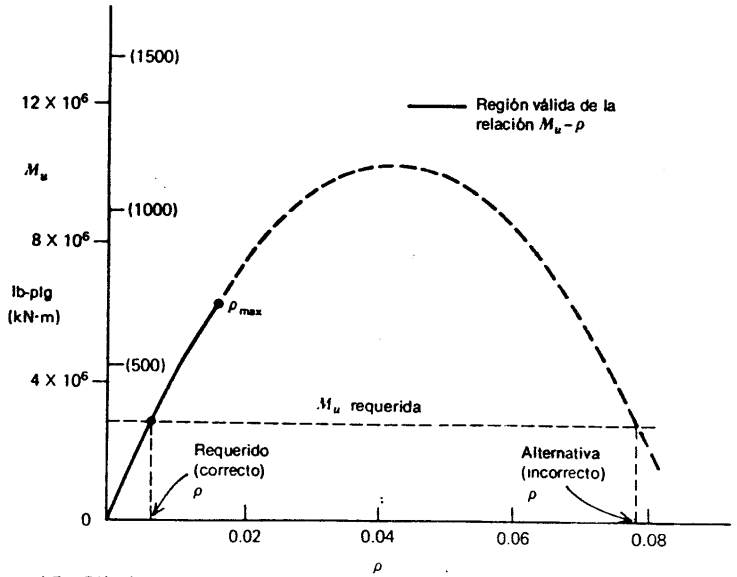


Figura 4.7. Cálculo de la cuantía correcta de acero para determinada sección y resistencia a flexión.

La solución del ejemplo se simplifica refiriéndose a la tabla 4.2 o a la figura 4.6. Por ejemplo, en el apartado 2 anterior, si se calcula $M_u/bd^2f'_c$ la tabla da el valor correspondiente de ω de donde se puede determinar A_s.

Es interesante comparar los resultados de este ejemplo de diseño con los que se obtienen utilizando el método alterno de diseño del ACI 318-71,[4.2] descrito en la sección 10.2.5. Para las resistencias arriba especificadas del acero y del concreto, la relación modular sería 9 y los esfuerzos permisibles serían 24,000 lb/plg^2(165 N/mm^2) para el acero y 1350 lb/plg^2 (9.31 N/mm^2) para el concreto. Un diseño en que se desarrollen simultáneamente los esfuerzos permisibles en el acero y en el concreto a la carga de servicio requiere d 27.4 plg (696 mm) y $A_s = 3.11$ plg^2 (2006 mm^2). Esta se puede comparar con las 2.10 plg^2 (1353 mm^2) requeridas para este peralte efectivo por el método de diseño por resistencia en el ejemplo. La notable diferencia en la cuantía de acero que se requiere por los dos enfoques en este ejemplo se debe al bajo esfuerzo permisible para el acero. Para un peralte efectivo más pequeño que 27.4 plg (696 mm), un diseño por el método alternativo de diseño en base a los esfuerzos de trabajo, requeriría una sección doblemente reforzada y mucho más acero que para la sección simplemente reforzada y diseñada por el método de las resistencias.

4.1.3 Análisis de secciones doblemente reforzadas

La figura 4.8 muestra una sección doblemente reforzada, cuando se alcanza la resistencia a flexión. Dependiendo de las áreas y posiciones del acero, el acero a tensión y a compresión puede estar o no en la resistencia de cedencia cuando se alcanza el momento máximo. Sin embargo, la mejor forma de desarrollar el análisis de esa sección es suponiendo primero que todo el acero está cediendo, modificando luego los cálculos si se encuentra que parte o todo el acero no está en tal condición.

Si todo el acero está en cedencia, $f_s = f'_s = f_y$, en que f_s es el esfuerzo en el acero a tensión, f'_s es el esfuerzo en el acero a compresión, y f_y es la resistencia de cedencia del acero. Entonces las fuerzas internas resultantes son:

compresión en el concreto

$$C_c = 0.85 f'_c ab \tag{4.24}$$

compresión en el acero

$$C_s = A'_s f_y \tag{4.25}$$

en que A'_s = área del acero a compresión tensión en el acero

$$T = A_s f_y \tag{4.26}$$

en que A_s = área del acero a tensión.

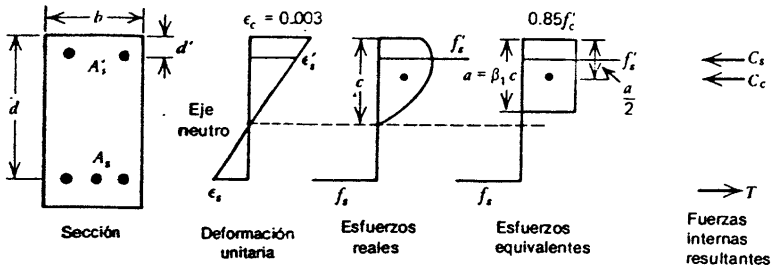


Figura 4.8. Sección de concreto doblemente reforzada cuando se alcanza la resistencia a flexión.

Por equilibrio, escribimos

$$C = C_c + C_s = T \qquad \therefore \quad 0.85 f'_c ab + A'_s f_y = A_s f_y$$

$$\therefore \quad a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b} \tag{4.27}$$

Ahora se puede utilizar el diagrama de deformaciones para verificar si el acero está cediendo. El acero está en esfuerzo de cedencia, si su deformación excede f_y/E_s. De los triángulos semejantes en el diagrama de deformaciones tenemos

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \tag{4.28}$$

$$\varepsilon_s = 0.003 \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} \tag{4.29}$$

$$\therefore \quad f'_s = f_y \qquad \text{Si} \quad 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} \geqslant \frac{f_y}{E_s} \tag{4.30}$$

y

$$f_s = f_y \qquad \text{Si} \quad 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} \geqslant \frac{f_y}{E_s} \tag{4.31}$$

Si se mantienen estas condiciones, es correcta la suposición de que todo el acero está cediendo y tomando momentos alrededor del acero a tensión, la resistencia a flexión está dada por

$$M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y (d - d') \tag{4.32}$$

en que la ecuación 4.27 da a.

Cuando las comprobaciones mediante las ecuaciones 4.30 y 4.31 revelan que el acero no está cediendo, el valor de a calculado de la ecuación 4.27 es incorrecto, y se debe calcular el esfuerzo real del acero y a a partir de la ecuación de equilibrio y del diagrama de deformación: en consecuencia, de la ecuación de equilibrio se tiene en general

$$a = \frac{A_s f_s - A'_s f'_s}{0.85 f'_c b} \tag{4.33}$$

en que del diagrama de deformaciones

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s \qquad \text{or} \quad f_y \tag{4.34}$$

$$f_s = \varepsilon_s E_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} E_s \qquad \text{or} \quad f_y \tag{4.35}$$

y entonces

$$M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s (d - d') \tag{4.36}$$

En las vigas doblemente reforzadas pueden ocurrir fallas a tensión y a compresión, igual que en vigas simplemente reforzadas. En las fallas a tensión cede el acero a tensión, pero en las fallas a compresión el acero a tensión permanece dentro del rango elástico; en ambos tipos de falla el acero a compresión puede o no estar cediendo. En las vigas reales el acero a tensión siempre estará cediendo y con mucha frecuencia la deformación en el nivel del acero de compresión es suficiente grande para que igualmente ese acero esté en esfuerzo de cedencia. A mayor valor de a, y a menores valores de d' y f_y, es más probable que el acero a compresión esté cediendo. En vez de desarrollar ecuaciones generales para todos los casos, es mejor deducir cada caso numéricamente a partir de los principios fundamentales. En caso necesario, se pueden obtener las ecuaciones generales de una publicación de Mattock, Kriz, y Hognestad. [4.7] El siguiente ejemplo ilustra el enfoque numérico.

Ejemplo 4.3

Una sección rectangular doblemente reforzada tiene las siguientes propiedades: b = 11 plg (279 mm), d = 20 plg (508 mm), d' = 2 plg (51 mm), A'_s = 1 plg^2 (645 mm^2), A_s = 4 plg^2 (2581 mm^2), E_s = 29 × 10^6 lb/plg^2 (0.2 × 10^6 N/mm^2), y f_y = 40,000 lb/plg^2 (276 N/mm^2). Calcular la resistencia ideal a flexión si (1) f'_c = 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2), y (2) f'_c = 5000 lb/plg^2 (34.5 N/mm^2).

Solución

1. Si $f'_c = 3000$ lb/plg^2 (20.7 N/mm^2)

Supóngase que todo el acero está cediendo.

$$C_c = 0.85 f'_c ab = 0.85 \times 3000 \times a \times 11 = 28{,}050a \text{ lb}$$

$$C_s = A'_s f_y = 1 \times 40{,}000 = 40{,}000 \text{ lb}$$

$$T = A_s f_y = 4 \times 40{,}000 = 160{,}000 \text{ lb}$$

pero $C_c + C_s = T$.

$$\therefore \quad a = \frac{160{,}000 - 40{,}000}{28{,}050} = 4.28 \text{ plg}$$

Y puesto que $\beta_1 = 0.85$, $c = a/\beta_1 = 4.28/0.85 = 5.03$ plg.
La deformación de cedencia es $f_y/E_s = 40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$. Compruébense los esfuerzos en el acero refiriéndose al diagrama de deformaciones (véase la fig. 4.8)

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{5.03 - 2}{5.03} = 0.00181 > \frac{f_y}{E_s}$$

$$\therefore \quad f'_s = f_y$$

$$\varepsilon_s = 0.003 \frac{d - c}{c} = 0.003 \frac{20 - 5.03}{5.03} = 0.00892 > \frac{f_y}{E_s}$$

$$\therefore \quad f_s = f_y$$

Por lo tanto, todo el acero está cediendo tal como se supuso.

$$\therefore \quad M_u = C_c(d - 0.5a) + C_s(d - d')$$
$$= 28{,}050 \times 4.28(20 - 2.14) + 40.000(20 - 2)$$
$$= 2.86 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (323 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

2. Si $f'_c = 5000$ lb/plg^2 (34.5 N/mm^2).
Supóngase que todo el acero está cediendo.

$$C_c = 0.85 \times 5000 \times a \times 11 = 46{,}750a \text{ lb}$$

$$C_s = 1 \times 40{,}000 = 40{,}000 \text{ lb}$$

$$T = 4 \times 40{,}000 = 160{,}000 \text{ lb}$$

$$\therefore \quad a = \frac{160{,}000 - 40{,}000}{46{,}750} = 2.57 \text{ plg}$$

y puesto que $\beta_1 = 0.8$, $c = 2.57/0.8 = 3.21$ plg. La deformación de cedencia del acero es 0.00138, y se pueden verificar los esfuerzos en el acero refiriéndose al diagrama de deformaciones.

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{3.21 - 2}{3.21} = 0.00113 < \frac{f_y}{E_s} \quad \therefore \quad f'_s < f_y$$

$$\varepsilon_s = 0.003 \frac{20 - 3.21}{3.21} = 0.0157 > \frac{f_y}{E_s} \quad \therefore \quad f_s = f_y$$

En consecuencia, el acero a compresión no está cediendo (aunque el acero a tensión sí lo está), y los valores anteriores C_s y a son incorrectos. Se puede determinar el valor real de ε'_s en función de a a partir del diagrama de deformaciones, y ya que el acero a compresión sigue siendo elástico, se tiene

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} E_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s$$

$$\therefore \quad C_s = A'_s f'_s = 1 \times 0.003 \times \frac{a - 0.8 \times 2}{a} \times 29 \times 10^6$$
$$= 87{,}000 \frac{a - 1.6}{a} \text{ lb}$$

Pero $C_c + C_s = T$.

$$\therefore \quad 46{,}750a + 87{,}000 \frac{a - 1.6}{a} = 160{,}000$$

$$\therefore \quad a^2 - 1.561a - 2.978 = 0$$

La solución de la ecuación cuadrática da $a = 2.68$ plg.

$$\therefore \quad C_s = 87{,}000 \frac{2.68 - 1.6}{2.68} = 34{,}960 \text{ lb}$$

$$\left(\therefore \quad f'_s = \frac{C_s}{A'_s} = \frac{34{,}960}{1} = 34{,}960 \text{ lb/plg}^2 \right)$$

$$\therefore \quad C_c = 46{,}750 \times 2.68 = 125{,}060 \text{ lb}$$

(Nótese que $C_c + C_s = 160{,}020$ lb $= T$; en consecuencia, se comprueba el equilibrio).

$$\therefore \quad M_u = C_c(d - 0.5a) + C_s(d - d')$$
$$= 125{,}060(20 - 1.34) + 34{,}960(20 - 2)$$
$$= 2.96 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (334 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Es interesante notar que el aumento de la resistencia del concreto desde 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2) hasta 5000 lb/plg^2 (34.5 N/mm^2) en el ejemplo 4.3 representó poca diferencia en la resistencia a flexión, lo que constituye una característica de las vigas de concreto reforzado que fallan a tensión. Más aun, si no hubiera estado presente el acero a compresión en la sección, ambas vigas hubieran fallado aun en tensión y la resistencia a flexión hubiera sido 2.74×10^6 lb plg^2 (309 kN · m) para $f'_c = 3000$ lb/plg^2 (20.7

N/mm^2), y 293 × 10^6 lb plg (331 kN · m) para f'_c = 5000 lb/plg^2 (34.5 N/mm^2). En consecuencia, la presencia del acero a compresión no ha incrementado la resistencia última de las secciones en la magnitud que uno podría haber esperado, lo que es otra característica de las vigas que fallan en tensión, especialmente cuando la cuantía ρ de acero es bastante menor que ρ_b.

4.1.4 Diseño de secciones doblemente reforzadas

Se puede requerir el acero a compresión en el diseño por las siguientes razones:

1. Cuando se utiliza una viga de poco peralte, la resistencia a flexión obtenida utilizando ρ_{max} puede ser insuficiente. Se puede elevar el momento resistente colocando acero a compresión y más acero a tensión. Es raro que ocurra esto en el diseño, debido a que los valores de ρ_{max} permitidos por el método de diseño por resistencias son mucho mayores que el valor ρ balanceado de las vigas diseñado por el método alternativo de diseño (método del esfuerzo de trabajo). Por ejemplo, para vigas con f'_c = 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2) y f_y = 40,000 lb/plg^2 (276 N/mm^2), la ρ_{max} del diseño por resistencia es 0.0278 y la ρ balanceada del diseño del esfuerzo de trabajo es 0.0128. En consecuencia, aunque a menudo se necesita acero a compresión en el método de diseño del esfuerzo de trabajo, rara vez se requiere en el método de diseño por resistencias aumentar la resistencia a flexión.

2. Se puede utilizar el acero a compresión en el diseño para aumentar la ductilidad de la sección en la resistencia a flexión. Es evidente que si hay acero a compresión en una sección, la profundidad del eje neutro es menor, debido a que la fuerza interna de compresión la comparten el concreto y el acero a compresión. En consecuencia, la curvatura última (dada por ε_c/c) de la sección con acero a compresión será mayor (vea la sección 6.3.1).

3. Se puede utilizar el acero a compresión para reducir la deflexión de las vigas bajo la carga de servicio. Las vigas simplemente reforzadas que contienen ρ_{max} tienen esfuerzos elevados en el concreto bajo la carga de servicio. Por ejemplo, la viga simplemente reforzada diseñada para un peralte mínimo en el ejemplo 4.2 con f'_c = 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2) tiene un esfuerzo máximo en el concreto de 2490 lb/plg^2 (17.2 N/mm^2), bajo la carga de servicio, de acuerdo con la teoría elástica que ignora el flujo plástico, aunque el esfuerzo en el acero es aproximadamente de la mitad (54%) de la resistencia de cedencia. El esfuerzo real en el concreto es menor, debido al perfil curvo del bloque real de esfuerzos, aunque claramente la deformación del concreto es elevada y las deflexiones pueden ser grandes. Se pueden disminuir las deflexiones reduciendo el esfuerzo que toma el concreto. Esto se logra colocando acero de compresión en la sección.

El acero de compresión también reduce las deflexiones a largo plazo de las vigas bajo las cargas de servicio, debido a que, cuando el concreto comienza a fluir plásticamente, la fuerza de compresión en la viga tiende a transferirse del concreto al acero. En consecuencia se disminuye el esfuerzo en el concreto y se reduce mucho la deflexión por flujo plástico. El acero de compresión también reduce las curvaturas debidas a la contracción del concreto.

4. A menudo el análisis de las combinaciones posibles de cargas externas revelan que el momento flexionante puede cambiar de signo, lo que es común para las vigas de marcos continuos bajo cargas de gravedad y laterales. Estos miembros requieren refuerzo cerca de ambas caras para transmitir las fuerzas posibles de tensión y consecuentemente actúan como miembros doblemente reforzados. En la evaluación de la resistencia a flexión de las secciones, siempre es conservador ignorar la presencia del acero de compresión. Sin embargo, en determinados casos puede requerirse una evaluación exacta de la resistencia a flexión de la sección, incluyendo el efecto del acero de compresión.

La ecuación 4.32 da el momento resistente de diseño de una viga doblemente reforzada, suponiendo que todo el acero está cediendo,

$$M_u = \varphi\left[0.85f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y(d - d')\right] \tag{4.37}$$

en que

$$a = \frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85f'_c b} \tag{4.38}$$

Ya que para el equilibrio, $0.85f'_c ab = (A_s - A'_s)f_y$, se puede escribir la ecuación 4.37 como

$$M_u = \varphi\left[(A_s - A'_s)f_y\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y(d - d')\right] \tag{4.39}$$

en que la ecuación 4.38 da a.

Las ecuaciones 4.37 a 4.39 suponen que el acero a compresión está cediendo, lo que se puede verificar considerando el diagrama de deformaciones de la figura 4.8. De los triángulos semejantes del mismo diagrama, para que el acero a compresión fluya, se necesita que

$$\varepsilon'_s = 0.003\frac{c - d'}{c} = 0.003\frac{a - \beta_1 d'}{a} \geq \frac{f_y}{E_s}$$

Esto requiere que

$$a \geq \frac{0.003E_s}{0.003E_s - f_y}\beta_1 d' \tag{4.40}$$

Igualando las ecuaciones 4.38 y 4.40 se ve que para que el acero a compresión esté cediendo se debe tener

$$\frac{(A_s - A'_s)f_y}{0.85f'_c b} \geqslant \frac{0.003E_s}{0.003E_s - f_y}\beta_1 d'$$

ó,

$$\rho - \rho' \geqslant \frac{0.85f'_c\beta_1 d'}{f_y d}\frac{0.003E_s}{0.003E_s - f_y} \tag{4.41}$$

Si el acero a compresión no está cediendo, se puede encontrar el esfuerzo en él en términos de a, utilizando el diagrama de deformaciones. Se debe utilizar entonces este esfuerzo f'_s real en vez de f_y para el acero a compresión en la ecuación para la resistencia a flexión. El esfuerzo a sustituir es

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.003\frac{a - \beta_1 d'}{a}E_s \tag{4.42}$$

Las ecuaciones de diseño quedan como

$$M_u = \varphi\left[0.85f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s(d - d')\right] \tag{4.43}$$

en que

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f'_s}{0.85f'_c b} \tag{4.44}$$

en que f'_s está dada por la ecuación 4.42.

Las ecuaciones 4.37 a 4.44 de diseño también suponen que el acero a tensión está cediendo. Es esencial que el acero a tensión ceda para evitar fallas frágiles. Para una falla balanceada (el acero a tensión alcanza la cedencia y el concreto alcanza simultáneamente una deformación a compresión de su fibra extrema de 0.003), los triángulos semejantes del diagrama de deformación de la figura 4.8 muestran que

$$\varepsilon_s = 0.003\frac{d - c_b}{c_b} = 0.003\frac{\beta_1 d - a_b}{a_b} = \frac{f_y}{E_s}$$

$$\therefore \quad a_b = \frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y}\beta_1 d \tag{4.45}$$

y por equilibrio

$$0.85f'_c a_b b = A_s f_y - A'_s f'_s$$
$$= (\rho_b f_y - \rho' f'_s)bd$$

en que $\rho_b = A_s/bd$ para una falla balanceada y $\rho' = A'_s/bd$.

$$\therefore \quad a_b = \frac{(\rho_b f_y - \rho' f'_s)d}{0.85f'_c} \tag{4.46}$$

En consecuencia, para una falla balanceada, la ecuación 4.42 proporciona f'_s con $a = a_b$ sustituida, de la ecuación 4.45 o es igual a f_y, rigiendo el menor valor.

$$\therefore \quad f'_s = 0.003E_s\left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a_b}\right)$$

$$= 0.003E_s\left[1 - \frac{d'}{d}\left(\frac{0.003E_s + f_y}{0.003E_s}\right)\right] \tag{4.47}$$

ó f_y, rigiendo la que sea menor.

Igualando las ecuaciones 4.45 y 4.46 se obtiene

$$\rho_b = \frac{0.85f'_c\beta_1}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} + \frac{\rho' f'_s}{f_y} \tag{4.48}$$

en que f'_s está dada por la ecuación 4.47 ó f_y, rigiendo la que sea menor. El primer término del lado derecho de la ecuación 4.48 es idéntico a ρ_b para una falla balanceada de una viga simplemente reforzada, según la ecuación 4.14. Esto es de esperar debido a que la profundidad del eje neutro, y en consecuencia la fuerza del concreto, es la misma en ambos casos. El segundo término del lado derecho de la ecuación 4.48 se debe al acero a compresión. En consecuencia, para una viga doblemente reforzada, para asegurar que ceda el acero a tensión, ρ debe ser menor que ρ_b dada por la ecuación 4.48.

Para el diseño, para asegurar que el acero a tensión fluya y que la falla no sea frágil, se recomienda [4.2] que la cuantía de acero a tensión de una viga doblemente reforzada no exceda $0.75\rho_b$. lo que requiere que

$$\rho \leqslant 0.75\left(\frac{0.85f'_c\beta_1}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} + \frac{\rho' f'_s}{f_y}\right) \tag{4.49}$$

en que f'_s es la dada por la ecuación 4.47 o f_y, rigiendo la que sea menor. Expresado en otra forma, el requerimiento es que la fuerza en el acero a tensión se limite a 0.75 de la fuerza total de compresión (concreto más acero) a la falla balanceada.

Ejemplo 4.4

Se pretende que una sección rectangular con b = 11 plg (279 mm), d = 20 plg (508 mm), d' = 2.5 plg (64 mm), f'_c = 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2), $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 (0.2×10^6 N/mm^2), f_y = 40,000 lb/plg^2 (276 N/mm^2) transmita momentos flexionan-

tes de carga de servicio de 125 kip·pie (169 kN·m) debido a carga muerta y 158.8 kip·pie (215 kN·m) debido a carga viva. Calcular las áreas de acero requeridas para los dos siguientes casos: (1) $\rho - \rho'$ está limitado a 0.5 de la ρ_b para una viga simplemente reforzada para reducir la deflexión y aumentar la ductilidad y (2) el área del acero a compresión es un mínimo.

Solución

La resistencia a flexión se requiere que sea igual a $U = 1.4D + 1.7L$

$$M_u = 1.4 \times 1.25 + 1.7 \times 158.8 = 445 \text{ kip·pie}$$
$$= 5.34 \times 10^6 \text{ lb·plg (603 kN·m)}$$

1. $\rho - \rho' = 0.5(\rho_b$ *de la sección simplemente reforzada*)
De la ecuación 4.14 tenemos

$$\rho - \rho' = 0.5 \frac{0.85 \times 3000 \times 0.85}{40{,}000} \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{0.003 \times 29 \times 10^6 + 40{,}000}$$
$$= 0.0186$$

$$\therefore \quad A_s - A'_s = (\rho - \rho')bd = 0.0186 \times 11 \times 20 = 4.09 \text{ plg}^2$$

De la ecuación 4.38, suponiendo que todo el acero está cediendo, tenemos

$$a = \frac{4.09 \times 40{,}000}{0.85 \times 3000 \times 11} = 5.83 \text{ plg}$$

De la ecuación 4.39, suponiendo que todo el acero está cediendo

$$5.34 \times 10^6 = 0.9[4.09 \times 40{,}000(20 - 2.92) + A'_s 40{,}000(20 - 2.5)]$$

$$\therefore \quad A'_s = 4.48 \text{ plg}^2 \text{ (2890 mm}^2\text{)}$$

y

$$A_s = 4.09 + 4.48 = 8.57 \text{ plg}^2 \text{ (5529 mm}^2\text{)}$$

Verifíquese el esfuerzo en el acero a compresión

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{5.83}{0.85} = 6.86 \text{ plg}$$

Mediante triángulos semejantes del diagrama de deformación se encuentra que

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} = 0.003 \frac{6.86 - 2.5}{6.86} = 0.00191$$

Pero $f_y/E_s = 40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$; en consecuencia, el acero a compresión está cediendo, $f'_s = f_y$, como se supuso. (Esto se pudo haber comprobado utilizando la ecuación 4.41.) También

$$\rho = \frac{8.57}{11 \times 20} = 0.0390$$

$$\rho' = \frac{4.48}{11 \times 20} = 0.0204$$

Sustituyendo en el lado derecho la ecuación 4.49 para verificar la cuantía total de acero a tensión se tiene

$$0.75\left(\frac{0.85 \times 3000 \times 0.85}{40{,}000} \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{0.003 \times 29 \times 10^6 + 40.000} + \frac{0.0204 \times 40{,}000}{40{,}000}\right)$$
$$= 0.0431 > 0.0390 \qquad \text{como se requería}$$

2. *Mínimo acero a compresión*

Este diseño tiene la máxima contribución posible del concreto comprimido. En consecuencia, el primer término dentro del paréntesis en el lado derecho de la ecuación 4.49 es el máximo posible, y se aplica la condición limite de la ecuación 4.49. Sustituyendo en la condición límite de la ecuación 4.49 y suponiendo que el acero a compresión está cediendo, se tiene

$$\rho = 0.75\left(\frac{0.85 \times 3000 \times 0.85}{40{,}000} \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{0.003 \times 29 \times 10^6 + 40{,}000} + \rho'\right)$$

$$\therefore \quad \rho = 0.0278 + 0.75\rho'$$

ó

$$A_s = (0.0278 \times 11 \times 20) + 0.75A'_s$$
$$= 6.12 + 0.75A'_s$$

Sustituyendo el valor de A_s en la ecuación 4.38 se obtiene

$$a = \frac{(6.12 + 0.75A'_s - A'_s)40{,}000}{0.85 \times 3000 \times 11}$$
$$= 1.426(6.12 - 0.25A'_s)$$

Sustituyendo A_s y a en la ecuación 4.39 se obtiene

$$5.34 \times 10^6 = 0.9\{(6.12 + 0.75A'_s - A'_s)$$

$$\times 40{,}000[20 - 0.713(6.12 - 0.25A_s')]$$
$$+ A_s' 40{,}000(20 - 2.5)\}$$

$$\therefore \quad (A_s')^2 - 329.9A_s' + 1184 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se obtiene $A_s' = 3.63\,\text{plg}^2$ (2342 mm^2).
Sustituyendo A_s' en la ecuación para A_s, se tiene

$$A_s = 6.12 + 0.75 \times 3.63 = 8.84\ \text{plg}^2\ (5703\ \text{mm}^2)$$

Para verificar que el acero a compresión esté cediendo, se sustituye A_s' en la ecuación para a:

$$a = 1.426(6.12 - 0.25 \times 3.63) = 7.43\ \text{plg}$$

$$\therefore \quad c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{7.43}{0.85} = 8.74\ \text{plg}$$

Por triángulos semejantes del diagrama de deformación, se tiene

$$\varepsilon_s' = 0.003\,\frac{8.74 - 2.5}{8.74} = 0.00214$$

Pero $f_y/E_s = 40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$; en consecuencia, el acero a compresión está cediendo, $f_s' = f_y$, como se supuso.

(Esto también se podría verificar utilizando la ecuación 4.41.) Nótese que en este ejemplo el segundo diseño con mínimo acero a compresión contiene un poco menos acero (5%) que el primer diseño, aunque es preferible el primer diseño desde el punto de vista de la deflexión y de la ductilidad.

Las ecuaciones de diseño para el refuerzo de compresión no toman en cuenta la pequeña área del concreto comprimido desplazado por el acero a compresión. Esto significa una pérdida de la fuerza del concreto de $0.85f_c'A_s'$, y si esta cantidad es apreciable, se debe aumentar el área de acero a compresión en $0.85f_c'A_s'/f_y$ para compensar. Por ejemplo, para ser más exactos, se debe aumentar el área del acero a compresión en la segunda parte del ejemplo 4.4 de 3.63 plg^2 (2342 mm^2) a

$$3.63 + \frac{0.85 \times 3000 \times 3.63}{40{,}000} = 3.86\ \text{pie}^2\ (2490\,\text{mm}^2)$$

Ocasionalmente en el diseño es necesario verificar la resistencia a flexión de las secciones doblemente reforzadas, lo que puede realizarse con exactitud utilizando las ecuaciones deducidas. También se dispone de un método aproximado que produce exactitud razonable. La aproximación radica en la suposición hecha con respecto al brazo de palanca. En la figura 4.8 las dos fuerzas internas a compresión C_c y C_s están localizadas muy próximas entre sí. La fuerza de compresión total C queda localizada entre las dos. Si se conociera la línea de acción de C, se podría deducir la resistencia a flexión de la sección en un solo paso; es decir, $M_u = \varphi A_s f_y jd$, en que jd es la distancia entre C y T. Para una aproximación conservadora, se puede considerar el brazo de palanca jd como la menor de las dos distancias que localizan C_c y C_s desde el centroide del acero a tensión.

Ejemplo 4.5

La sección de la figura 4.9 se refuerza con acero con $f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 N/mm^2) y $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg^2 (0.2×10^6 N/mm^2). Para el concreto, $f_c' = 3000$ lb/plg^2 (20.7 N/mm^2). Estimar la resistencia confiable a flexión de la sección para (1) momento flexionante positivo, y (2) momento flexionante negativo.

Solución

Se utilizará una solución aproximada.

1. *Para el momento flexionante positivo*

$$A_s = 8.57\ \text{plg}^2 \quad \text{y} \quad A_s' = 4.48\ \text{plg}^2$$

De la ecuación 4.38 se puede encontrar el peralte del bloque de esfuerzos de compresión.

$$a = \frac{(8.57 - 4.48)40{,}000}{0.85 \times 3000 \times 11} = 5.83\,\text{plg}$$

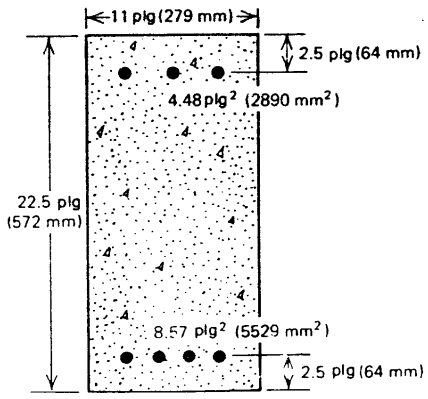


Figura 4.9. Sección de concreto doblemente reforzado para el ejemplo 4.5.

La deformación a cedencia del acero es $40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$, y por inspección del diagrama se encuentra que tanto el acero de tensión como el de compresión están cediendo, como se supuso. Se puede utilizar la ecuación 4.49 para verificar que la sección no esté sobrerreforzada. El brazo de palanca para la fuerza de compresión del concreto es

$$d - 0.5a = 20 - 0.5 \times 5.83 = 17.08 \text{ plg}$$

El brazo de palanca para la fuerza de compresión del acero es

$$d - d' = 20 - 2.5 = 17.50 \text{ plg}$$

En consecuencia, el brazo de palanca de la fuerza resultante de compresión es $17.08 < jd < 17.50$ plg, y una aproximación conservadora es $jd = 17.08$ plg, lo que da

$$M_u = \varphi A_s f_y jd$$
$$= 0.9(8.57 \times 40{,}000 \times 17.08)$$
$$= 5.27 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} (595 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

El análisis exacto revela que la resistencia a flexión es 1.0% mayor que el valor aproximado calculado (vea el ejemplo 4.4 de la parte 1.)

2. *Para el momento flexionante negativo*

$$A_s = 4.48 \text{ plg}^2 \quad \text{y} \quad A'_s = 8.57 \text{ plg}^2$$

Debido a que el área de acero a compresión es mayor que el área del acero a tensión, es obvio que el acero a compresión no puede estar fluyendo. Comparando las dos áreas de acero se ve que f'_s es mucho menor que f_y. En consecuencia, del examen del diagrama de deformaciones, se encuentra que el peralte del bloque de esfuerzos rectangular no será grande, y que el brazo de palanca de la fuerza de compresión del concreto será mayor que el brazo de palanca de la fuerza de compresión del acero. En consecuencia, una aproximación conservadora es $jd = d - d' = 17.50$ plg, lo que da

$$M_u = 0.9(4.48 \times 40{,}000 \times 17.5)$$
$$= 2.82 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} (318 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Del análisis exacto se encuentra que $f'_s = 12{,}770 \text{ lb/plg}^2$ (88.1 N/mm^2) y la resistencia a flexión es 2.9% mayor que el valor aproximado calculado.

4.2 SECCIONES T E I

4.2.1 Análisis de secciones T e I

La figura 4.10 muestra una sección de viga T cuando se alcanza la resistencia a flexión, Generalmente la profundidad al eje neutro es pequeña debido al área grande del patín. En consecuencia, generalmente ocurre una falla a tensión, por lo que comúnmente es seguro suponer en el análisis que $f_s = f_y$; se puede verificar posteriormente la validez de esta suposición al encontrar la posición del eje neutro. El eje neutro puede estar en el patín o el alma.

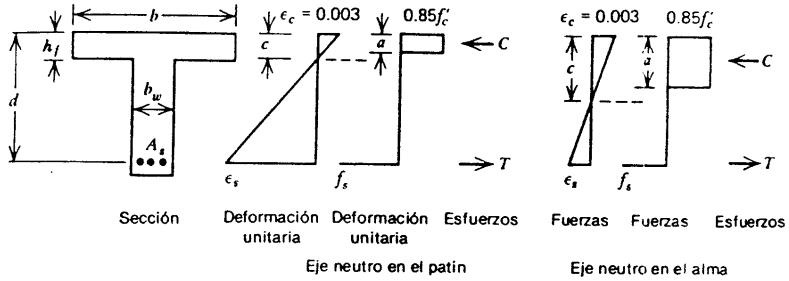


Figura 4.10. Viga T de concreto reforzado cuando se alcanza la resistencia a flexión.

Se puede iniciar el análisis suponiendo que $c < h_f$ (o sea que el eje neutro está en el patín) en que h_f = espesor del patín. Por equilibrio, $C = T$,

$$\therefore \quad 0.85 f'_c ab = A_s f_y$$

$$\therefore \quad a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{\rho f_y d}{0.85 f'_c} = \frac{\omega d}{0.85} \tag{4.50}$$

en que $\rho = A_s/bd$ y $\omega = \rho f_y/f'_c$.

$$\therefore \quad c = \frac{a}{\beta_1} = 1.18 \frac{\omega d}{\beta_1} \tag{4.51}$$

Si $c < h_f$, el eje neutro está en el patín como se supuso, y

$$M_u = A_s f_y (d - 0.5a) \tag{4.52}$$

Cuando el eje neutro está en el patín, se puede analizar la sección como si fuese una sección rectangular de ancho b. La cuantía ρ_b de acero balanceada está dada por la ecuación 4.14, y si $\rho < \rho_b$, ó $a < a_b$, el acero a tensión está fluyendo. En la gran mayoría de los casos prácticos, el eje neutro

está en el patín y el acero a tensión fluye.

Si $c = 1.18\omega d/\beta_1 > h_f$, el eje neutro está en el alma. Entonces los valores calculados para a y c de las ecuaciones 4.50 y 4.51 son incorrectos. Al reescribir la ecuación de equilibrio $C = T$ para el eje neutro en el alma, se obtiene

$$0.85f'_c[ab_w + h_f(b - b_w)] = A_s f_y$$

$$\therefore \quad a = \frac{A_s f_y - 0.85f'_c h_f(b - b_w)}{0.85f'_c b_w} \tag{4.53}$$

en que b_w es el ancho del alma. La fuerza resultante de compresión actúa en el centroide del área comprimida de perfil T, que se puede dividir en el rectángulo sobre el alma y dos rectángulos laterales en el patín. Tomando momentos de estos rectángulos respecto del acero de tensión se obtiene

$$M_u = 0.85f'_c ab_w\left(d - \frac{a}{2}\right) + 0.85f'_c(b - b_w)h_f\left(d - \frac{h_f}{2}\right) \tag{4.54}$$

en que la ecuación 4.53 da a.

Se puede verificar con el diagrama de deformaciones que el acero a tensión esté fluyendo. El acero a tensión está cediendo si

$$\varepsilon_s = 0.003\frac{d - c}{c} = 0.003\frac{\beta_1 d - a}{a} \geqslant \frac{f_y}{E_s} \tag{4.55}$$

Si el acero a tensión no está cediendo, se debe sustituir f_y en las ecuaciones 4.50 a 4.54 por el siguiente esfuerzo del acero que se encuentra del diagrama de deformaciones:

$$f_s = \varepsilon_s E_s = 0.003\frac{\beta_1 d - a}{a}E_s \tag{4.56}$$

y volver a efectuar los cálculos.

Ejemplo 4.6

Calcular la resistencia ideal a flexión de una sección de viga T con $b = 32$ plg (813 mm), $b_w = 8$ plg (203 mm), $d = 12$ plg (305 mm), $A_s = 3.00$ plg^2 (1935 mm^2), $E_s = 29 \times 10^6$ lb/plg (0.20 $\times$ 10^6 N/mm^2), $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2), $f'_c = 3000$ lb/plg^2 (20.7 N/mm^2) si (1) $h_f = 4$ plg (102 mm), y (2) $h_f = 2$ plg (50.8 mm).

Solución

1. *Espesor del alma de* 4 plg (102 mm)

Supóngase que el acero a tensión cede $f_s = f_y$ y que el eje neutro está en el patín.

De la ecuación 4.50 se tiene

$$a = \frac{3 \times 60{,}000}{0.85 \times 3000 \times 32} = 2.21 \text{ plg}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{2.21}{0.85} = 2.60 \text{ plg}$$

$\therefore$ $c < h_f$ y el eje neutro está en el patín, como se supuso.

De la ecuación 4.52 se tiene

$$M_u = 3 \times 60{,}000\ (12 - 0.5 \times 2.21)$$
$$= 1.96 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg } (221 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Verificación de que el acero a tensión está cediendo:

De la ecuación 4.55 se tiene

$$\varepsilon_s = 0.003\frac{12 - 2.60}{2.60} = 0.0108$$

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{60{,}000}{29 \times 10^6} = 0.00207 < 0.0108$$

(De otra manera, $a/d = 2.21/12 = 0.18$, que es menor que $a_{max}/d = 0.377$ de la tabla 4.1). En consecuencia, el acero cede como se supuso.

2. *Espesor del alma de* 2 plg (51.8 mm)

Supóngase que el acero a tensión cede y que el eje neutro está en el patín.

Como antes, de la ecuación 4.50 $a = 2.21$ plg y $c = 2.60$ plg

$\therefore$ $c > h_f$ y el eje neutro está en el alma

Luego $T = A_s f_y = 3 \times 60{,}000 = 180{,}000$ lb, y

$0.85f'_c(b - b_w)h_f = 0.85 \times 3000\,(32 - 8)2 = 122{,}400$ lb

$0.85f'_c ab_w = 0.85 \times 3000 \times 8a = 20{,}400a$ lb

De la ecuación 4.53 se tiene

$$a = \frac{180{,}000 - 122{,}400}{20{,}400} = 2.82 \text{ plg}$$

y

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{2.82}{0.85} = 3.32 \text{ plg}$$

De la ecuación 4.54 se encuentra

$$M_u = 20{,}400 \times 2.82(12 - 0.5 \times 2.82) + 122{,}400(12 - 0.5 \times 2)$$
$$= 1.95 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (220 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Verificación de que el acero a tensión está cediendo:
De la ecuación 4.55

$$\varepsilon_s = 0.003 \frac{12 - 3.32}{3.32} = 0.00784$$

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{60{,}000}{29 \times 10^6} = 0.00207 < 0.00784$$

(De otra manera $a/d = 2.82/12 = 0.235$, que es menor que $a_{max}/d =$ 0.377 de la tabla 4.1.) En consecuencia, el acero a tensión cede, como se supuso.

Se puede tomar en cuenta cualquier acero a compresión que pueda contener una sección en el patín incluyendo terminos de $A'_s f'_s$ en las ecuaciones. Se puede encontrar el esfuerzo en este acero utilizando el diagrama de deformación.

4.2.2 Diseño de Secciones *T* e *I*

Cuando la profundidad del eje neutro es menor que el espesor del patín, de acuerdo con la ecuación 4.51 se tiene

$$1.18 \frac{\omega d}{\beta_1} \leq h_f \quad \text{en que} \quad \omega = \frac{A_s f_y}{b d f'_c}$$

y entonces se puede diseñar la sección como una sección rectangular de ancho b utilizando las ecuaciones 4.18 a 4.23.

Cuando la profundidad del eje neutro es mayor que el espesor del patín, $1.18\omega d/\beta_1 > h_f$. Para este caso se puede diseñar la sección utilizando las ecuaciones para una viga doblemente reforzada como sigue. Se puede considerar que el acero a tensión está dividido en una área A_{sf}, que resiste la compresión en el concreto de las salientes del patín, y otra área $A_s - A_{sf}$, que resiste la compresión en el concreto del alma. Entonces, suponiendo que el acero a tensión está cediendo, las ecuaciones del equilibrio son

$$A_{sf} f_y = 0.85 f'_c h_f (b - b_w)$$

$$\therefore \quad A_{sf} = \frac{0.85 f'_c h_f (b - b_w)}{f_y} \tag{4.57}$$

y

$$(A_s - A_{sf}) f_y = 0.85 f'_c a b_w$$

$$\therefore \quad a = \frac{(A_s - A_{sf}) f_y}{0.85 f'_c b_w} \tag{4.58}$$

Se puede escribir la resistencia a flexión de diseño con referencia a la ecuación 4.54 como

$$M_u = \varphi \left[(A_s - A_{sf}) f_y \left(d - \frac{a}{2} \right) + A_{sf} f_y \left(d - \frac{h_f}{2} \right) \right] \tag{4.59}$$

en que A_{sf} y a están dadas por las ecuaciones 4.57 y 4.58.

Comparando las ecuaciones 4.59 y 4.39 se ve que la fuerza de compresión en la saliente del patín de concreto equivale a un área de acero a compresión A_{sf} con resistencia de cedencia a la mitad del peralte del patín. En la figura 4.11 se ilustra esta equivalencia.

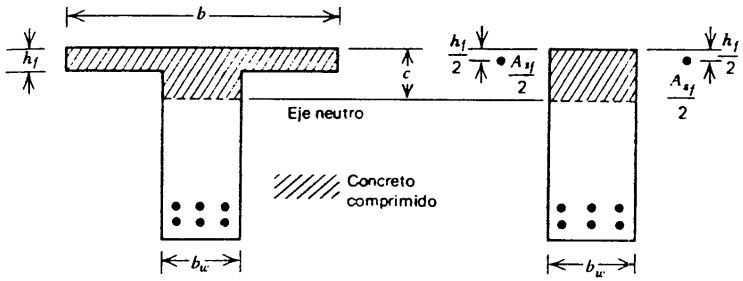


Figura 4.11. Sección *T* y sección rectangular doblemente reforzada equivalente.

Para asegurar una falla dúctil con el acero a tensión cediendo, se debe satisfacer en el diseño [4.2] la misma relación límite de acero que para una viga doblemente reforzada. El requerimiento es que se limite la fuerza en el acero a tensión a 0.75 de la fuerza total de compresión en la falla balanceada. La ecuación 4.49 muestra que esto requiere que

$$\rho_w \leq 0.75 \left(\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} + \rho_f \right) \tag{4.60}$$

en que $\rho_w = A_s / b_w d$ y $\rho_f = A_{sf} / b_w d$.

El área imaginaria de acero a compresión siempre está cediendo, por lo que no necesita revisarse su esfuerzo. El anterior enfoque para evitar la falla frágil no produce una sección con la misma ductilidad que una sección real doblemente reforzada, debido a que inevitablemente el patín a compresión es más frágil que el acero a compresión.

También es necesario verificar que el área de acero en la sección sea suficiente para asegurar que la resistencia a flexión de la sección agrietada exceda el momento requerido para agrietar la sección; de otro modo la

falla es repentina y frágil. Se recomienda[4.2] que para evitar esa falla ρ_w no sea menor que $200/f_y$ en que f_y esta en lb/plg^2, ó $1.38/f_y$ en que f_y está en N/mm^2

Ejemplo 4.7

Se desea que una sección de viga T con $b = 30$ plg (762 mm), $b_w = 12$ plg (305 mm), $d = 23$ plg (584 mm), y $h_f = 4$ plg (102 mm) tenga una resistencia a flexión de diseño de 7×10^6 lb plg (790 kN · m). Utilizando $f'_c = 3000$ lb/plg^2 (20.7 N/mm^2) y $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2), calcular el área requerida del acero.

Solución

Como aproximación para determinar si el eje neutro está en el patín o el alma, supóngase $jd = d - 0.5h_f = 23 - 2 = 21$ plg. Entonces se tiene aproximadamente

$$A_s = \frac{M_u}{\varphi j d f_y} = \frac{7 \times 10^6}{0.9 \times 21 \times 60{,}000} = 6.17 \text{ plg}^2$$

lo que da

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c} = \frac{6.17 \times 60.000}{30 \times 23 \times 3000} = 0.179$$

De la ecuación 4.51 se tiene

$$c = 1.18 \frac{\omega d}{\beta_1} = 1.18 \frac{0.179 \times 23}{0.85} = 5.72 \text{ plg} > h_f$$

En consecuencia, el eje neutro está en el alma.
De la ecuación 4.57 se tiene

$$A_{sf} f_y = 0.85 f'_c h_f (b - b_w)$$

$$= 0.85 \times 3000 \times 4(30 - 12) = 183{,}600 \text{ lb}$$

Y de la ecuación 4.58,

$$(A_s - A_{sf}) f_y = 0.85 f'_c a b_w$$

$$= 0.85 \times 3000 \times 12a = 30{,}600a \text{ lb}$$

De la ecuación 4.59 se tiene

$$7 \times 10^6 = 0.9[30{,}600a(23 - 0.5a) + 183{,}600(23 - 2)]$$

$$\therefore \quad a^2 - 46.00a + 256.34 = 0$$

La solución de la ecuación cuadrática de $a = 6.49$ plg.

$$\therefore \quad (A_s - A_{sf}) f_y = 30.600 \times 6.49 = 198{,}600 \text{ lb}$$

Sustituyendo $A_{sf} f_y$ de la ecuación 4.57 da

$$A_s = \frac{198{,}600 + 183{,}600}{60{,}000}$$

$$= 6.37 \text{ plg}^2 \ (4110 \text{ mm}^2)$$

Verifíquese si el área del acero es satisfactoria:

$$\rho_w = \frac{6.37}{12 \times 23} = 0.0231$$

Compruébese la máxima cuantía de acero permisible, usando la ecuación 4.60:

$$0.75\left(\frac{0.85 \times 3000 \times 0.85}{60{,}000} \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{0.003 \times 29 \times 10^6 + 60{,}000} + \frac{183{,}600}{60{,}000 \times 12 \times 23}\right)$$

$$= 0.0244 > 0.0231$$

En consecuencia, el área de acero no excede la máxima permisible.
Revísese el mínimo acero permisible usando

$$\frac{200}{f_y} = \frac{200}{60{,}000}$$

$$= 0.0033 < 0.0231$$

En consecuencia, el área de acero no es menor que la mínima permisible.

4.2.3 Ancho efectivo de las vigas T

Cuando los pisos de concreto reforzado de losa y viga se construyen monolíticamente, la viga y la losa actúan integralmente.

Cuando se sujeta la viga a momento flexionante positivo, parte de la losa actúa como el patín de la viga que resiste la compresión longitudinal que equilibra la fuerza de tensión en el refuerzo del alma. Cuando el espaciamiento entre las vigas es grande, es evidente que no se aplica estrictamente la teoría simple de flexión, debido a que el esfuerzo de compresión longitudinal en el patín varía con la distancia desde el alma de la viga; el patín estará esforzado más altamente sobre el alma que en las extremidades. Esta variación en el esfuerzo de compresión en el patín, ilustrado en la figura 4.12, ocurre debido a las deformaciones cortantes en el

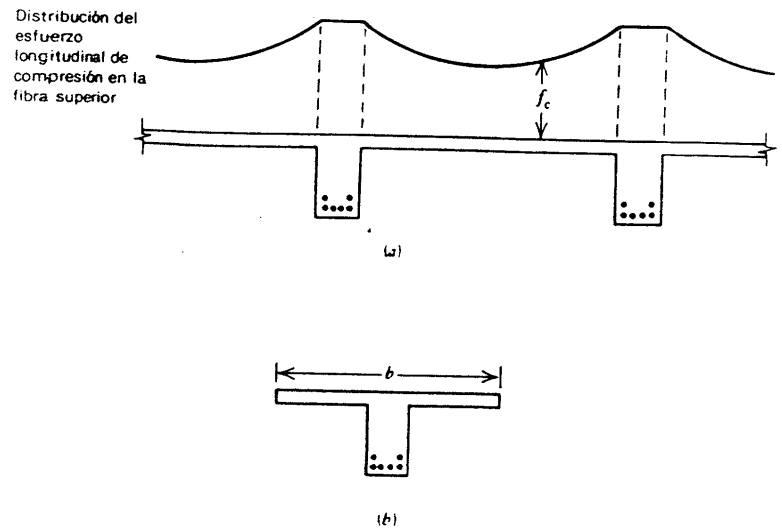


Figura 4.12. Ancho efectivo de viga T para momento flexionante positivo. (*a*) Sección de piso a base de vigas y losa. (*b*) Ancho efectivo para el momento flexionante positivo.

patín (retraso de cortante), que reducen la deformación longitudinal a compresión con la distancia desde el alma.

Se puede calcular la distribución real del esfuerzo de compresión para la viga en el rango elástico utilizando la teoría de la elasticidad, que depende de las dimensiones relativas de la sección transversal, del claro, y del tipo de la carga. En la resistencia a flexión del miembro, la distribución del esfuerzo de compresión longitudinal a través del patín es más uniforme de lo que lo indica la teoría de la elasticidad, debido a que a esfuerzos próximos al máximo la curva esfuerzo - deformación del concreto muestra una variación más pequeña del esfuerzo con la deformación. Sin embargo, adicionalmente la losa se flexiona transversalmente debido a la carga soportada entre las vigas, lo que puede producir agrietamiento paralelo a la viga en la parte superior del patín sobre la unión del alma y el patín. El refuerzo transversal en la losa y la fricción cortante a lo largo de la grieta permite transferir la compresión longitudinal hacia el patín; sin embargo hay razones para utilizar un ancho efectivo conservadoramente bajo.

En el diseño, para tomar en cuenta la variación del esfuerzo de compresión a través del patín, conviene utilizar un ancho efectivo de patín que puede ser más pequeño que el ancho real, aunque se considera que está esforzado uniformemente. Los anchos efectivos especificados en los códigos actuales son estimaciones conservadoras basadas en aproximaciones de la

teoría elástica. Para las vigas T simétricas, el ACI 318-71[4.2] recomienda que se utilice un ancho efectivo que no exceda de un cuarto de la longitud del claro de la viga, y que su ancho sobresaliente a cada lado del alma no sea mayor que 8 veces el espesor de la losa, o un medio de la distancia libre a la siguiente viga. Para vigas que tengan un patín solamente de un lado, el ancho del patín sobresaliente efectivo no debe ser mayor que 1/12 de la longitud del claro de la viga, ó 6 seis veces el espesor de la losa, o la mitad de la distancia libre a la siguiente viga.

Cuando la viga está sujeta a momento flexionante negativo, parte del esfuerzo longitudinal en el patín claramente actúa como acero a tensión con el acero principal sobre el alma (vea la figura 4.13). La fuerza de tensión se transfiere a través del patín hacia el alma por cortante en el patín, en forma semejante a como la fuerza de compresión se transmite en el caso de flexión positiva. Los códigos no especifican anchos efectivos sobre los que se puede considerar el acero de la losa actuando como refuerzo a tensión, aunque es evidente que una evaluación realista de la resistencia de la viga para un momento flexionante negativo debe incluir el efecto del acero de la losa. Como aproximación, se podría incluir el acero de la losa dentro de un ancho de cuatro veces el espesor de la losa a cada lado del alma con el acero a tensión de la viga.

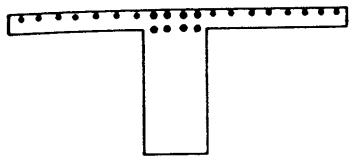


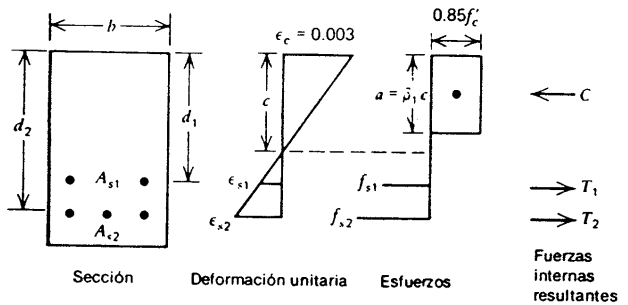
Figura 4.13. Ancho efectivo de viga T para momento flexionante negativo.

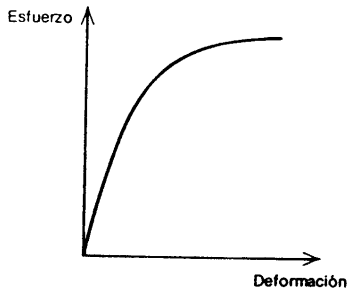
4.3 SECCIONES CON VARILLAS A DISTINTOS NIVELES O ACERO SIN UNA RESISTENCIA DE CEDENCIA BIEN DEFINIDA

Cuando se colocan varillas de refuerzo en las regiones a tensión o a compresión en una viga, es usual considerar sólo el esfuerzo en los centroides del acero a tensión y a compresión, aunque las varillas estén en varias capas. Sin embargo, se puede desear realizar un análisis más exacto cuando pueden existir grandes diferencias entre los niveles del esfuerzo en las distintas capas. Adicionalmente, cuando el refuerzo no tiene una resistencia bien definida de cedencia, también se puede desear hacer una eva-

luación exacta de la resistencia a flexión de la sección, incluyendo el efecto de endurecimiento por deformación del acero.

Para el análisis general de esas secciones se puede utilizar un procedimiento iterativo que comprenda la satisfacción de los requerimientos de equilibrio y de compatibilidad de las deformaciones. Considérese la sección mostrada en la figura 4.14 cuando se alcanza la resistencia a flexión.





Curva esfuerzo - deformación del acero

Figura 4.14. Sección de concreto reforzado cuando se alcanza la resistencia a flexión y curva general esfuerzo-deformación para el acero.

La curva esfuerzo - deformación para el acero se supone de forma general. Para fines de ilustración, se considera que el acero a tensión en la sección está en dos capas. Por compatibilidad de la deformación, el diagrama de deformaciones da

$$\frac{0.003}{c} = \frac{\varepsilon_{s1}}{d_1 - c} = \frac{\varepsilon_{s2}}{d_2 - c}$$

$$\therefore \quad \varepsilon_{s1} = 0.003 \frac{d_1 - c}{c} \tag{4.61a}$$

$$\varepsilon_{s2} = 0.003 \frac{d_2 - c}{c} \tag{4.61b}$$

Por equilibrio, se tiene

$$C = T_1 + T_2$$

$$\therefore \quad 0.85 f'_c ab = A_{s1} f_{s1} + A_{s2} f_{s2} \tag{4.62}$$

Se puede analizar la sección mediante un procedimiento de pruebas y ajustes como sigue:

1. Elegir un valor de c.
2. Calcular ε_{s1} y ε_{s2} de las ecuaciones 4.61*a* y 4.61*b* y determinar f_{s1} y f_{s2} de la curva esfuerzo - deformación para el acero.
3. Determinar si se satisface la ecuación 4.62.
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 hasta encontrar un valor de c que satisfaga la ecuación 4.62.

Luego, tomando momentos alrededor del centroide de compresión, la resistencia a flexión queda dada por

$$M_u = A_{s1} f_{s1}(d_1 - 0.5a) + A_{s2} f_{s2}(d_2 - 0.5a) \tag{4.63}$$

Ejemplo 4.8

Se refuerza una sección rectangular de ancho 8 plg (203 mm) con dos varillas núm. 6 (19 mm de diámetro) a una profundidad efectiva de 8 plg (203 mm) y tres varillas núm. 6 a una profundidad efectiva de 10 plg (254 mm) (vea figura 4.15*a*). Las varillas son de acero rolado en frío y la curva esfuerzo - deformación aparece en la figura 4.15*b*. Para el concreto, $f'_c = 4000$ lb/plg^2 (27.6 mm^2). Calcular la resistencia ideal a flexión de la sección.

Solución

$$A_{s1} = 2 \times 0.44 = 0.88 \text{plg}^2 \qquad \text{y} \qquad A_{s2} = 3 \times 0.44 = 1.32 \text{plg}^2$$

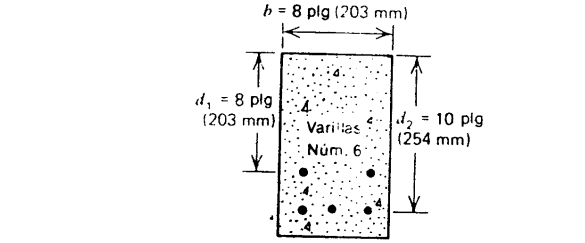
Primera estimación

Sea $c = 4$ plg $\quad \therefore \quad a = \beta_1 c = 0.85 \times 4 = 3.40$ plg

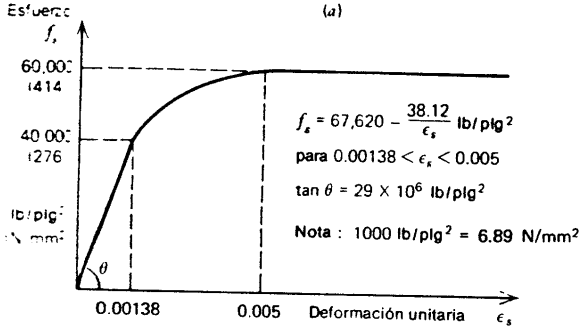
De las ecuaciones 4.61*a* y 4.61*b* se tiene

$$\varepsilon_{s1} = 0.003 \frac{8 - 4}{4} = 0.003$$

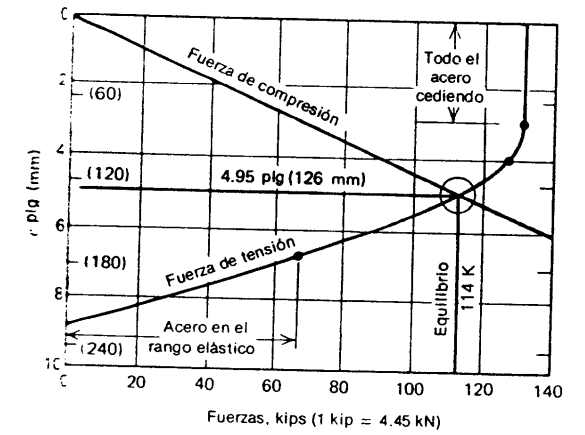
$$\varepsilon_{s2} = 0.003 \frac{10 - 4}{4} = 0.0045$$



(a)



(b)



(c)

Figura 4.15. Ejemplo 4.8. (*a*) sección. (*b*) curva esfuerzo-deformación para el acero. (*c*) Variación de las fuerzas internas con la profundidad del eje neutro.

De la curva esfuerzo - deformación se ve que

$$f_{s1} = 67{,}620 - \frac{38.12}{0.003} = 54{,}910 \text{ lb/plg}^2$$

$$f_{s2} = 67{,}620 - \frac{38.12}{0.0045} = 59{,}150 \text{ lb/plg}^2$$

Verificación del equilibrio utilizando la ecuación 4.62:

$$T_1 = 54{,}910 \times 0.88 = 48{,}300 \text{ lb}$$

$$T_2 = 59{,}150 \times 1.32 = 78{,}100 \text{ lb}$$

$$C = 0.85 \times 4000 \times 3.40 \times 8 = 92{,}500 \text{ lb}$$

.y

$$C - T_1 - T_2 = -33.900 \text{ lb}$$

En consecuencia, no se satisface el equilibrio debido a que la fuerza de compresión es demasiado pequeña y las fuerzas en el acero demasiado grandes.
En consecuencia, desplázese el eje neutro hacia abajo para aumentar la fuerza de compresión y reducir la fuerza del acero.

Segunda estimación

Sea $c = 5$ plg $\quad \therefore \quad a = 4.25$ plg
Entonces, usando las ecuaciones como antes se escribe

$\varepsilon_{s1} = 0.0018 \qquad \varepsilon_{s2} = 0.003$

$f_{s1} = 46{,}440 \text{ lb/plg}^2$; $f_{s2} = 54{,}910 \text{ lb/plg}^2$.

$T_1 = 40{,}900 \text{ lb} \qquad T_s = 72.500 \text{ lb}$

$C = 115{,}600 \text{ lb}$

y

$$C - T_1 - T_2 = 2{,}200 \text{ lb}$$

En consecuencia, la profundidad del eje neutro es todavía algo grande.
Por tanto se reduce ligeramente *c*.

Tercera estimación

La primera y segunda estimaciones muestran que 4 plg $< c <$ 5 plg. Interpólese linealmente utilizando las fuerzas residuales anteriores de las ecuaciones del equilibrio

$$c = 4 + \frac{33{,}900}{33{,}900 + 2{,}200} = 4.94 \text{ plg} \quad \therefore \quad a = 4.20 \text{ plg}$$

Entonces, usando las ecuaciones como antes se escribe

$\varepsilon_{s1} = 0.00186 \qquad \varepsilon_{s2} = 0.00307$

$f_{s1} = 47{,}130 \text{ lb/plg}^2 \quad f_{s2} = 55{,}200 \text{ lb/plg}^2$

$T_1 = 41{,}500 \text{ lb} \qquad T_2 = 72{,}900 \text{ lb}$

$C = 114{,}220 \text{ lb}$

y

$C - T_1 - T_2 = -200 \text{ lb}$

La condición de equilibrio es satisfactoria.
De la ecuación 4.63 se tiene

$$M_u = 41{,}500(8 - 0.5 \times 4.20) + 72{,}900(10 - 0.5 \times 4.20)$$
$$= 820{,}800 \text{ lb} \cdot \text{plg} \, (92.7 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

También se puede utilizar una construcción gráfica para determinar la profundidad del eje neutro que satisface el equilibrio (vea la figura 4.15*c* para la sección del ejemplo 4.8). En una sección rectangular la fuerza de compresión aumenta linealmente al aumentar la profundidad del eje neutro. En consecuencia, se puede calcular con facilidad la posición de la línea recta que da el valor de la fuerza de compresión. La línea de la fuerza de tensión no es lineal en toda su longitud. Se tiene una línea recta cuando el acero en tensión está en el rango elástico, y se obtiene una fuerza constante cuando ambas capas de acero alcanzan el esfuerzo de cedencia. Se puede determinar la línea de la fuerza de tensión calculando la fuerza correspondiente a varias profundidades del eje neutro. El punto de intersección de las dos líneas de fuerza da la profundidad del eje neutro que satisface el equilibrio. De hecho, sólo necesitan graficarse las partes de las líneas cerca de los puntos probables de intersección.

Se puede utilizar el procedimiento recién descrito de pruebas y ajustes, sea analítico o gráfico, para analizar cualquier sección. Es fácil generalizar las ecuaciones 4.61 y 4.62 para incluir más capas de acero: A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}, A_{s4}, ... Debido a la cantidad de casos posibles de esfuerzo del acero, no sería práctico en problemas de este tipo escribir ecuaciones que permitieran encontrar directamente la profundidad del eje neutro resolviendo la ecuación del equilibrio con c como incógnita.

Si la profundidad del eje neutro en la resistencia última es muy pequeña, las deformaciones del acero pueden ser sumamente grandes, por lo que el diseñador debe verificar que estas no excedan la deformación a la que es probable que se fracture el acero.

4.4 SECCIONES SOMETIDAS A FLEXION BIAXIAL

Ocasionalmente se sujeta a las vigas de concreto reforzado a cargas que provocan flexión biaxial (asimétricas). Por ejemplo, una viga aislada que soporte un muro expuesto a la presión del viento puede recibir cargas tanto horizontales como verticales. En la figura 4.16 se muestra una sección con flexión biaxial.

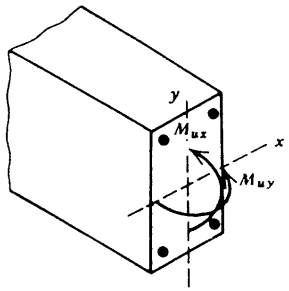


Figura 4.16. Sección de viga de concreto reforzado con momentos flexionantes biaxiales.

En la figura 4.17 se muestra la sección cuando se alcanza la resistencia a flexión. Se supone que la sección está reforzada por cuatro varillas numeradas 1, 2, 3 y 4, como en la figura 4.17 Las secciones que tienen más varillas se podrían analizar utilizando las ecuaciones mostradas más adelante, dividiendo las varillas en cuatro grupos, cuyos centroides son los puntos 1, 2, 3 y 4. Se pueden desarrollar programas de computadora basados en las ecuaciones de las siguientes secciones, para analizar las secciones con acero distribuido a lo largo de las cuatro caras o para considerar varillas individuales en cualquier posición.

En una sección con flexión biaxial, el eje neutro está inclinado respecto a la horizontal, en que el grado de inclinación depende de la relación de los momentos flexionantes en las dos direcciones y de las propiedades de la sección. Se supone que el bloque equivalente de esfuerzos tiene una profundidad igual a β_1 veces la profundidad del eje neutro, y un esfuerzo medio de $0.85f'_c$. Este bloque de esfuerzos equivalentes no es totalmente equivalente al bloque de esfuerzos reales (véase la sección 3.4), aunque es bastante exacto para fines de diseño.

Se puede encontrar la resistencia a flexión para una sección dada como sigue:

1. Se pueden encontrar las deformaciones en el acero considerando los triángulos semejantes del diagrama de deformación de la figura 4.17:

$$\frac{\varepsilon_{s1}}{k_y h - t_y - t_x \cot \theta} = \frac{0.003}{k_y h}$$

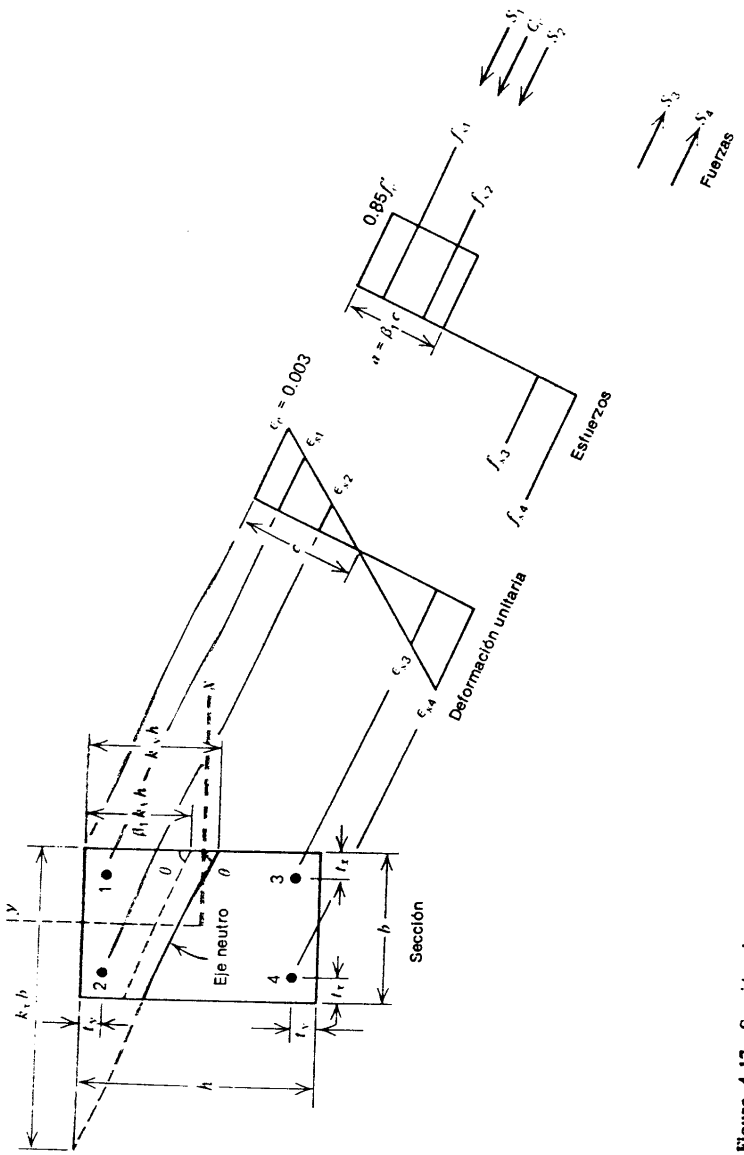


Figura 4.17. Sección de concreto reforzado con momentos flexionantes biaxiales cuando se alcanza la resistencia a flexión.

$$\therefore \quad \varepsilon_{s1} = 0.003\left(1 - \frac{t_x}{k_x b} - \frac{t_y}{k_y h}\right) \tag{4.64}$$

En forma análoga, se tiene

$$\varepsilon_{s2} = 0.003\left(1 - \frac{b - t_x}{k_x b} - \frac{t_y}{k_y h}\right) \tag{4.65}$$

$$\varepsilon_{s3} = 0.003\left(1 - \frac{t_x}{k_x b} - \frac{h - t_y}{k_y h}\right) \tag{4.66}$$

$$\varepsilon_{s4} = 0.003\left(1 - \frac{b - t_x}{k_x b} - \frac{h - t_y}{k_y h}\right) \tag{4.67}$$

en que la deformación positiva indica compresión.

2. Los esfuerzos y las fuerzas en el acero siguen luego de la curva esfuerzo - deformación para el acero. Para el caso usual de un punto bien definido de cedencia, para la varilla 1 si

$$\varepsilon_{s1} \geq \frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{s1} = f_y$$

o si

$$\frac{f_y}{E_s} > \varepsilon_{s1} > -\frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{s1} = \varepsilon_{s1} E_s \tag{4.68}$$

o si

$$\varepsilon_{s1} \leq -\frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{s1} = -f_y$$

Los esfuerzos en las varillas 2, 3 y 4 se encuentran en forma análoga.

Entonces las fuerzas en el acero son dadas por

$$S_1 = A_{s1} f_{s1} \tag{4.69}$$

$$S_2 = A_{s2} f_{s2} \tag{4.70}$$

$$S_3 = A_{s3} f_{s3} \tag{4.71}$$

$$S_4 = A_{s4} f_{s4} \tag{4.72}$$

3. La fuerza de compresión resultante en el concreto y su posición dependen del perfil y área del bloque de esfuerzo de compresión equivalente. En la figura 4.18 se muestran los cuatro perfiles posibles.

Para el caso 1 se tiene

$$C_c = \frac{0.85 f'_c \beta_1 k_y h \beta_1 k_x b}{2} = 0.425 f'_c \beta_1^2 k_x k_y b h \tag{4.73}$$

$$\bar{x} = 0.333 \beta_1 k_x b \tag{4.74}$$

$$\bar{y} = 0.333 \beta_1 k_y h \tag{4.75}$$

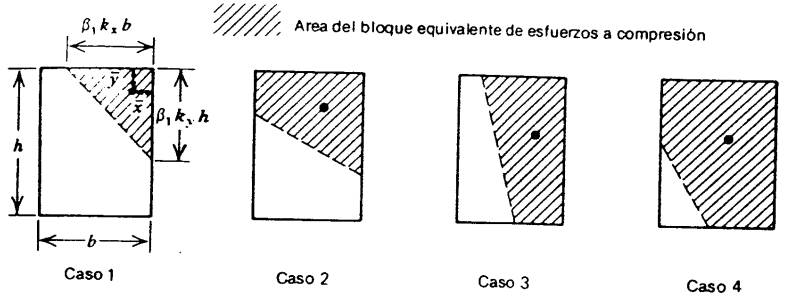


Figura 4.18. Formas posibles del área del bloque de esfuerzos de compresión equivalente.

En forma análoga se pueden encontrar expresiones para C_c, $\bar{x}$ y $\bar{y}$ para los casos 2, 3 y 4, mismas que proporcionan Mattock, Kriz y Hognestad.

4. Por equilibrio, la posición del eje neutro debe ser tal que la suma de las fuerzas longitudinales sea cero.

$$C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 0 \tag{4.76}$$

5. Se pueden encontrar los momentos que actúan alrededor de los ejes en la resistencia a flexión, tomando los momentos de las fuerzas internas alrededor de un eje en dirección de las x (por ejemplo el borde inferior de la sección), y un eje en la dirección de las y (por ejemplo el borde izquierdo de la sección). Entonces se tiene

$$M_{ux} = C_c(h - \bar{y}) + (S_1 + S_2)(h - t_y) + (S_3 + S_4)t_y \tag{4.77}$$

$$M_{uy} = C_c(b - \bar{x}) + (S_1 + S_3)(b - t_x) + (S_2 + S_4)t_x \tag{4.78}$$

Se deben utilizar los signos apropiados (positivo para compresión, negativo para tensión) en las ecuaciones 4.76 a 4.78 al emplear estas expresiones.

Tanto el análisis como el diseño de secciones con momentos flexionantes biaxiales son difíciles, debido a que es necesario utilizar procedimientos de pruebas y ajustes para encontrar la inclinación y profundidad del eje neutro.

Ejemplo 4.9

Una viga de concreto tiene una sección cuadrada de 10 plg (254 mm) por lado y está reforzada por cuatro varillas de acero del núm. 9 (28.7 mm de diámetro), habiendo una varilla en cada esquina de la sección. La distancia desde el centroide de cada varilla de los lados adyacentes de cada sección es de 2 plg (50.8 mm). El

acero tiene una resistencia de cedencia bien definida de 40,000lb/plg^2(276 N/mm^2) y un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb/plg^2 (0.2×10^6 N/mm^2). El concreto tiene una resistencia de cilindro de 4000 lb/plg^2 (27.6 N/mm^2). Calcular la resistencia a flexión de la sección, si está sujeta a momentos flexionantes biaxiales de magnitud igual alrededor de ejes paralelos a los bordes.

Solución

Ya que la sección es cuadrada y los momentos flexionantes biaxiales son iguales, el área comprimida de concreto tiene el perfil de un triángulo isósceles ($k_x = k_y = k$); en consecuencia, se conoce la inclinación del eje neutro. La figura 4.19 muestra la sección. Se seguirá un procedimiento de pruebas y ajustes para encontrar la profundidad del eje neutro.

$$A_{s1} = A_{s2} = A_{s3} = A_{s4} = 1.00 \text{ plg}^2$$

Primera estimación

Para la posición del eje neutro en la figura 4.19, sea $k = 0.70$. De las ecuaciones 4.64 a 4.67, se escribe

$$\varepsilon_{s1} = 0.003\left(1 - \frac{2}{0.7 \times 10} - \frac{2}{0.7 \times 10}\right) = 0.001286$$

$$\varepsilon_{s2} = \varepsilon_{s3} = 0.003\left(1 - \frac{10 - 2}{0.7 \times 10} - \frac{2}{0.7 \times 10}\right) = -0.001286$$

$$\varepsilon_{s4} = 0.003\left(1 - \frac{8}{0.7 \times 10} - \frac{8}{0.7 \times 10}\right) = -0.00386$$

También, $f_y/E_s = 40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$. En consecuencia, la ecuación 4.68 da

$$f_{s1} = 0.001286 \times 29 \times 10^6 = 37{,}290 \text{ lb/plg}^2$$

$$f_{s2} = f_{s3} = -0.001286 \times 29 \times 10^6 = -37{,}290 \text{ lb/plg}^2$$

$$f_{s4} = -40{,}000 \text{ psi}$$

De las ecuaciones 4.69 a 4.72 se encuentra

$$S_1 = 37{,}290 \text{ lb} \qquad S_2 = S_3 = -37{,}290 \text{ lb} \qquad S_4 = -40{,}000 \text{ lb}$$

Y la ecuación 4.73 da

$$C_c = 0.425 \times 4000 \times 0.85^2 \times 0.7^2 \times 10^2 = 60{,}180 \text{ lb}$$

$$\therefore \quad C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = -17{,}110 \text{ lb}$$

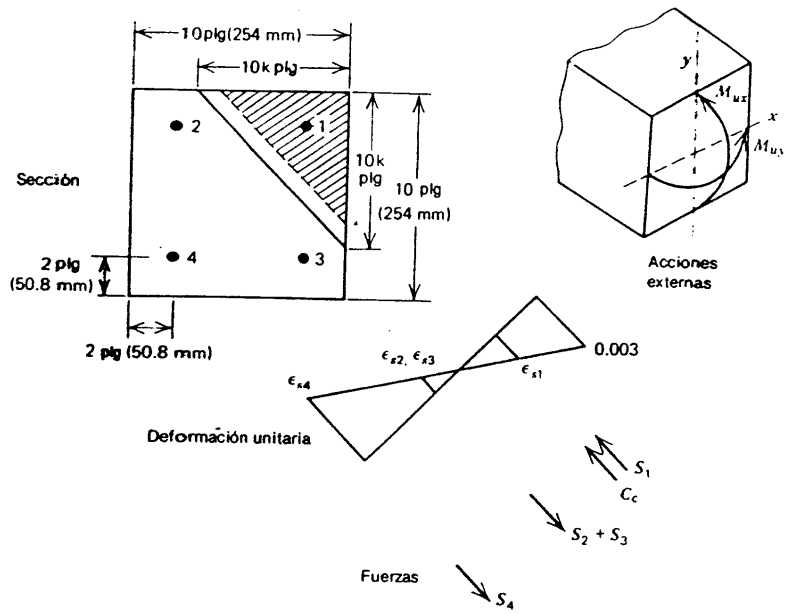


Figura 4.19. Sección y acciones internas y externas para el ejemplo 4.9.

En consecuencia, hay demasiada tensión. Por tanto, auméntese k.

Segunda estimación

Sea $k = 0.8$. Entonces utilizando las ecuaciones como antes, se escribe

$$\varepsilon_{s1} = 0.0015 \qquad \varepsilon_{s2} = \varepsilon_{s3} = -0.00075 \qquad \varepsilon_{s4} = -0.003$$

$$\therefore \quad f_{s1} = 40{,}000 \text{ lb/plg}^2 \qquad f_{s2} = f_{s3} = -21{,}750 \text{ lb/plg}^2$$
$$f_{s4} = -40{,}000 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad S_1 = 40{,}000 \text{ lb} \qquad S_2 = S_3 = -21{,}750 \text{ lb} \qquad S_4 = -40.000 \text{ lb}$$
$$C_c = 78{,}610 \text{ lb}$$

$$\therefore \quad C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 35{,}110 \text{ lb}$$

Por tanto, hay demasiada compresión. Redúzcase k.

Tercera estimación

Interpolar linealmente utilizando las fuerzas residuales anteriores de la ecuación de equilibrio

$$k = 0.7 + \frac{17{,}110}{52{,}220} \times 0.1 = 0.73$$

Usando las ecuaciones del equilibrio como antes, hacer

$$\varepsilon_{s1} = 0.001356 \qquad \varepsilon_{s2} = \varepsilon_{s3} = -0.001110 \qquad \varepsilon_{s4} = -0.003575$$

$$\therefore \quad f_{s1} = 39{,}320 \text{ lb/plg}^2 \qquad f_{s2} = f_{s3} = -32{,}190 \text{ lb/plg}^2$$
$$f_{s4} = -40{,}000 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad S_1 = 39{,}320 \text{ lb} \qquad S_2 = S_3 = -32{,}190 \text{ lb} \qquad S_4 = -40{,}000 \text{ lb}$$
$$C_c = 65{,}450 \text{ lb}$$

$$\therefore \quad C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 = 390 \text{ lb}$$

En consecuencia, la condición de equilibrio se satisface
De las ecuaciones 4.74 y 4.75, se tiene

$$\bar{x} = \bar{y} = 0.333 \times 0.85 \times 0.73 \times 10 = 2.07 \text{ plg}$$

De las ecuaciones 4.77 y 4.78, se tiene

$$M_{ux} = M_{uy} = 65{,}450(10 - 2.07) + (39{,}320 - 32{,}190)(10 - 2) + (-32{,}190 - 40{,}000)2$$
$$= 431{,}700 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (48.7 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

y el momento flexionante resultante que actúa alrededor de la diagonal es

$$\sqrt{M_{ux}^2 + M_{uy}^2} = \sqrt{2} \times 431{,}700 = 610{,}500 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (68.9 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Es interesante notar que se puede calcular que la resistencia a flexión de la sección por flexión alrededor del eje en la dirección x ó y es igual a 547,600 lb plg (61.8 kN · m).

Es evidente que la solución manual de las ecuaciones generales del momento flexionante biaxial requiere cálculos complicados debido al procedimiento de pruebas y ajustes necesarios para encontrar el peralte e inclinación del eje neutro para determinados valores de M_{ux} y M_{uy}. Sin embargo, se pueden programar las ecuaciones para resolverse mediante computadora digital. En la figura 4.20 se muestra la forma que tendría un conjunto de curvas de interacción, que muestra las combinaciones de los momentos M_{ux} y M_{uy} que harían que se alcanzara la resistencia a flexión para distintas cuantías de acero de secciones con igual cantidad de acero en cada esquina de la sección. Las gráficas de diseño graficadas en esta forma permitirían encontrar el área de acero para combinaciones específicas de $M_{ux}/(f'_c bh^2)$ y $M_{uy}/(f'_c b^2 h)$. Es interesante notar el cambio de la forma de las curvas de la figura 4.20 al aumentar ρ_t/f'_c en que ρ_t es el área

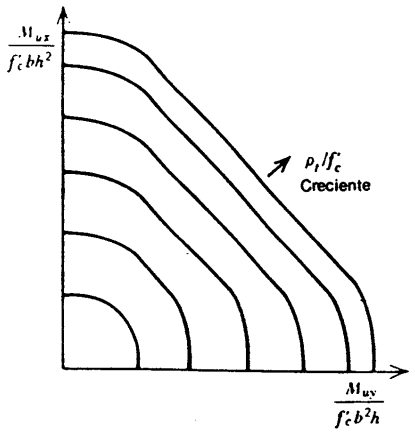


Figura 4.20. Forma de las curvas de interacción para una sección de concreto reforzado con momentos flexionantes biaxiales en la resistencia a flexión.

total del acero dividida entre el área del concreto. Como guía aproximada, si se conocen M_{ux} y M_{uy} para determinada sección, una curva de interacción lineal siempre será conservadora; pero una curva circular (elíptica si las resistencias uniaxiales a flexión en las dos direcciones son diferentes) puede ser insegura, especialmente a elevados valores ρ_t/f'_c

4.5 INESTABILIDAD LATERAL DE LAS VIGAS

Cuando se utilizan vigas esbeltas, la inestabilidad antes del desarrollo de la resistencia a flexión puede ser la causa de la falla. La falla por inestabilidad toma la forma de pandeo lateral acompañado por torsión, como lo ilustra la figura 4.21. Esta inestabilidad puede ser importante en el caso de vigas que carecen de apoyo lateral, si la rigidez a flexión en el plano de flexión es muy grande comparada con su rigidez lateral. El problema se presenta raras veces, debido a que la mayoría de los diseñadores intuitivamente eligen secciones compactas. La situación crítica puede presentarse durante la erección de estructuras de concreto precolado antes de que se proporcione restricción lateral adecuada a las componentes.

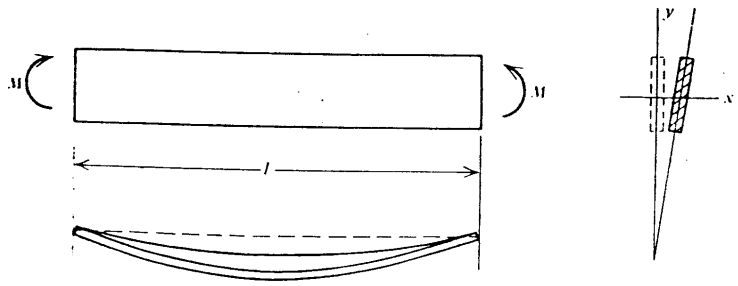


Figura 4.21. Viga con falla por inestabilidad lateral.

El tratamiento analítico del problema se complica si se intentan evaluar las características del comportamiento del concreto reforzado en forma realista. Debido a que no hay suficiente evidencia experimental contra la que pueda probarse en forma convincente una carga crítica obtenida teóricamente, aquí no se intenta cuantificar los parámetros relevantes. Esto sólo se podría hacer utilizando suposiciones cuestionables.

La solución clásica[4.8] de Michell para el momento crítico M_{cr} que produce la inestabilidad en una viga prismática isotrópica linealmente elástica y homogénea es

$$M_{cr} = \frac{\lambda}{l}\sqrt{\frac{E_c I_x E_c I_y GJ}{E_c I_x - E_c I_y}}\left(1 - 1.74\frac{y_w}{l}\sqrt{\frac{E_c I_y}{GJ}}\right) \tag{4.79}$$

en que λ = a un coeficiente que depende del tipo de carga y que tiene los siguientes valores:

(a) π para momento uniforme a lo largo de la viga
(b) 3.53 para una carga distribuida uniformemente
(c) 4.24 para una carga central concentrada

E_c = módulo de elasticidad del concreto
G = módulo de rigidez al cortante del concreto
I_x, I_y = momentos de inercia de la sección transversal del concreto alrededor del eje mayor y menor respectivamente
J = momento polar equivalente de inercia de la sección transversal del concreto
l = longitud no apoyada de la viga
y_w = distancia del punto de aplicación de la carga sobre el centroide de la sección

Marshall[4.9] investigó la aplicabilidad de cada uno de estos parámetros con respecto al concreto reforzado e intentó determinar límites dentro de los cuales es probable que ocurra el verdadero momento crítico. Las variaciones para las cantidades individuales son muy grandes, y a la luz de esta propiedad no deberían objetarse ciertas simplificaciones a la ecuación 4.79. Las secciones transversales que son sensibles al pandeo lateral tienen una relación de peralte a ancho de por lo menos 2. En consecuencia, si se va a tomar en cuenta el efecto del agrietamiento, la relación I_y/I_x se hace muy pequeña y se puede considerar que es igual a cero. Con esta simplificación, la ecuación 4.79 se reduce a

$$M_{cr} = \frac{\lambda}{l}\sqrt{E_c I_y GJ}\left(1 - 1.74\frac{y_w}{l}\sqrt{\frac{E_c I_y}{GJ}}\right) \tag{4.80}$$

Al evaluar el momento crítico, el diseñador debe tener presente que el concreto no es lineal en compresión; en consecuencia, se necesita considerar un módulo reducido de elasticidad a esfuerzos elevados. Al evaluar el momento de inercia, debe tener en cuenta el efecto del agrietamiento a flexión. Este agrietamiento varía a lo largo de la viga de acuerdo con el patrón de momentos. El cálculo de I_y podría bajarse en la parte de la sección transversal de concreto solamente en la zona a compresión. El valor del módulo de rigidez al cortante, G, está relacionado con E_c, aunque son inciertas las contribuciones relativas del concreto y el refuerzo del alma a la rigidez torsional. Otras incertidumbres son: la cantidad de sección transversal de concreto que debe incluirse en la estimación del momento polar equivalente de inercia J, y el grado en el que la flexión biaxial afecta la torsión. Es evidente que hay dificultades para calcular con exactitud los términos de rigidez.

Al sustituir $0.5h$ por y_w, expresando el módulo de elasticidad en el rango no lineal como fracción de la resistencia f'_c, del cilindro a compresión, y expresando I_x, I_y y J en términos de las dimensiones de la sección, la ecuación para el momento crítico para una viga rectangular prismática se reduce aproximadamente a

$$M_{cr} = k\frac{\lambda}{l}b^3 d f'_c \tag{4.81}$$

en que k es una constante numérica, b es el ancho de la sección y d es la profundidad efectiva del acero en tensión.

Para que ocurra una falla por inestabilidad, la capacidad de flexión de la viga M_u debe ser mayor que el momento crítico. Sin embargo, la capacidad de flexión depende de la cuantía de acero y para una sección simplemente reforzada este valor está dentro de los límites

$$0.05 < \frac{M_u}{bd^2 f'_c} < 0.29 \tag{4.82}$$

en que $\rho_{min} < \rho < \rho_{max} = 0.75\rho_b$, 40,000 lb/plg^2 < f_y < 60,000 lb/plg^2 y $f'_c \leq$ lb/plg^2 4.000 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2).

No es probable que una viga subreforzada sea crítica con respecto al pandeo. En consecuencia, al considerar vigas con máxima cuantía utilizable de acero, la condición crítica es aproximadamente

$$0.29bd^2 f'_c > k\frac{\lambda}{l}b^3 d f'_c \qquad \text{ó} \qquad \frac{ld}{b^2} > k_1 \tag{4.83}$$

en que $k_1 = k/0.29$.

Al hacer suposiciones limitantes[4.9] para las variables de la ecuación 4.80, el valor de k_1 está dentro de los amplios límites de 100 y 580 para las vigas que tienen una carga uniformemente distribuida. Dados estos límites, no se justifica un refinamiento adicional del análisis tomando en cuenta la contribución del acero a flexión.[4.10]

Examinando los datos disponibles, Marshall[4.9] encontró que los mayores valores de ld/b^2 eran los más aproximadamente correctos. Se debe notar que la pura relación claro/ancho utilizada tradicionalmente, l/b, no describe en forma adecuada los criterios de inestabilidad en las vigas.

Al considerar los efectos del flujo plástico y de una posible desviación de la linealidad inicial y notar que las fallas por inestabilidad muestran ductilidad limitada, se aprecia que el factor φ de reducción de capacidad utilizado en el diseño con M_{cr} debe ser pequeño. Esto lo apoya la considerable dispersión en los resultados experimentales disponibles.[4.9] En forma alterna, los parámetros geométricos especificados deben ser deliberadamente conservadores. Para impedir la inestabilidad lateral, el código británico CP 110[4.11] ha adoptado los siguientes límites:

1. Para vigas soportadas simplemente o continuas, la distancia libre entre las restricciones laterales l debe ser tal que

$$\frac{l}{b} < 60 \qquad \text{y} \qquad \frac{ld}{b^2} < 250 \tag{4.84a}$$

2. Para voladizos que solamente tienen restricciones laterales en los apoyos, los valores deben ser

$$\frac{l}{b} < 25 \qquad \text{y} \qquad \frac{ld}{b^2} < 100 \tag{4.84b}$$

Si se exceden estos límites, el momento M_{cr} crítico gobierna la resistencia de la viga. Utilizando la estimación de Marshall,[4.9] el valor aproximado del momento es

$$M_{cr} = \frac{160\varphi f'_c b^3 d}{l} \tag{4.85}$$

Se sugiere que $\varphi = 0.5$ sea el factor de reducción de capacidad.

4.6 BIBLIOGRAFIA

4.1 C. S. Whitney, "Design of Reinforced Concrete Members Under Flexure or Combined Flexure and Direct Compression," *Journal ACI*, Vol. 33, marzo-abril, 1937, págs. 483-498.

4.2 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 págs.

4.3 N. J. Everard and J. L. Tanner, *Theory and Problems of Reinforced Concrete Design*, Schaum Publishing Co., Nueva York, 1966, 325 págs.

4.4 C. S. Whitney and E. Cohen, "Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete," *Journal ACI*, Vol. 53, No. 5, Noviembre 1956, págs. 455-490.

4.5 ACI Committee 340, *Design Handbook in Accordance with Strength Design Method of ACI 318-71*, Vol. 1, ACI Special Publication SP-17 (73), American Concrete Institute, Detroit, 1973, 432 págs.

4.6 ACI Committee 318, "Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 96 págs.

4.7 A. H. Mattock, L. B. Kriz, and E. Hognestad, "Rectangular Stress Distribution in Ultimate Strength Design," *Journal ACI*, Vol. 57, No. 8, Febrero 1961, págs. 875-928.

4.8 A. G. M. Michell, "The Elastic Stability of Long Beams Under Transverse Forces," *Phil. Mag.*, Vol. 48, No. 292, 1899.

4.9 W. T. Marshall, "A Survey of the Problem of Lateral Instability in Reinforced Concrete Beams," *Proceedings, Institution of Civil Engineers*, Vol. 43, Julio 1969 págs. 397-406.

4.10 J. K. Sant and R. W. Bletzacker, "Experimental Study of Lateral Stability of Reinforced Concrete Beams," *Journal ACI*, Vol. 58, No. 6, Diciembre 1961, págs. 713-736.

4.11 BSI, "Code of Practice for the Structural Use of Concrete, CP110: Part 1: 1972," British Standard Institution, Londres, 1972, 154 págs.

5

Resistencia de miembros sometidos a flexión y carga axial

5.1 INTRODUCCION

Las columnas son elementos estructurales utilizados primordialmente para soportar cargas de compresión. Una columna corta es aquélla en que la carga última para una excentricidad dada está solamente gobernada por la resistencia de los materiales y las dimensiones de la sección transversal. Una columna esbelta es aquélla en que la carga última también esta influida por la esbeltez, lo que produce flexión adicional debido a las deformaciones transversales.

Las columnas de concreto se refuerzan mediante acero longitudinal y transversal. Generalmente el acero transversal tiene la forma de estribos o hélices espaciados estrechamente. (véase la figura 5.1).

5.2 COLUMNAS CORTAS CARGADAS AXIALMENTE

El flujo plástico y la contracción del concreto tienen fuerte influencia en los esfuerzos en el acero y el concreto de una columna de concreto reforzado cargada axialmente bajo carga de servicio, lo que tiende a aumentar el esfuerzo en el acero longitudinal y a reducir el esfuerzo en el concreto. En una columna que tiene una cuantía elevada de acero y elevada carga inicial, la que posteriormente se elimina en su mayor parte, se puede llegar a tener tensión en el concreto y compresión en el acero. En consecuencia, es sumamente difícil evaluar la seguridad de las columnas de concreto reforzado utilizando la teoría elástica y los esfuerzos permisibles.

Por otra parte, la carga última de una columna no varía apreciablemente con la historia de la carga. Al aumentar la carga, el acero normalmente alcanza la resistencia de cedencia antes de que el concreto alcance su resistencia total. Sin embargo, en esta etapa la columna no ha alcanzado

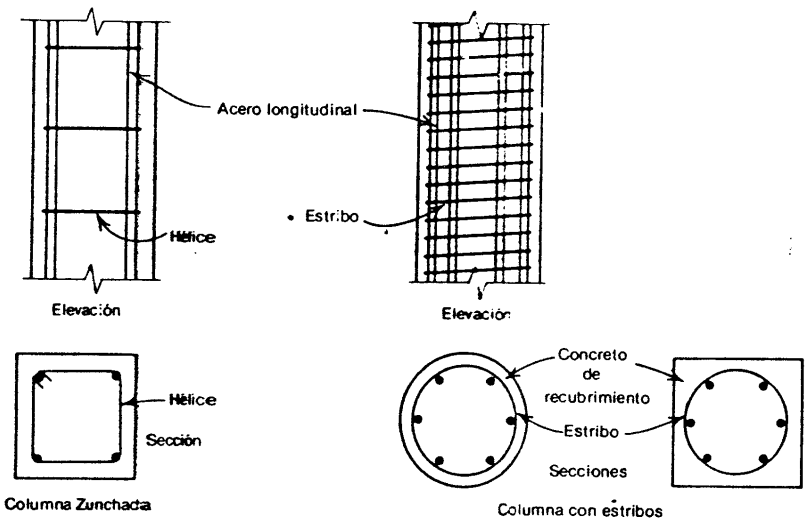


Figura 5.1. Columnas con estribos y Zunchadas.

su carga última. La columna puede transmitir más carga debido a que el acero soporta el esfuerzo de cedencia en tanto que las deformaciones y cargas aumentan hasta que la carga alcanza su resistencia total. La figura 5.2 ilustra este comportamiento. En forma alterna, si el concreto alcanza su resistencia antes de que el acero ceda, como sucede cuando se utiliza acero de muy alta cedencia, la alta deformación del concreto cuando éste está próximo a su resistencia total, permite al acero alcanzar la resistencia de cedencia. En consecuencia, la carga última de una columna de concreto reforzado cargada axialmente (una mejor denominación sería carga de cedencia) es la suma de la resistencia de cedencia del acero más la resistencia del concreto. Se ha encontrado (v. gr. Richart y Brown[5.1] y Hognestad[5.2]) que la resistencia del concreto en una columna cargada axialmente es aproximadamente $0.85f'_c$, en que f'_c es la resistencia a compresión de un cilindro. La resistencia es algo más baja que la correspondiente a un cilindro debido a la diferencia en la forma y tamaño del espécimen y debido a que el colado vertical de una columna induce la sedimentación y ganancia de agua en la región superior de la columna. En consecuencia, la carga última de una columna cargada axialmente se puede escribir como

$$P_o = 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st} \qquad (5.1)$$

en que A_g es el área bruta de la sección transversal, A_{st} es el área total del acero longitudinal en la sección, y f_y es la resistencia de cedencia del acero.

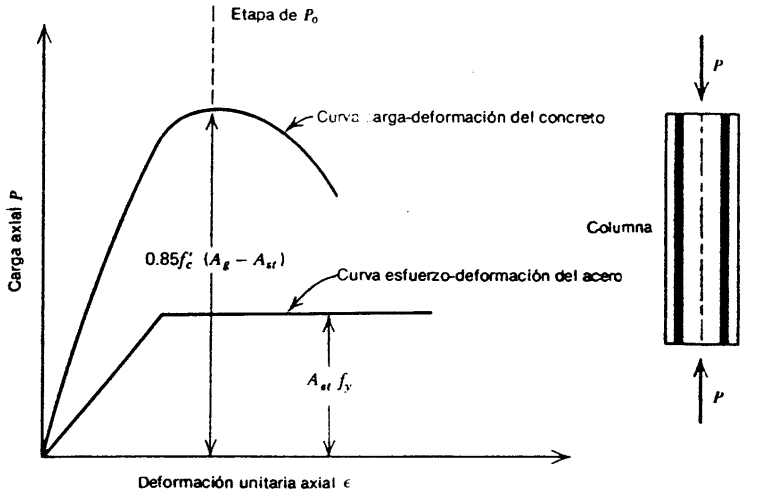


Figura 5.2. Curvas carga axial-deformación para el acero y concreto, de una columna de concreto reforzado cargada axialmente.

Las columnas con estribos y hélices se comportan casi idénticamente hasta la carga P_o, y el acero transversal contribuye muy poco a la resistencia de la columna. Una vez alcanzada la carga P_o una columna con estribos que no esten espaciados estrechamente falla de inmediato, acompañada de ruptura del concreto y pandeo de las varillas de acero longitudinal entre los estribos, debido a que la separación entre los estribos es generalmente demasiado grande para impedir la falla general del concreto y el pandeo de las varillas.

Después de alcanzarse la carga P_o en una columna con hélice, se agrieta o destruye el recubrimiento de concreto fuera de la espiral. La capacidad de carga se reduce debido a la pérdida de área de concreto, pero generalmente el paso de la hélice de acero es suficientemente pequeño para impedir el pandeo de las varillas longitudinales entre las espirales. En consecuencia, las varillas longitudinales continúan transmitiendo la carga; se llega a una elevada deformación y el concreto del núcleo (que tiende a aumentar en volumen, debido a la disrupción interna) oprime a la hélice, lo que provoca que la hélice ejerza una reacción de confinamiento en el núcleo. El esfuerzo de compresión radial resultante aumenta la capacidad de transmisión de carga del concreto del núcleo, y a pesar de la pérdida del recubrimiento, la carga última de una columna con una fuerte hélice puede llegar a ser mayor que P_o. En la sección 2.1.3 se estudió el aumento en la resistencia del concreto debido al confinamiento de una hélice de acero. La ecuación 2.5 da la resistencia de cilindros de concreto confinados cuando la hélice alcanza la resistencia de cedencia. Si se reemplaza en la ecuación

2.5 la resistencia f'_c del cilindro no confinado por la resistencia no confinada del concreto en una columna, $0.85f'_c$, se puede escribir la carga última de una columna zunchada como

$$P_u = \left(0.85f'_c + 8.2\frac{f_y A_{sp}}{d_s s}\right)A_{cc} + f_y A_{st} \tag{5.2}$$

en que f_y = resistencia de cedencia del acero, d_s = diámetro de la hélice, A_{sp} = área de la varilla helicoidal, s = paso de la hélice, y A_{cc} = área del concreto en el núcleo de la columna.

Luego

$$8.2\frac{f_y A_{sp}}{d_s s}A_{cc} = 8.2\frac{f_y A_{sp}}{d_s s}\left(\frac{\pi d_s^2}{4} - A_{st}\right)$$

$$= 2.05 f_y V_s - 8.2\frac{f_y A_{sp} A_{st}}{d_s s} \tag{5.3}$$

en que $V_s = A_{sp}\ d_s/s$ = volumen del acero helicoidal por longitud unitaria del núcleo de la columna y A_{st} = área total del acero longitudinal en la sección

En consecuencia, se puede escribir la ecuación 5.2

$$P_u = 0.85f'_c A_{cc} + 2.05 f_y V_s + f_y A_{st}\left(1 - \frac{8.2A_{sp}}{d_s s}\right) \tag{5.4}$$

Si se remplaza el acero helicoidal por un volumen equivalente de acero longitudinal, V_s es igual al área de ese acero longitudinal. Consecuentemente, la ecuación 5.4 indica que el acero en la hélice es aproximadamente dos veces más efectivo que el mismo volumen de acero longitudinal para disponible a elevadas deformaciones y después de que se desprende el cidad de transmisión de carga de las columnas zunchadas solamente está disponible a elevadas deformaciones y después de que se desprende el recubrimiento. * Esto requiere que se satisfaga la siguiente condición

$$0.85f'_c A_{cc} + 2.05 f_y V_s + f_y A_{st}\left(1 - \frac{8.2A_{sp}}{d_s s}\right) > 0.85f'_c(A_g - A_{st}) + f_y A_{st}$$

por tanto, también se debe tener

$$V_s > 0.415\frac{f'_c}{f_y}(A_g - A_{cc} - A_{st}) + \frac{4A_{sp}A_{st}}{d_s s}$$

que se puede escribir como

*Para que la carga máxima tomada por la Columna una vez que se ha desprendido el recubrimiento al alcanzarse la cedencia en la hélice sea mayor que la carga de cedencia antes del descorchamiento, P_u de la ec. 5.4 debe ser mayor que P_u de la P 5.1.

$$\rho_s = \frac{V_s}{A_c} > 0.415\frac{f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) + \frac{4A_{sp}A_{st}}{d_s s A_c} \tag{5.5}$$

en que $A_c = A_{cc} + A_{st}$ el área bruta del núcleo de la columna. Para las columnas zunchadas, el código ACI [5.3] requiere que ρ_s no sea menor que el valor dado por

$$\rho_s = 0.45\frac{f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) \tag{5.6}$$

en que A_c = área del núcleo medida al diametro exterior de la hélice. Al comparar las ecuaciones 5.5 y 5.6 se encuentra que el requerimiento del ACI asegura que la carga última de la columna después del desprendimiento del recubrimiento excederá a la carga antes del desprendimiento. La elevada ductilidad de las columnas zunchadas (fig. 5.3) es de interés

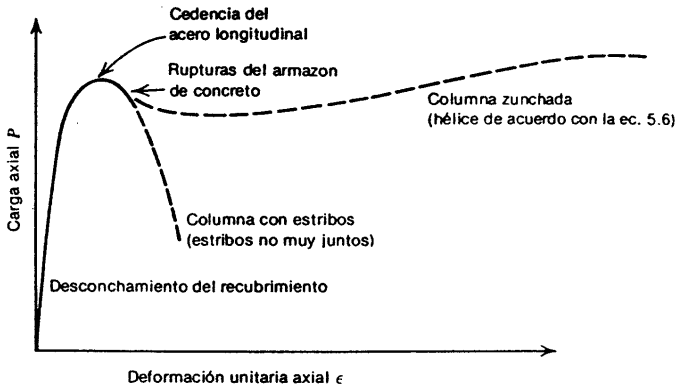


Figura 5.3. Comparación de curvas carga total axial-deformación para columnas con estribos y Zunchadas.

considerable. En tanto que la columna con estribos cargada axialmente y cuyos estribos no están espaciados estrechamente exhibe falla frágil, una columna zunchada tiene elevada capacidad de deformación plástica.

Las pruebas han demostrado (vea la sección 2.1.3) que los estribos rectangulares espaciados estrechamente también aumentan la resistencia y ductilidad del concreto confinado, aunque sin la efectividad de las hélices circulares, debido a que los estribos rectangulares sólo ejercen presión de confinamiento cerca de las esquinas de la sección, ya que la presión lateral del concreto provoca el arqueamiento de los lados de los estribos, en tanto que debido a su forma las hélices circulares pueden aplicar una presión uniforme de confinamiento alrededor de la circunferencia. Las pruebas efectuadas por Chan [5.4] sugieren que al considerar el aumento en la resistencia, la eficiencia de los estribos cuadrados puede ser del 50% de la del

mismo volumen de hélices circulares. Las pruebas realizadas por muchos otros también han indicado un aumento en la resistencia debido a estribos rectangulares espaciados estrechamente, aunque los resultados reportados por Roy y Sozen[5.5] no indicaron aumento en la resistencia. Es probable que la ganancia en la resistencia del concreto debida a estribos rectangulares sea pequeña en la mayoría de los casos. Sin embargo, los resultados de las pruebas siempre han mostrado que se obtuvo una mejora significativa en la ductilidad del concreto, como consecuencia de utilizar estribos rectangulares espaciados estrechamente.

5.3 COLUMNAS CORTAS CARGADAS EXCENTRICAMENTE CON FLEXION UNIAXIAL

5.3.1 Introducción

Las columnas cargadas axialmente rara vez ocurren en la práctica, debido a que casi siempre hay cierta flexión, como lo evidencia la torcedura inicial ligera de las columnas, la manera en que se aplican las cargas mediante vigas y losas, y los momentos introducidos por la construcción continua.

La combinación de una carga axial P_u y momento flexionante M_u equivale a una carga P_u aplicada con la excentricidad $e = M_u/P_u$, como se muestra en la figura 5.4

Las figuras 5.5 y 5.6 son vistas posterior y anterior de columnas con estribos y zunchos que se cargaron excéntricamente a la falla. Estas co-

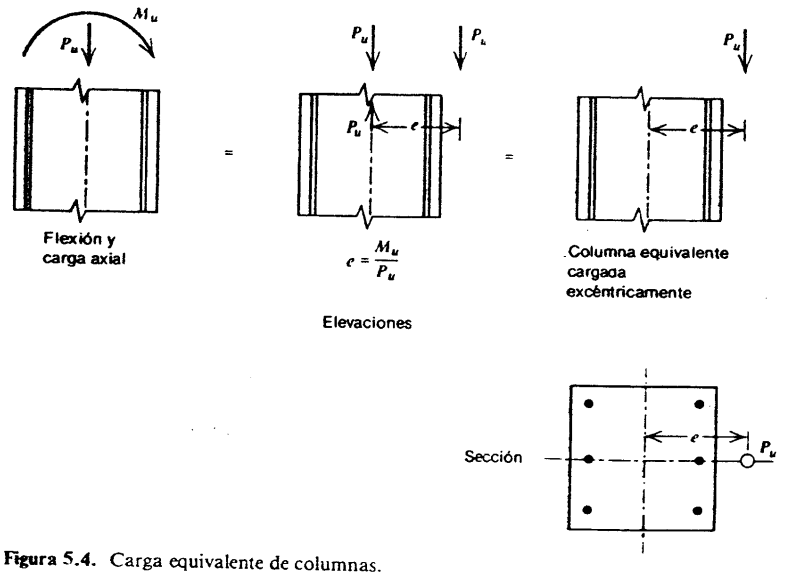


Figura 5.4. Carga equivalente de columnas.

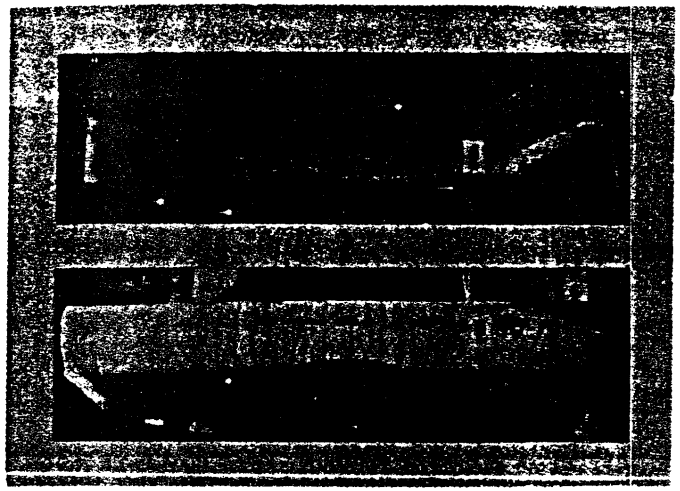


Figura 5.6. Columna Zunchada cargada excéntricamente ($e = 0.5h$) después de la falla.[5.2]

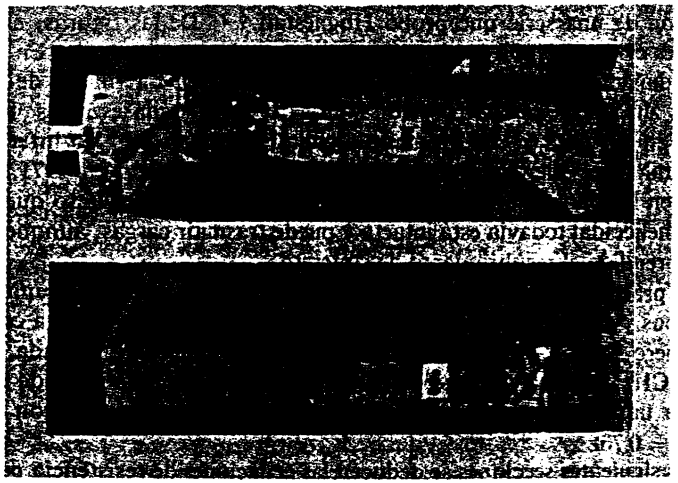


Figura 5.5. Columna con estribos cargada excéntricamente ($e = 0.5h$) después de la falla.[5.2]

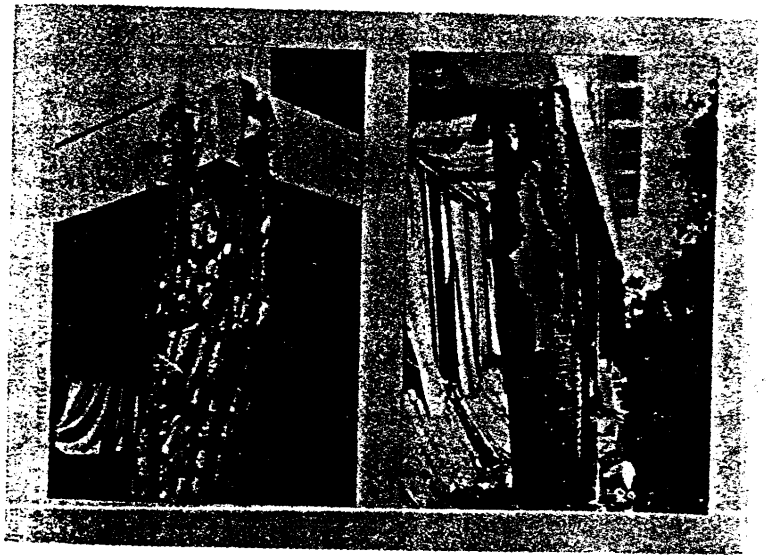


Figura 5.7. Columnas con estribos y Zunchadas del hospital Olive View después del terremoto de San Fernando en 1971.

lumnas son de una serie que probó Hognestad.[5.2] De las figuras, nuevamente es evidente la mayor ductilidad de una columna zunchada. En los edificios dañados por sismos se ha observado la mayor ductilidad de las columnas zunchadas en comparación con las columnas con estribos. Por ejemplo, en la figura 5.7 se muestran algunas columnas del piso inferior del hospital Olive View después del sismo de San Fernando en 1971. El concreto en la columna con estribos se redujo a escombro en tanto que la columna helicoidal todavía está intacta y puede trasmitir cargas, aunque se haya desprendido el recubrimiento de concreto.

En la práctica, desde el punto de vista de la resistencia, las columnas con estribos y zunchadas se diseñan como si el concreto no estuviera confinado, pero debido a la mayor dureza de una columna zunchada, el código ACI[5.3] asigna un factor ligeramente mayor de reducción de capacidad a una columna zunchada ($\varphi = 0.75$) que a una columna con estribos ($\varphi = 0.70$).

En las siguientes secciones se deducen las ecuaciones de resistencia para columnas cargadas excéntricamente, suponiendo que el concreto no está confinado. En la carga última el concreto alcanza su capacidad máxima, aunque el acero longitudinal puede o no estar en la resistencia de cedencia. Las suposiciones de la sección 3.1 se utilizan para deducir las ecuaciones de resistencia. En esta sección se considera solo la flexión alrededor de un eje principal de la sección (es decir, flexión uniaxial).

5.3.2 Análisis de secciones rectangulares con varillas en una o dos caras

En la figura 5.8 se muestra una sección rectangular con varillas en dos caras, cargada excéntricamente a la carga última. Se considera que la profundidad del eje neutro es menor que el peralte total. Como con las vigas, una falla a tensión o una falla a compresión puede ocurrir dependiendo de si el acero a tensión alcanza la resistencia de cedencia. Sin embargo, contrario a las vigas, no se puede evitar una falla a compresión

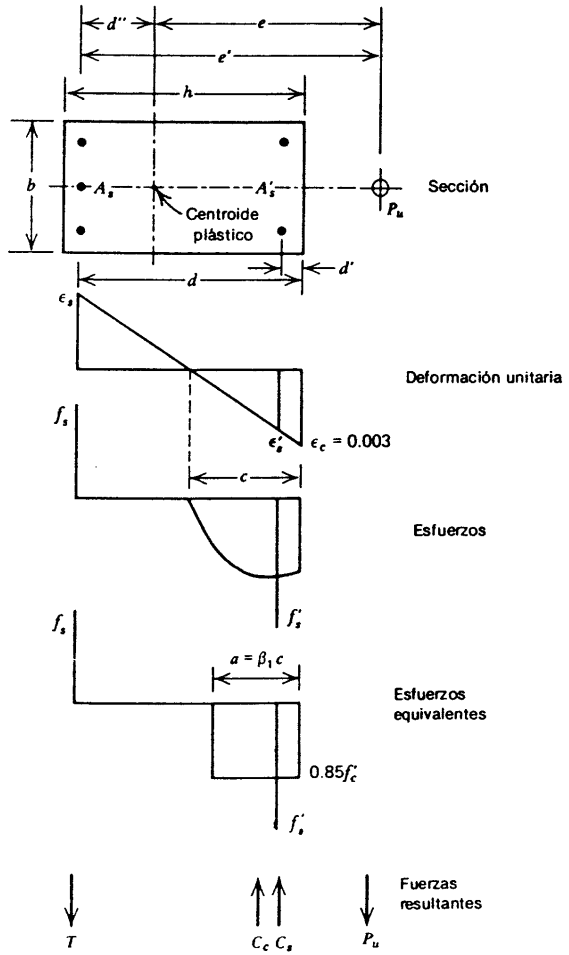


Figura 5.8. Sección de columna cargada excéntricamente a la carga última.

limitando el área del acero, ya que el tipo de la falla depende del nivel de carga axial. Por lo general, el acero de compresión en las columnas cargadas excéntricamente a la carga última alcanza la resistencia de cedencia, excepto cuando el nivel de carga es bajo, cuando se utiliza acero de alta resistencia o cuando la columna es tan pequeña que la dimensión d' (vease la figura 5.8) es relativamente grande. Es común suponer que el acero a compresión está cediendo, y luego comprobar que se ha alcanzado la deformación de cedencia. Con referencia a la figura 5.8, y suponiendo el esfuerzo en el acero a compresión $f'_s = f_y$, la ecuación de equilibrio obtenida de la suma de las fuerzas internas es

$$P_u = 0.85f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s \tag{5.7}$$

y la expresión que se obtiene tomando momentos respecto del acero de tensión es

$$P_u e' = 0.85f'_c ab(d - 0.5a) + A'_s f_y(d - d') \tag{5.8}$$

en que e' es la excentricidad de la carga última P_u medida desde el centroide del acero de tensión, f'_c es la resistencia a compresión del cilindro de concreto, f_y es la resistencia de cedencia del acero, f_s es el esfuerzo en el acero de tensión, A_s es el área del acero a tensión, A'_s es el área del acero de compresión, a es la profundidad del bloque de esfuerzo de concreto rectangular equivalente, b el ancho de la columna, d la distancia desde la fibra a compresión extrema al centroide del acero de tensión y d' la distancia desde la fibra a compresión extrema al centroide del acero de compresión.

A veces es más conveniente utilizar la excentricidad de P_u desde el centroide plástico e. El centroide plástico es el centroide de resistencia de la sección si se comprime todo el concreto al esfuerzo máximo ($0.85f'_c$) y se comprime todo el acero al esfuerzo de cedencia (f_y), con deformación uniforme en la sección. En otras palabras, el centroide plástico es el punto de aplicación de la carga externa P_o que produce una condición de falla por carga axial. Este caso está representado en la figura 5.9. Tomando momentos de las fuerzas internas alrededor del centroide del acero del lado izquierdo e igualándolos al momento de la fuerza resultante se obtiene

$$0.85f'_c bh(d - 0.5h) + A'_s f_y(d - d') = P_o d'' = [0.85f'_c bh + (A_s + A'_s)f_y]d''$$

$$\therefore \quad d'' = \frac{0.85f'_c bh(d - 0.5h) + A'_s f_y(d - d')}{0.85f'_c bh + (A_s + A'_s)f_y} \tag{5.9}$$

en que d'' es la distancia desde el centroide plástico al centroide del acero de tensión de la columna cuando se carga excéntricamente. Para miembros reforzados simétricamente, el centroide plástico corresponde al centro de la sección transversal.

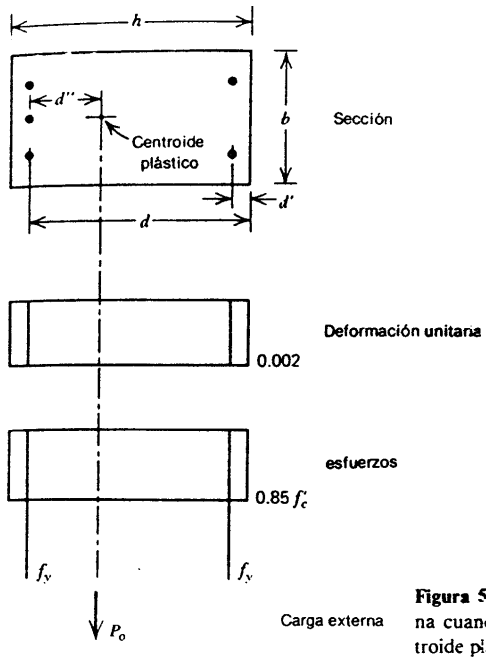


Figura 5.9. Esfuerzos en sección de columna cuando la carga está aplicada en el centroide plástico.

Tomando momentos alrededor del centroide plástico en la columna cargada excéntricamente de la figura 5.8, se obtiene

$$P_u e = 0.85f'_c ab(d - d'' - 0.5a) + A'_s f_y(d - d' - d'') + A_s f_s d'' \tag{5.10}$$

Ocurre una "falla balanceada" cuando el acero de tensión apenas alcanza la resistencia de cedencia y la deformación de compresión de la fibra extrema del concreto alcanza 0.003 al mismo tiempo. Para una falla balanceada, de los triangulos semejantes del diagrama de deformaciones de la figura 5.8 se tiene

$$\frac{0.003}{c_b} = \frac{f_y/E_s}{d - c_b} \tag{5.11}$$

$$\therefore \quad c_b = \frac{0.003E_s}{f_y + 0.003E_s} d \tag{5.12}$$

y

$$a_b = \beta_1 c_b = \frac{0.003E_s}{f_y + 0.003E_s} \beta_1 d \tag{5.13}$$

Se debe notar que hay asociada una falla balanceada con un perfil de deformación definido univocamente, según la ecuación 5.11; es una

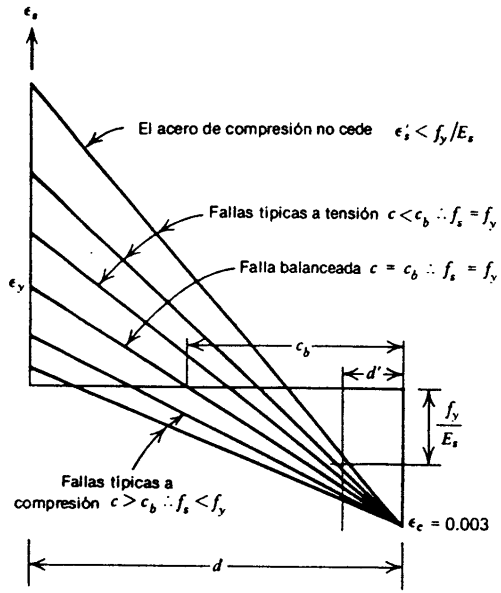


Figura 5.10. Diagramas de deformaciones para fallas de columnas cargadas excéntricamente.

propiedad de la sección. Se pueden calcular la carga y el momento en la falla balanceada, P_b y $P_b e_b$, sustituyendo $f_s = f_y$ y a_b de la ecuación 5.13 en las ecuaciones 5.7 y 5.10.

Si $P_u < P_b$, ocurre una falla a tensión, ya que la menor carga en la columna significa que $c < c_b$ y el diagrama de deformaciones de la figura 5.10 muestra que consecuentemente $\varepsilon_s > f_y/E_s$. En este caso el acero de tensión cede y se aplican las ecuaciones 5.7 a 5.10 con $f_s = f_y$.

Si $P_u > P_b$, ocurre una falla a compresión ya que la mayor carga de la columna significa que $c > c_b$; con referencia al diagrama de deformaciones de la figura 5.10, es claro que consecuentemente $\varepsilon_s < f_y/E_s$. En este caso el acero de tensión no alcanza la deformación de cedencia. Del diagrama de deformaciones se puede encontrar que el valor real de f_s es

$$f_s = \varepsilon_s E_s = 0.003 \frac{d - c}{c} E_s = 0.003 \frac{\beta_1 d - a}{a} E_s \qquad (5.14)$$

Para una falla a compresión, se aplican las ecuaciones 5.7 a 5.10 sustituyendo f_s de la ecuación 5.14.

En las ecuaciones 5.7 a 5.14 se ha supuesto que el acero de compresión está cediendo ($f'_s = f_y$). Esto debe verificarse examinando el diagrama de deformaciones. Para que ceda el acero de compresión, se requiere que

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} \geq \frac{f_y}{E_s} \qquad (5.15)$$

Si se encuentra que éste acero no está cediendo, el valor de f'_s que se encuentra del diagrama de deformaciones es

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.003 \frac{c - d'}{c} E_s = 0.003 \frac{a - \beta_1 d'}{a} E_s \qquad (5.16)$$

y se debe sustituir este valor, en vez de f_y, en todas las ecuaciones anteriores del esfuerzo en el acero de compresión.

La mejor forma de ilustrar las combinaciones de P_u y $P_u e$ que provocan la falla de una sección dada de columna es mediante un diagrama de interacción. La figura 5.11 es un diagrama de este tipo para una columna típica cargada excéntricamente. Cualquier combinación de carga y excentricidad que dé un punto en AB provoca una falla a compresión; cualquier combinación en BC provoca una falla a tensión, en que la cedencia del acero de tensión precede al aplastamiento del concreto comprimido. En B ocurre una falla balanceada. Cualquier combinación de carga y excentricidad que pueda graficarse dentro del área del diagrama de interacción se puede tomar sin falla; las combinaciones graficadas fuera del área no se pueden tomar. Nótese que la presencia de una carga moderada de compresión aumenta al momento último de resistencia de la sección. Cuando $c > h$, las ecuaciones deducidas 5.7-5.10 no se aplican estrictamente, debido a que el eje neutro está fuera de la sección y se modifica el perfil del bloque de esfuerzos. Esto se ilustra en la figura 5.12, que muestra una serie de perfiles de deformación para una sección en la carga última que corresponde a distintas profundidades del eje neutro. La deformación de la fibra extrema es 0.003 para $c < h$ Para $c > h$, el caso límite es cuando

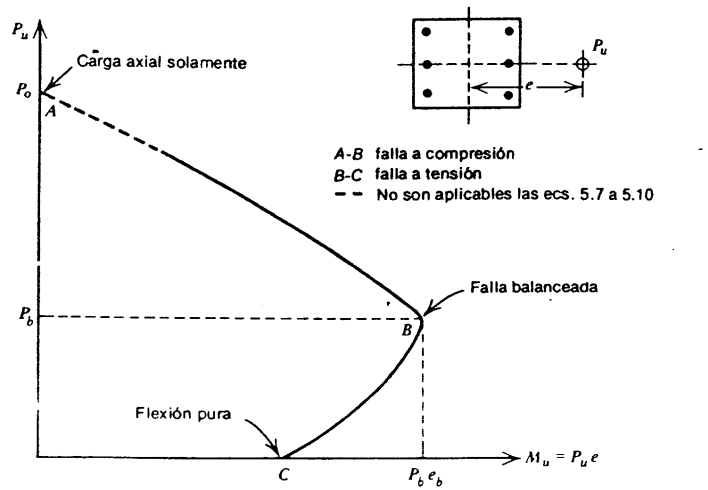


Figura 5.11. Diagrama de interacciones para una sección de columna de concreto reforzado cargada excéntricamente, indicando las combinaciones de carga y excentricidad que provocan la falla.

$c \to \infty$, lo que ocurre cuando la excentricidad es cero y la carga axial es P_o. Nótese que el perfil de deformación que corresponde a P_o tiene una deformación uniforme de 0.002 en la sección, debido a que a ésta deformación un espécimen de concreto cargado axialmente alcanza el esfuerzo máximo (vea la figura 2.1). Se puede completar la porción de la curva de interacción de la figura 5.11 a la que no se aplican las ecuaciones 5.7 a 5.10 (línea punteada) debido a que el valor calculado de P_o de la ecuación 5.1 fija el punto final de la curva.

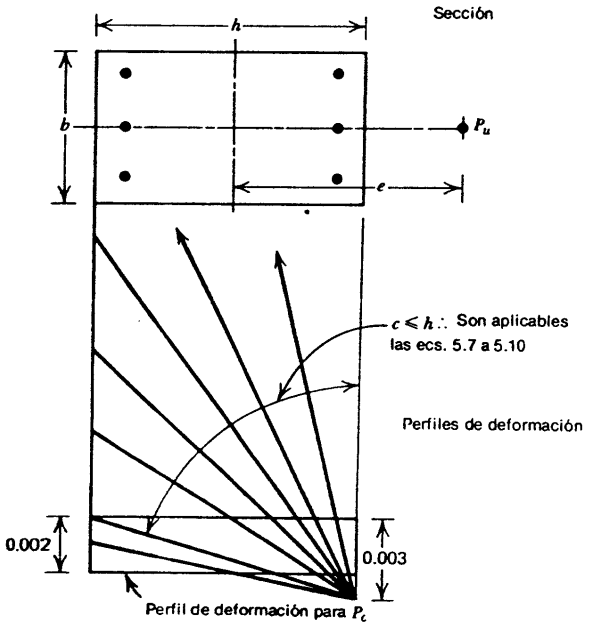


Figura 5.12. Perfiles de deformaciones para columna de concreto reforzado cargada excéntricamente a carga última.

Por otra parte, no se ha tomado en cuenta el área del concreto desplazado por el acero de compresión en las ecuaciones. Se puede corregir el pequeño error cometido reduciendo el esfuerzo real en el acero de compresión en $0.85f'_c$ para dar cabida al hecho de que se consideró que el concreto que está allí trasmite este esfuerzo, es decir que se considera que el esfuerzo en el acero de compresión es $f'_s - 0.85f'_c$, ó $f_y - 0.85f'_c$ cuando cede.

Ejemplo 5.1

Se refuerza simétricamente una sección de columna cuadrada de concreto de 20 plg. (508 mm) con 4 plg^2 (2581 mm^2) de acero en

cada una de las dos caras críticas. El centroide de cada grupo de varillas está a 2.5 plg. (63.5 mm) del borde cercano. El concreto tiene una resistencia de cilindro de 3000 lb./plg.^{2} (20.7 N/mm^2). El módulo de elasticidad del acero es de 29×10^6 lb./plg.^{2} (0.20×10^6 N mm^{-2}) y su resistencia de cedencia es de 40,000 lb./plg. (276 N /mm^2). La carga actúa excéntricamente con respecto a un eje principal de la sección de la columna (vea la figura 5.13). Calcular el intervalo de cargas y excentricidades posibles de falla para la sección ideal.

Solución

Falla balanceada

El acero de tensión está cediendo, $f_s = f_y$. Supóngase que el acero de compresión también está cediendo. De la ecuación 5.13 se tiene

$$a_b = \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{40.000 + 0.003 \times 29 \times 10^6} 0.85 \times 17.5 = 10.19 \text{ plg}$$

De la ecuación 5.7, y notando que debido a que las fuerzas del acero se cancelan en cada cara debido a que hay áreas iguales de acero, se hace

$$P_b = 0.85 \times 3000 \times 10.19 \times 20 = 519{,}700 \text{ lb (2310 kN)}$$

De la ecuación 5.10, y notando que puesto que el refuerzo es simétrico, el centroide plástico está en el centro de la sección (consecuentemente $d'' = 7.5$ plg), se escribe

$$P_b e_b = 519{,}700\,(17.5 - 7.5 - 0.5 \times 10.19) + 4 \times 40{,}000(17.5 - 2.5 - 7.5) + (4 \times 40{,}000 \times 7.5)$$

$$= 4.95 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg } (559 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

También $c_b = a_b/\beta_1 = 10.19/0.85 = 11.99$ plg.

De la ecuación 5.15, verificando el esfuerzo del acero de compresión, se encuentra

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{40.000}{29 \times 10^6} = 0.00138$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{11.99 - 2.5}{11.99} = 0.00237 > 0.00138$$

En consecuencia, el acero de compresión está cediendo como se supuso.

Los valores calculados de P_b y $P_b e_b$ dan el punto B de la figura 5.13.

Falla a la tensión

Si $P_u < P_b$, $f_s = f_y$.

Por ejemplo, sea $P_u = 300{,}000$ lb (1330 kN) $< P_b$. Supóngase que el acero de compresión también está cediendo.
Entonces, de la ecuación 5.7 se escribe

$$300{,}000 = 0.85 \times 3000 \times 20a$$

$$\therefore \quad a = 5.88 \text{ plg} \qquad \text{y} \qquad c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{5.88}{0.85} = 6.92 \text{ plg}$$

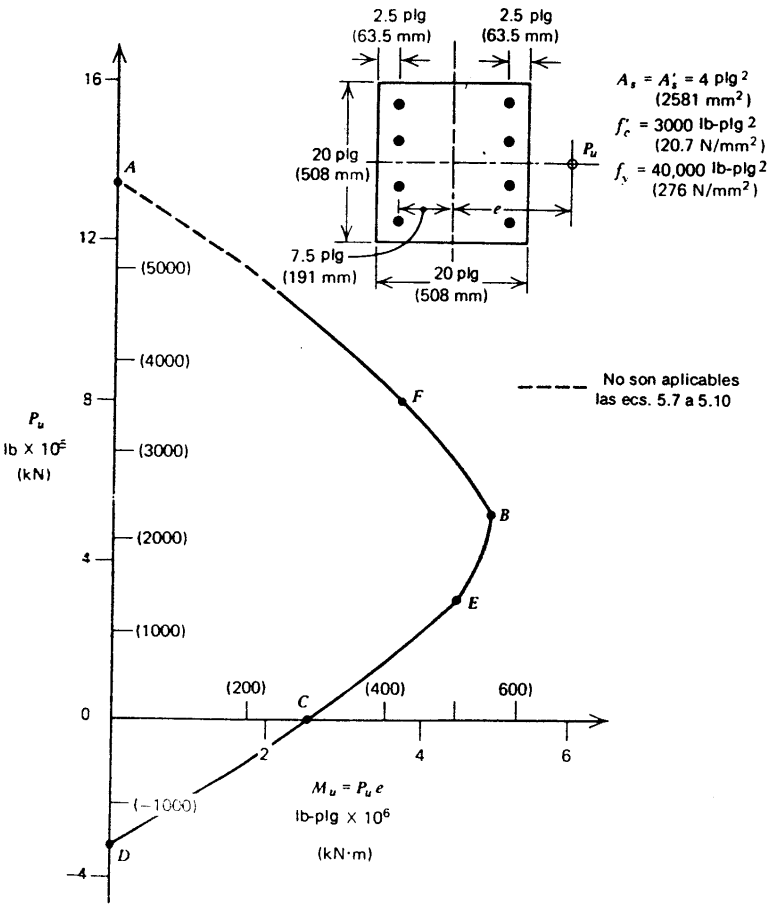


Figura 5.13. Diagrama de interacción para la columna de concreto reforzado cargada excéntricamente del ejemplo 5.1.

En consecuencia, la ecuación 5.15 da

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{6.92 - 2.5}{6.92} = 0.00192 > 0.00138$$

En consecuencia, el acero de compresión está cediendo como se supuso.
Por tanto, de la ecuación 5.10 se tiene

$$P_u e = 300{,}000(10 - 0.5 \times 5.88) + 2 \times 4 \times 40{,}000 \times 7.5$$
$$= 4.52 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg (510 kN} \cdot \text{m)}$$

Esto da el punto E de la figura 5.13.
En el límite, cuando $P_u \to 0$ y $e \to \infty$, se presenta el caso de flexión pura. En este caso, debido a que $A'_s = A_s$ y que el concreto debe transmitir algo de compresión, $f'_s < f_y$. De la ecuación 5.16 se puede escribir

$$f'_s = 0.003 \frac{a - 0.85 \times 2.5}{a} 29 \times 10^6 = 87{,}000 \frac{a - 2.125}{a} \text{ lb/plg}^2$$

De la ecuación 5.7, sustituyendo el valor mencionado antes de f'_s en vez de la resistencia de cedencia, se tiene

$$0 = 0.85 \times 3000 \times 20a + 4 \times 87{,}000 \frac{a - 2.125}{a} - 4 \times 40{,}000$$

$$\therefore \quad 0 = a^2 + 3.69a - 14.51$$

La solución de esta ecuación cuadrática da $a = 2.39$ plg.

$$\therefore \quad f'_s = 87{,}000 \frac{2.39 - 2.125}{2.39} = 9650 \text{ lb/plg}^2$$

De la ecuación 5.10, sustituyendo el valor mencionado antes de f'_s en lugar de la resistencia de cedencia, se tiene

$$M_u = P_u e = 0.85 \times 3000 \times 2.39 \times 20(10 - 0.5 \times 2.39)$$
$$+ 4 \times 9{,}650 \times 7.5 + 4 \times 40{,}000 \times 7.5$$
$$= 2.56 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg (289 kN} \cdot \text{m)}$$

Esto da el punto C en la figura 5.13

Falla a compresión

Si $P_u > P_b$, $f_s < f_y$.

Por ejemplo, sea $P_u = 800{,}000$ lb (3560 kN) $> P_b$. El acero de compresión estaba cediendo cuando $P_u = P_b$; en consecuencia, estará cediendo también para cualquier carga superior a ésta (vea la figura 5.10). Sin embargo, el acero de tensión no cede. Por tanto, la ecuación 5.14 da

$$f_s = 0.003\frac{0.85 \times 17.5 - a}{a}29 \times 10^6 = 87{,}000\frac{14.88 - a}{a}\ \text{lb/plg}^2$$

Y de la ecuación 5.7 se encuentra

$$800{,}000 = 0.85 \times 3000 \times 20a + 4 \times 40{,}000 - 4 \times 87{,}000\frac{14.88 - a}{a}$$

$$\therefore\ 0 = a^2 - 5.725a - 101.5$$

La solución de esta ecuación cuadrática, o un procedimiento de pruebas y ajustes, da $a = 13.34$ plg

$$\therefore\ f_s = 87{,}000\frac{14.88 - 13.34}{13.34} = 10{,}040\ \text{lb/plg}^2$$

De la ecuación 5.10 se tiene

$$P_u e = 0.85 \times 3000 \times 13.34 \times 20(10 - 0.5 \times 13.34) + 4 \times 40{,}000 \times 7.5 + 4 \times 10{,}040 \times 7.5$$
$$= 3.77 \times 10^6\ \text{lb plg}\ (426\ \text{kN} \cdot \text{m})$$

Esto da el punto F de la figura 5.13.
En el límite, P_u se constituye en un máximo cuando e es cero.
Luego, de la ecuación 5.1 e ignorando el área del concreto desplazado por el acero, se tiene

$$P_u = P_o = 0.85 \times 3000 \times 20 \times 20 + 8 \times 40{,}000$$
$$= 1{,}340{,}000\ \text{lb}\ (5960\ \text{kN})$$

Esto da el punto A en la figura 5.13.

Carga de tensión

Si la carga externa es de tensión en vez de compresión, la resistencia a tensión de la columna cuando $e = 0$ está dada por

$$P_u = -A_{st} f_y = -8 \times 40{,}000$$
$$= -320{,}000\ \text{lb}\ (-1420\ \text{kN})$$

Esto da el punto D en la figura 5.13.
Este resultado ignora la resistencia a tensión del concreto.
Se pueden encontrar las resistencias a flexión que corresponden a otros valores de P_u entre cero y —320,000 lb de las ecuaciones de falla a tensión.

Diagrama de interacción

En la figura 5.13 están graficados los resultados calculados. Si se hubieran calculado puntos suficientes, se hubiera obtenido la curva $ABCD$. La curva de interacción $ABCD$ muestra las combinaciones posibles de carga y excentricidad que provocarían que la sección alcanzara su resistencia.

5.3.3 Diseño de secciones rectangulares con varillas en una o dos caras

En la práctica, todas las columnas están sujetas a cierto momento flexionante, debido a la torcedura inicial y a las cargas asimétricas. En consecuencia, una columna cargada axialmente no es un caso práctico, y se recomienda que no se considere la excentricidad con que se aplica una carga a compresión con menos de algún valor mínimo (por ejemplo $0.1h$ para una columna con estribos ó $0.05h$ para una columna zunchada [5.3]). En efecto, se podría justificar agregar a todas las columnas una excentricidad adicional para dar margen a efectos imprevistos que pudieran aumentar la excentricidad de la carga.

A menudo en el diseño de columnas no se pueden eliminar las fallas a compresión limitando las proporciones de la sección. Por tanto, es necesario formular ecuaciones de diseño tanto para falla a tensión como a compresión. Se pueden utilizar las ecuaciones del análisis para el diseño después de introducirles modificaciones que incluyan el factor φ de reducción de capacidad. En la sección 1.3.1 se listan los factores de reducción de capacidad para columnas de acuerdo con el ACI 318-71.[5.3]. Se debe notar que para pequeñas cargas axiales, reduciéndose a cero en el intervalo de falla a tensión, se puede aumentar linealmente el factor de reducción de capacidad desde 0.75 para columnas zunchadas, ó 0.70 para columnas con estribos hasta 0.9 conforme la carga última decrezca desde aproximadamente $0.1f'_c A_g$ hasta cero, en que A_g es el área bruta de la sección de la columna.

Se pueden escribir las ecuaciones de diseño para la sección de la figura 5.14 utilizando las ecuaciones 5.7, 5.8 y 5.10 como sigue:

$$P_u = \varphi(0.85f'_c ab + A'_s f_y - A_s f_s) \tag{5.17}$$

y

$$P_u e' = \varphi[0.85f'_c ab(d - 0.5a) + A'_s f_y(d - d')] \tag{5.18}$$

$$P_u e'' = \varphi[0.85f'_c ab(d - d'' - 0.5a) + A'_s f_y(d - d' - d'') + A_s f_s d''] \tag{5.19}$$

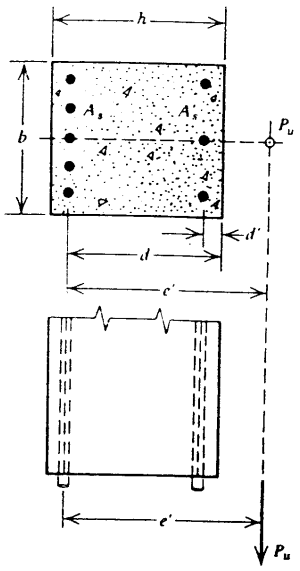


Figura 5.14. Sección rectangular de concreto con varillas en una o dos caras.

En la falla balanceada, $f_s = f_y$, y de la ecuación 5.13 se tiene

$$a_b = \frac{0.003E_s}{f_y + 0.003E_s}\beta_1 d \tag{5.20}$$

Sustituyendo $a = a_b$ de la ecuación 5.20 y $f_s = f_y$ en las ecuaciones 5.17 y 5.19 se obtiene P_b y $P_b e_b$. Luego se puede determinar el tipo de falla. Nótese que las ecuaciones suponen que el acero de compresión está cediendo ($f'_s = f_y$), lo que debe verificarse. De la ecuación 5.15, el acero de compresión está cediendo si

$$\varepsilon'_s = 0.003\frac{a - \beta_1 d'}{a} \geqslant \frac{f_y}{E_s} \tag{5.21}$$

Si se encuentra que el acero de compresión no está cediendo, se debe sustituir la expresión

$$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.003\frac{a - \beta_1 d'}{a}E_s \tag{5.22}$$

en vez de f_y en todos los términos que involucran A'_s en las ecuaciones 5.17 a 5.19.

Si se desea tomar en cuenta el área de concreto desplazado por el acero de compresión, se debe reducir el esfuerzo en el acero de compresión en $0.85f'_c$.

FALLA A TENSION

Si $P_u < P_b$, rige la tensión ($f_s = f_y$) y se puede encontrar la profundidad del bloque a de compresión de la ecuación 5.17 y sustituirse en la ecuación 5.18 para dar

$$P_u = \varphi 0.85f'_c bd\left(\rho'm' - \rho m + 1 - \frac{e'}{d} + \left\{\left(1 - \frac{e'}{d}\right)^2 + 2\left[\frac{e'}{d}(\rho m - \rho' m') + \rho' m'\left(1 - \frac{d'}{d}\right)\right]\right\}^{1/2}\right) \tag{5.23}$$

en que

$$m = \frac{f_y}{0.85f'_c}$$

$$m' = m - 1$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd}$$

$$\rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

Para los casos de refuerzo simétrico ($\rho = \rho'$), o sin refuerzo de compresión ($\rho' = 0$), la ecuación 5.23 se simplifica más. Esta ecuación toma en cuenta el área del concreto desplazado por el acero a compresión.

FALLA A COMPRESION

Si $P_u > P_b$, rige la compresión ($f_s < f_y$). Entonces, de la ecuación 5.14

$$f_s = 0.003\frac{\beta_1 d - a}{a}E_s \tag{5.24}$$

Sustituyendo este valor de f_s en las ecuaciones 5.17 y 5.18 o 5.19 es posible encontrar a y resolver la sección. Sin embargo, ésta no es una solución sencilla, debido a los extensos cálculos necesarios para determinar a. Cuándo la compresión rige, se dispone de dos métodos aproximados:

1. Se puede suponer una relación lineal entre P_u y $P_u e$ Esto equivale a suponer (en forma conservadora por lo que respecta a la resistencia) que la línea AB de la figura 5.11 es recta. Esta aproximación se ilustra en la figura 5.15. Para un punto en la línea supuesta de falla AB de la figura 5.15, se encuentra por triángulos semejantes

$$P_u = P_o - (P_o - P_b)\frac{P_u e}{P_b e_b}$$

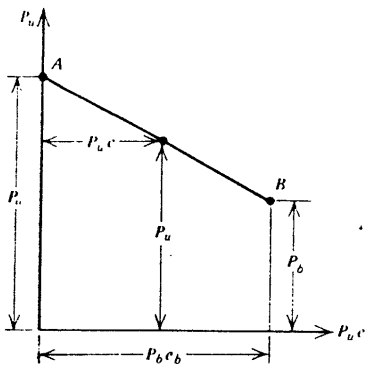


Figura 5.15. Aproximación lineal de falla a compresión para una columna de concreto reforzado cargada excéntricamente.

$$\therefore \quad P_u = \frac{P_o}{1 + (P_o/P_b - 1)e/e_b} \tag{5.25}$$

de donde, de la ecuación 5.1

$$P_o = \varphi[0.85f'_c(A_g - A_{st}) + A_{st}f_y] \tag{5.26}$$

y se puede encontrar P_b y e_b sustituyendo la ecuación 5.20 en las ecuaciones 5.17 y 5.19. En consecuencia, se puede encontrar de la ecuación 5.25 la correspondiente P_u a una e dada o viceversa. Es evidente que la forma de la ecuación 5.25 hace más útil la expresión para el análisis que para el diseño.

2. Se puede utilizar una ecuación de resistencia desarrollada empíricamente por Whitney[5.6] para el refuerzo simétrico ($\rho = \rho'$), Se considera que la capacidad máxima en el concreto de tomar momentos es la que se encuentra para vigas que fallan en compresión, dada por la Eq. 4.16. Esto quiere decir que en la resistencia a flexión, la fuerza del momento del concreto respecto del área de tensión de' acero está dada por $0.333f'_c bd^2$. Según esto, para excentricidades grandes se considera que el equilibrio de los momentos de las fuerzas respecto del acero de tensión requiere

$$P_u\left(e + d - \frac{h}{2}\right) = A'_s f_y(d - d') + 0.333f'_c bd^2$$

$$\therefore \quad P_u = \frac{A'_s f_y}{\dfrac{e}{d - d'} + 0.5} + \frac{f'_c bh}{\dfrac{3he}{d^2} + \dfrac{6dh - 3h^2}{2d^2}} \tag{5.27}$$

Aunque esta ecuación no tiene significado real para pequeñas excentricidades, se puede utilizar bajo estas condiciones si se ajusta P_u para acercarse al valor correcto para una columna cargada axialmente cuando $e \to 0$.

Cuando $e = 0$, el primer término al lado derecho de la ecuación 5.27 da $2A'_s f_y$ para la fuerza del acero como se requiere, ya que $A'_s = A_s$. Para que el segundo término dé $0.85f'_c bh$ para la fuerza del concreto cuando $e = 0$ se debe satisfacer la siguiente condición:

$$\frac{6dh - 3h^2}{2d^2} = \frac{1}{0.85} = 1.18$$

En consecuencia, la ecuación del diseño queda como

$$P_u = \varphi\left[\frac{A'_s f_y}{\dfrac{e}{d - d'} + 0.5} + \frac{bhf'_c}{\dfrac{3he}{d^2} + 1.18}\right] \tag{5.28}$$

Se debe verificar con el diagrama de deformaciones que el acero de compresión esté cediendo. En la figura 5.16 se muestra una gráfica de la ecuación de diseño de Whitney. Es obviamente inaplicable por debajo de la curva de la falla a tensión. Cuando se compara con la curva dada por las ecuaciones más exactas 5.17, 5.18, 5.19 y 5.24, la expresión de Whitney no coincide con exactitud. Sin embargo la ecuación 5.28 es una buena aproximación de diseño, fácil de utilizar ya que la solución de una ecuación lineal da el área del acero.

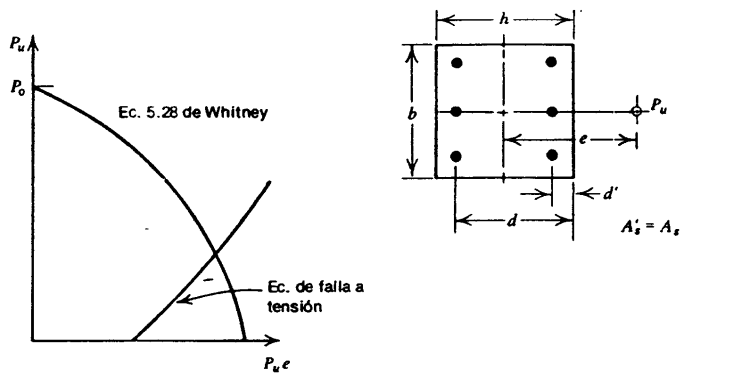


Figura 5.16. Aproximación de la falla de compresión de Whitney para una columna de concreto reforzado cargada excéntricamente con refuerzo simétrico.

Ejemplo

Se desea reforzar simétricamente una sección de columna con estribos cuadrada de 18 plg. (457 mm) mediante varillas colocadas en las dos caras opuestas de la sección. Los centroides de las

varillas están a $2\frac{1}{2}$ plg. (64 mm) de los bordes próximos de la sección. El concreto tiene una resistencia de cilindro f'_c de 4000 lb./plg.^{2} (20.7 N/mm^2). El acero tiene un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb./plg^2 (0.20×10^6 N/mm^2) y una resistencia de cedencia de 50,000 lb./plg^2 (345 N/mm^2). Se puede suponer que el factor φ de reducción de capacidad es de 0.7, aunque se puede aumentar linealmente a 0.9 conforme la carga última P_u disminuye desde $0.1f'_cA_g$ hasta cero, en que A_g es el área bruta de la sección de columna. Determinar las áreas del acero requeridas en la columna para que soporte las siguientes cargas últimas: (1) 250,000 lb (1110 kN) con $e = 15$ plg. (381 mm), y (2) 400,000 lb (1780 kN) con $e = 12$ plg. (305 mm).

Solución

$d = 18 - 2.5 = 15.5$ plg., y la eq. 5.20 da

$$a_b = \frac{0.003 \times 29 \times 10^6}{50{,}000 + 0.003 \times 29 \times 10^6} 0.85 \times 15.5 = 8.37 \text{ plg}$$

Entonces $f_y/E_s = 50{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00172$, y de la ecuación 5.21 tenemos

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{8.37 - 0.85 \times 2.5}{8.37} = 0.00224 > 0.00172$$

En consecuencia, el acero está cediendo, $f'_s = f_y$, en falla balanceada.

Sustituyendo a_b en la ecuación. 5.17 y notando que $f_s = f_y$ y $A'_s = A_s$, tenemos

$$P_b = 0.7(0.85 \times 4000 \times 8.37 \times 18) = 358{,}600 \text{ lb } (1594 \text{ kN})$$

1. $P_u = 250{,}000$ lb $< 358{,}600$ lb; *en consecuencia,* $P_u < P_b$ *(es decir, la tensión rige,* $f_s = f_y$).

También, $0.1f'_cA_g = 0.1 \times 4000 \times 18^2 = 129{,}600$ lb $< 250{,}000$ lb,

$\therefore \quad \varphi = 0.7$

Supóngase que $f'_s = f_y$. De la ecuación 5.17 tenemos

$$250{,}000 = 0.7(0.85 \times 4000 \times 18a)$$

$\therefore \quad a = 5.84$ plg

De la ecuación 5.21 escribimos

$$\varepsilon'_s = 0.003 \frac{5.84 - 0.85 \times 2.5}{5.84} = 0.00191 > 0.00172$$

$\therefore$ el acero de compresión está cediendo como se supuso.

De la ecuación 5.19 encontramos

$$250{,}000 \times 15 = 0.7[0.85 \times 4000 \times 5.84 \times 18(9 - 2.92) + A'_s\,50{,}000(9 - 2.5) + A_s\,50{,}000(9 - 2.5)]$$

$$\therefore \quad A'_s = A_s = 4.90 \text{ plg}^2 \quad \therefore \quad A_{st} = 9.80 \text{ plg}^2 \ (6323 \text{ mm}^2)$$

2. $P_u = 400{,}000$ lb $> 358{,}600$ lb; *en consecuencia,* $P_u > P_b$ *(es decir, rige la compresión,* $f_s < f_y$)

Adicionalmente $0.1f'_cA_g = 129{,}600$ lb $< 400{,}000$ lb; por tanto, $\varphi = 0.7$.

Usando la "teoría exacta":

De las ecuaciones 5.17 y 5.24 tenemos

$$400{,}000 = 0.7\left[0.85 \times 4000 \times 18a + 0.5A_{st} \times 50{,}000 - 0.5A_{st} \times 0.003\left(\frac{0.85 \times 15.5 - a}{a}\right)29 \times 10^6\right]$$

$$\therefore \quad A_{st} = \frac{571.4a - 61.2a^2}{68.5a - 573.11} \qquad \text{(i)}$$

De las ecuaciones 5.19 y 5.24 tenemos

$$400{,}000 \times 12 = 0.7\left[0.85 \times 4000 \times 18 \times a(9 - 0.5a) + 0.5A_{st} \times 50{,}000(9 - 2.5) + 0.5A_{st} \times 0.003\left(\frac{0.85 \times 15.5 - a}{a}\right)29 \times 10^6(9 - 2.5)\right]$$

$$\therefore \quad A_{st} = \frac{4.708a^3 - 84.74a^2 + 1054.9a}{573.11 - 18.5a} \qquad \text{(ii)}$$

Igualando las eqs. i y ii para eliminar A_{st} se obtiene la siguiente ecuación cúbica:

$$0 = a^3 - 29.876a^2 + 516.19a - 2890.1 = 0$$

de donde $a = 8.71$ plg.

Sustituyendo este valor de a en la ecuación i se obtiene $A_{st} = 14.20$ plg^2 (9161 mm^2)

Nótese que $c > c_b$, y el diagrama de deformaciones muestra que el acero de compresión está cediendo en este caso.

Usando la ecuación 5.28 de Whitney:

$$400{,}000 = 0.7\left[\frac{A_s' 50{,}000}{\frac{12}{13} + 0.5} + \frac{18 \times 18 \times 4000}{\frac{3 \times 18 \times 12}{15.5^2} + 1.18}\right]$$

$\therefore \quad A_s' = 6.75 \text{ in}^2 \quad \therefore \quad A_s = 6.75 \text{ in}^2 \quad$ and $\quad A_{st} = 13.50 \text{ in}^2 \ (8710 \text{ mm}^2)$

La parte 2 del ejemplo 5.2 evidencia la dificultad determinar las áreas de acero para una falla a compresión directamente de las ecuaciones 5.17, 5.19 y 5.24, debido a las largas expresiones y la solución de una ecuación cúbica para a. En consecuencia, aunque la solución no es exacta, la ecuación 5.28 de Whitney es mucho más práctica para cálculos manuales.

El ejemplo también ilustra que el cálculo de las áreas de acero puede complicarse todavía más en caso de que el acero de compresión no ceda. Por ejemplo, si en la parte 1 del ejemplo 5.2 se hubiera utilizado acero con una resistencia de cedencia de 60,000 lb./plg.^{2} (414 N/mm^2) el acero de compresión no hubiera alcanzado la resistencia de cedencia en la carga última. Sustituir f_s' de la ecuación 5.22 en vez de f_y significa que tendrían que resolverse simultáneamente las ecuaciones 5.17 y 5.19, lo que llevaría a una solución mucho más complicada. En consecuencia, en algunas columnas puede no alcanzarse la resistencia de cedencia de varillas de alta resistencia en compresión, especialmente cuando la sección transversal de la columna es pequeña. En forma análoga, el acero de tensión puede no alcanzar la cedencia para un intervalo grande de niveles de carga axial si la resistencia de cedencia es elevada. Se debe recordar que se ha supuesto un valor razonablemente conservador de $\varepsilon_c = 0.003$ para la deformación del concreto de la fibra extrema a compresión (vease la sección 3.3). Sin embargo, si la columna está cargada a la falla, esta deformación se excede físicamente, lo que permite desarrollar esfuerzos más elevados en el acero. De esa manera, la resistencia real de las secciones de columna con acero de alta resistencia a menudo es mayor que la calculada utilizando $\varepsilon_c = 0.003$.[5.7] Tiene sentido aumentar ε_c a un valor más realista, por ejemplo 0.0035, para utilizar con efectividad acero de alta resistencia.

Es posible diseñar columnas que transmitan una pequeña carga de compresión con gran excentricidad con pequeña área de acero de compresión ($A_s' < A_s$) debido a que no se requiere que la fuerza interna de compresión sea grande. Sin embargo, para asegurar que ese miembro sea razonablemente dúctil, se recomienda[5.3] que cuando el nivel de la carga axial sea menor que la carga de la falla balanceada P_b o que $0.1 f_c' A_g$, rigiendo el más pequeño de ambos, la cuantía de refuerzo ρ del acero de tensión (A_s/bd) no exceda 0.75 de la cuantía que produciría una falla balanceada para la sección bajo flexión sin carga axial. Consecuentemente se debe satisfacer la ecuación 4.48.

También se recomienda[5.3] que el área del acero longitudinal no sea inferior a 0.01 ni mayor que 0.08 veces el área bruta de la sección.

5.3.4 Secciones rectangulares con varillas en las cuatro caras

Cuando una sección tiene varillas distribuidas en todas las caras, se dificulta la deducción de ecuaciones de análisis y diseño debido a que aquélla pueden estar en distintos niveles de esfuerzos en toda la sección. Se puede desarrollar el análisis de esa sección utilizando los requerimientos de compatibilidad de deformaciones y equilibrio.

Considerese la sección de columna reforzada simétricamente mostrada en la fig. 5.17 en la carga última. Para una varilla cualquiera i en la sección, el diagrama de deformaciones indica que

$$\varepsilon_{si} = 0.003 \frac{c - d_i}{c} \tag{5.29}$$

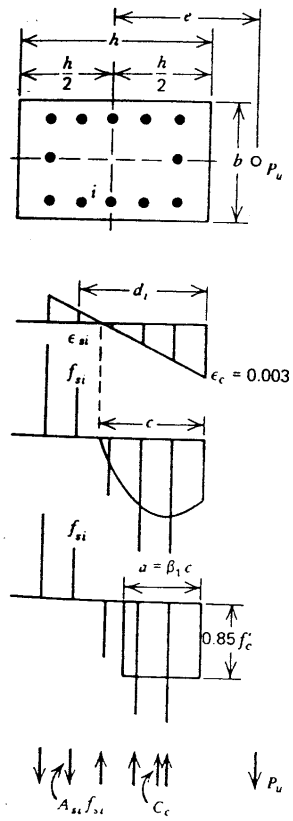


Figura 5.17. Sección de columna cargada excéntricamente con varillas en las cuatro caras a carga última.

en que las deformaciones de compresión son positivas y las deformaciones de tensión negativas. Las siguientes relaciones dan entonces el esfuerzo f_{si} en la varilla i. Si

$$\varepsilon_{si} \geqslant \frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{si} = f_y$$

ó si

$$\frac{f_y}{E_s} > \varepsilon_{si} > -\frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{si} = \varepsilon_{si} E_s \tag{5.30}$$

ó si

$$\varepsilon_{si} \leqslant -\frac{f_y}{E_s}, \qquad f_{si} = f_y$$

Entonces, $f_{si} A_{si}$ da la fuerza en la varilla i, en que A_{si} es el área de ésta. Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una sección con n varillas como

$$P_u = 0.85 f'_c ab + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si} \tag{5.31}$$

$$P_u e = 0.85 f'_c ab\left(\frac{h}{2} - \frac{a}{2}\right) + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si}\left(\frac{h}{2} - d_i\right) \tag{5.32}$$

En las ecuaciones 5.31 y 5.32 se debe dar atención debida al signo del esfuerzo al sumar las fuerzas del acero en la sección.

En el caso general, es mejor utilizar una solución de pruebas y ajustes para el análisis. Por ejemplo, para calcular la carga última de una sección dada con excentricidad determinada, el procedimiento es el que sigue:

1. Elegir un valor para la profundidad c del eje neutro.
2. Calcular el esfuerzo en el acero en todas las varillas utilizando las ecuaciones 5.29 y 5.30.
3. Calcular P_u de las ecuaciones 5.31 y 5.32.
4. Repetir los pasos 1, 2 y 3 hasta que los valores de P_u obtenidos de las ecuaciones 5.31 y 5.32 sean iguales.

Nótese que debe reducirse el nivel del esfuerzo en las varillas de refuerzo de compresión en $0.85 f'_c$ si se requiere tener en cuenta el área del concreto a compresión desplazada por el acero.

Ejemplo 5.3

Utilizar el método general de compatibilidad de deformaciones y equilibrio para determinar la carga última y excentricidad para la sección de columna reforzada simétricamente presentada en la fig. 5.18 si el eje neutro está en la posición indicada. Cada una de las 16 varillas tiene un área de acero de 1 plg.^{2} (645 mm^2).El acero

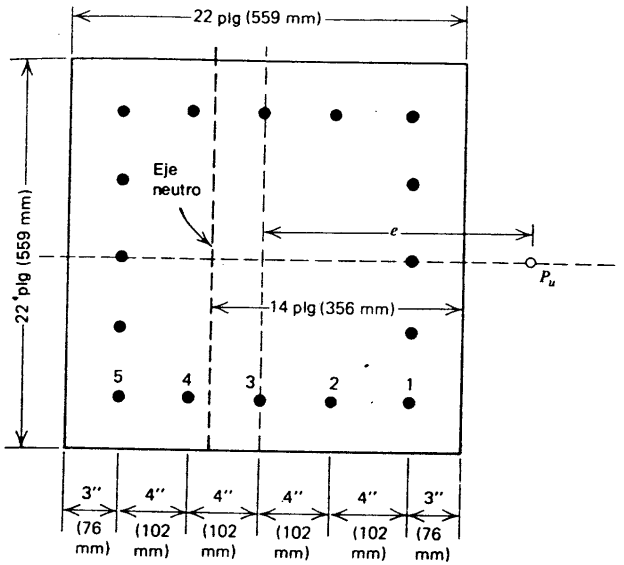


Figura 5.18. Sección de la columna cargada excéntricamente del ejemplo 5.3.

tiene una resistencia de cedencia de 60,000 lb /plg.^{2} (414 N/mm^2) y un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb /plg.^{2} (0.2×10^6 N/mm^2). El concreto tiene una resistencia de cilindro de 3000 lb /plg.^{2} (20.7 N/mm^2).

Solución

Numérense los niveles de varillas de 1 a 5 desde la cara a compresión como en la figura 5.18. Entonces

$$\frac{f_y}{E_s} = \frac{60{,}000}{29 \times 10^6} = 0.00207$$

Para $c = 13$ plg., las ecuaciones 5.29 y 5.30 dan

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003(14 - 3)}{14} = 0.002357$$

$$\therefore \quad f_{s1} = 60{,}000 \text{ lb/plg}^2$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003(14 - 7)}{14} = 0.0015$$

$$\therefore \quad f_{s2} = 0.0015 \times 29 \times 10^6 = 43{,}500 \text{ lb/plg}^2$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{0.003(14 - 11)}{14} = 0.000643$$

$$\therefore \quad f_{s3} = 0.000643 \times 29 \times 10^6 = 18{,}650 \text{ lb/plg}^2$$

$$\varepsilon_{s4} = \frac{0.003(14 - 15)}{14} = -0.000214$$

$$\therefore \quad f_{s4} = -0.000214 \times 29 \times 10^6 = -6210 \text{ lb/plg}^2\text{(tension)}$$

$$\varepsilon_{s5} = \frac{0.003(14 - 19)}{14} = -0.001071$$

$$\therefore \quad f_{s5} = -0.001071 \times 29 \times 10^6 = -31{,}060 \text{ lb plg}^2$$

Ahora se deben reducir los esfuerzos del acero de compresión en $0.85f'_c = 0.85 \times 3000 = 2550/\text{plg.}^2$ para tomar en cuenta el concreto desplazado.
Entonces $a = \beta_1 c = 0.85 \times 14 = 11.90$ plg.
En consecuencia, de la ecuación 5.31, y utilizando los esfuerzos reducidos del acero de compresión, tenemos

$$\begin{aligned} P_u &= (0.85 \times 3000 \times 11.9 \times 22) + (57{,}450 \times 5) + (40{,}950 \times 2) \\ &\quad + (16{,}100 \times 2) - (6210 \times 2) - (31{,}060 \times 5) \\ &= 667{,}590 + 287{,}250 + 81{,}900 + 32{,}200 - 12{,}420 - 155{,}300 \\ &= 901{,}200 \text{ lb (4008 kN)} \end{aligned}$$

Y de la ecuación 5.32 encontramos

$$\begin{aligned} M_u = P_u e &= 667{,}590(11 - 5.95) + (287{,}250 \times 8) + (81{,}900 \times 4) \\ &\quad + (32{,}200 \times 0) + (12{,}420 \times 4) + (155{,}300 \times 8) \\ &= 7.289 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{in (823.0 kN} \cdot \text{m)} \end{aligned}$$

y $e = M_u/P_u = 7.289 \times 10^6/901{,}200 = 8.09$ plg. (205 mm). Estos valores representan una combinación de P_u y e en la falla. Los valores de diseño de P_u y M_u serían los mismos valores multiplicados por el factor φ de reducción de capacidad.

Nótese que al suponer distintas posiciones del eje neutro y calcular las combinaciones de P_u y M_u que provocan falla para cada posición del eje neutro, se puede trazar un diagrama de interacción del tipo representado por la figura 5.11 para la sección de columna. Ya que hay varias capas de acero, no habrá una sola discontinuidad notoria en el diagrama de interacción en el punto de falla balanceada; en vez de ello, se obtiene un diagrama más curvo debido a que no todo el acero de tensión alcanza la resistencia de cedencia al mismo tiempo (vea la figura 5.22).

También se puede utilizar el enfoque anterior para calcular los diagramas de interacción determinando las combinaciones de P_u y M_u en la falla para distintas localizaciones del eje neutro para columnas con secciones distintas a la rectangular y para muros. Sin embargo, cuando es poca la profundidad del eje neutro, tal como en muros con patines, y las dimensiones de la sección transversal son grandes, como lo indica la figura 5.19, pueden ocurrir deformaciones muy grandes a tensión en las capas alejadas del acero de tensión. Si se requiere calcular la resistencia máxima de la sección, es importante determinar si las deformaciones de tensión de esas varillas estén ya en el rango de endurecimiento por deformación. Si se conoce la curva completa de esfuerzo-deformación para el acero, se pueden utilizar los esfuerzos reales que corresponden a los niveles de deformación en los cálculos de resistencia. La resistencia adicional a flexión debida al endurecimiento por deformación debe tenerse en cuenta cuando la sobrerresistencia resultante pudiera conducir a una falla frágil (por ejemplo, una falla cortante en vez de una falla a flexión). Para secciones o arreglos de acero no simétricos, se obtienen dos curvas de interacción, una para cada sentido de la excentricidad. En la figura 12.12 se muestran esas curvas para una sección de muro de cortante.

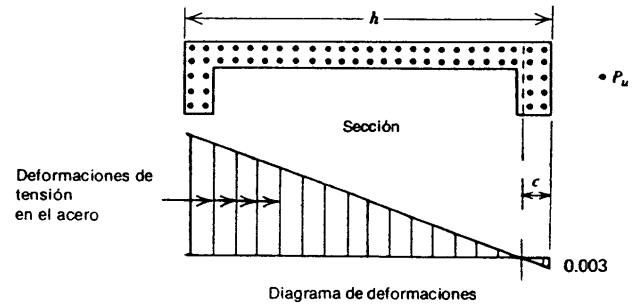


Figura 5.19. Sección de muro de cortante con carga última aplicada excéntricamente.

5.3.5 Secciones con varillas en arreglo circular

Se puede determinar la carga última de secciones con varillas en un arreglo circular utilizando el método general de compatibilidad de deformación y equilibrio de la sección 5.3.4. En forma alterna, se pueden utilizar las siguientes ecuaciones aproximadas propuestas por Whitney.[5.6, 5.8] Estas deben emplearse con cuidado, ya que no proporcionan resultados exactos cuando la resistencia de cedencia o la cuantía de acero son elevadas. En

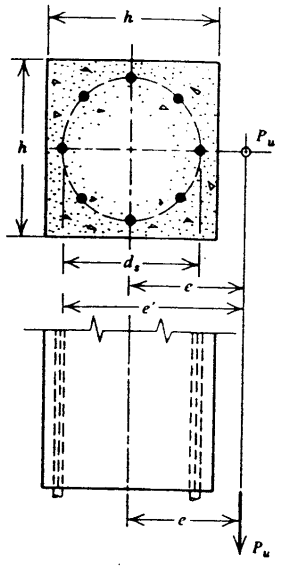


Figura 5.20. Sección cuadrada con acero dispuesto en un círculo.

especial, las ecuaciones se aplican estrictamente sólo si el acero de compresión está en cedencia.

Sección cuadrada, acero dispuesto en círculo

La figura 5.20 ilustra una sección cuadrada con acero dispuesto en círculo. Whitney sugirió que las ecuaciones para este caso se obtuvieran de las correspondientes para varillas en dos caras haciendo las sustituciones indicadas a continuación.

FALLA A TENSION

La ecuación para la falla a tensión se obtuvo usando $0.5A_{st}$ en vez de A_s y A'_s, f_y en vez de f_s y f'_s, y $0.67d_s$ en vez de $d - d'$, en las ecuaciones 5.17y 5.19, ignorando el área del concreto desplazado por el acero de compresión. Resolviendo luego las ecuaciones 5.17 y 5.19 simultáneamente y eliminando a, la ecuación de diseño queda como

$$P_u = \varphi 0.85h^2 f'_c \left\{ \left[\left(\frac{e}{h} - 0.5 \right)^2 + 0.67 \frac{d_s}{h} \rho_t m \right]^{1/2} - \left(\frac{e}{h} - 0.5 \right) \right\} \qquad (5.33)$$

En que d_s = diámetro del círculo a través del centro de refuerzo, $\rho_t = A_{st}/h^2$, A_{st} = área total de acero h = ancho y peralte de la sección y $m = f_y/0.85f'_c$.

FALLA A COMPRESION

La ecuación para la falla a compresión se obtuvo usando $0.5A_{st}$ en vez de A'_s, $0.67d_s$ en vez de $d - d'$, y $0.5(h + 0.67d_s)$ en vez de d, en 5.28. La ecuación de diseño queda entonces como

$$P_u = \varphi \left[\frac{A_{st} f_y}{\dfrac{3e}{d_s} + 1} + \frac{A_g f'_c}{\dfrac{12he}{(h + 0.67d_s)^2} + 1.18} \right] \qquad (5.34)$$

en que A_g es el área bruta de la columna.

Sección circular, acero dispuesto en círculo (*figura 5.21*)

Whitney sugirió que se obtuviera la ecuación para una sección circular, con acero dispuesto en círculo, como sigue.

FALLA A LA TENSION

El bloque de esfuerzos de compresión equivalente tiene una deformación uniforme de $0.85f'_c$ y un área A. Whitney supuso que la distancia desde el centro de la sección al centroide de A está dada por

$$\bar{x} = 0.211h + 0.293\left(0.785h - \frac{2A}{h}\right)$$

Suponiendo que la tensión total del acero es igual a la compresión total del acero, se tiene

$$P_u = 0.85f'_c A \qquad \text{o} \qquad A = \frac{P_u}{0.85f'_c}$$

Entonces

$$\bar{x} = 0.211h + 0.293\left(0.785h - \frac{2P_u}{0.85hf'_c}\right)$$

Suponiendo luego que $0.4A_{st}$ es el área efectiva del acero de tensión y compresión y que la distancia efectiva entre las fuerzas resultantes de tensión y compresión en el acero es $0.75d_s$, tomando momentos alrededor del centroide efectivo del acero de tensión se obtiene

$$P_u(e + 0.375d_s) = P_u(\bar{x} + 0.375d_s) + (0.4A_{st} \times 0.75d_s f_y)$$

Sustituyendo $\bar{x}$ en esta ecuación y despejando P_u, la ecuación de diseño queda como

$$P_u = \varphi 0.85h^2 f'_c \left\{ \left[\left(\frac{0.35e}{h} - 0.38 \right)^2 + \frac{\rho_t m d_s}{2.5h} \right]^{1/2} - \left(\frac{0.85e}{h} - 0.38 \right) \right\} \qquad (5.35)$$

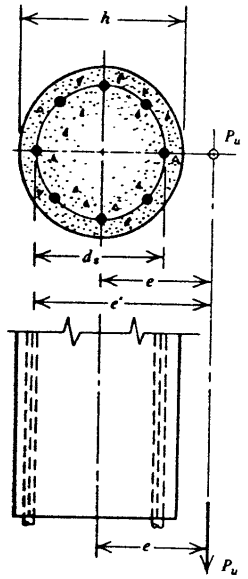


Fig. 5.21. Sección circular con acero dispuesto en un círculo.

en que d_s = diámetro del círculo a través del centro del refuerzo, $\rho_t = A_{st}/A_g$, A_{st} = área total del acero, A_g = área bruta de la columna, h = diámetro de ésta y $m = f_y/0.85f'_c$.

FALLA A COMPRESION

Whitney adaptó la ecuación 5.34 para el caso de falla a compresión mediante la aproximación de reemplazar h para la sección cuadrada mediante 0.8 de h para la sección circular.
Entonces, la ecuación de diseño es

$$P_u = \varphi\left[\frac{A_{st}f_y}{\frac{3e}{d_s}+1} + \frac{A_g f'_c}{\frac{9.6he}{(0.8h+0.67d_s)^2}+1.18}\right] \qquad (5.36)$$

Ejemplo 5.4

Se desea reforzar una columna zunchada cuadrada de 20 plg. (508 mm) mediante varillas dispuestas simétricamente en círculo de 16 plg. (406 mm) de diámetro entre centros. Para el concreto, f'_c = 3000 lb./plg.^{2} (20.7 N/mm^2) y para el acero f_y = 40,000 lb./plg.^{2} (276 N/mm^2). Calcular el área de acero requerida si se desea que la sección soporte una carga última de 380,000 lb (1690 kN) con una excentricidad de 11.55 plg. (293 mm) con respecto a un eje principal de la sección. Suponer un factor φ de reducción de capacidad de 0.75.

Solución

Si la tensión rige la ecuación 5.33 da

$$380{,}000 = 0.75 \times 0.85 \times 20^2 \times 3000 \times \left\{\left[\left(\frac{11.55}{20} - 0.5\right)^2 + \left(0.67 \times \frac{16}{20} \times \frac{40{,}000}{0.85 \times 3000}\rho_t\right)\right]^{1/2} - \left(\frac{11.55}{20} - 0.5\right)\right\}$$

$\therefore \quad \rho_t = 0.0385$

$\therefore \quad A_{st} = 0.0385 \times 400 = 15.40\,\text{plg}^2\ (9935\ \text{mm}^2)$

Si rige la compresión la ecuación 5.34 da

$$380{,}000 = 0.75\left[\frac{A_{st}40{,}000}{\frac{3 \times 11.55}{16}+1} + \frac{20^2 \times 3000}{\frac{12 \times 20 \times 11.55}{(20+0.67 \times 16)^2}+1.18}\right]$$

$\therefore \quad A_{st} = 17.03\,\text{plg}^2\ (10{,}987\ \text{mm}^2)$

Consecuentemente, la compresión rige. Se requiere A_{st} = 17.03 plg^2 (10,987 mm^2).

Una solución más exacta del ejemplo 5.4, usando gráficas de diseño [5.9] (vea la sección 5.3.6), produce un área de acero 7% mayor que la recién calculada usando las ecuaciones de Whitney. La discrepancia indica el grado de aproximación de esas ecuaciones para este caso especial. Si se utilizara acero con una resistencia de cedencia de 60,000 lb./plg.^{2} (414 N/mm^2) en el ejemplo, la solución de Whitney requeriría A_{st} = 11.35 plg.^{2} (7323 mm^2), en tanto que la solución más exacta usando gráficas de diseño requeriría 21% de acero adicional, lo que indica que la solución de Whitney puede desviarse seriamente al lado inseguro al utilizar acero de alta resistencia.

5.3.6 Gráficas y tablas de diseño

En la práctica es posible desarrollar rápidamente el diseño y análisis de secciones de columna usando gráficas y tablas de diseño. El ACI [5.9, 5.10] ha publicado una extensa serie de gráficas y tablas.

Las gráficas de diseño [5.9] son conjuntos de diagramas de interacción que grafican la carga última y el momento en forma adimensional. La

figura 5.22 es una gráfica para secciones rectangulares con varillas en las cuatro caras. Conocidos el tamaño de columna, resistencias de los materiales y carga y momento últimos, se fija en la gráfica un punto coordenado que define $\rho_t m$, del que se puede calcular el área requerida de acero. En caso alterno, conocidos el tamaño de columna, resistencias de los materiales y área de acero, se pueden determinar las combinaciones posibles de la carga y momento últimos. Las gráficas abarcan el diseño de columnas rectangulares con estribos con varillas en dos o cuatro caras, y columnas zunchadas cuadradas y circulares con las varillas dispuestas en círculo. El intervalo de las variables consideradas es de así: $f_y = 40$ a 60 kips/plg. (276 a 414 N/mm^2), $f'_c \leq 4$ a 5 kips/plg. ($\leq$ 27.6 a 34.5 N/mm^2), y $g = 0.6$ a 0.9. en que g indica la distancia entre los grupos de

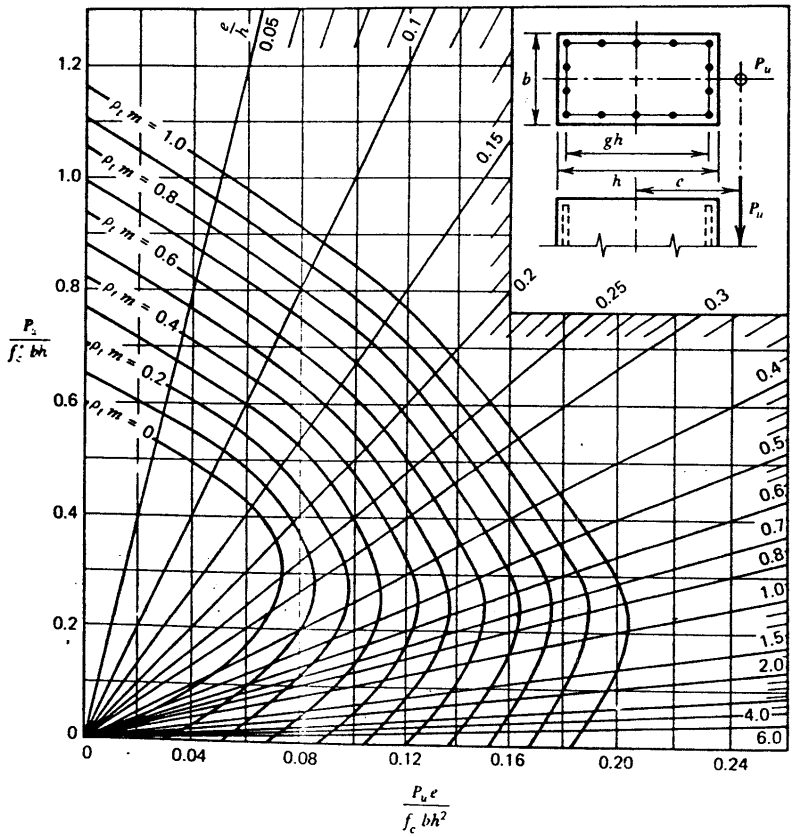


Figura 5.22. Gráfica de diseño[5.9] para una sección de columna de concreto reforzado cargada excéntricamente con $\varphi = 0.7$, $0.25A_{st}$ en cada cara, $g = 0.7$, $f'_c \leq 4000$ lb /plg^2 (27.6 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb /plg^2 (414 N/mm^2).

varillas como una fracción de la dimensión de la sección. Las gráficas incluyen el factor de reducción de capacidad, que se considera igual a 0.7 para secciones rectangulares, o 0.75 para secciones circulares o cuadradas con acero en círculo. El factor de reducción de capacidad se mantiene constante en los valores especificados para todos los niveles de carga (como se acostumbra en el código ACI de 1963); consecuentemente, las gráficas no incluyen el incremento en el factor de reducción de capacidad (permitido por ACI 318[71 5.3]) a valores hasta de 0.9 a baja carga axial. Sin embargo, al utilizar las gráficas se puede hacer un ajuste para tomar en cuenta esta diferencia.

Las tablas del manual de diseño publicado en 1973 por el ACI [5.10] corresponden a columnas rectangulares con estribos con varillas en cuatro caras y para columnas cuadradas y circulares con hélice con las varillas dispuestas en círculo. El intervalo de variables cubiertas en las tablas es de $f_y = 40$ a 80 kips/plg.^{2} (276 a 552 N/mm^2), $f'_c = 3$ a 8 kips/plg.^{2} (20.7 a 55.2 N/mm^2), y $g = 0.45$ a 0.9 (g es el símbolo k dado en el manual). Las tablas registran el factor de reducción de capacidad, incluyendo el aumento a valores próximos a 0.9 para cargas axiales bajas. Cada tabla es para un tipo determinado de columna con valores fijos de f_y, f'_c, y k. La tabla proporciona el acero longitudinal requerido para distintas excentricidades y relaciones de P_u/A_g.

Las gráficas y tablas 5.9, 5.10 de diseño del ACI se determinaron de principios fundamentales, utilizando las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones; en consecuencia, toman en cuenta la posibilidad de que el acero no ceda bajo la carga última. Se ha incluido también el efecto del área de concreto desplazada por el acero de compresión. Se ha supuesto que el acero está distribuido uniformemente como un perfil tubular delgado para todos los arreglos de colocación del acero, excepto cuando sólo aparece en dos caras en las gráficas para las secciones rectangulares. En las columnas cuadradas y rectangulares con acero en cuatro caras, se supone que hay colocado un cuarto del área total del acero en cada cara de la columna. Se asevera que el error en suponer que el acero tiene la forma de un perfil tubular delgado en vez de varillas individuales es del 1 % o menor cuando el número de varillas es mayor que ocho.

Ejemplo: 5.5

Una columna cuadrada de 20 plg. (508 mm) con estribos con el acero longitudinal distribuido uniformemente en las cuatro caras soporta una carga última de 536,000 lb. (2380 kN) con una excentricidad de 5.75 plg. (146 mm) con respecto a un eje principal de la sección. El centroide de cada varilla está a 3 plg. (76 mm) de la cara más próxima de la columna. Calcular el área de acero re-

querida si $\varphi = 0.7$. $f'_c = 3000$ lb./plg.^{2}(20.7 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb./plg.^{2} (414 N/mm^2).

Solución

$g = (20 - 6)/20 = 0.7$. Entonces se puede usar la figura 5.22

$$\frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{536{,}000}{3000 \times 20 \times 20} = 0.447$$

$$\frac{P_u e}{f'_c bh^2} = 0.447 \times \frac{5.75}{20} = 0.1284$$

Refiriéndose al punto de la figura 5.22 que muestra estas coordenadas, e interpolando entre las curvas, se encuentra $\rho_t m = 0.61$. (Nótese que la gráfica incluye el valor requerido para φ.)

$$\therefore \quad \frac{A_{st}}{bh}\frac{f_y}{0.85f'_c} = 0.61$$

$$\therefore \quad A_{st} = 0.61 \times \frac{0.85 \times 3000}{60{,}000} \times 20 \times 20 = 10.4 \text{ plg}^2\ (6710 \text{ mm}^2)$$

5.4 COLUMNAS CORTAS CARGADAS EXCENTRICAMENTE CON FLEXION BIAXIAL

5.4.1 Teoría general

La teoría para las columnas estudiadas hasta ahora ha sido para cargas que provocan flexión alrededor de un eje principal de la columna solamente, es decir, flexión uniaxial. En la práctica, muchas columnas están sujetas a flexión alrededor de ambos ejes principales simultáneamente, especialmente las columnas de las esquinas de edificios.

En las figuras 5.23 y 5.24 respectivamente se muestra una sección de columna de concreto reforzado simétricamente con flexión biaxial, y las deformaciones, esfuerzos y fuerzas en la sección bajo carga última. Las ecuaciones dadas por la compatibilidad de deformaciones y equilibrio se pueden utilizar para analizar la sección. El enfoque es semejante al utilizado para la flexión biaxial de vigas en la sección 4.4. Usando las ecuaciones 4.64 a 4.72 se pueden encontrar las deformaciones, esfuerzos y fuerzas en el acero para determinada posición del eje neutro. La fuerza resultante en el concreto depende del perfil del bloque de esfuerzos (vea la figura 4.18). Las ecuaciones 4.73 a 4.75 y otras deducidas análogamente dan los valores de C_c, $\bar{x}$, y $\bar{y}$. Entonces se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para el refuerzo simétrico con la notación dada en la figura 5.24 como

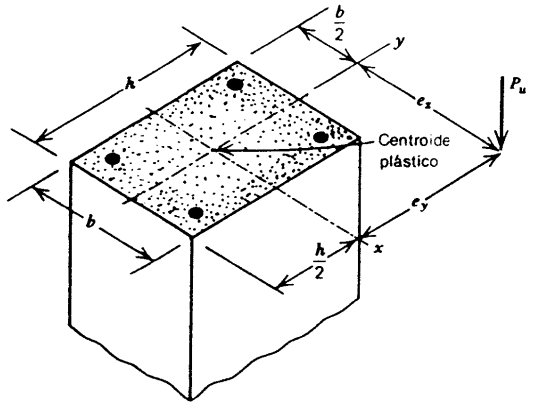


Figura 5.23. Sección de columna de concreto con flexión biaxial, reforzada simétricamente.

$$P_u = C_c + S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \tag{5.37}$$

$$M_{ux} = P_u e_y = C_c\left(\frac{h}{2} - \bar{y}\right) + (S_1 + S_2)\left(\frac{h}{2} - t_y\right) - (S_3 + S_4)\left(\frac{h}{2} - t_y\right) \tag{5.38}$$

$$M_{uy} = P_u e_x = C_c\left(\frac{b}{2} - \bar{x}\right) + (S_1 + S_3)\left(\frac{b}{2} - t_x\right) - (S_2 + S_4)\left(\frac{b}{2} - t_x\right) \tag{5.39}$$

Es necesario utilizar los signos adecuados (positivo para compresión, negativo para tensión) cuando se utilizan estas ecuaciones. Si la columna tiene más de cuatro varillas, se pueden incluir las fuerzas del acero adicional.

Es difícil realizar el análisis y diseño de secciones de columnas con flexión biaxial, debido a que se necesita un procedimiento de pruebas y ajustes para encontrar la inclinación y profundidad del eje neutro que satisfaga las ecuaciones de equilibrio. Por lo general, el eje neutro no es perpendicular a la excentricidad resultante. En el diseño se puede suponer una sección y arreglo de refuerzos, e ir corrigiendo sucesivamente el área de refuerzos hasta que la capacidad de la sección se aproxime al valor requerido. En consecuencia, es impráctico utilizar directamente las ecuaciones en el diseño sin ayuda de una computadora electrónica.

Se puede ilustrar la resistencia de las columnas con flexión biaxial mediante las superficies de interacción. La línea de falla o la línea de interacción de una columna con flexión uniaxial se muestra en la figura 5.11. Variando la inclinación del eje neutro es posible obtener una serie de diagramas de interacción a distintos ángulos respecto de los ejes principales de la sección. En la figura 5.25 aparece un conjunto típico de diagramas de interacción para una sección dada, y un conjunto completo de diagramas para todos los ángulos describen la superficie de interacción (o

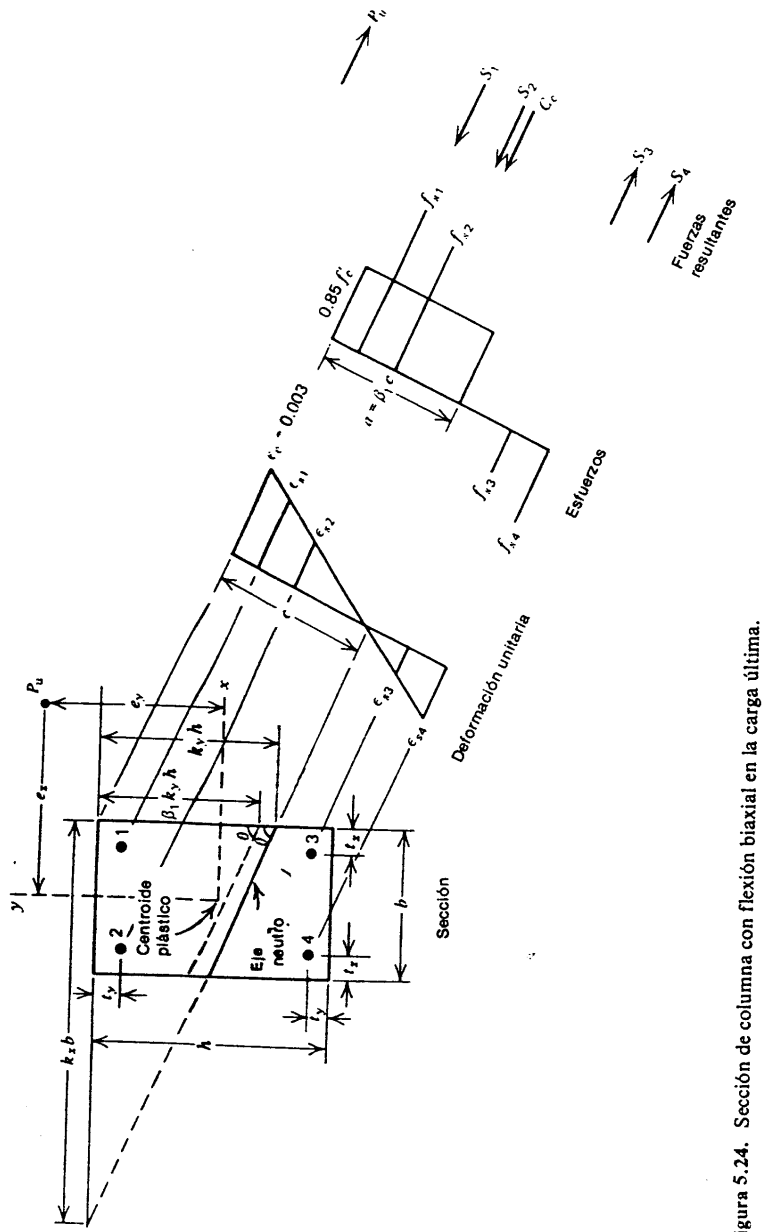


Figura 5.24. Sección de columna con flexión biaxial en la carga última.

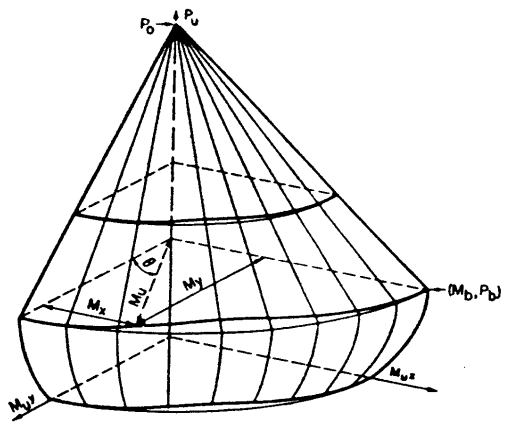


Figura 5.25. Superficie de interacción (Superficie de falla) para una columna de concreto reforzado con flexión biaxial.[5.11]

la superficie de falla). Cada punto de esta superficie representa un conjunto específico de carga axial P_u, y momentos alrededor de los ejes principales M_{ux} y M_{uy}, que juntos producen falla de la sección.

Si se toma una sección horizontal a través de la superficie de interacción de la figura 5.25, la línea de interacción obtenida proporciona las combinaciones posibles de M_{ux} y M_{uy} que provocarían falla a determinada carga axial P_u. Esta línea es un contorno de carga constante de la superficie de interacción. En la figura 5.26 se ha dibujado la línea, y el análisis muestra que su perfil es distinto al de una elipse (o distinto a un círculo en el caso especial de $M_{ux} = M_{uy}$). La desviación de la línea de interacción respecto de una línea circular es máxima para flexión a 45° respecto de los

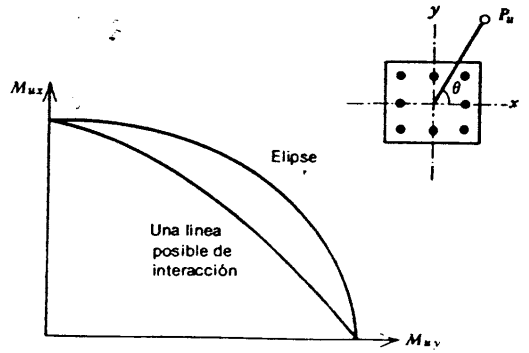


Figura 5.26. Línea de interacción para una sección de columna rectangular con flexión biaxial bajo P_u constante.

ejes mayores para el caso $M_{ux} = M_{uy}$, Es difícil deducir una expresión para la forma de la línea de interacción en el caso general debido a que ésta varía con la geometría de la sección, la resistencia de los materiales, el arreglo y cuantía del acero y el nivel de carga axial.

Es evidente que la preparación de gráficas de diseño basadas en las superficies reales de interacción para columnas con flexión biaxial requiere considerar un gran número de variables. No se podrían proporcionar superficies de interacción que abarcarán todos los casos posibles de diseño sin un gran número de gráficas.

Por las complicaciones de la teoría, muchos diseñadores en la práctica han tratado en forma inadecuada o ignorado del todo la flexión biaxial. Sin embargo, se dispone de enfoques de diseño para la flexión biaxial en que se reduce el trabajo de diseño utilizando aproximaciones simplificatorias. En la siguiente sección se estudian algunos de estos métodos aproximados y su exactitud.

5.4.2 Métodos aproximados de análisis y diseño por flexión biaxial

Los métodos aproximados de análisis y diseño para la flexión biaxial pertenecen a tres grupos generales. Empezaremos estudiando los métodos de superposición.

Métodos de superposición

Se han sugerido algunos métodos simplificados de superposición que reducen la flexión inclinada a flexión alrededor de los ejes principales de la sección, lo que permite utilizar procedimientos para flexión uniaxial. Morán[5.12] ha estudiado estos métodos para el caso de refuerzo simétrico.

Uno de los métodos es determinar el refuerzo requerido para cada uno de los casos de carga (P_u, M_{uy}) y (P_u, M_{ux}) por separado, acumulando el refuerzo resultante. Esto equivale a aplicar la carga primero en el punto 1 y luego en el punto 2 de la figura 5.27a. Este método no tiene base teórica, de manera que no debe emplearse, ya que puede producir grandes errores del lado de la inseguridad debido a que se toma en cuenta la resistencia completa del concreto dos veces en el diseño.

En forma alterna, se puede tomar cualquier línea recta 1-2 que pase por el punto en que actúa P_u (vea la figura 5.27b). El refuerzo requerido para cada uno de los casos de cargas P_u en el punto 1 y P_u en el punto 2, se determina por separado y se obtiene el refuerzo resultante mediante suma. En el código de construcción de Venezuela se ha empleado este método. De acuerdo con Móran, los resultados siempre están del lado de la seguridad y en algunos casos pueden llegar a ser excesivamente conservadores.

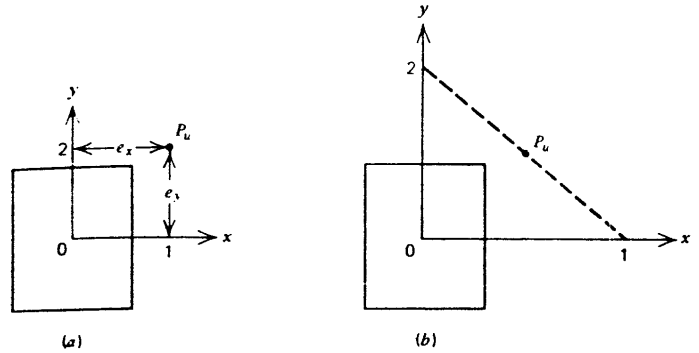


Figura 5.27. Métodos aproximados de diseño para flexión biaxial.

En otro método, se remplaza P_u por dos fuerzas estáticamente equivalentes P_{ux} y P_{uy} localizadas en los puntos 1 y 2 (véase la figura 5.27b) de los ejes. Se determinan por separado y luego se suman los refuerzos requeridos para cada uno de los casos de cargas P_{ux} en 1, tomando la resistencia del concreto como $f'_c P_{ux}/P_u$, y P_{uy} en 2 tomando la resistencia del concreto como $f'_c P_{uy}/P_u$. Aunque este método no tiene base teórica, Morán comenta que las soluciones obtenidas en los casos considerados parecen ser satisfactorias.

Método de la excentricidad uniaxial equivalente

En la figura 5.28 se presenta la línea de interacción para una sección rectangular de columna con pandeo biaxial bajo una carga máxima constante. Las combinaciones posibles de excentricidad para una carga máxima constante P_u están dadas por la línea. Por tanto, la carga máxima para cualquier punto de aplicación (e_y, e_x) en la línea es igual a la carga máxima para un punto de aplicación con excentricidad uniaxial e_o. Esto ilustra un enfoque posible de diseño si la forma de la línea de interacción fuera conocida, sería posible hacer el diseño para la carga P_u que actúa a la excentricidad uniaxial equivalente e_o, permitiendo de esta manera, la consideración de pandeo en una sola dirección.

Se ha propuesto una diversidad de expresiones analíticas aproximadas para poder determinar la excentricidad uniaxial equivalente e_o. Por ejemplo, Morán[5.12] reporta la siguiente ecuación adoptada por el código español en 1968.

$$e_o = e_x + \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) e_y \tag{5.40}$$

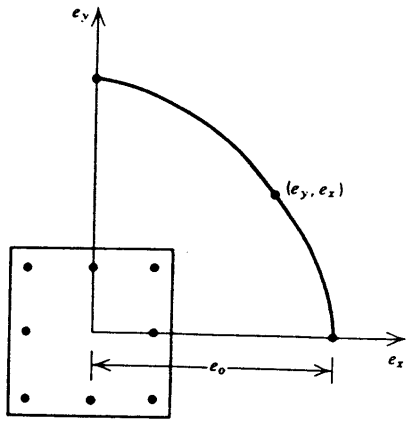


Figura 5.28. Línea de interacción para columna con flexión biaxial bajo P_u constante.

en que $e_x \geq e_y$ y β es un factor tabulado en el código que depende del nivel de carga axial y la cuantía de acero.

Métodos basados en aproximaciones para el perfil de la superficie de interacción

Se han hecho varias sugerencias para el perfil de la superficie de interacción de la que pueden calcularse las resistencias a flexión biaxial, conocidas las resistencias uniaxiales.

Una expresión tomada del código ruso, deducida por Bresler[5.13] para la resistencia de una columna cargada biaxialmente es

$$\frac{1}{P_u} = \frac{1}{P_{ux}} + \frac{1}{P_{uy}} - \frac{1}{P_o} \tag{5.41}$$

en que P_u = carga última bajo la flexión biaxial, P_{ux} = carga última cuando sólo está presente la excentricidad e_x (vgr, carga aplicada en el punto 1 de la figura 5.27a), P_{uy} = carga última cuándo sólo está presente la excentricidad e_y (vgr, carga aplicada en el punto 2 de la figura 5.27a) P_o = carga última cuando no hay excentricidad. Esta expresión tiene la desventaja de ser más adecuada para el análisis que para el diseño. Breler encontró que la carga última predicha por la ecuación 5.41 concuerda excelentemente con las cargas últimas dadas por la teoría y por los resultados de pruebas, en que la desviación máxima de los resultados de prueba encontrados es de 9.4 %.

Bresler[5.13] también sugirió que la familia de líneas de interacción que corresponde a los distintos niveles de carga constante P_u se puede aproximar mediante la ecuación

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}}\right)^m + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}}\right)^n = 1 \tag{5.42}$$

en que $M_{ux} = P_u e_y$, $M_{uy} = P_u e_x$, e_x y e_y son las excentricidades de P_u, y M_{uxo} y M_{uyo} son las resistencias a flexión uniaxial alrededor de los ejes x y y para la carga constante bajo consideración. Las constantes m y n dependen de las propiedades de la columna y se determinaron experimentalmente.

Parme y asociados[5.14] reformularon la ecuación 5.42 como

$$\left(\frac{M_{ux}}{M_{uxo}}\right)^{\log 0.5/\log \beta} + \left(\frac{M_{uy}}{M_{uyo}}\right)^{\log 0.5/\log \beta} = 1 \tag{5.43}$$

en que β es el parámetro que determina el perfil de la línea de interacción. El efecto de los distintos valores de β en la forma de la línea de interacción está representado en la figura 5.29. Parme y colaboradores calcularon analíticamente los valores de β que están mostrados en gráficas para una diversidad de disposición de varillas, resistencia de cedencia del acero, índice de refuerzo $\rho_t f_y / f'_c$, y valores de P_u/P_o. Estos valores de β junto con los valores uniaxiales de la capacidad de momento y un diagrama tal como el de la figura 5.29 se pueden utilizar para determinar la capacidad a flexión biaxial una sección dada de columna.

Pannell[5.15] y Furlong[5.11] han proporcionado otras sugerencias para el perfil de la superficie de interacción. Meek[5.16] ha sugerido remplazar la

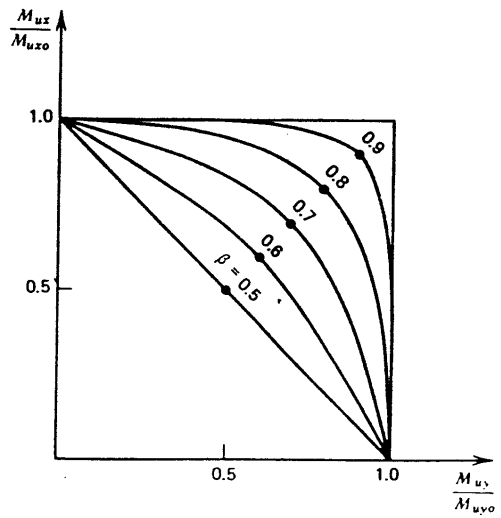


Figura 5.29. Líneas de interacción para columna con flexión biaxial bajo constante. P_u.[5.14]

línea curva de interacción bajo carga última constante mediante dos líneas rectas. Por ejemplo, si se conocen los puntos *A, B y C* de la figura 5.30, se puede reemplazar en forma segura la curva real mediante una línea recta *AB* y otra *BC*.

El código británico CPll0: 1972 [5.17] recomienda usar la ecuación de interacción 5.42 con $m = n$ igual a 1.0 a niveles de carga axial baja, aumentando linealmente hasta 2.0 a niveles de carga axial alta. Esto proporciona un enfoque conservador simple.

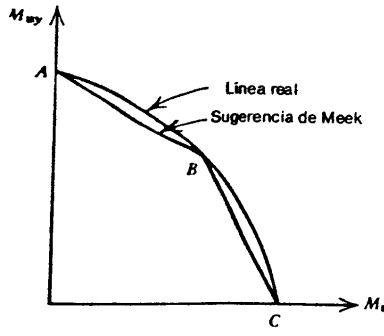


Figura 5.30. Línea de interacción para columna con P_u constante.

Weber [5.18] ha producido una serie de gráficas de diseño para flexión de columnas cuadradas alrededor de una diagonal que permite el diseño o análisis de una sección mediante interpolación lineal entre la flexión alrededor de un eje principal y flexión alrededor de una diagonal. Este enfoque es semejante a la sugerencia de Meek y parece ser la herramienta de diseño más práctica disponible. Row y Paulay [5.19] han mejorado la exactitud de este proceso utilizando una distribución de esfuerzos de compresión del concreto más exacta y produciendo gráficas de diseño para flexión alrededor de ejes inclinados a distintos ángulos con respecto a los ejes principales, permitiendo con ello la interpolación lineal entre una diversidad de puntos sobre las líneas de interacción. En la siguiente sección se describen estas gráficas del diseño

5.4.3 Gráficas de diseño

Gráficas de diseño de Weber

Weber [5.18] utilizó las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones para obtener en base a los principios fundamentales las curvas de interacción de P_u contra $P_u e$ para columnas cuadradas con la carga aplicada con distintas excentricidades a lo largo de la línea de una diagonal

de la sección. Se utilizó el bloque rectangular equivalente de esfuerzos obtenido para áreas comprimidas rectangulares para aproximar las características del bloque de esfuerzos del área de concreto comprimido triangular o cuasi triangular. Las gráficas son para $f'_c \leqslant 4000$lb /plg.^{2} (27.6 N/mm^2), $f_y = 60{,}000$ lb /plg.^{2} N/mm^2), $g = 0.6$ a 0.9 y para columnas de 4. 8, 12 y 16 varillas (se considera individualmente a las varillas en vez de como un perfil tubular delgado equivalente). Las gráficas incluyen un factor de reducción de capacidad $\varphi = 0.7$. En la figura 5.31 aparece un ejemplo de estas gráficas, que también ha publicado el ACI. [5.9]

Los pasos a seguir para utilizar las gráficas para el diseño, dados P_u, e_x, y e_y (vea la figura 5.32a) son los siguientes:

1. Calcular la excentricidad del momento flexionante resultante, $e = \sqrt{e_x^2 + e_y^2}$, y el ángulo θ entre el eje en la dirección de las y y la dirección de la excentricidad e, $\theta = \tan^{-1}(e_x/e_y)$, en que $e_y \geqslant e_x$.
2. De las gráficas determinar los requerimientos del acero para $P_u/f'_c h^2$ en que $P_u e/f'_c h^3$ actúa uniaxialmente y para $P_u/f'_c h^2$ con $P_u e/f'_c h^3$ actuando diagonalmente.
3. Calcular el acero requerido para $P_u/f'_c h^2$ con $P_u e/f'_c h^3$actuando a un ángulo θ interpolando linealmente entre las cuantías de acero para $\theta = 0°$ y 45°.

Análogamente, cuando las gráficas son para analizar secciones, se puede calcular la capacidad de momentos a cualquier ángulo θ interpolando linealmente entre las capacidades de momento flexionante uniaxial y diagonal.

Se obtuvo buena exactitud en cuatro cálculos de comprobación realizados por Weber, [5.18] quien obtuvo un error máximo de 5.3 % para el área de acero o capacidad de momentos comparada con la solución teórica completa utilizando la distribución de esfuerzos rectangulares equivalente.

Ejemplo 5.6

Se desea que una columna cuadrada con estribos de 20 plg. (508 mm) con un total de 16 varillas distribuidas uniformemente en todas las caras, soporte $P_u = 700{,}000$ lb (3113 kN) con $e_x = 2.25$ plg (57.2 mm) y $e_y = 4.33$ plg (110 mm). Encontrar el área de acero requerida si $\varphi = 0.7$, $f'_c = 4000$ lb /plg^2(27.6 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb /plg.^{2} (414 N/mm^2).

Solución

Excentricidad del momento flexionante resultante

$$e = \sqrt{2.25^2 + 4.33^2} = 4.88 \text{ plg}$$

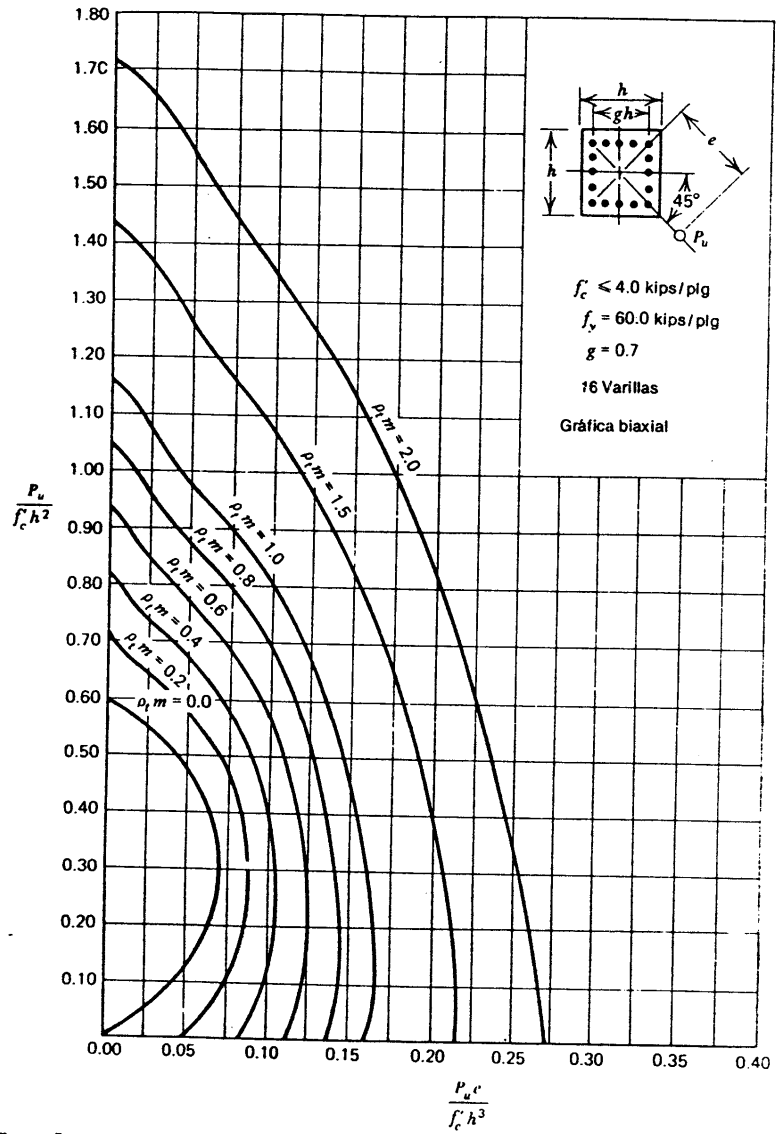


Figura 5.31. Gráfica de diseño para una sección de columna de concreto reforzado cuadrada cargada excentricamente con la carga aplicada a lo largo de una diagonal[5.18, 5.9].

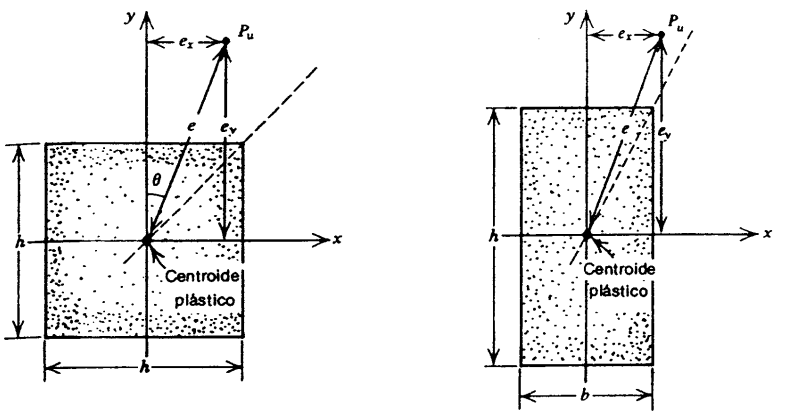


Figura 5.32. Secciones de columna con flexión biaxial. (*a*) Sección cuadrada. (*b*) Sección rectangular.

Angulo entre la dirección del eje de las y y la dirección de e

$$\theta = \tan^{-1}\frac{2.25}{4.33} = \tan^{-1} 0.520 = 27.46°$$

$$\frac{P_u}{f'_c h^2} = \frac{700{,}000}{4000 \times 400} = 0.438$$

$$\frac{P_u e}{f'_c h^3} = \frac{700{,}000 \times 4.88}{4000 \times 8000} = 0.1068$$

Para la sección de columna, supóngase que el centroide de cada varilla está a 3 plg. del borde próximo.

$$\therefore \quad g = \frac{20 - 6}{20} = 0.7$$

En consecuencia, se pueden utilizar las figuras 5.31 y 5.32.
De la figura 5.31 ($\theta = 45°$), $\rho_t m = 0.520$, y de la figura 5.22 ($\theta = 0°$) $\rho_t m = 0.414$. (Nótese que ambas gráficas incluyen el valor requerido para φ.)
Interpolando para $\theta = 27.46°$, tenemos

$$\rho_t m = 0.414 + (0.520 - 0.414) \times \frac{27.46}{45} = 0.479$$

Pero

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{60{,}000}{0.85 \times 4000} = 17.65$$

$$\therefore \quad A_{st} = h^2\rho_t = \frac{400 \times 0.479}{17.65}$$

$$= 10.9 \text{ plg}^2 \ (7032 \text{ mm}^2)$$

Aunque las gráficas de Weber se obtuvieron para secciones cuadradas, los cálculos de comprobación han indicado que se pueden utilizar para secciones rectangulares con carga en una diagonal. La publicación [5.9] del ACI comenta que las gráficas son igualmente aplicables a secciones rectangulares con una razón de peralte a anchura (o viceversa) hasta de dos, aunque no se proporciona una guía para la aplicación de las gráficas a dichas secciones. La figura 5.32b representa una sección rectangular con flexión biaxial e indica las direcciones de los ejes. Note que $M_{ux} = P_u e_y$ y que $M_{uy} = P_u e_x$. Para utilizar las gráficas de Weber para determinar la cuantía de acero necesaria para la sección rectangular con la carga aplicada en la diagonal, se pueden hacer las siguientes modificaciones a los parámetros de Weber:

$$\text{sustituyendo} \quad \frac{P_u}{f'_c h^2} \quad \text{by} \quad \frac{P_u}{f'_c bh}$$

$$\text{sustituyendo} \quad \frac{P_u e}{f'_c h^3} \quad \text{by} \quad \sqrt{[(P_u e_y / f'_c bh^2)^2 + (P_u e_x / f'_c b^2 h)^2]}$$

$$= \frac{P_u e_y}{f'_c bh^2}\sqrt{[1 + (e_x h / e_y b)^2]}$$

En forma análoga, se puede considerar que los términos adimensionales de la carga y momento utilizados para encontrar la cuantía de acero necesaria para la sección rectangular con la carga aplicada en el eje principal a partir de las gráficas uniaxiales es

$$\frac{P_u}{f'_c bh} \quad \text{y} \quad \frac{P_u e_y}{f'_c bh^2}\sqrt{[1 + (e_x h / e_y b)^2]}$$

El método de interpolación utilizado por Weber también debe modificarse. En vez de interpolar con respecto a la dirección verdadera de la excentricidad de la carga, la interpolación debe realizarse con respecto al ángulo de la dirección de excentricidad de la sección cuadrada equivalente, dada por $\theta' = \tan^{-1}(e_x h / e_y b)$.

En forma análoga, cuando se utilizan las gráficas para analizar secciones, se puede calcular la capacidad de momentos a cualquier ángulo equivalente θ' interpolando linealmente entre los valores uniaxial y diagonal encontrados utilizando los términos adimensionales de la carga y momento recién dados.

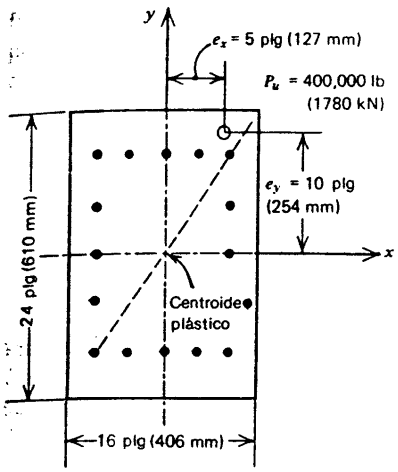


Figura 5.33. Sección de columna con flexión biaxial de los ejemplos 5.7 y 5.8.

Se desea que una sección de columna rectangular (Figura 5.33) soporte la carga en la posición mostrada. Se reforzará la sección mediante 16 varillas distribuidas uniformemente en todas las caras. Encontrar el área de acero requerida si $\varphi = 0.7$, $f'_c = 4000$ lb./plg^2. (27.6 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb./plg^2. (414 N/mm^2).

Solución

Para la sección y cargas mostradas se tiene

$$\frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{400{,}000}{4000 \times 16 \times 24} = 0.260$$

$$\frac{P_u e_y}{f'_c bh^2}\sqrt{[1 + (e_x h / e_y b)^2]} = \frac{400{,}000 \times 10}{4000 \times 16 \times 24^2}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{5 \times 24}{10 \times 16}\right)^2\right]}$$

$$= 0.1085 \times 1.25$$

$$= 0.1356$$

$$\theta' = \tan^{-1}\frac{e_x h}{e_y b} = \tan^{-1}\frac{5 \times 25}{10 \times 16} = \tan^{-1} 0.750 = 36.87°$$

Supóngase $g = 0.7$ En consecuencia se pueden utilizar las figuras 5.31 y 5.22. De la primera ($\theta' = 45°$), $\rho_t m = 0.72$, y de la figura 5.22 5.22 ($\theta' = 0$) $\rho_t m = 0.49$. (Nótese que ambas gráficas incluyen el valor requerido para φ.) Interpolando para $\theta' = 36.87°$ se obtiene

$$\rho_t m = 0.49 + (0.72 - 0.49) \times \frac{36.87}{45} = 0.678$$

pero

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{60{,}000}{0.85 \times 4000} = 17.65$$

$$\therefore \quad A_{st} = bh\rho_t = 16 \times 24 \times \frac{0.678}{17.65}$$

$$= 14.8 \text{ plg}^2 \ (9{,}548 \text{ mm}^2)$$

Sin embargo, se debe notar que la interpolación entre gráficas para cargas en una diagonal y cargas en un eje principal para secciones con h/b grande puede introducir errores significativos que se ha estimado que pueden llegar hasta el 10% del lado de la inseguridad en algunos casos [5.19]

Gráficas de diseño de Row y Paulay

Se puede mejorar la exactitud del método de interpolación lineal de Weber si se dispone de gráficas de diseño en que la dirección de la excentricidad esté inclinada a distintos ángulos respecto de los ejes principales, permitiendo la interpolación entre una diversidad de puntos sobre la línea de interacción de carga constante. Adicionalmente se pueden tener ciertas dudas respecto de la exactitud del bloque rectangular equivalente de esfuerzos obtenido para áreas comprimidas rectangulares cuando se utiliza para secciones de columna con áreas comprimidas no rectangulares, como ya se mencionara en la sección 3.4.

Es posible expresar la dirección de la excentricidad e de la carga (vea la figura 5.34) en términos de un parámetro adimencional $K = e_x h/e_y b$, en que $K = 0$ implica cargas en el eje y $K = 1$ implica cargas en la diagonal, y $K = \infty$ implica cargas en el eje x. Las gráficas elaboradas por Row y Paulay [5.19] para una diversidad de valores de K permiten obtener con exactitud la forma de la superficie de interacción. Las gráficas muestran las cantidades adimencionales $P_u/f'_c bh$ y $M_{ux}/f'_c bh^2 \sqrt{[1 + (e_x h/e_y b)^2]}$,en que $M_{ux} = P_u e_y$, para $f'_c \leqslant 4000$ lb /plg ^{2} (27.6 N/mm^2), $f_y = 60{,}000$ plg. (414 N/mm^2), $\cdot$ y g y f varían entre 0.7 y 0.9. Se supone que el refuerzo está distribuido uniformemente como un perfil tubular delgado con $0.25A_{st}$ en cada cara de la sección. Las gráficas se calcularon a partir de los principios fundamentales usando las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones y suponiendo una curva esfuerzo-deformación para el concreto comprimido que es parabólica hasta un esfuerzo de $0.85f'_c$ a una deformación de 0.002, y que luego tiene un esfuerzo constante de $0.85f'_c$ hasta una deformación máxima de 0.003 en la fibra extrema a compresión. Las gráficas no incluyen el factor φ de reducción de capacidad. En la figura 5.35 se muestra una gráfica de ejemplo. En la misma gráfica se proporcionan curvas de interacción para cuatro valores de K, uno en cada cuadrante de los ejes.

Los pasos a seguir para emplear las gráficas en el diseño son:

1. Calcular los valores de $P_u/f'_c bh$ y $M_{ux}/f'_c bh^2 \sqrt{1 + (e_x h/e_y b)^2}$.
2. Calcular $K = e_x h/e_y b$ y determinar el ángulo entre la dirección de la excentricidad para la sección cuadrada equivalente y el eje en la dirección de las y de $\theta' = \tan^{-1} K$.
3. Determinar los requerimientos de acero para los valores de k que están a ambos lados del valor calculado de K de la gráfica. Calcular el valor de θ' que corresponde a cada uno de esos valores de K.
4. Calcular el acero requerido para el valor calculado de K interpolando linealmente entre las cuantías de acero para los valores de θ'.

En forma análoga, cuando se utilizan las gráficas para analizar secciones, se puede calcular la capacidad de momentos en cualquier ángulo θ' interpolando linealmente entre las capacidades de momentos de los valores adyacentes de K. Se asevera [5.19] que el método de interpolación es èxacto hasta dentro de 2.5 %

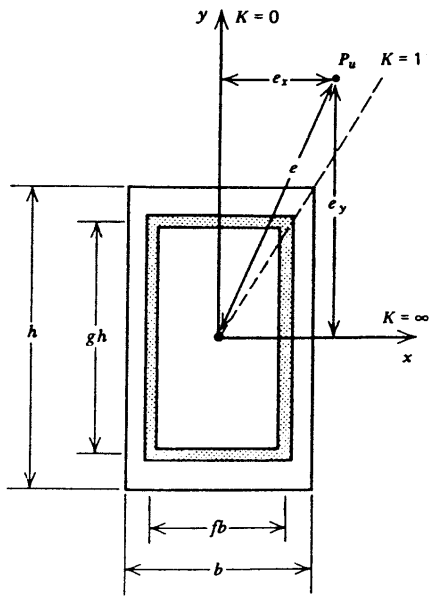


Figura 5.34. Sección de columna con flexión biaxial.

Ejemplo: 5.8

Se requiere que la sección de columna rectangular de la fig. 5.33 soporte la carga en la posición mostrada. Se reforzará la sección mediante varillas distribuidas uniformemente, con $A_{st}/4$ en cada cara. Encontrar el área de acero requerida si $\varphi = 0.7$, $f'_c = 4000$ lb./plg.^{2} (27.6 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb./plg.^{2} (414 N/mm^2).

Solución

Valores de diseño de $P_u = 400{,}000/\varphi = 400{,}000/0.7 = 571{,}400$ lb

$$\frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{571{,}400}{4000 \times 16 \times 24} = 0.372$$

$$\frac{M_{ux}}{f'_c bh^2}\sqrt{[1 + (e_x h/e_y b)^2]} = \frac{571{,}400 \times 10}{4000 \times 16 \times 24^2}\sqrt{\left[1 + \left(\frac{5 \times 24}{10 \times 16}\right)^2\right]}$$
$$= 0.155 \times 1.25$$
$$= 0.194$$

$$K = \frac{e_x h}{e_y b} = \frac{5 \times 24}{10 \times 16} = 0.750 \qquad \therefore \quad \theta' = \tan^{-1} 0.75 = 36.87°$$

Suponga $g = f = 0.7$. En consecuencia, se puede emplear la fig. 5.35. Se puede obtener la cuantía de acero para $K = 0.75$ interpolando entre las curvas para $K = 0.577$ y $K = 1.0$.
Para $K = 0.577$ ($\theta' = \tan^{-1} 0.577 = 30°$), de la fig. 5.35 $\rho_t m = 0.79$; para $K = 1.0$ ($\theta' = \tan^{-1} 1.0 = 45°$), de la fig. 5.35 $\rho_t m = 0.83$. Interpolando para $\theta' = 36.87°$ se obtiene

$$\rho_t m = 0.79 + (0.83 - 0.79)\frac{36.87 - 30}{45 - 30} = 0.808$$

Pero

$$m = \frac{f_y}{0.85 f'_c} = \frac{60{,}000}{0.85 \times 4000} = 17.65$$

$$\therefore \quad A_{st} = bh\rho_t = 16 \times 24 \times \frac{0.808}{17.65}$$
$$= 17.6 \text{ plg}^2 \text{ (11,350 mm}^2\text{)}$$

La cuantía de acero que se encontró en el ejemplo 5.8 usando la gráfica de Row y Paulay es mayor que la determinada para la misma sección y cargas del ejemplo 5.7 usando el método de Weber. Esta diferencia se debe principalmente a la distribución de esfuerzos de compresión del concreto supuesta y al método de interpolación. Weber encontró la fuerza resultante y su posición para áreas comprimidas no rectangulares usando

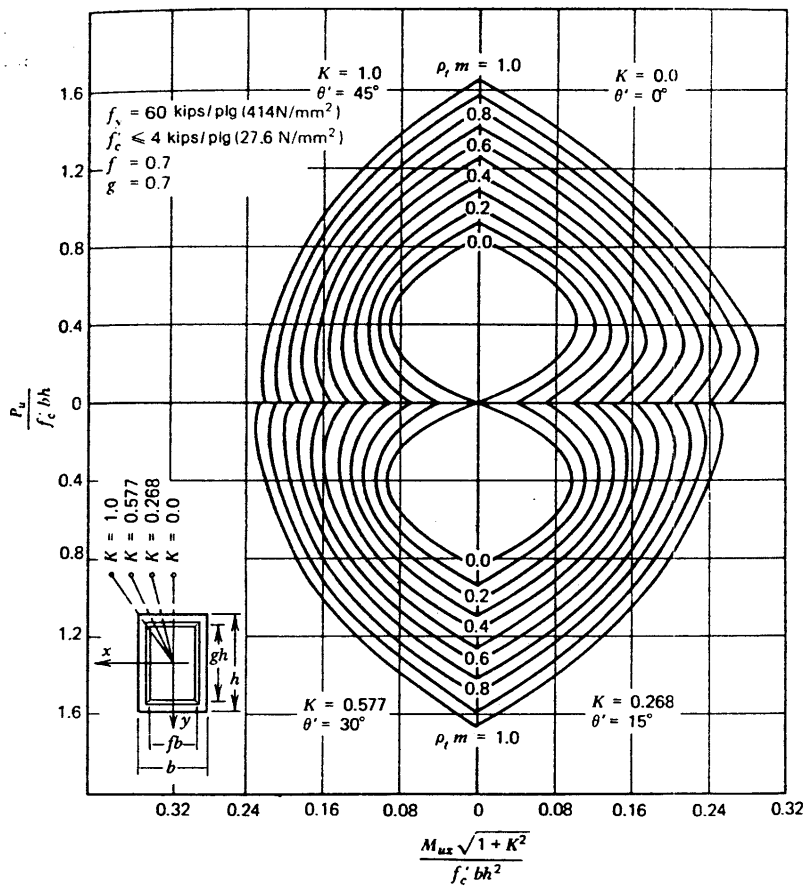


Figura 5.35. Gráfica de diseño para una sección de columna de concreto reforzado con la carga aplicada a distintos ángulos de excentricidad[5.19].

el bloque rectangular equivalente de esfuerzos deducido para áreas comprimidas rectangulares, un procedimiento que puede inducir a cierto error como se vio en la sección 3-4. Row y Paulay utilizaron una curva supuesta de esfuerzo-deformación para deducir la fuerza y posición resultante del concreto, que constituye un enfoque más exacto. Sin embargo, debe notarse que la curva de esfuerzo-deformación adoptada por Row y Paulay es conservadora ya que la fuerza de compresión en el concreto dada por aquélla para la flexión uniaxial es $8\frac{1}{2}\%$ inferior a la del bloque rectangular equivalente de esfuerzos para $f'_c \leq 4000$ lb./plg.^{2} (27.6 N/mm^2). Adicionalmente Row y Paulay supusieron una deformación máxima del concreto de 0.003, igual a Weber, ya que esto lleva a un resultado conservador

debido a que en la carga máxima la deformación en la fibra extrema de un área comprimida triangular es mayor (vea la sección 3.4). El efecto combinado del error de la interpolación lineal entre la carga diagonal y uniaxial y las diferencias en la distribución supuesta de esfuerzos del concreto son responsables del 19% de diferencia en las áreas de acero calculadas en los ejemplos 5.7 y 5.8. En forma análoga, rehaciendo el ejemplo 5.6 y utilizando las gráficas de Row y Paulay se ve que se requiere 20% de acero más que en el método de Weber. Es evidente que el método de Row y Paulay rinde un resultado conservador en tanto que el de Weber puede conducir a errores del lado de la inseguridad.

5.5 COLUMNAS ESBELTAS

5.5.1 Comportamiento de columnas esbeltas

La esbeltez de una columna puede hacer que la carga última se reduzca por deflexiones laterales de la columna provocadas por flexión. En la fig. 5.36 se ilustra este efecto para el caso especial de una columna inicialmente recta con flexión en curvatura simple provocada por la carga P aplicada con excentricidad igual a e en cada extremo. La deformación por flexión de la columna hace que la excentricidad de la carga en la sección crítica sea $e + \Delta$, en que Δ es la excentricidad adicional debida a la deflexión en esa sección. En consecuencia, el momento flexionante máximo aumenta hasta $P(e + \Delta)$ a esto comúnmente se le conoce como el efecto $P\Delta$. La importancia de las deflexiones laterales debidas a la flexión depende del tipo de carga en la columna y de las condiciones de los extremos. El momento $P\Delta$ ó momento adicional, a veces se ha denominado momento secundario, aunque ese término tiende a implicar que el momento es de importancia secundaria, en tanto que en algunos casos puede tener mucho significado.

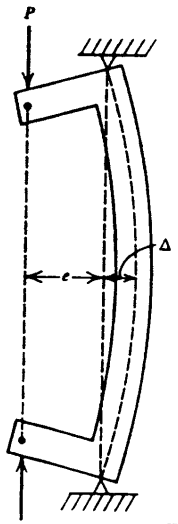


Figura 5.36. Columna esbelta cargada excéntricamente.

Una columna corta se define como aquélla en que la carga última no se reduce por las deformaciones de flexión debido a que las excentricidades adicionales Δ o son despreciables u ocurren lejos de la sección crítica. Una columna esbelta se define como aquélla en que el momento flexionante amplificado provocado por la excentricidad adicional reduce la carga última. El comportamiento de la columna mostrada en la fig. 5.36 bajo carga creciente está ilustrado en el diagrama de interacción para la sección crítica de la columna dada en la fig. 5.37. Si la excentricidad adicional Δ es despreciable, el momento máximo M es igual a Pe en todas las etapas de carga y se seguirá una trayectoria lineal P-M al aumentar la carga. Este es comportamiento de columna corta, y gradualmente ocurre una falla del material de la sección cuando se llega a la línea de interacción. Si la columna es esbelta, el momento máximo M es igual a $P(e + \Delta)$, y debido a que Δ aumenta más rápidamente a niveles de carga elevada, la trayectoria P-M es curva. Pueden ocurrir dos tipos de comportamiento de columna esbelta. Primero, una columna puede ser estable bajo la deflexión Δ_1 pero después de alcanzar la línea de interacción ocurre una falla del material de la sección. Este tipo de falla generalmente ocurre en las columnas de edificios que están arriostradas contra deflexiones laterales. En segundo

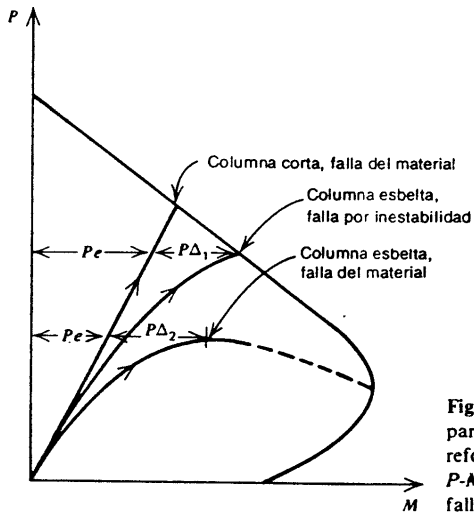


Figura 5. 37. Diagrama de interacción para una sección de columna de concreto reforzado que ilustra el comportamiento P-M de columnas cortas y largas hasta la falla.

lugar, si la columna es sumamente esbelta, puede hacerse inestable antes de alcanzar la línea de interacción. Esta falla de inestabilidad puede ocurrir en columnas no arriostradas.

Se puede ilustrar el comportamiento de columnas esbeltas para determinadas condiciones de cargas y extremos, utilizando diagramas de interacción de columnas esbeltas. La fig. 5.38 revela la construcción de uno de estos diagramas, ilustrado por MacGregor y asociados.[5.20] La figura 5.38*a* es el diagrama de interacción para la sección crítica de una columna

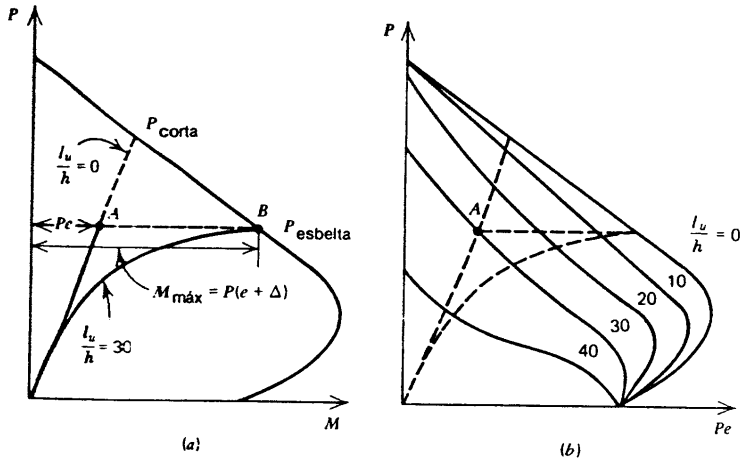


Figura 5.38. Construcción de diagramas de interacción de columnas esbeltas.[5.20] (*a*) Comportamiento de columna esbelta. (*b*) Diagramas de interacción de columnas esbeltas.

del tipo mostrado en la fig. 5.36. Se ilustran los comportamientos de columnas cortas y esbeltas. La columna esbelta tiene una relación de longitud no soportada a peralte de la sección de $l_u/h = 30$. La falla de la columna esbelta ocurre en el punto *B* bajo la carga y momento amplificado. El punto *A* determina la carga y momento primario *Pe* en la falla. El punto *A* se puede determinar para una diversidad de valores de e/h y l_u/h de manera que puede trazarse la familia de curvas en la fig. 5.38*b*, dando la carga *P* y el momento primario *Pe* que provocan la falla de la columna. Esos diagramas son útiles para indicar la reducción en resistencia debida a la esbeltez para distintos casos de cargas.

Columnas arriostradas contra deflexiones laterales, con los extremos articulados con cargas que provocan curvatura simple y doble, se muestran en la fig. 5.39. Para ambos casos de cargas, las deformaciones flexionantes provocan momentos adicionales, pero éstos no amplifican los momentos primarios máximos que ocurren en los extremos de las columnas. Sin embargo, si los momentos adicionales son grades, los momentos

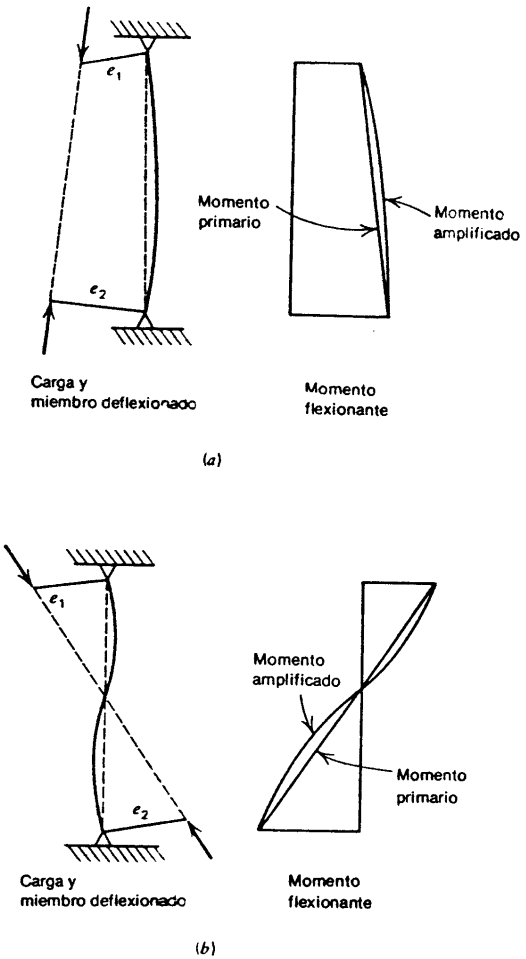
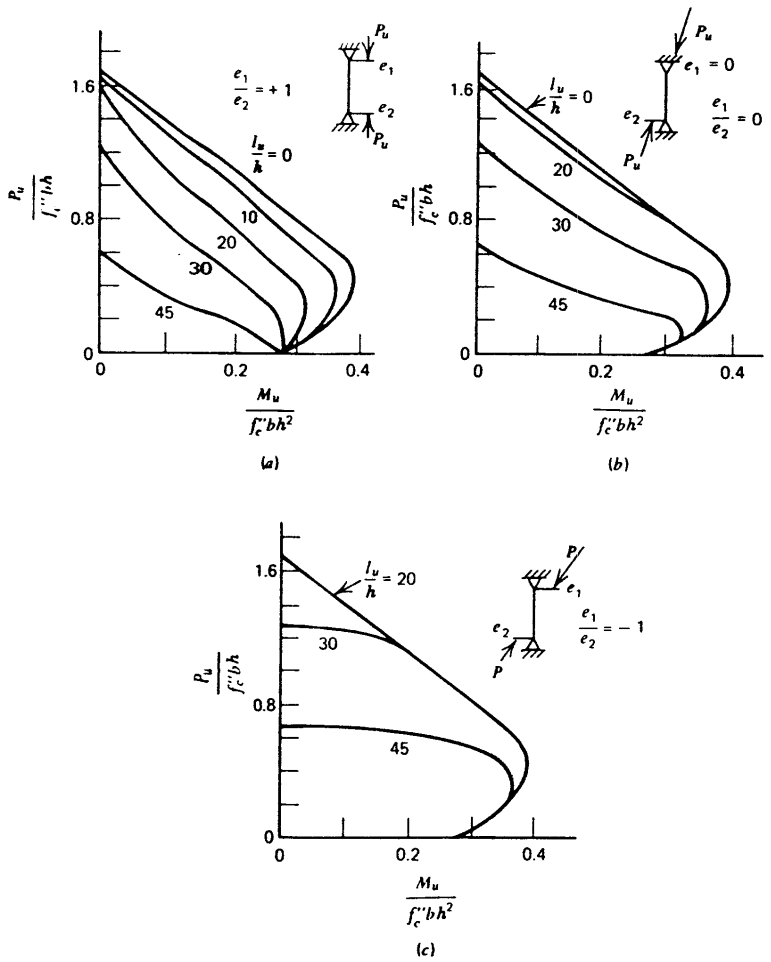


Figura 5.39. Momentos amplificados en columnas arriostradas (*a*) Curvatura simple. (*b*) Curvatura doble.

máximos pueden desplazarse de los extremos hacia el centro de las columnas. Es evidente que hay más probabilidad de que el momento flexionante máximo se incremente por un momento adicional en el caso de curvatura simple que en el caso de curvatura doble, debido a que en el primero las deflexiones laterales son mayores y los momentos primarios son casi máximos en una porción mayor de la columna, lo que está ilustrado en los diagramas de interacción de columnas esbeltas de MacGregor y colaboradores[5.20] (fig. 5.40); se aprecia que la mayor reducción en la carga última ocurre cuando las excentricidades de los extremos son iguales y del



Nota: M_u = momento máximo de extremo a la falla
f_c'' = resistencia a compresión del concreto en las columnas

Figura 5.40. Efecto del tipo de curvatura en los diagramas de interacción de columnas esbeltas[5.20].

mismo signo, y la reducción más pequeña en carga última ocurre cuando las excentricidades del extremo son iguales pero de signo opuesto.

Si las columnas no están arriostradas contra deflexiones laterales, los momentos adicionales máximos se inducen en los extremos de las columnas, y el aumento en el momento flexionante máximo puede ser muy apreciable. En la fig. 5.41 está ilustrado el aumento en el momento para una columna de extremo empotrado con movimiento lateral. Es evidente

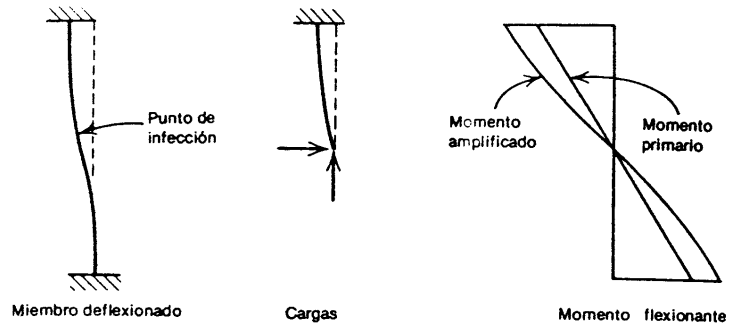


Figura 5.41. Momento amplificado en columna con desplazamiento lateral.

que si no se limitan completamente los extremos de la columna contra la rotación, sino que sólo están restringidos elásticamente en los extremos, ocurrirá cierta rotación del extremo; entonces, debido a la mayor flexibilidad, el desplazamiento lateral, y por tanto los momentos adicionales, aumentan.

Los momentos de los extremos en columnas de marcos dependen de las rigideces relativas de las columnas y vigas. La rigidez de las vigas y columnas se reduce durante la carga por el agrietamiento del concreto y posteriormente por las deformaciones inelásticas. Los momentos adicionales provocados por la deflexión lateral de las columnas también reducen su rigidez. En consecuencia, durante la carga ocurren cambios en los momentos de la columna, debido a los momentos adicionales provocados por las deflexiones y por los cambios en la rigidez relativa. Los momentos de la columna pueden aumentar o disminuir. Por ejemplo, para una columna corta en un marco arriostrado, la reducción en los momentos de los extremos de las columnas debidos a la reducción en rigidez puede ser mayor que el aumento en el momento debido a las deflexiones, y el momento máximo decrece, lo que produce un aumento en la capacidad de carga. Sin embargo, para una columna esbelta en un marco arriostrado, los momentos debidos a las deflexiones tienden a aumentar más rápidamente que los momentos restrictivos, y el momento máximo aumenta con lo que se disminuye la capacidad de carga. La figura 5.42*a* muestra un marco arriostrado probado por Furlong y Ferguson.[5.21] Las columnas tenían una relación de l_u/h igual a 20 y estaban cargadas en curvatura simple con $e/h = 0.106$. La falla ocurrió en la sección A mitad de la altura de una columna. La figura 5.42*b* es el diagrama de interacción para la sección de columna con las trayectorias P–M medidas durante la carga en las secciones A y B. Aunque las cargas P y αP se aplicaron proporcionalmente, la variación del momento en B al aumentar la carga es no lineal, ya que el momento disminuyó finalmente al aumentar la carga, debido a que la

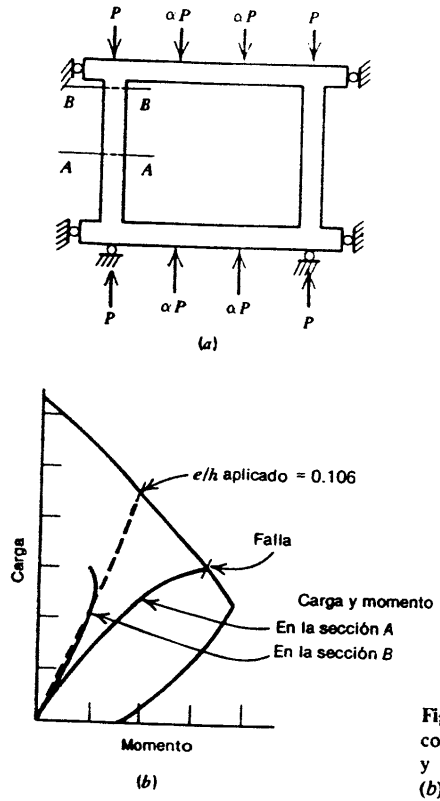


Figura 5.42. Comportamiento de una columna en un marco probado por Furlong y Ferguson.[5.21] (*a*) Espécimen de prueba. (*b*) Respuesta medida de carga-momento.

rigidez de la columna disminuyó con mayor rapidez que la rigidez de la viga. El momento en A incluyó el momento adicional debido a la deflexión y como se esperaba para esta sección, hubo un aumento del momento en todas las etapas con la carga. Es evidente que al aumentar el grado de restricción rotacional en los extremos de columnas de marcos arriostrados, aumentando la rigidez de la viga, aumenta la resistencia de las columnas.

Si las vigas son suficientemente flexibles, la columna tiende a actuar como cuerpo rígido en un marco no arriostrado y el marco se deflexiona lateralmente debido principalmente a flexión en las vigas. Si las vigas son rígidas, la cantidad de deflexión depende más de la flexión en las columnas. En marcos que tienen libertad de desplazarse lateralmente, aumentar el grado de restricción rotacional en los extremos de columnas, al aumentar la rigidez de la viga, aumenta la resistencia de aquéllas. Sin embargo, si ceden las vigas, y por tanto no pueden restringir las columnas contra el desplazamiento lateral, se forma un mecanismo inestable.

El anterior breve repaso del comportamiento de columnas indica que las principales variables que afectan la resistencia de columnas esbeltas son como sigue:

1. La relación de la altura no soportada al peralte de la sección l_u/h, la relación de la excentricidad de extremo e/h, y la relación y signos de las excentricidades en los extremos. En la fig. 5.40 se ilustra el efecto de estas variables en columnas con extremos articulados.
2. El grado de restricción rotacional en el extremo. A mayor rigidez del sistema de vigas que llegan a la columna, mayor la resistencia de ésta.
3. El grado de restricción lateral. Una columna no arriostrada contra desplazamientos de extremo es apreciablemente más débil que otra arriostrada.
4. La cuantía del refuerzo de acero y la resistencia de los materiales. Ambos afectan la resistencia y rigidez a flexión de la sección de la columna.
5. La duración de la carga. El flujo plástico del concreto durante cargas sostenidas aumenta las deflexiones de la columna, y por tanto normalmente disminuye la resistencia de las columnas esbeltas.

5.5.2 Enfoque del diseño "exacto" para columnas esbeltas

El diseño de los miembros a compresión se puede basar en los momentos y fuerzas que se encuentran de un análisis de segundo orden de la estructura, tomando en cuenta las rigideces reales de los miembros, los efectos de las deflexiones en los momentos y fuerzas, y los efectos de la duración de la carga. Las secciones pueden estar proporcionadas para resistir estas acciones sin modificación, debido a que ya se tomó en cuenta el efecto de la esbeltez de la columna al determinar las acciones.

El principal factor a incluir en este análisis de segundo orden es el momento de $P\Delta$ debido a las deflexiones laterales de las columnas de la estructura. MacGregor[5.22] ha resumido los métodos para desarrollar esos análisis. Se puede idealizar la estructura como un marco plano con elementos lineales. Se deben utilizar relaciones realistas de momento-curvatura para proporcionar valores exactos para deflexiones y momentos adicionales, y además debe tomarse en cuenta el efecto de la carga axial en la rigidez rotacional de los miembros a compresión. Los momentos máximos determinados deben incluir el efecto de los desplazamientos y rotaciones en el marco.

El enfoque más racional es utilizar este tipo de análisis para determinar las acciones de columnas para el diseño de secciones, pero debido a su complejidad, el análisis depende de la disponibilidad de programas de computadora escritos adecuadamente.

5.5.3 Enfoque del diseño aproximado para columnas esbeltas: El método amplificador de momentos

Si se utiliza el análisis estructural convencional de primer orden, basado en rigideces relativas aproximadas y en ignorar el efecto de desplazamientos laterales de miembros, para determinar los momentos y fuerzas en un marco, se deben modificar las acciones así encontradas para tomar en cuenta los efectos de segundo orden. Entonces se proporcionan las secciones para que resistan las acciones modificadas. El procedimiento de diseño dado en ACI 318-71[5.3] para este propósito es el método amplificador de momentos, semejante al utilizado en las especificaciones del Instituto Norteamericano de Construcción del acero.[5.23]

El método

En el diagrama de interacción de la fig. 5.43 se ilustra el método amplificador de momentos. Considérese que la carga y el momento último a resistir, encontrados utilizando un análisis de primer orden, son P_u y $M_u = P_u e$. Entonces la carga y momento utilizados en el diseño de la sección son P_u y δM_u, en que δ es el factor de amplificación de momentos.

La siguiente relación[5.3] proporciona el factor δ de amplificación de momentos

$$\delta = \frac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{\varphi P_c}} \geqslant 1 \tag{5.44}$$

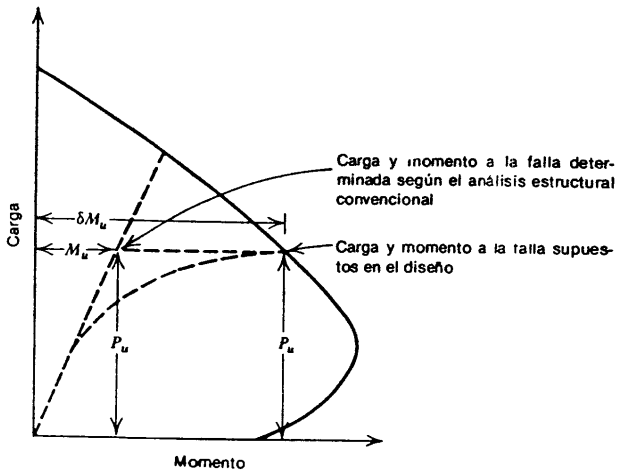


Figura 5.45. Longitud efectiva de columnas con desplazamiento lateral impedido.

en que C_m = factor del efecto de extremo que debe tomarse como $0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geqslant 0.4$ para columnas arriostradas contra desplazamiento lateral y sin cargas transversales entre soportes, o $C_m = 1.0$ para los demás casos

M_1 = el más pequeño de los momentos últimos en los extremos de la columna, encontrados en el análisis de primer orden, positivos si el miembro se flexiona en curvatura simple y negativo si en curvatura doble

M_2 = el mayor de los momentos últimos en los extremos de la columna, que se encuentra en el análisis de primer orden, y siempre positivo

P_u = carga última en la columna

φ = factor de reducción de capacidad

$$_c = \frac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2} \tag{5.45}$$

= carga de pandeo crítico elástico teórica de Euler

k = factor de longitud efectiva para las columnas, que varía entre 0.5 y 1.0 para marcos arriostrados y mayor que 1.0 para marcos no arriostrados

l_u = longitud no soportada de la columna

$$EI = \frac{E_c I_g}{2.5} \frac{1}{1 + \beta_d} \tag{5.46}$$

o

$$EI = \left(\frac{E_c I_g}{5} + E_s I_s\right) \frac{1}{1 + \beta_d} \tag{5.47}$$

= rigidez a flexión de la sección de la columna

E_c = módulo de elasticidad del concreto, dado por la ec. 2.1

I_g = momento de inercia de la sección bruta del concreto de la columna alrededor del eje centroidal, ignorando el refuerzo

E_s = módulo de elasticidad del acero

I_s = momento de inercia del refuerzo alrededor del eje centroidal de la sección transversal de la columna

β_d = factor de flujo plástico del concreto igual a la relación del momento máximo de diseñó por carga muerta al momento máximo de diseño por carga total, siempre positivo, y dentro del rango $0 \leqslant \beta_d \leqslant 1$. Hay una diversidad de casos en que esta definición de β_d falla (por ejemplo, excentricidad mínima, momentos de distintos signos etc.) y parecería que una definición más satisfactoria fuera tomar a β_d como la relación de la carga muerta de diseño máxima a la carga total de diseño máxima.

En las siguientes secciones se estudian brevemente las ecuaciones para el factor δ amplificador de momentos y la rigidez EI a flexión, y los métodos para calcular el factor de longitud efectiva k.

Los factores de amplificación de momentos y de efecto del extremo δ y C_m

En el intervalo elástico, la relación 5.48 proporciona una aproximación para el momento flexionante máximo en las columnas con momentos iguales en los extremos y flexionadas en curvatura simple

$$M_{máx} = \frac{M_o}{1 - (P/P_c)} \tag{5.48}$$

en que M_o es el momento máximo del análisis de primer orden ($M_o = Pe$ en la fig. 5.36), P_c es la carga crítica elástica para el pandeo en el plano del momento aplicado y P es la carga aplicada. En este caso, el momento máximo y la deflexión máxima de la columna ocurren a la mitad de la altura. La fórmula de la secante proporciona el valor exacto para M_{max} para este caso, que de acuerdo con los textos de resistencia de materiales[5.24] es

$$M_{máx} = M_o \sec\left(\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{P}{P_c}}\right) \tag{5.49}$$

En la tabla 5.1 se comparan las ecuaciones 5.48 y 5.49 para distintas relaciones de P/P_c. La ec. 5.48 aproximada da momentos máximos algo inferiores, pero la concordancia es mejor dentro del intervalo usual de valores bajos de P/P_c que está dentro de 11% para $P/P_c \leq 0.5$. Por tanto, se ha recomendado la ec. 5.48 aproximada simple para columnas flexionadas en curvatura simple por momentos iguales de los extremos.

Tabla 5.1 Comparación de valores $M_{máx}/M_o$

P/P_c	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.8	1.0
De la ecuación aproximada 5.48	1.11	1.25	1.43	1.67	2.00	2.50	5.00	∞
De la ecuación secante 5.49	1.14	1.31	1.53	1.83	2.25	2.88	6.05	∞

Si los momentos de los extremos son desiguales, la ec. 5.48 es demasiado conservadora, especialmente cuando los momentos de los extremos son de distinto signo. Para el caso de momentos desiguales de los extremos, se puede estimar el momento máximo de la columna sustituyendo M_o por un "momento uniforme equivalente" $C_m M_o$, que produce la misma resistencia de columna esbelta que la obtenida del patrón de momentos reales. Consecuentemente, la ec. 5.48 queda como

$$M_{máx} = \frac{C_m M_o}{1 - (P/P_c)} \tag{5.50}$$

La ecuación para C_m adoptada,[5.3] $0.6 + 0.4(M_1/M_2) \geq 0.4$, corresponde a la especificación del Instituto Norteamericano de Construcción con Acero[5.23] y se puede ver su exactitud comparada contra otras ecuaciones relevantes en la Guía del consejo de investigación de columnas.[5.25] La ecuación 5.44 para δ es la forma de diseño para $M_{máx}/M_o$ de la ec. 5.50.

La rigidez a flexión EI

En el cálculo de la carga del pandeo crítico de la columna P_c a usar en la ec. 5.44, se requiere la rigidez a flexión EI de la sección. El valor de EI utilizado debe tomar en cuenta los efectos de agrietamiento, flujo plástico y el carácter no lineal de la curva esfuerzo-deformación del concreto. Se pueden utilizar los valores de EI dados por las ecs. 5.46 y 5.47 cuando no se dispone de valores más exactos. Estas ecuaciones se obtuvieron a partir de consideraciones teóricas y de los resultados de pruebas desarrolladas por MacGregor y colaboradores[5.20], ellos representan límites inferiores para EI en secciones transversales prácticas. En consecuencia, estos valores de EI son conservadores para el cálculo de momentos adicionales. En la fig. 5.44 se comparan las ecs. 5.46 y 5.47 contra valores de EI deducidos teóricamente de diagramas de momento-curvatura para el caso de cargas a corto plazo. La ec. 5.46 más simple es razonable para columnas reforzadas ligeramente, aunque subestima considerablemente el efecto del refuerzo en columnas muy reforzadas. La ecuación 5.47 es más exacta pero requiere un conocimiento previo de la cuantía de acero. El flujo plástico debido a la carga sostenida reduce el valor de EI y se toma en cuenta aproximadamente en el término $(1 + \beta_d)$ en las ecs. 5.46 y 5.47.

La longitud efectiva de los miembros a compresión, kl_u

El factor k de longitud efectiva utilizado en el diseño debe tomar en cuenta el grado de restricción lateral y rotacional en los extremos de las columnas. Las figuras 5.45 y 5.46 muestran las longitudes efectivas para condiciones de extremos sin y con desplazamiento lateral.

La figura 5.47 ilustra los modos de pandeo para marcos arriostrados y no arriostrados. Las columnas en los marcos arriostrados tienen valores de k que varían entre 0.5 y 1.0. El valor de k siempre es mayor que la unidad

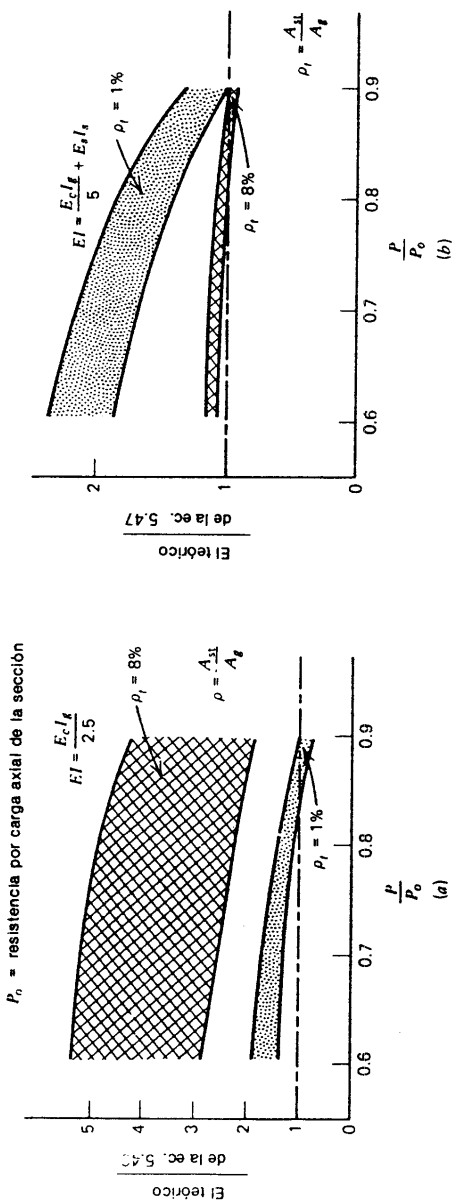


Figura 5.44. Comparación de ecuaciones para rigidez a flexión contra valores teóricos de los diagramas momento - curvatura.[5.20] (*a*) ecuación 5.46. (*b*) Ecuación 5.47.

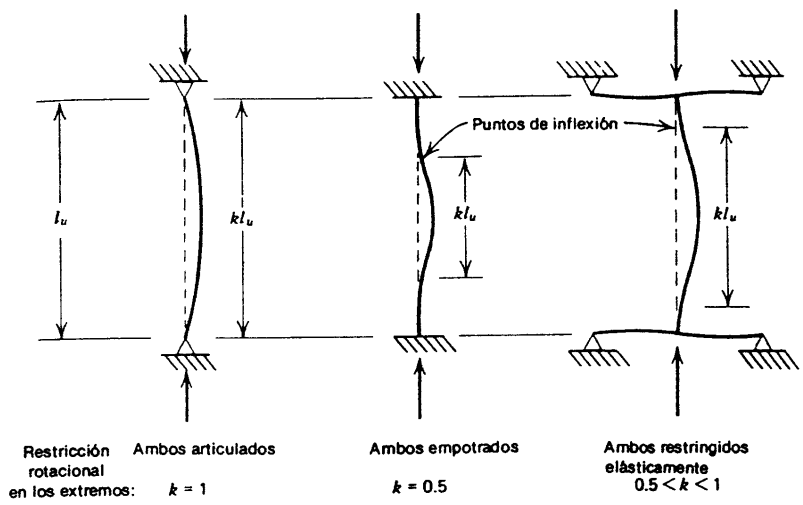


Figura 5.45. Longitud efectiva de columnas con desplazamiento lateral impedido.

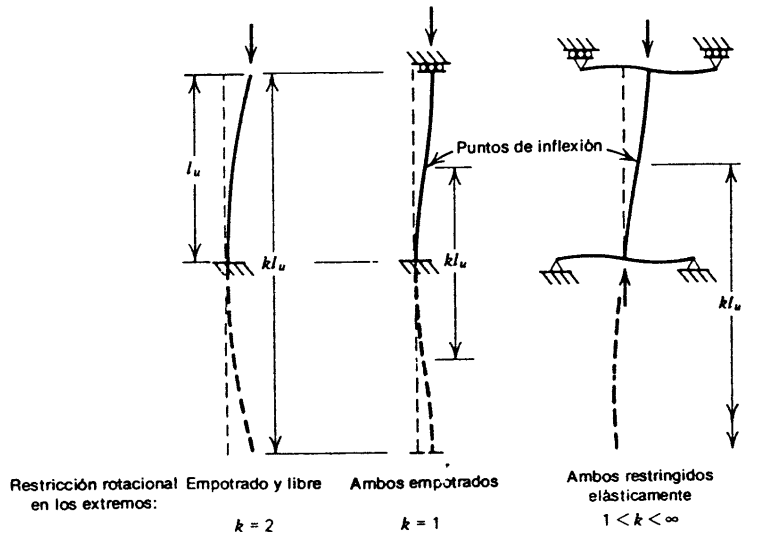


Figura 5.46. Longitud efectiva de columnas con desplazamiento lateral permitido.

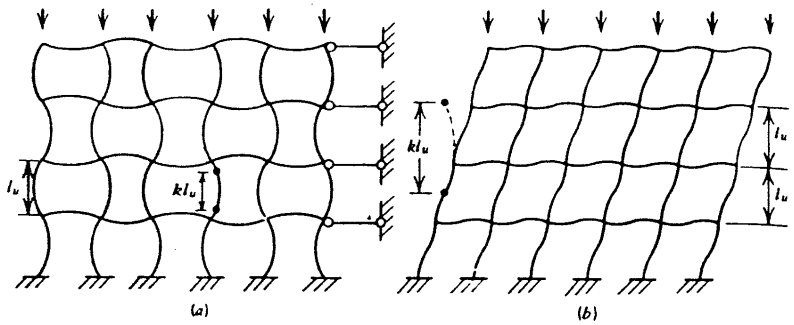


Figura 5.47. Modos de pandeo para marcos arriostrados y no arriostrados. (*a*) Arriostrado (*b*) No arriostrado.

de los marcos no arriostrados. Debido a que los comportamientos de los marcos arriostrados y no arriostrados son tan distintos, normalmente se dan los valores de k para los marcos dentro de estas dos categorías, de manera que el diseñador debe decidir si su marco está arriostrado o no. En la práctica, rara vez ocurren marcos totalmente arriostrados o no arriostrados en absoluto. Los comentarios [5.26] sobre el ACI 318-71 recomiendan que se consideren las columnas como arriostradas, si el piso correspondiente tiene muros de cortante u otros tipos de arriostramiento lateral, con rigidez total en ese piso de al menos seis veces la suma de las rigideces de todas las columnas que resisten los movimientos laterales en dicho piso. Consecuentemente, el diseñador debe aplicar su juicio.

El valor de k para marcos arriostrados y no arriostrados depende de la restricción rotacional en las juntas expresadas por el parámetro ψ, en que

$$\psi = \frac{\Sigma(EI_{col}/l_u)}{\Sigma(EI_b/l_n)} \tag{5.51}$$

en que EI_{col} = rigidez a flexión de la sección de la columna, EI_b = rigidez a flexión de la sección de la viga, l_n = claro libre de la viga, l_u = longitud no apoyada de la columna y Σ indica la suma para todos los miembros conectados rígidamente en la junta y que están en el plano en que se considera el pandeo de la columna. Se pueden calcular los valores de k si se conocen los de ψ en cada junta [5.25] y se pueden obtener utilizando los nomogramas de Jackson y Moreland (fig. 5.48). Estos nomogramas permiten la determinación gráfica de k para una columna de sección transversal constante en un marco arriostrado o no arriostrado de crujías múltiples. Los subíndices A y B se refieren a las juntas en los dos extremos de la columna. Al determinar ψ_A y ψ_B, los valores de EI utilizados deben tomar en cuenta el agrietamiento del concreto y la cuantía de acero. El efecto del método de calcular el valor de EI en la exactitud de la resistencia

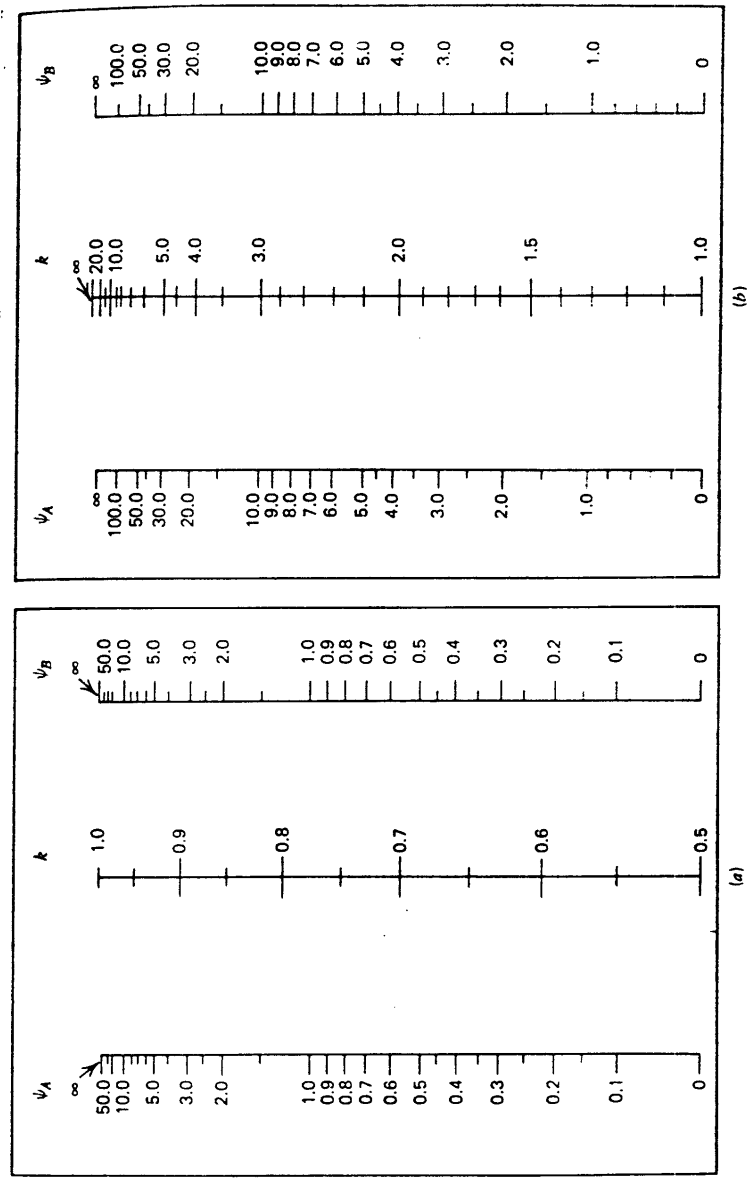


Figura 5.48. Nomogramas de Jackson y Morland para los factores de longitud efectiva de columnas. (*a*) Marcos arriostrados. (*b*) Marcos no arriostrados.

calculada de la columna esbelta ha sido estudiado por Breen y asociados.[5.27] Se llegó a la conclusión de que para obtener una exactitud compatible con la exactitud global del método amplificador de momentos, los cálculos de ψ deben estar basados en una EI de columna calculada de $0.2E_c I_u + E_s I_s$ y una EI de viga calculada para la sección transformada agrietada. Se puede utilizar $E_c I_g$ para las columnas y $0.5E_c I_g$ para las vigas en el diseño preliminar, en que I_g es el momento de inercia de la sección bruta de concreto alrededor del eje centroidal, ignorando el refuerzo. En el capítulo 10 se estudia con mayor detalle el cálculo del momento de inercia de secciones de concreto.

Como alternativa a los nomogramas de Jackson y Moreland, Cranston[5.28] ha propuesto que se considere que la longitud efectiva de las columnas arriostradas sea la más pequeña de las dos siguientes expresiones:

$$k = 0.7 + 0.05(\psi_A + \psi_B) \leqslant 1.0 \tag{5.52}$$

$$k = 0.85 + 0.05\psi_{min} \leqslant 1.0 \tag{5.53}$$

Furlong[5.29] ha propuesto que se considere que la longitud efectiva de las columnas no arriostradas sea

$$\text{para } \psi_{av} < 2 \qquad k = \frac{20 - \psi_{av}}{20}\sqrt{1 + \psi_{av}} \tag{5.54}$$

$$\text{para } \psi_{av} \geqslant 2 \qquad k = 0.9\sqrt{1 + \psi_{av}} \tag{5.55}$$

en que ψ_{av} es el promedio de los valores de ψ en los dos extremos de la columna.

Las columnas en marcos arriostrados se pueden diseñar con seguridad para valores de k tomados como la unidad. En marcos no arriostrados, siempre se debe calcular el valor de k, que debe ser mayor que 1.2.

Uso de las ecuaciones amplificadoras del momento

MacGregor y asociados[5.20] han verificado las cargas últimas calculadas usando las ecuaciones del método amplificador de momentos del ACI 318-71,[5.3] ecs. 5.44 a 5.47, contra las cargas últimas medidas de 101 columnas estudiadas en años recientes. Las columnas de prueba tenían diversas excentricidades de extremos y condiciones de restricción. La figura 5.49 es un histograma que compara las cargas medidas y calculadas para las columnas. Es evidente que el método de diseño es conservador en la mayoría de los casos.

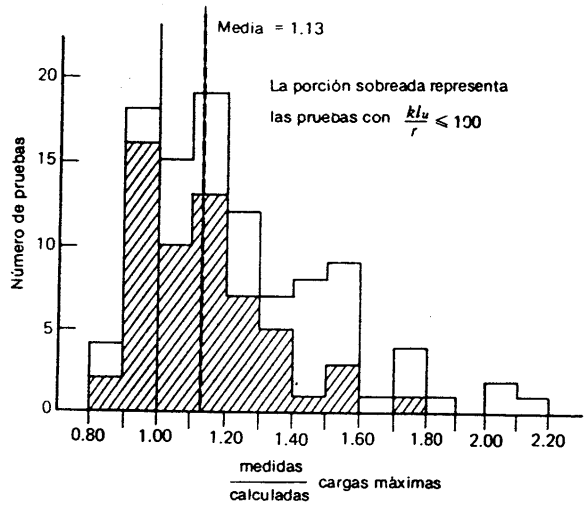


Figura 5.49. Comparación de la carga última de columna calculada por el método de amplificación de momentos del ACI 318-71 contra resultados de pruebas[5.20].

El ACI 318-71[5.3] requiere que se considere a las columnas como esbeltas en marcos arriostrados cuando $kl_u/r \geqslant 34 - 12M_1/M_2$, o en marcos no arriostrados cuando $kl_u/r \geqslant 22$, en que r es el radio de giro de la sección. Para columnas con $kl_u/r > 100$, se debe hacer un análisis del tipo descrito en la sección 5.5.2. Para secciones rectangulares, se puede considerar $r = 0.3$ de la dimensión de la sección en la dirección de pandeo posible.

En marcos no arriostrados, se debe calcular el valor de δ de la ec. 5.44 para todo el piso, suponiendo que todas las columnas están cargadas, tomando P_u y P_c como la sumatoria, ΣP_u y ΣP_c, para todas las columnas de esa planta. Al diseñar cada columna individual de esa planta, se debe tomar δ como el mayor de los valores mencionados antes calculados para toda la planta o el valor calculado para la columna individual, suponiendo que sus extremos están arriostrados. En las columnas que no están arriostradas, se deben diseñar las vigas para los momentos amplificados de los extremos de las columnas en las juntas. Cuando las columnas están sujetas a flexión biaxial, se debe amplificar el momento alrededor de cada eje, usando el valor de δ calculado para cada eje. En los manuales[5.9, 5.10] del ACI se dispone de auxiliares de diseño para el método amplificador de momento. Aunque el manual[5.9] de diseño de columnas se basa en el código ACI de 1963 que utilizó un enfoque de factor de reducción para el diseño de columnas esbeltas, el manual también incluye auxiliares de diseño para el método amplificador de momentos. El manual[5.10] de diseño más reciente contiene algunos ejemplos de aplicaciones del método amplificador de momentos. Furlong[5.29] también proporciona algunos auxiliares útiles de diseño.

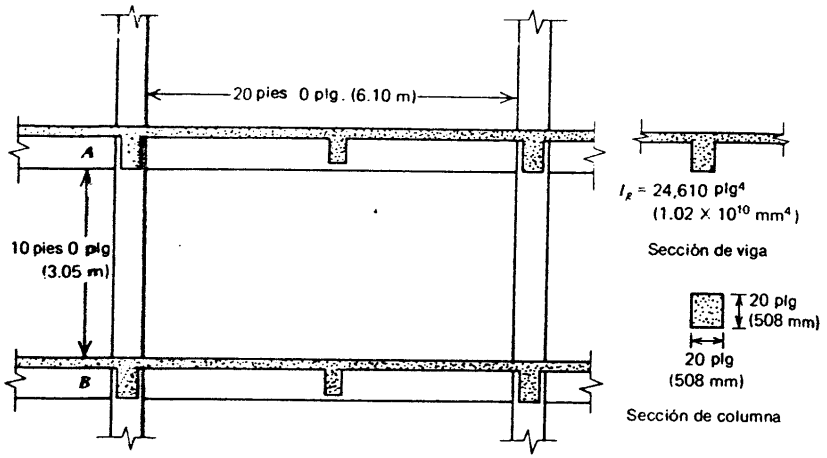


Figura 5.50. Marco del ejemplo 5.9.

Ejemplo: 5.9

En la fig. 5.50 se muestra una crujía de un marco de concreto reforzado de plantas múltiples, no arriostrado. Las columnas de los entrepisos superior e inferior tienen dimensiones semejantes. Las acciones en la columna *AB*, en los extremos de la longitud no apoyada, en la carga última calculada por el análisis estructural de primer orden son $M_u = 289$ kip · pie (392 kN · m) y $P_u = 200$ kips (890 kN). El concreto tiene $f'_c = 4000$ lb /plg² (27.6 N/mm²) y $E_c = 3.6 \times 10^6$ (24,800 N/mm²). El acero tiene $f_y = 60{,}000$ lb /plg² (414 N/mm²) y $E_s = 29 \times 10^6$ lb /plg² (200,000 N/mm²). Se puede considerar que la relación del momento de carga muerta de diseño máximo al momento de carga total de diseño máximo β_d es 0.2. Determinar el área de acero longitudinal requerido para la columna, utilizando un factor de reducción de capacidad φ de 0.7.

Solución

Longitud efectiva de la columna

Para la columna $I_u = \frac{1}{12} bh^3 = \frac{1}{12} \times 20 \times 20^3 = 13{,}330$ plg⁴ calcular ψ usando $0.5E_c I_u$ para las vigas y $E_c I_u$ para las columnas. De la ec. 5.51 se tiene

$$\psi_A = \psi_B = \frac{\Sigma(EI_{col}/l_u)}{\Sigma(EI_b/l_n)}$$

$$= \frac{2 \times 13{,}330}{10 \times 12} \times \frac{20 \times 12}{2 \times 0.5 \times 24{,}610} = 2.17$$

$\therefore$ de la ec. 5.55 $\quad k = 0.9\sqrt{1 + \psi_m} = 0.9\sqrt{1 + 2.17} = 1.59$

$\therefore \quad kl_u = 1.59 \times 10 = 15.9$ ft.

Comprobación de columna esbelta

$$r = 0.3 \times \frac{20}{12} = 0.5 \text{ ft}$$

$$\therefore \quad \frac{kl_u}{r} = \frac{15.9}{0.5} = 31.8 > 22$$

Consecuentemente, la columna es esbelta.

Carga crítica de la columna

De la ec. 5.46,

$$EI = \frac{E_c I_g}{2.5(1 + \beta_d)}$$

$$= \frac{3.6 \times 10^6 \times 13{,}330}{2.5 \times 1.2} = 1.60 \times 10^{10} \text{ lb} \cdot \text{plg}^2$$

$\therefore$ de la Ec. 5.45 $\quad P_c = \dfrac{\pi^2 EI}{(kl_u)^2}$

$$= \frac{\pi^2 \times 1.60 \times 10^{10}}{(15.9 \times 12)^2} \text{ lb} = 4333 \text{ kips}$$

Factor de amplificación de momento

De la ec. 5.44

$$\delta = \frac{C_m}{1 - P_u/\varphi P_c}$$

en que $C_m = 1.0$ en marcos no arriostrados. Se supone que $\Sigma P_u/\Sigma P_c$ para el entrepiso es aproximadamente igual a P_u/P_c para esta columna específica,

$$\therefore \quad \delta = \frac{1.0}{1 - 200/(0.7 \times 4333)} = 1.07$$

Acero longitudinal de la columna

Las acciones de diseño para la columna son $P_u = 200$ kips, y $M_u = 289 \times 1.07 = 309$ kip · pie
Para la columna, sea $g = 0.7$ y diséñese el acero utilizando la fig. 5.22, que supone $\varphi = 0.7$.

$$\frac{P_u}{f'_c bh} = \frac{200{,}000}{4000 \times 20 \times 20} = 0.125$$

$$\frac{P_u e}{f'_c bh^2} = \frac{309{,}000 \times 12}{4000 \times 20 \times 20^2} = 0.116$$

De la fig. 5.22, se tiene $\rho_t m = 0.42$, en que $m = f_y/0.85f'_c$.

$$\therefore \quad A_{st} = 0.42 \times \frac{0.85 \times 4000}{60{,}000} \times 20^2$$

$$= 9.52 \text{ plg}^2 \ (6140 \text{ mm}^2)$$

El acero está distribuido uniformemente alrededor del parímetro de la columna. Nota: Ahora puede volver a desarrollarse el diseño con mayor exactitud usando valores más exactos de *EI*, incluyendo las áreas estimadas del acero, para calcular ψ, P_c, $\Sigma P_u/\Sigma P_c$ y δ, para obtener con ello un valor más exacto de A_{st}. Sin embargo, en este caso no se justificaría el procedimiento, ya que la amplificación de momentos apenas fue de 7%, y todo cambio en este valor produciría un cambio despreciable en el área del acero requerido.

5.6 BIBLIOGRAFIA

5.1 F. E. Richart y R. L. Brown, "An Investigation of Reinforced Concrete Columns," University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin No. 267, junio 1934, pág. 91.

5.2 E. Hognestad, "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members," University of Illinois Engineering Experimental Station, Bulletin No. 399, Junio 1951, pág. 128.

5.3 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.

5.4 W. W. L. Chan, "The Ultimate Strength and Deformation of Plastic Hinges in Reinforced Concrete Frameworks," *Magazine of Concrete Research,* Vol. 7, No. 21, noviembre 1955, págs. 121-132.

5.5 H. E. H. Roy y M. A. Sozen, "Ductility of Concrete," *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete,* ASCE-ACI, Miami, noviembre 1964, págs. 213-224. Discussion on págs. 224-235.

5.6 C. S. Whitney, "Plastic Theory of Reinforced Concrete Design," *Proceedings of the American Society of Civil Engineers,* diciembre 1940; *Transactions ASCE,* Vol. 107, 1942, págs. 251-326.

5.7 ACI Committee 439. "Uses and Limitations of High Strength Steel Reinforcement $f_y \geq 60$ ksi," *Journal ACI,* Vol. 70, No. 2, febrero 1973, págs. 77-104.

5.8 C. S. Whitney and E. Cohen, "Guide for Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete," *Journal ACI,* Vol. 28, No. 5, noviembre 1956, págs. 455-490.

5.9 ACI Committee 340, *Ultimate Strength Design Handbook,* Vol. 2, ACI Special Publication No. 17A, American Concrete Institute, Detroit, 1970, pág. 226

5.10 ACI Commitee 340, *Design Handbook in Accordance with Strength Design Method of ACI 318-71,* Vol. 1, ACI Special Publication SP-17(73), American Concrete Institute, Detroit, 1973, pág. 432

5.11 R. W. Furlong, "Ultimate Strength of Square Columns Under Biaxially Eccentric Loads," *Journal ACI,* Vol. 57, No. 9, marzo 1961, págs. 1129-1140.

5.12 F. Moran, "Design of Reinforced Concrete Sections Under Normal Loads and Stresses in the Ultimate Limit State," Bulletin d'Information No. 83, Comité Europén du Béton, Paris, abril 1972, pág. 134

5.13 B. Bresler, "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns Under Axial Load and Biaxial Bending," *Journal ACI,* Vol. 57, noviembre 1960, págs. 481-490.

5.14 A. L. Parme, J. M. Nieves, and A. Gouwens, "Capacity of Reinforced Rectangular Columns Subject to Biaxial Bending," *Journal ACI,* Vol. 63, No. 9, septiembre 1966, 911-923.

5.15 F. N. Pannell, "Failure Surfaces for Members in Compression and Biaxial Bending," *Journal ACI,* Vol. 60, No. 1, enero 1963, págs. 129-140.

5.16 J. L. Meek, "Ultimate Strength of Columns with Biaxially Eccentric Loads," *Journal ACI,* Vol. 60, No. 8, agosto 1963, págs. 1053-1064.

5.17 BSI, "Code of Practice for the Structural Use of Concrete, CP110: Part 1: 1972," British Standards Institution, Londres, 1972, pág. 154.

5.18 D. C. Weber, "Ultimate Strength Design Charts for Columns with Biaxial Bending," *Journal ACI,* Vol. 63, No. 11, noviembre 1966, págs. 1205-1230.

5.19 D. G. Row y T. Paulay, "Biaxial Flexure y Axial Load Interaction in Short Rectangular Reinforced Concrete Columns," *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering,* Vol. 6, No. 2, junio 1973, págs. 110-121.

5.20 J. G. MacGregor, J. E. Breen, y E. O. Pfrang, "Design of Slender Columns," *Journal ACI,* Vol. 67, No. 1, enero 1970, pág. 6-28.

5.21 R. W. Furlong y P. M. Ferguson, "Tests on Frames with Columns in Single Curvature," *Symposium on Reinforced Concrete Columns,* SP-13. American Concrete Institute, Detroit, 1966, pág. 55-74.

5.22 J. G. MacGregor, "Stability of Reinforced Concrete Building Frames," State of Art Paper No. 1, Technical Committee 23, *Proceedings of the International Conference on Planning and Design of Tall Buildings,* Vol. 3, American Society of Civil Engineers, Nueva York, 1973, págs. 19-35.

5.23 "Specification for the Design, Fabrication and Erection of Structural Steel for Buildings," American Institute of Steel Construction, Nueva York, 1963, pág. 97

5.24 E. P. Popov, *Introduction to the Mechanics of Solids,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1968, pág. 571

5.25 B. C. Johnston (Ed.), *The Column Research Council Guide to Design Criteria for Metal Compression Members,* 2nd ed., John Wiley & Sons, Nueva York, 1966, pág. 217.
5.26 ACI Committee 318, "Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 96.
5.27 J. E. Breen, J. G. MacGregor, and E. O. Pfrang, "Determination of Effective Length Factors for Slender Concrete Columns," *Journal ACI,* Vol. 69, No. 11 noviembre 1972, págs. 669-672.
5.28 W. B. Cranston, "Analysis and Design of Reinforced Concrete Columns," Research Report 20, Paper 41.020, Cement and Concrete Association, Londres, 1972, pág. 54.
5.29 R. W. Furlong, "Column Slenderness and Chartes for Design," *Journal ACI,* Vol. 68, No. 1, enero 1971, pág. 9-17.

6

Deformación máxima y ductilidad de miembros sometidos a flexión

6.1 INTRODUCCION

En la figura 6.1 aparecen algunos tipos del comportamiento de la curva carga - deflexión de miembros de concreto reforzado, hasta y más allá, de la carga última y se comparan el comportamiento frágil y el dúctil. La consideración de las características de la curva carga - deformación de los miembros es necesaria por las siguientes razones:

1. No debe ocurrir la falla frágil de los miembros. En el caso extremo de que una estructura se cargue hasta la falla, debe poder desarrollar grandes deflexiones bajo cargas cercanas a la máxima, lo que puede salvar vidas al advertir la falla e impedir el desplome total.
2. Las distribuciones posibles de momento flexionante, fuerza cortante y carga axial, que podrían utilizarse en el diseño de estructuras estáticamente indeterminadas, dependen de la ductilidad de los miembros en las secciones críticas. Se puede lograr una distribución de momentos flexionantes que difiera de la obtenida de un análisis estructural elástico lineal, si puede ocurrir una redistribución de momentos. Es decir que, conforme se aproximan a la carga última, algunas secciones pueden alcanzar sus momentos resistentes últimos antes que otras; pero si allí puede ocurrir la rotación plástica, mientras se mantiene el momento último, se puede transmitir carga adicional conforme los momentos en otras partes se elevan hasta su valor último. La carga última de la estructura se alcanza cuando, después de la formación de suficientes articulaciones plásticas, se desarrolla un mecanismo de falla. La mayoría de los códigos dan margen a cierta redistribución de momentos en el diseño, según la ductilidad de las secciones. Utilizar una redistribución de momentos puede dar ventajas debido a una reducción en la congestión del refuerzo en los apoyos de los miembros continuos, y a que permite reducir los picos de los momentos flexionantes en las envolventes de los momentos flexionantes.

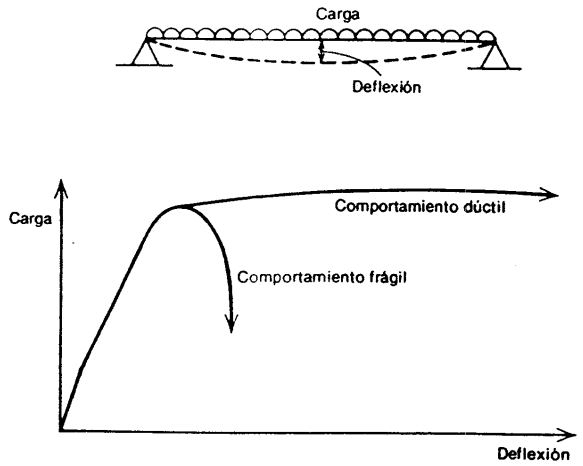


Figura 6.1 Comportamiento de la curva carga - deflexión de un miembro a flexión.

3. En las regiones expuestas a sismos, una consideración muy importante en el diseño es la ductilidad de la estructura cuando se la sujeta a cargas de tipo sísmico. Ello se debe a que la filosofía actual del diseño sísmico se apoya en la absorción y disipación de energía, mediante la deformación inelástica para la supervivencia en los sismos intensos. En consecuencia, las estructuras que no se puedan comportar en forma dúctil se deben diseñar para fuerzas sísmicas mucho mayores si se desea evitar el desplome.

En este capítulo se consideran las características de carga y deformación de los miembros a flexión en la cedencia y en el momento último que dependen principalmente de la relación momento - curvatura de las secciones, ya que la mayoría de las deformaciones de los miembros de proporciones normales se deben a las deformaciones asociadas con la flexión. En los capítulos 7 y 8 se estudian deformaciones adicionales debidas a cortante o torsión, cuando estas son importantes.

6.2 RELACIONES MOMENTO - CURVATURA

6.2.1 Curvatura de un miembro

La figura 6.2 muestra un elemento inicialmente recto de un miembro de concreto reforzado con momentos de extremos y fuerzas axiales iguales. El radio de curvatura R se mide hasta el eje neutro. El radio de curvatura R, la profundidad del eje neutro kd, la deformación del concreto en la fibra

extrema a compresión ε_c, y la deformación del acero a tensión ε_s, varían a lo largo del miembro debido a que entre las grietas el concreto toma cierta tensión. Considerando solamente un pequeño elemento de longitud dx del miembro y utilizando la notación de la fig. 6.2, las siguientes relaciones proporcionan la rotación entre los extremos del elemento

$$\frac{dx}{R} = \frac{\varepsilon_c dx}{kd} = \frac{\varepsilon_s dx}{d(1-k)}$$

$$\therefore \quad \frac{1}{R} = \frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{d(1-k)}$$

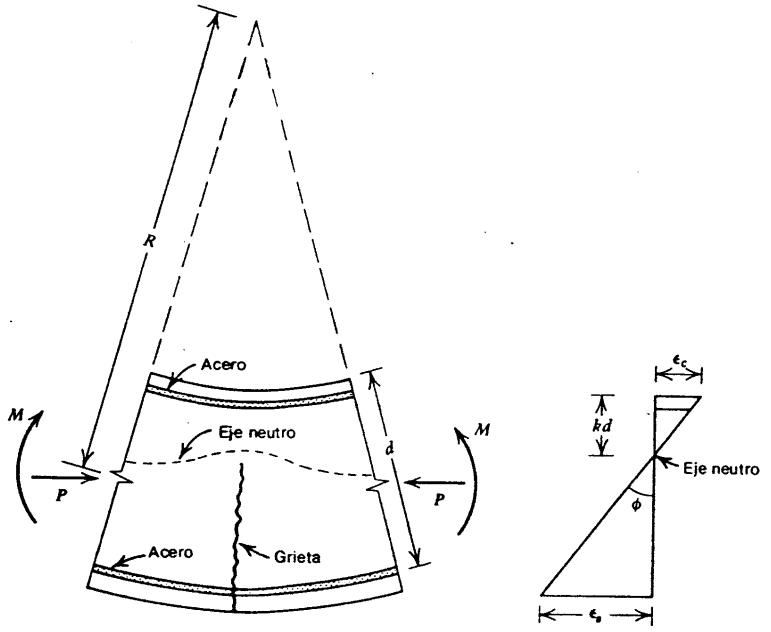


Figura 6.2 Deformación de un miembro a flexión.

Entonces $1/R$ es la curvatura en el elemento (la rotación por longitud unitaria del miembro) y está dada por el símbolo φ. Así se tiene

$$\varphi = \frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_s}{d(1-k)} = \frac{\varepsilon_c + \varepsilon_s}{d} \qquad (6.1)$$

Es evidente que la curvatura φ es el gradiente del perfil de deformaciones en el elemento, como se ve en la fig. 6.2.

La curvatura varía físicamente a lo largo del miembro debido a la fluctuación de la profundidad del eje neutro y las deformaciones entre las grietas. Si la longitud del elemento es pequeña y abarca una grieta, la curvatura está dada por la ec. 6.1, con ε_c y ε_s como las deformaciones en la sección agrietada.

Si se miden las deformaciones en la sección crítica de una viga de concreto reforzado en una corta longitud calibrada conforme se aumenta el momento flexionante hasta la falla, de la ec. 6.1 se puede calcular la curvatura, lo que permite obtener la relación momento - curvatura para la sección. En la fig. 6.3 se muestran dos de esas curvas obtenidas de mediciones en vigas simplemente reforzadas que fallan en tensión y compresión. Ambas curvas son lineales en las etapas iniciales, y la ecuación clásica de la elástica

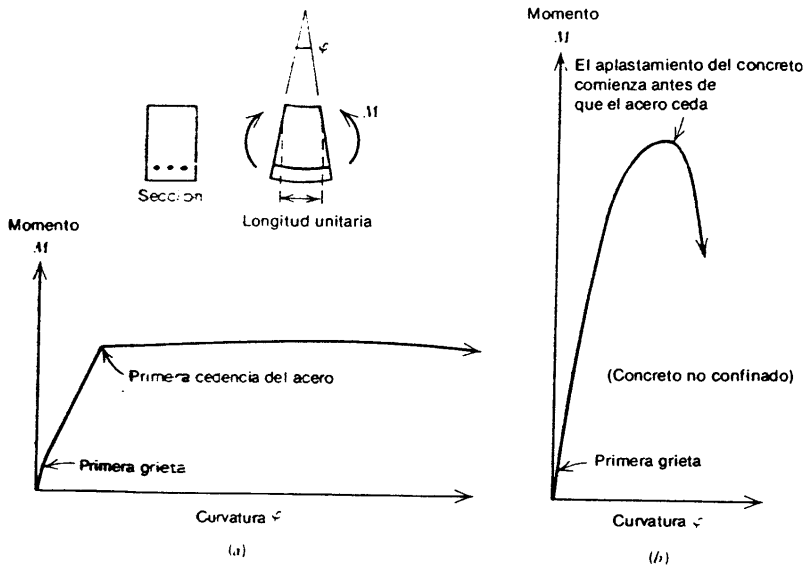


Figura 6.3 Relaciones momento - curvatura para secciones de viga simplemente reforzadas. (*a*) Sección que falla a tensión, $\rho < \rho_b$. (*b*) Sección que falla a compresión, $\rho > \rho_b$.

$$EI = MR = \frac{M}{\varphi} \tag{6.2}$$

proporciona la relación entre el momento M y la curvatura φ en que EI es la rigidez a flexión de la sección. Al aumentar el momento, el agrietamiento del concreto reduce la rigidez a flexión de las secciones, en que la reducción de rigidez es mayor para la sección reforzada ligeramente que para la sección reforzada más fuertemente. El comportamiento de la sección después del agrietamiento depende principalmente de la cuantía de acero. Las secciones reforzadas ligeramente (fig. 6.3a) producen una curva prácticamente lineal de M-φ hasta el punto de cedencia del acero,. Cuando éste cede, ocurre un aumento grande en la curvatura a momento flexionante casi constante, y el momento se eleva lentamente hasta un máximo debido a un aumento en el brazo de palanca interno, y luego decrece. Por otra parte, en las secciones fuertemente reforzadas (fig. 6.3*b*), la curva M-φ deja de ser lineal cuando el concreto entra a la parte inelástica de la relación de esfuerzo - deformación (véase la fig. 2.1), y la falla puede ser bastante frágil, a menos de que se confine el concreto mediante estribos cerrados con separación pequeña entre ellos. Si no se confina el concreto, éste se aplasta a una curvatura relativamente pequeña antes de que ceda el acero, ocasionando una disminución inmediata en la capacidad de tomar momentos. Para asegurar el comportamiento dúctil en la práctica, siempre se utilizan en las vigas cuantías de acero inferiores al valor de la cuantía balanceada (ec. 4.14).

La relación momento - curvatura para una viga, en que cede el acero a tensión se puede idealizar por la relación trilineal presentada en la fig. 6.4*a*. La primera etapa es al agrietamiento, la segunda a la cedencia del acero a tensión y la tercera al límite de la deformación útil en el concreto. En muchos casos es suficientemente exacto idealizar la curva todavía más hasta cualquiera de las dos relaciones bilineales mostradas en la fig. 6.4*b* y 6.4*c*, que proporcionan grados sucesivos de aproximación. La fig. 6.4*a* es una curva virgen idealizada que representa el comportamiento a la primera carga. Una vez que se desarrollan las grietas, como sucede en la mayoría de las vigas bajo cargas de servicio, la relación M-φ es casi lineal desde la carga cero hasta el inicio o arranque de la cedencia. En consecuencia, las curvas bilineales de las figs. 6.4*b* y 6.4*c* son buenas aproximaciones para vigas inicialmente agrietadas.

6.2.2 Determinación teórica de la relación momento - curvatura

Es posible deducir curvas teóricas momento - curvatura para secciones de concreto reforzado con flexión y carga axial, en base a suposiciones semejantes a las utilizadas para la determinación de la resistencia a flexión. Se supone que las secciones planas antes de la flexión permanecen planas después de la flexión y que se conocen las curvas esfuerzo - deformación para el concreto y el acero. Las curvaturas asociadas con un rango de momentos flexionantes y cargas axiales pueden determinarse utilizando estas suposiciones y a partir de los requerimientos de compatibilidad de deformación y equilibrio de las fuerzas.

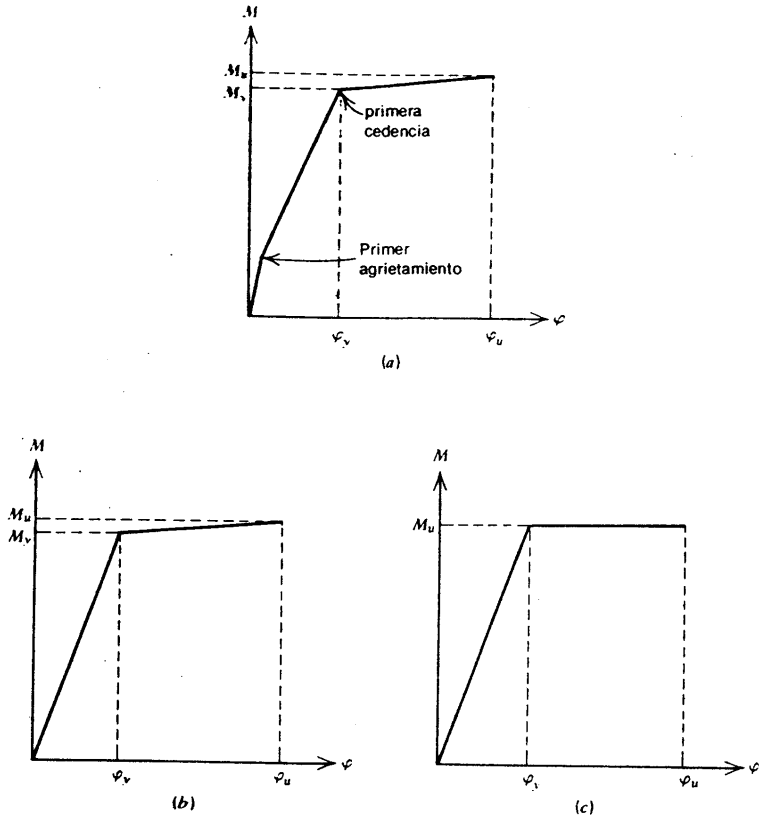


Figura 6.4 Curvas idealizadas momento - curvatura para una sección simplemente reforzada que falla a tensión.

Las figs. 6.5*a* y 6.5*b* muestran curvas típicas esfuerzo - deformación para el acero y concreto, en que f_y = resistencia de cedencia del acero y f''_c = resistencia del concreto en un miembro. El esfuerzo f''_c puede ser inferior a la resistencia de cilindro f'_c ($f''_c/f'_c = k_3$ en la fig. 3.3*a* y la tabla 3.1). La fig. 6.5*c* muestra una sección de concreto reforzado con carga axial y flexión. Para determinada deformación del concreto en la fibra extrema de compresión ε_{cm} y una profundidad kd del eje neutro, se pueden determinar las deformaciones del acero $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \varepsilon_{s3}, \ldots$, por triángulos semejantes del diagrama de deformaciones. Por ejemplo, para la varilla i a la profundidad d_i

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_{cm} \frac{kd - d_i}{kd} \tag{6.3}$$

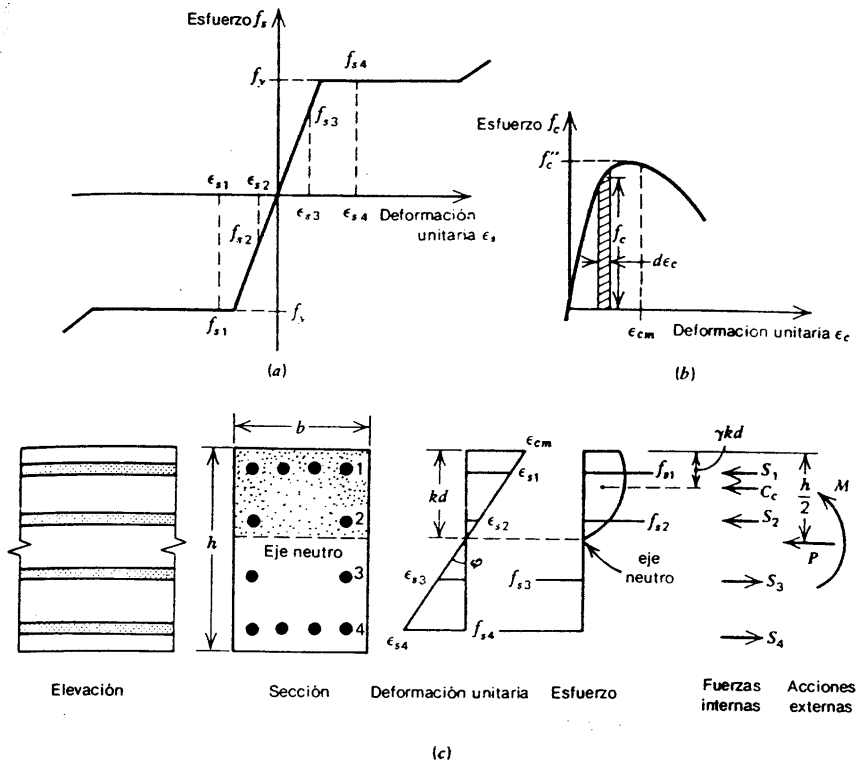


Figura 6.5 Determinación teórica momento - curvatura. (*a*) Acero en tensión y compresión. (*b*) Concreto en compresión. (*c*) Sección con deformación, esfuerzo y distribución de fuerzas.

Ahora se pueden encontrar los esfuerzos $f_{s1}, f_{s2}, f_{s3}, \ldots$, correspondientes a las deformaciones $\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \varepsilon_{s3}, \ldots$, a partir de la curva esfuerzo - deformación para el acero. En seguida se pueden encontrar las fuerzas del acero $S_1, S_2, S_3, \ldots$, a partir de los esfuerzos del acero y las áreas del mismo. Por ejemplo, para la varilla i, la ecuación de la fuerza es

$$S_i = f_{si} A_{si} \tag{6.4}$$

Se puede encontrar la distribución del esfuerzo del concreto en la parte comprimida de la sección de la fig. 6.5*c* a partir del diagrama de deformaciones y la curva esfuerzo - deformación para el concreto. Para cualquier deformación dada del concreto ε_{cm} en la fibra extrema a compresión, se puede definir la fuerza de compresión del concreto C_c y su posición en términos de los parámetros α y γ, en que

$$C_c = \alpha f''_c bkd \tag{6.5}$$

actúa a la distancia γkd de la fibra extrema a compresión. Se puede determinar el factor α del esfuerzo medio y el factor γ del centroide para cualquier deformación ε_{cm} en la fibra extrema a compresión para secciones rectangulares a partir de la relación esfuerzo - deformación como sigue:

área bajo la curva esfuerzo - deformación (véase la fig. 6.5*b*) $= \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c d\varepsilon_c$

$= \alpha f''_c \varepsilon_{cm}$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c}{f''_c \varepsilon_{cm}} \tag{6.6}$$

el primer momento alrededor del origen del área bajo la curva esfuerzo - deformación

$$= \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \varepsilon_c \, d\varepsilon_c = (1 - \gamma)\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c$$

$$\therefore \quad \gamma = 1 - \frac{\int_0^{\varepsilon_{cm}} \varepsilon_c f_c \, d\varepsilon_c}{\varepsilon_{cm} \int_0^{\varepsilon_{cm}} f_c \, d\varepsilon_c} \tag{6.7}$$

En consecuencia, si se puede escribir el esfuerzo f_c en el concreto en términos de la deformación ε_c (es decir, si se conoce la curva esfuerzo - deformación; véase la Sección 2.1), usando las ecs. 6.5 a 6.7 se puede determinar la fuerza del concreto y su línea de acción.

Se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio de fuerzas como

$$P = \alpha f''_c bkd + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si} \tag{6.8}$$

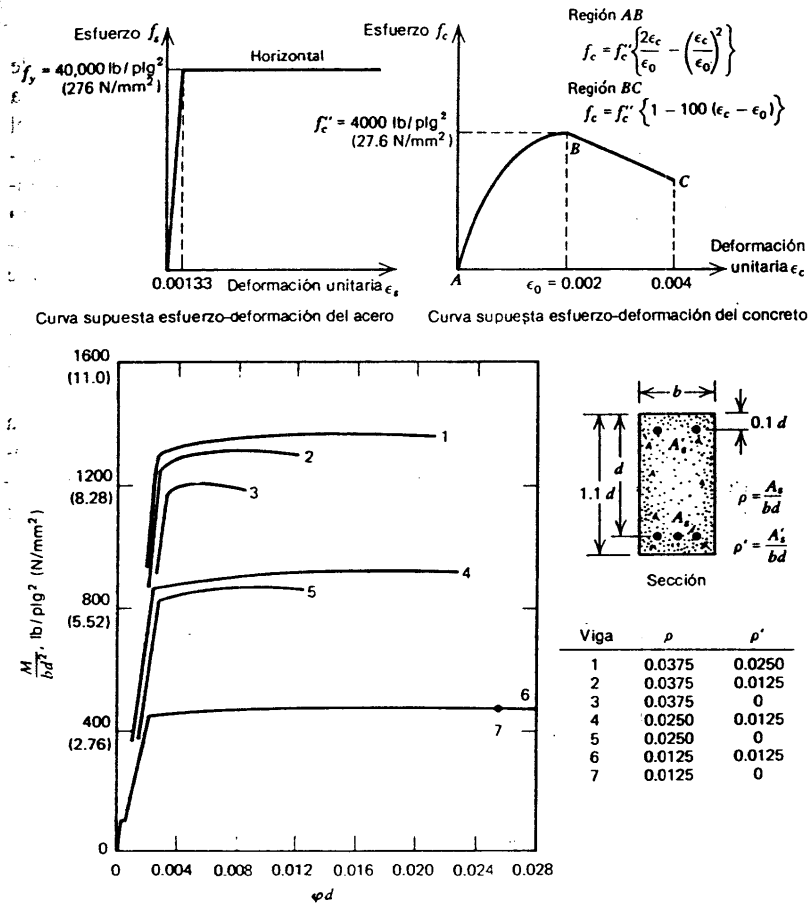
$$M = \alpha f''_c bkd\left(\frac{h}{2} - \gamma kd\right) + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si}\left(\frac{h}{2} - d_i\right) \tag{6.9}$$

La curvatura está dada, por similitud con la ec. 6.1 como

$$\varphi = \frac{\varepsilon_{cm}}{kd} \tag{6.10}$$

Se puede determinar la relación teórica momento - curvatura para un nivel dado de carga axial, incrementando la deformación del concreto en la fibra ε_{cm} extrema a compresión. Para cada valor de ε_{cm} se encuentra la profundidad kd del eje neutro que satisface el equilibrio de las fuerzas ajustando kd hasta que las fuerzas internas calculadas utilizando las ecs. 6.3 a 6.6 satisfagan la ec. 6.8. Nótese que en el caso de flexión solamente, $P = 0$. Entonces se utilizan las fuerzas internas y la profundidad del eje neutro encontrados de esa manera para determinar el momento M y curvatura φ a partir de las ecs. 6.7, 6.9 y 6.10 que correspondan a ese valor de ε_{cm}. Desarrollando el cálculo para una diversidad de valores de ε_{cm} se puede graficar la curva momento - curvatura. El cálculo es extenso y de ser necesario se realiza mejor utilizando una computadora digital.

La fig. 6.6 da algunas relaciones teóricas momento - curvatura que se obtuvieron para secciones rectangulares de vigas de concreto utilizando el método recién descrito. En la misma se muestran las curvas supuestas esfuerzo - deformación para el acero y para el concreto, así como las propiedades de la sección. La mayoría de las curvas momento - curvatura sólo se calcularon para la región que se inicia justo antes de la cedencia del



Viga	ρ	ρ'
1	0.0375	0.0250
2	0.0375	0.0125
3	0.0375	0
4	0.0250	0.0125
5	0.0250	0
6	0.0125	0.0125
7	0.0125	0

Figura 6.6 Relaciones teóricas momento - curvatura.

acero a tensión. Las curvas momento - curvatura exhiben una discontinuidad en la primera cedencia del acero a tensión y se han terminado. cuando la deformación ε_{cm} del concreto de la fibra extrema a compresión alcanza 0.004. Las curvas muestran que para una deformación máxima dada del concreto, la ductilidad de las secciones simplemente reforzadas disminuye conforme se aumenta la cuantía de acero de tensión, y que la presencia del acero de compresión aumenta significativamente la ductilidad.

6.3 DUCTILIDAD DE SECCIONES DE VIGA DE CONCRETO NO CONFINADO

6.3.1 Cedencia, momento máximo y curvatura

En el diseño al límite y sísmico, generalmente se expresa la ductilidad de un miembro como la relación de la deformación última a la deformación a la primera cedencia. Más adelante se consideran los valores relativos del momento y curvatura cuando cede primero el acero de tensión y el concreto alcanza la deformación última. Se considera que el concreto comprimido de los miembros no está confinado. Aunque en la práctica rara vez existe el concreto no confinado, generalmente se le considera no confinado, a menos que se tomen medidas positivas para confinarlo mediante acero transversal espaciado adecuadamente.

La fig. 6.7 representa el caso general de una sección rectangular doblemente reforzada en la primera cedencia del acero de tensión y a la deformación última del concreto. Usando la ec. 6.1, en términos de la deformación de cedencia en el acero, se puede encontrar la curvatura a la primera cedencia del acero φ_y de tensión. Para las cuantías de acero consideradas, cuando el acero de tensión alcanza por primera vez la resistencia de cedencia, el esfuerzo en la fibra extrema del concreto puede ser

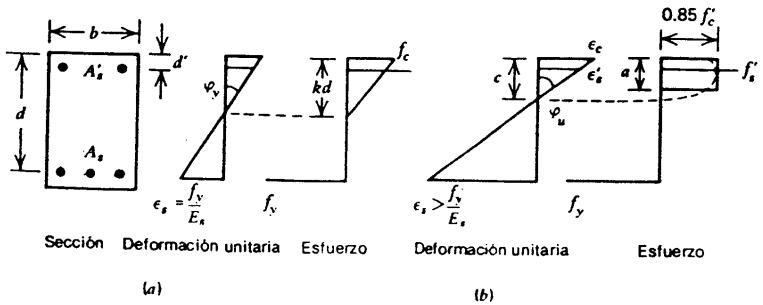


Figura 6.7 Sección de viga doblemente reforzada con flexión. (*a*) A la primera cedencia. (*b*) Bajo momento último.

apreciablemente menor que la resistencia f'_c de cilindro. La curva esfuerzo - deformación para el concreto es aproximadamente lineal hasta $0.7f'_c$; en consecuencia, si el esfuerzo del concreto no excede este valor cuando el acero alcanza la resistencia de cedencia, se puede calcular la profundidad del eje neutro utilizando la fórmula de la teoría elástica (línea recta) deducida en el capítulo 10. Una vez determinado el factor k de la profundidad del eje neutro, se pueden encontrar la magnitud de las fuerzas y el centroide de las fuerzas de compresión en el acero y el concreto. Por tanto, de la sección 10.2.3 y la ec. 6.1, las ecuaciones que definen el momento y curvatura a la primera cedencia son

$$k = \left[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2\left(\rho + \frac{\rho' d'}{d}\right)n\right]^{1/2} - (\rho + \rho')n \tag{6.11}$$

$$M_y = A_s f_y jd \tag{6.12}$$

$$\varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)} \tag{6.13}$$

en que A_s = área del acero de tensión A'_s = área del acero de compresión, b = ancho de la sección, d = profundidad efectiva del acero de compresión, d' = distancia desde la fibra extrema a compresión al centroide del acero de compresión, E_c = módulo de elasticidad del concreto, E_s = módulo de elasticidad del acero, f_y = resistencia de cedencia del acero, jd = distancia desde el centroide de las fuerzas de compresión en el acero y el concreto al centroide de la tensión $n = E_s/E_c$, $\rho = A_s/bd$, y $\rho' = A'_s/bd$.

Si el esfuerzo en la fibra extrema a compresión del concreto es mayor que aproximadamente $0.7f'_c$, se debe calcular la profundidad del eje neutro a la primera cedencia del acero de tensión utilizando la curva real esfuerzo - deformación para el concreto (una parábola es una buena aproximación). Sin embargo, se puede obtener una estimación a partir de la fórmula de la línea recta, incluso si el esfuerzo calculado es tan alto como f'_c La fig. 6.8 indica que el valor para k calculado de la fórmula de la línea recta será más pequeño que el valor real para k si la distribución de esfuerzos del concreto es curva, lo que lleva a subestimar φ_y y a sobrestimar M_y.

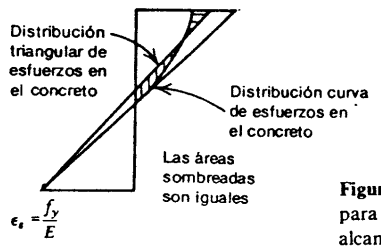


Figura 6.8. Distribuciones de esfuerzo y deformación para la misma fuerza de compresión cuando el acero alcanza el esfuerzo de cedencia.

Se puede calcular la curvatura y el momento último de la sección doblemente reforzada (vea la fig. 6.7) para el caso en que el acero de compresión está cediendo, utilizando las ecs. 4.27, 4.32 y 6.1. Estas ecuaciones dan

$$a = \frac{A_s f_y - A'_s f_y}{0.85 f'_c b} \tag{6.14}$$

$$M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f_y(d - d') \tag{6.15}$$

$$\varphi_u = \frac{\varepsilon_c}{c} = \frac{\varepsilon_c \beta_1}{a} \tag{6.16}$$

La expresión

$$\varepsilon'_s = \varepsilon_c\left(\frac{c - d'}{c}\right) = \varepsilon_c\left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right) \tag{6.17}$$

proporciona la deformación en el acero de compresión, indicada por el diagrama de deformaciones de la fig. 6.7.

Sustituyendo la ec. 6.14 en la ec. 6.17 se demuestra que el acero de compresión está cediendo cuando

$$\varepsilon_c\left[1 - \beta_1 d'\left(\frac{0.85 f'_c b}{A_s f_y - A'_s f_y}\right)\right] \geq \frac{f_y}{E_s} \tag{6.18}$$

Para ser aplicable, se debe demostrar que la ec. 6.18 se satisface para las ecs. 6.14 a 6.16.

Si con una verificación se demuestra que no se satisface la ec. 6.18, el acero de compresión no está cediendo y se debe sustituir el valor real del esfuerzo del acero de compresión dado por la ec. 4.34 (en vez de la resistencia de cedencia). Resolviendo simultáneamente las ecs. 4.33 y 4.34 se tiene

$$\frac{1}{2}\left(\frac{a}{d}\right)^2 + \frac{a}{d}\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f'_c}\right) - \frac{\rho' \varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{1.7 f'_c d} = 0 \tag{6.19}$$

de la que se obtiene a. Además, de las ecs. 4.36 y 4.34 se tiene

$$M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s E_s \varepsilon_c \frac{a - \beta_1 d'}{a}(d - d') \tag{6.20}$$

y φ_u está dada por la ec. 6.16.

En la sección 3.3 se estudia el valor de ε_c utilizado en los cálculos de la resistencia a la flexión. Es evidente que podría utilizarse un valor de $\varepsilon_c = 0.004$ en los cálculos de la curvatura última, debido a que el valor de $\varepsilon_c = 0.003$ es conservador.

La relación M_u/M_y da una medida del aumento en el momento flexionante después de la cedencia. Esta relación se puede obtener de las ecs. 6.14 y 6.15 ó 6.19 y 6.20 y 6.12. Para las secciones simplemente reforzadas con $\rho \leq 0.02$, $f'_c \leq$ lb/plg^2 (34.5 N/mm^2), y $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2) ó 40,000lb/plg^2 (276 N/mm^2), esas ecuaciones indican que $M_u/M_y \leq 1.06$. Consecuentemente, el aumento en el momento después de la primera cedencia es pequeño. El aumento puede ser más significativo para secciones doblemente reforzadas.

La relación φ_u/φ_y da una medida de la ductilidad de curvatura de la sección. De las ecs. 6.16 y 6.13, se puede escribir esta relación como

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\varepsilon_c}{f_y/E_s}\frac{d(1 - k)}{a/\beta_1} \tag{6.21}$$

Se puede utilizar la ec. 6.21 para determinar el factor de ductilidad de curvatura en el caso general de una sección doblemente reforzada. Si se satisface la ec. 6.18, el acero de compresión está cediendo, y al sustituir las ecs. 6.11 y 6.14 en la 6.21, el factor de ductilidad de curvatura está dado como

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{0.85\beta_1 E_s \varepsilon_c f'_c}{f_y^2(\rho - \rho')}\left\{1 + (\rho + \rho')n - \left[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2\left(\rho + \frac{\rho' d'}{d}\right)n\right]^{1/2}\right\} \tag{6.22}$$

Si no se satisface la ec. 6.18, el acero de compresión no está cediendo, y al sustituir la ec. 6.11 y a de la ec. 6.19 en la ec. 6.21, el factor de ductilidad de curvatura está dado como

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{\beta_1 E_s \varepsilon_c}{f_y}\frac{1 + (\rho + \rho')n - \left[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2\left(\rho + \frac{\rho' d'}{d}\right)n\right]^{1/2}}{\left[\left(\frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f'_c}\right)^2 + \frac{\rho' \varepsilon_c E_s \beta_1 d'}{0.85 f'_c d}\right]^{1/2} - \frac{\rho' \varepsilon_c E_s - \rho f_y}{1.7 f'_c}} \tag{6.23}$$

En las figs. 6.9 y 6.10 están graficadas las ecs. 6.22 y 6.23 para un rango de combinaciones prácticas de f_y y f'_c para concreto de peso normal y para $\varepsilon_c = 0.003$ y 0.004. Para pequeños valores de $\rho - \rho'$ es posible que el eje neutro en el momento último esté por encima del acero superior ("de compresión"), y en consecuencia, que tanto el acero superior como el inferior estén a tensión. La ec. 6.23 puede manejar este caso en tanto que el acero superior permanezca elástico, pero la expresión no es aplicable cuando el acero superior cede en tensión. Adicionalmente, para valores grandes de $\rho - \rho'$ se hace grande el esfuerzo de compresión del concreto a la primera cedencia del acero de tensión, y el comportamiento, supuesto

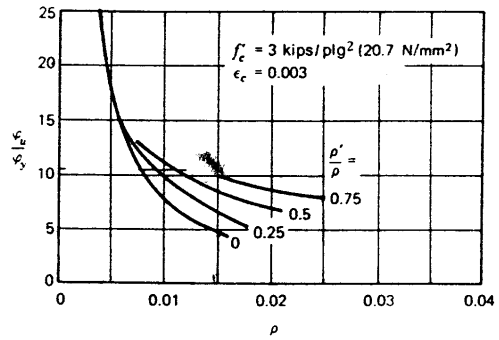
elástico en esta etapa, puede producir un esfuerzo de concreto máximo que supere la resistencia de cilindro. Estrictamente hablando, se debe utilizar una curva no lineal esfuerzo - deformación para el concreto cuando $\rho - \rho'$ es elevada. Las curvas de las figs. 6.9 y 6.10 se han graficado solamente en las regiones en que son exactas las suposiciones hechas en las ecs. 6.22 o 6.23. En consecuencia, no se han graficado las curvas cuando el esfuerzo de compresión máximo del concreto a la primera cedencia del acero de tensión sea mayor que f'_c o cuando el acero superior cede en tensión en el momento último. En el primer caso, la curva se termina en su extremo inferior derecho, y en el segundo se termina en su extremo superior izquierdo.

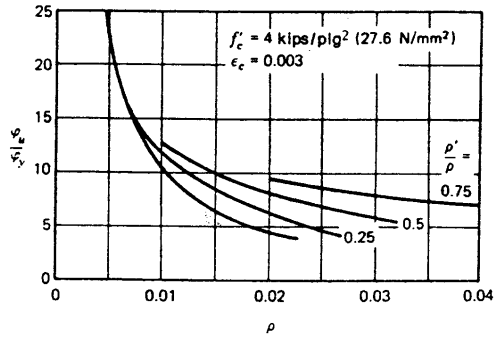
En las figs. 6.9 y 6.10 se aprecian claramente los efectos de las propiedades de la sección en la relación φ_u/φ_y. Por referencia a esas figuras y a la ec. 6.21 se muestra que manteniendo constantes las otras variables se cumple lo siguiente:

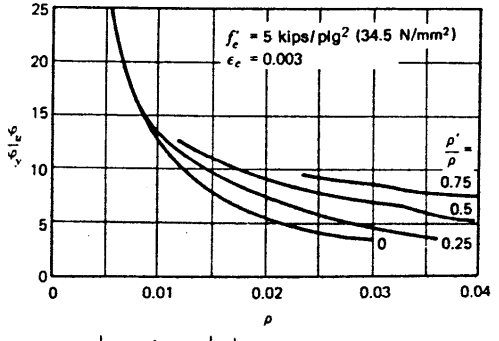
1. Un aumento en la cuantía del acero de tensión disminuye la ductilidad, debido a que aumentan tanto k como a, por lo que aumenta φ_y y disminuye φ_u.
2. Un aumento en la cuantía del acero de compresión aumenta la ductilidad, debido a que disminuyen tanto k como a, por lo que disminuye φ_y y aumenta φ_u.
3. Un aumento en la resistencia de cedencia del acero disminuye la ductilidad debido a que aumentan tanto f_y/E_s como a, por lo que aumenta φ_y y disminuye φ_u.
4. Un aumento en la resistencia del concreto aumenta la ductilidad debido a que disminuyen tanto k como a, por lo que disminuye φ_y y aumenta φ_u.
5. Un aumento en la deformación de la fibra extrema del concreto en el momento último aumenta la ductilidad debido a que aumenta φ_u.

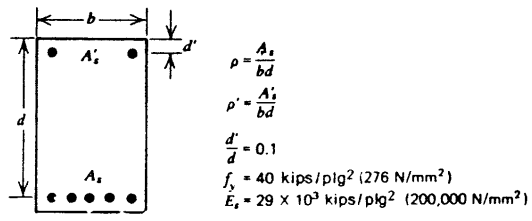
Ejemplo 6.1

Una viga de concreto reforzado tiene una sección transversal rectangular de 10 plg (254 mm) de ancho y 25 plg (635 mm) de peralte total. El acero de tensión son cuatro varillas núm. 8 (25.4 mm de diámetro) y el acero de compresión son dos varillas núm. 8 (25.4 mm de diámetro), colocadas con 2 plg (51 mm) de recubrimiento al centroide del acero. El concreto tiene una resistencia de cilindro de 3,000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2), un módulo de ruptura de 410 lb/plg^2 (2.83 N/mm^2) y un módulo de elasticidad de 3.2×10^6 lb/plg^2 (22.070 N/mm^2). El acero tiene una resistencia de cedencia de 40,000 lb/plg^2 (275 N/mm^2) y un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb/plg^2 (200,000 N/mm^2). Calcular el momento y curvatura (1) justo antes del agrietamiento del concreto, (2) a la









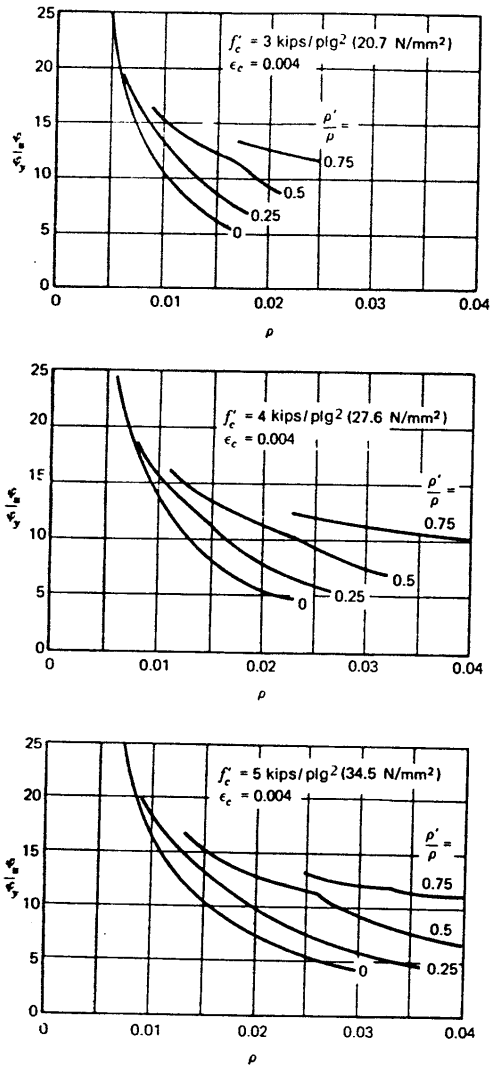
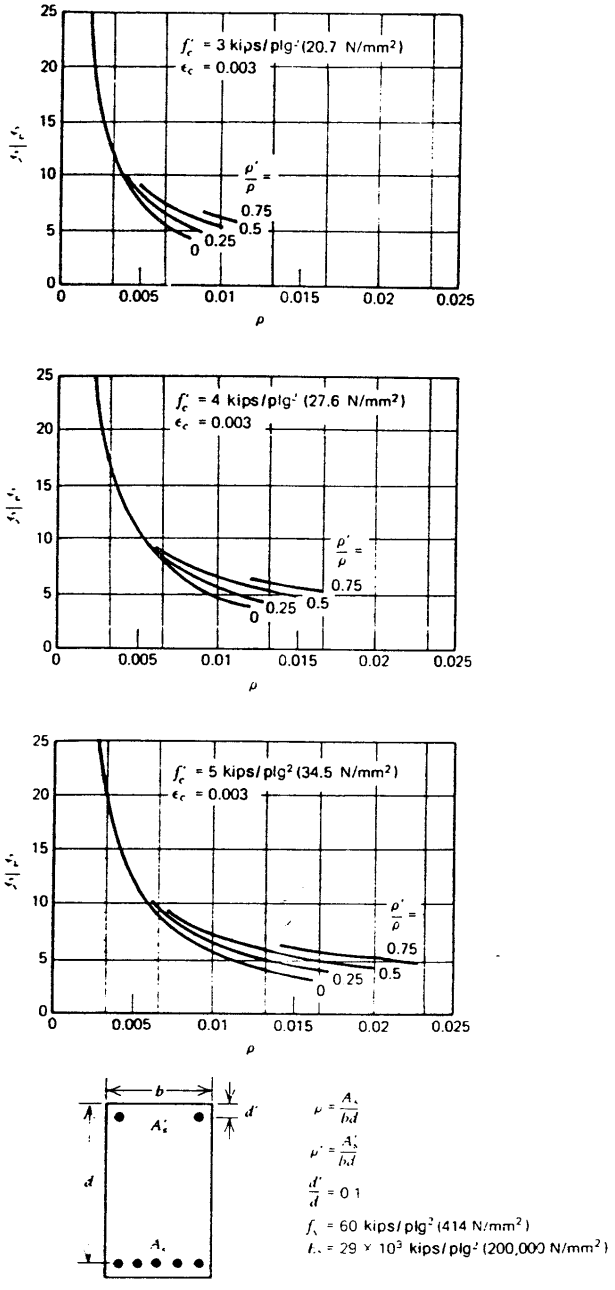


Figura 6.9. Variación de φ_u/φ_y para vigas con concreto no confinado y f_y = 40 lb/plg² (276 N mm²).



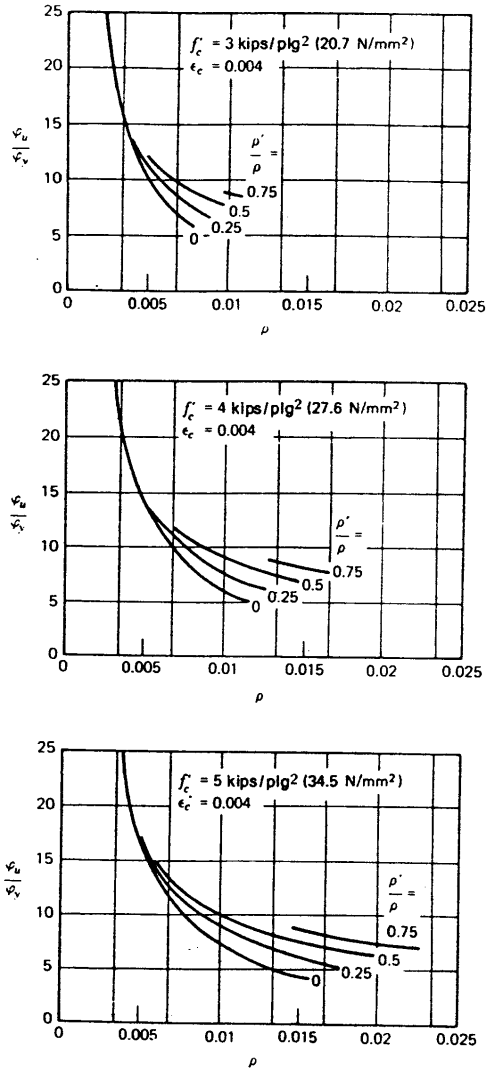


Figura 6.10. Variación de φ_u/φ_y para vigas con concreto no confinado y f_y = 60 kip/plg² (414N/mm²).

primera cedencia del acero de tensión y (3) cuando el concreto alcanza una deformación a compresión de la fibra extrema de 0.004. Construir la curva aproximada trilineal momento - curvatura para la sección.

Solución

Cuantías de acero:

$$A_s = 3.16 \text{ plg}^2 (2039 \text{ mm}^2) \quad \therefore \quad \rho = \frac{3.16}{10 \times 23} = 0.01374$$

$$A'_s = 1.58 \text{ plg}^2 (1019 \text{ mm}^2) \quad \therefore \quad \rho' = \frac{1.58}{10 \times 23} = 0.00687$$

1. *Antes del agrietamiento* (*véase la* fig. 6.11*b*)

Se puede analizar la sección utilizando la teoría elástica y la sección transformada (véase la sección 10.2.4).
La relación modular $n = E_s/E_c = 29/3.2 = 9.06$.

$$A = bh + (n - 1)(A_s + A'_s)$$
$$= (10 \times 25) + (8.06 \times 3.16) + (8.06 \times 1.58)$$
$$= 250 + 25.5 + 12.7 = 288.2 \text{ plg}^2$$

El centroide de la sección transformada se determina tomando los momentos de las áreas alrededor del borde superior de la sección.

$$\bar{y} = \frac{(250 \times 12.5) + (25.5 \times 23) + (12.7 \times 2)}{288.2} = 12.97 \text{ plg}.$$

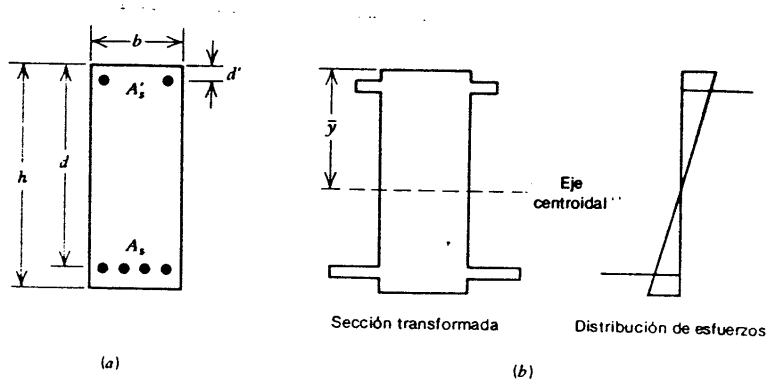
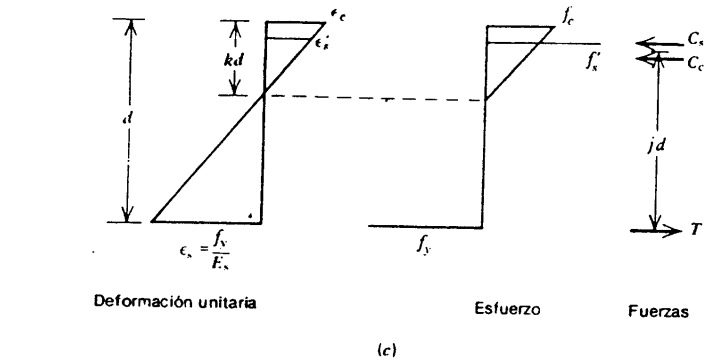
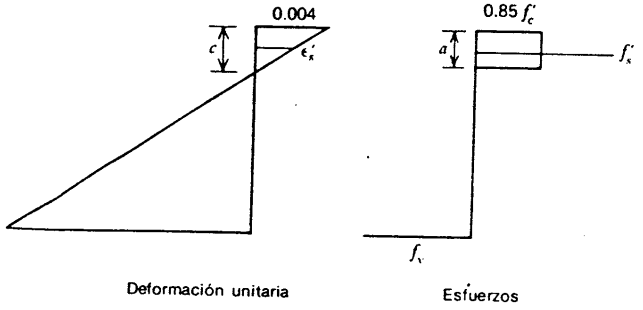


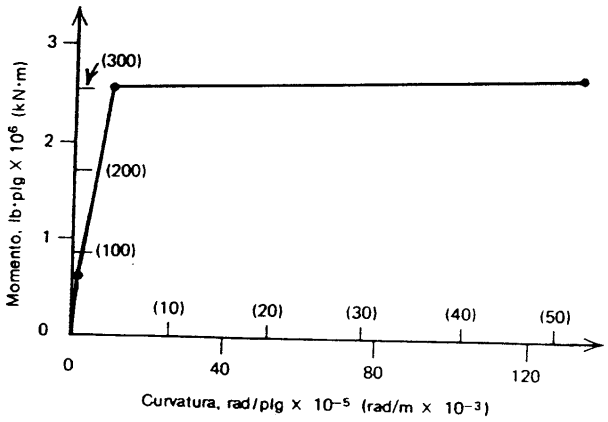
Figura 6.11. Ejemplo 6.1 (*a*) Sección. (*b*) Antes del agrietamiento: comportamiento elástico. (*c*) Después del agrietamiento: en primera cedencia. (*d*) Después del agrietamiento: bajo momento último. (*e*) Curva momento - curvatura.



(c)



(d)



(e)

En consecuencia, el momento de inercia está dado por

$$I = (\tfrac{1}{12} \times 10 \times 25^3) + (250 \times 0.47^2) + (25.5 \times 10.03^2) + (12.7 \times 10.97^2) = 17{,}170 \text{ plg}^4$$

El agrietamiento ocurre cuando se alcanza el módulo de ruptura $f_r = 410 \text{ lb/plg}^2$ en la fibra del extremo inferior

$$\therefore \quad M_{\text{grieta}} = \frac{f_r I}{y_{\text{fondo}}} = 410 \times \frac{17{,}170}{12.03} = 585{,}200 \text{ lb} \cdot \text{plg} \ (66.1 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

y

$$\varphi_{\text{grieta}} = \frac{f_r/E_c}{y_{\text{fondo}}} = \frac{410/3.2 \times 10^6}{12.03} = 1.07 \times 10^{-5} \text{ rad/plg} \ (0.419 \times 10^{-3} \text{ rad/m})$$

2. *Después del agrietamiento, a la primera cedencia* (*véase la* fig. 6.11*c*).

Suponiendo que el concreto se comporta elásticamente, de la ec. 6.11 se escribe

$$k = \left[(0.01374 + 0.00687)^2 9.06^2 + 2\left(0.01374 + \frac{0.00687 \times 2}{23}\right)9.06 \right]^{1/2} - (0.01374 + 0.00687)9.06 = 0.356$$

$$\therefore \quad kd = 0.356 \times 23 = 8.19 \text{ plg}$$

Entonces $\varepsilon_s = 40{,}000/(29 \times 10^6) = 0.00138$.

Del diagrama de deformaciones se encuentra

$$\varepsilon_c = 0.00138 \frac{8.19}{23 - 8.19} = 0.000763$$

$$\therefore \quad f_c = 0.000763 \times 3.2 \times 10^6 = 2440 \text{ lb/plg}^2 = 0.81 f'_c$$

En consecuencia, el bloque triangular de esfuerzos es una aproximación. Del diagrama de deformaciones se encuentra que

$$\varepsilon'_s = 0.000763\frac{8.19 - 2}{8.19} = 0.000577$$

$$\therefore \quad f'_s = 0.000577 \times 29 \times 10^6 = 16{,}730 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad C_c = \tfrac{1}{2} f_c bkd = \tfrac{1}{2} \times 2440 \times 10 \times 8.19 = 99{,}920 \text{ lb}$$
$$C_s = A'_s f'_s = 1.58 \times 16{,}730 = 26{,}430 \text{ lb}$$

Por tanto, la fuerza total de compresión es de 126,350 lb actuando a una distancia $\bar{y}$ del borde superior, en que

$$\bar{y} = \frac{(2 \times 26{,}430) + (99{,}920 \times 8.19/3)}{126{,}350} = 2.58 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad jd = d - \bar{y} = 23 - 2.58 = 20.42 \text{ plg}$$

De la ec. 6.12

$$M_y = 3.16 \times 40{,}000 \times 20.42$$
$$= 2.58 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg } (291 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

y de la ec. 6.13

$$\varphi_y = \frac{0.00138}{23 - 8.19}$$
$$= 9.32 \times 10^{-5} \text{ rad/plg } (3.67 \times 10^{-3} \text{ rad/m})$$

3. *Después del agrietamiento, a la carga máxima* (fig. 6.11*d*).

Se supone que el acero a compresión también está cediendo; de la ec. 6.14 se tiene

$$a = \frac{40{,}000(3.16 - 1.58)}{0.85 \times 3000 \times 10} = 2.48 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad c = 2.48/0.85 = 2.92 \text{ plg}$$

Del diagrama de deformaciones se encuentra

$$\varepsilon'_s = 0.004\frac{2.92 - 2}{2.92} = 0.00126$$

Pero $f_y/E_s = 0.00138$; en consecuencia, el acero de compresión no está cediendo. El esfuerzo real en el acero de compresión se puede encontrar de la ec. 4.34. En otra forma, se puede utilizar un método de pruebas y ajustes. Se intenta $f'_s = 38{,}800$ lb/plg^2, entonces

$$a = \frac{(40{,}000 \times 3.16) - (38{,}800 \times 1.58)}{0.85 \times 3000 \times 10} = 2.55 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad c = 2.55/0.85 = 3.00 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad \varepsilon'_s = 0.004 \times \frac{3 - 2}{3} = 0.00133$$

$$\therefore \quad f'_s = 0.00133 \times 29 \times 10^6 = 38{,}600 \text{ lb/plg}^2$$

que concuerda satisfactoriamente con el valor de prueba.

$$\therefore \quad M_u = 0.85 f'_c ab\left(d - \frac{a}{2}\right) + A'_s f'_s(d - d')$$
$$= 0.85 \times 3000 \times 2.55 \times 10\left(23 - \frac{2.55}{2}\right)$$
$$+ 1.58 \times 38{,}600(23 - 2)$$
$$= 2.69 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg } (304 \text{ kN} \cdot \text{m})$$

Y de la ec. 6.16 se escribe

$$\varphi_u = \frac{0.004}{3}$$
$$= 133.3 \times 10^{-5} \text{ rad/plg } (52.5 \times 10^{-3} \text{ rad/m})$$

El diagrama momento - curvatura aparece en la fig. 6.11*e*.

6.3.2 Requerimientos de ductilidad especificados para las vigas

El ACI 318-73[6.1] tiene los siguientes requerimientos relativos a las ductilidades de curvatura:

1. En los miembros a flexión en todo momento, si el acero de compresión está cediendo (vea la ec. 4.49),

$$\rho - 0.75\rho' \leqslant 0.75\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} \tag{6.24}$$

2. En los miembros a flexión de estructuras estáticamente indeterminadas en que se ajustan los momentos flexionantes dados por la teoría elástica para dar margen a la redistribución de momentos

$$\rho - \rho' \leqslant 0.5\frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} \tag{6.25}$$

3. En los miembros a flexión de marcos dúctiles en zonas sísmicas, si el acero de compresión está cediendo

$$\rho - 0.5\rho' \leq 0.5 \frac{0.85 f'_c \beta_1}{f_y} \frac{0.003 E_s}{0.003 E_s + f_y} \tag{6.26}$$

La tabla 6.1 muestra la cuantía máxima de acero que permiten las ecs. 6.24 a 6.26 para distintas resistencias del acero y del concreto.

Tabla 6.1. Cuantías máximas de acero por la ductilidad[a]

f_y, lb/plg^2 (N/mm^2):	40,000 (276)			60,000 (414)		
f'_c, lb/plg^2 (N/mm^2):	3000 (20.7)	4000 (27.6)	5000 (34.5)	3000 (20.7)	4000 (27.6)	5000 (34.5)
Máx $(\rho - 0.75\rho')$ de la ec. 6.24	0.0278	0.0371	0.0437	0.0160	0.0214	0.0252
Máx $(\rho - \rho')$ de la ec. 6.25	0.0186	0.0247	0.0291	0.0107	0.0143	0.0168
Máx $(\rho - 0.5\rho')$ de la ec. 6.26	0.0186	0.0247	0.0291	0.0107	0.0143	0.0168

[a] De la referencia 6.1

Las figs. 6.9 y 6.10 indican los valores de φ_u/φ_y garantizados por las ecs. 6.24 a 6.26 para las resistencias del acero y concreto dadas en la tabla 6.1. Para secciones sin acero de compresión, las ecs. 6.25 y 6.26 garantizan $\varphi_u/\varphi_y > 3$ para $\varepsilon_c = 0.003$ y $\varphi_u/\varphi_y > 4$ para $\varepsilon_c = 0.004$. La ec. 6.26 garantiza una proporción mayor de φ_u/φ_y para secciones con acero de compresión. Por ejemplo si $\rho'/\rho = 0.5$, la ec. 6.26 garantiza $\varphi_u/\varphi_y > 4$ para $\varepsilon_c = 0.003$ y $\varphi_u/\varphi_y > 6$ para $\varepsilon_c = 0.004$. Este aumento en los valores de φ_u/φ_y con acero de compresión no ocurre cuando se utiliza la ec. 6.25.

De esta manera siempre se dispone de cierta ductilidad en las secciones diseñadas según el código. En otros capítulos se estudia más ampliamente el significado de los requerimientos dados por las ecs. 6.25 y 6.26.

6.4 DUCTILIDAD DE SECCIONES DE COLUMNA DE CONCRETO NO CONFINADO

La carga axial influye en la curvatura; en consecuencia, no hay una curva única momento - curvatura para una sección dada de columna, lo contrario al caso de una sección de viga determinada. Sin embargo, es posible graficar las combinaciones de carga axial P y momento M que hacen que

la sección alcance la capacidad última y la curvatura φ correspondiente a esas combinaciones. La fig. 6.12*a* tomada de Blume, Newmark y Corning,[6.2] grafica P contra M (el diagrama de interacción) y P contra φh para una sección de columna con refuerzo en dos caras opuestas. En la figura aparecen los detalles de la sección y la curva supuesta esfuerzo - deformación para el concreto. La curva 1 del diagrama P - M indica las combinaciones de P y M que hacen que la columna alcance el límite útil de la deformación (0.004 para el concreto) sin confinamiento. La curva 1 del diagrama P–φh muestra la curvatura de la sección que corresponde a las combinaciones de P y M cuando se alcanza esta condición última. Las curvas 2 dan las combinaciones de P, M y φh que corresponden a los puntos en que el acero de tensión alcanza primeramente la resistencia de cedencia. Las curvas 2 no aparecen por encima del punto de falla balanceada debido a que el acero de tensión no alcanza la resistencia de cedencia por encima de ese punto. Por debajo del punto de falla balanceada en el diagrama P–φh las curvas 1 y 2 se separan e indican la cantidad de deformación inelástica de flexión que ocurre una vez iniciada la cedencia. La relación φ_u/φ_y obtenida de estas dos curvas para la sección no confinada está graficada contra la relación de las cargas de la columna P/P_o en la fig. 6.12*b*, en que P_o es la resistencia por carga axial de la columna cuando no está presente ninguna flexión. En el punto de falla balanceada, $P/P_o = 0.31$ para esta sección. Es evidente que la presencia de carga axial reduce significativamente la ductilidad de la sección. Por ejemplo, si la carga de la columna es 15% de la capacidad por carga axial, el valor de φ_u/φ_y se reduce aproximadamente a 4, y es menor a niveles superiores de carga.

Pfrang, Siess y Sozen[6.3] también han reportado los resultados de una investigación sobre las deformaciones inelásticas en las secciones de columnas de concreto reforzado. Las curvas momento - curvatura obtenidas para secciones de columna con distintos niveles de carga axial constante (esto es, la carga de la columna se mantuvo constante a un nivel específico mientras se flexionaba la columna a la falla) son de especial interés. En la fig. 6.13 se muestran las curvas para secciones de columna con dos cuantías distintas de acero. En los cálculos se ignoró la resistencia a la tensión del concreto, y se supuso que se alcanzaba la curvatura última cuando la deformación máxima del concreto era de 0.0038. Las curvas ilustran nuevamente que a niveles de carga axial superiores a la carga de falla balanceada, la ductilidad es despreciable, y sólo se debe a la deformación inelástica del concreto. A niveles de carga menores a la carga balanceada, la ductilidad aumenta conforme se reduce el nivel de carga.

Debido al comportamiento frágil de las columnas no confinadas, aun a niveles moderados de carga axial de compresión, el ACI 318-71[6.1] recomienda que en zonas sísmicas se confinen los extremos de las columnas

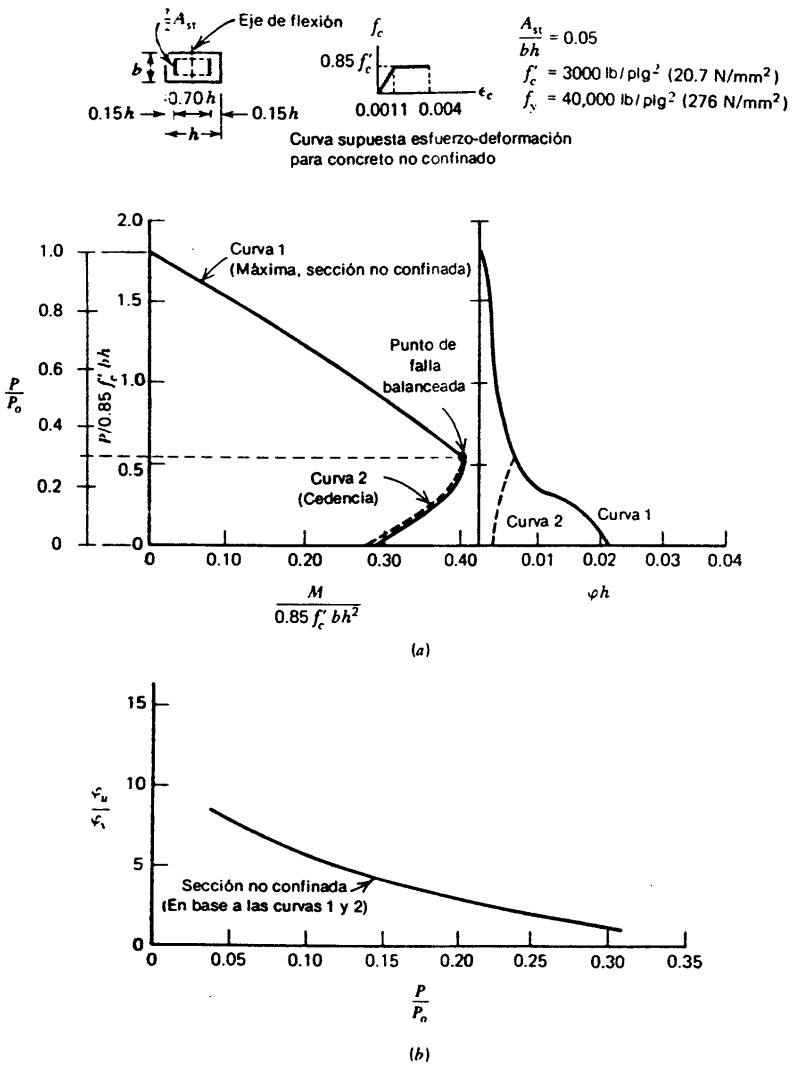
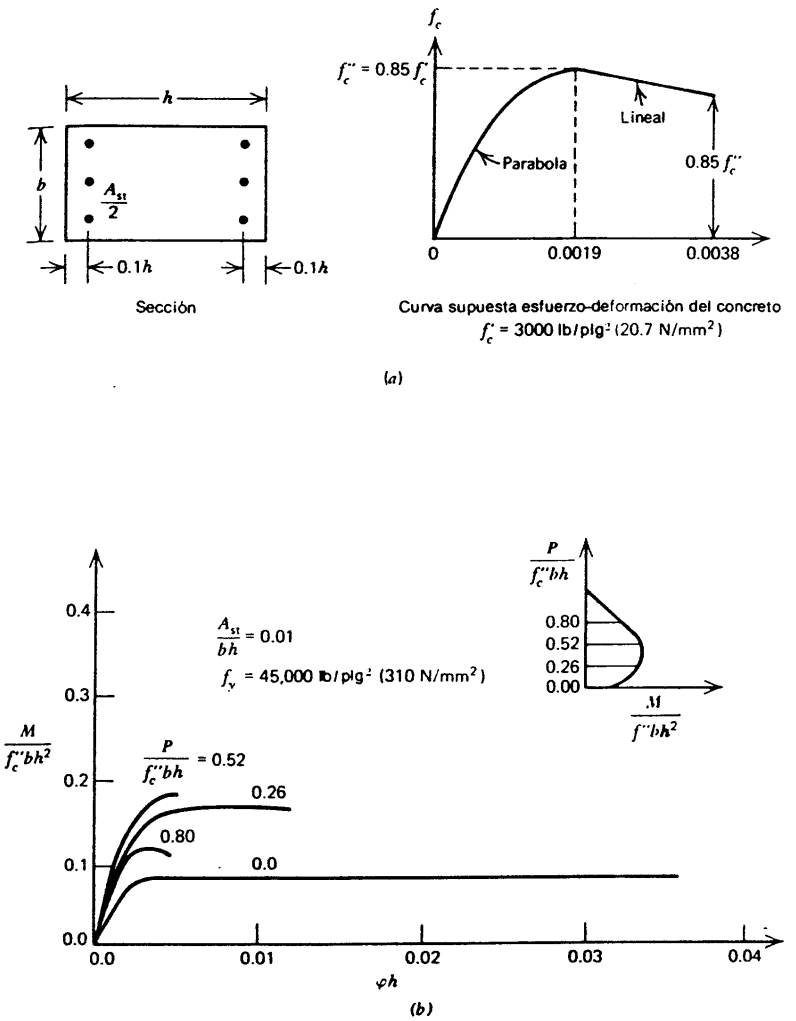
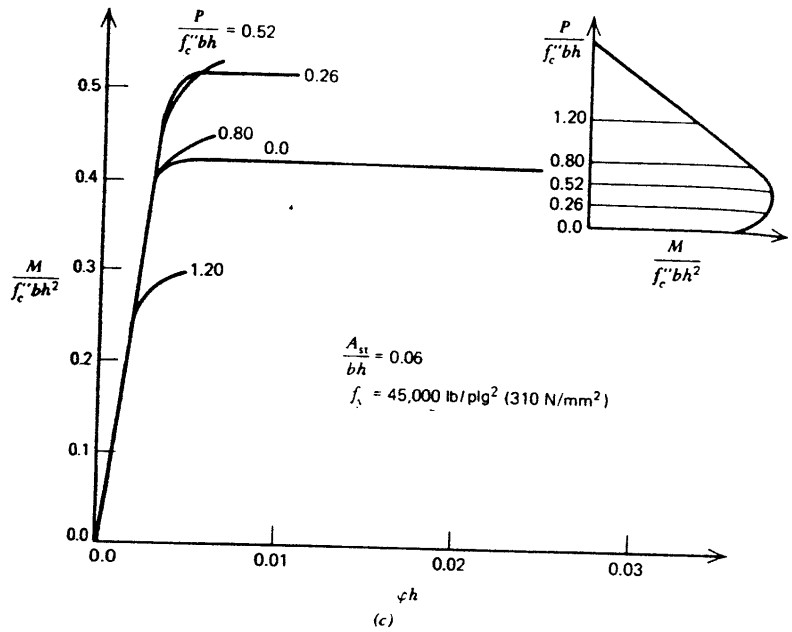


Figura 6.12. Resistencia y ductilidad de una sección de columna.[6.1,2] (*a*) Diagramas de interacción. (*b*) Ductilidad de curvatura.





(c)

Figura 6.13. Curvas momento - curvatura para secciones de columna en distintos niveles de carga axial.[6.3]

de marcos dúctiles mediante refuerzo transversal espaciado estrechamente, cuando la carga axial sea mayor que 0.4 de la carga balanceada P_b.

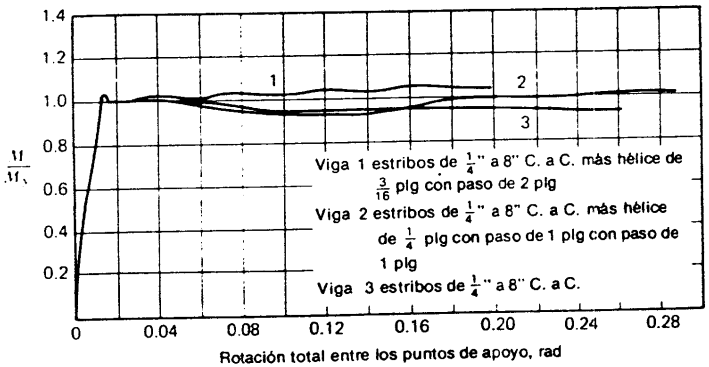
6.5 MIEMBROS CON CONCRETO CONFINADO

6.5.1 Efecto del confinamiento del concreto

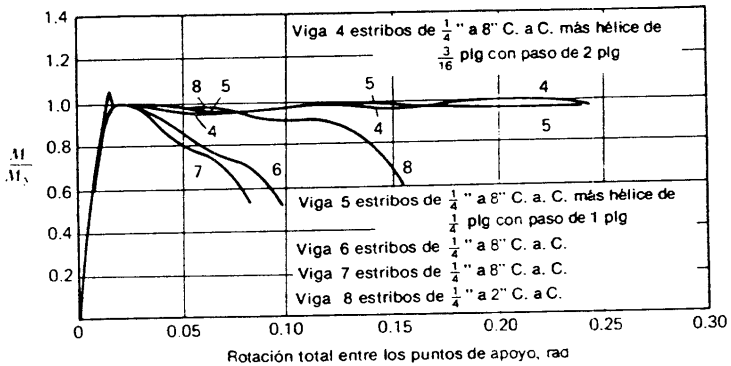
Si la zona a compresión de un miembro se confina mediante refuerzo transversal espaciado estrechamente en forma de estribos, aros o hélices cerradas, se puede aumentar considerablemente la ductilidad del concreto lográndose un mejor comportamiento dúctil del miembro en la carga última.

En la sección 2.1.3 se estudiaron las características esfuerzo - deformación del concreto confinado mediante refuerzo transversal. A niveles bajos del esfuerzo de compresión, el refuerzo transversal apenas está esforzado y el propio refuerzo no afecta el comportamiento del concreto. A esfuerzos que se aproximan a la resistencia uniaxial, las deformaciones transversales en el concreto aumentan rápidamente, debido al agrietamiento interno progresivo, y el concreto se expande contra el refuerzo transversal. La presión de restricción que aplica el refuerzo al concreto mejora considerablemente las características esfuerzo - deformación del concreto a deformaciones más elevadas. Las hélices confinan el concreto con mayor efectividad que los estribos rectangulares o los aros, debido a que el acero de confinamiento en forma de círculo aplica una presión radial uniforme al concreto, en tanto que un rectángulo tiende a confinar el concreto principalmente en las esquinas.

Se ha reportado un conjunto de pruebas que ilustran el efecto del confinamiento del concreto en las características del momento - rotación de las vigas. Por ejemplo, la fig. 6.14 muestra curvas experimentales momento - rotación de una serie de vigas probadas por Base y Read.[6.4] Las vigas tenían una sección rectangular de 6 plg (152 mm) de ancho por 11 plg (279 mm) de peralte y se cargaron mediante una sola carga concentrada a la mitad del claro simplemente apoyado de 120 plg (3.05 m). La fig. 6.14*a* proporciona las curvas momento - rotación que se obtuvieron para vigas



(a)



(b)

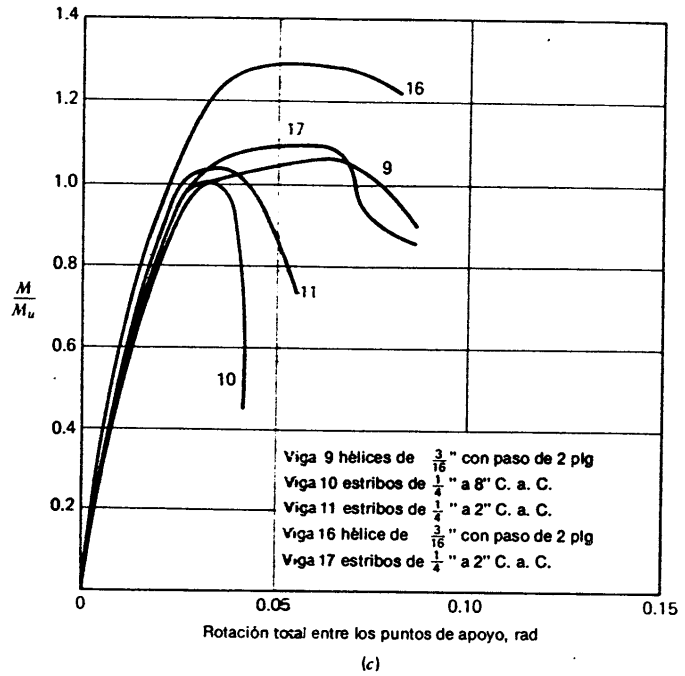


Figura 6.14 Curvas experimentales momento - rotación para vigas de concreto reforzado.[6.4] (*a*) Vigas que fallan a tensión. (*b*) Vigas balanceadas. (*c*) Vigas que fallan a compresión.

con una cuantía de acero de tensión de aproximadamente un medio del valor de la de la falla balanceada. La caída inicial en el momento ocurrió cuando el acero cambió del punto superior al inferior de cedencia. Se puede ver que todas las vigas tienen una elevada capacidad rotacional sin disminución significativa en el momento último. La fig. 6.14*b* muestra las curvas momento - rotación obtenidas para vigas diseñadas para una falla balanceada. Se ve que las hélices y/o los estribos espaciados estrechamente incrementan la ductilidad en forma apreciable. Con las curvas obtenidas para vigas que tenían una cuantía de acero de tensión mayor que el valor balanceado (fig. 6.14*c*), no sólo es aparente que se obtiene un aumento en la ductilidad con el refuerzo transversal, sino que ocurre un aumento en resistencia, debido a la gran influencia que tiene la mayor resistencia a compresión del concreto en este tipo de falla.

Estas y otras pruebas han indicado cualitativamente el efecto benéfico del confinamiento mediante el refuerzo transversal en la ductilidad de miembros a flexión del concreto reforzado. El efecto en las vigas ligeramente reforzadas es menos marcado, debido a que esos miembros ya tienen ductilidad adecuada. Mediante el confinamiento, se puede aumentar sustancialmente la ductilidad de las vigas y de columnas fuertemente reforzadas.

A menudo, el concreto en la zona a compresión de los miembros recibe cierto confinamiento de las condiciones de carga o apoyo. Se pueden encontrar ejemplos bajo las placas de apoyo de las vigas probadas mediante cargas concentradas y en vigas de marcos en las caras de las columnas. El confinamiento que proporcionan las placas de apoyo o miembros adyacentes puede hacer que la sección crítica muestre más ductilidad que la esperada. Sin embargo, sería imprudente depender de tal ductilidad, a menos que se tomen acciones positivas para asegurar que se dispone de la misma.

La presencia de un gradiente de deformación a través o a lo largo del miembro también ayuda al confinamiento del concreto en las secciones críticas de un miembro. Si la deformación cambia rápidamente con la distancia, debido al cambio rápido del momento flexionante a lo largo del miembro o de una pequeña profundidad del eje neutro, el concreto altamente esforzado recibe cierto confinamiento de las regiones adyacentes de concreto esforzado menos fuertemente.

6.5.2 Parámetros del bloque de esfuerzos de compresión para el concreto confinado mediante aros

Para desarrollar la teoría para las características momento - curvatura de miembros con concreto confinado, se requiere la relación esfuerzo - deformación para el concreto. Se puede suponer que las relaciones esfuerzo - deformación para el concreto confinado (estudiadas en la sección 2.1.3) indican la distribución de esfuerzo de compresión en la zona a compresión de un miembro con concreto confinado. Los parámetros del bloque de esfuerzos de compresión se pueden determinar para una deformación dada en la fibra extrema a compresión, y una curva dada esfuerzo - deformación del concreto, mediante el método presentado en la Sección 6.2.2. Se puede escribir la fuerza de compresión del concreto para una sección rectangular como $C_c = \alpha f''_c bkd$ que actúa a γkd de la fibra extrema a compresión, en que b = ancho de la sección, kd = profundidad del eje neutro, $\alpha f''_c$ = esfuerzo medio en el bloque de esfuerzos y γkd = distancia desde el centroide del bloque de esfuerzos a la fibra extrema a compresión. Para cualquier deformación dada ε_{cm} en la fibra extrema a compresión, se puede determinar α y γ para secciones rectangulares a partir de la relación esfuerzo - deformación del concreto utilizando las ecuaciones 6.6 y 6.7.

A manera de ejemplo, para la curva esfuerzo - deformación para el concreto confinado mediante aros propuesta por Kent y Park[6.5] (fig. 2.18), hay tres perfiles posibles para el bloque de esfuerzos de compresión, como lo indica la fig. 6.15. Las ecs. 2.6 a 2.11 definen las regiones de la curva. La tabla 6.2 muestra los valores de α y γ calculados utilizando las

Tabla 6.2 Parámetros α y γ del bloque de esfuerzos como función de ε_{cm} y Z[a]

	Z								
ε_{cm}	10	30	50	70	100	140	200	300	400
	Valores de α								
0.002	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667	0.667
0.003	0.776	0.773	0.769	0.766	0.761	0.754	0.744	0.728	0.711
0.004	0.828	0.818	0.808	0.798	0.783	0.763	0.733	0.683	0.633
0.005	0.858	0.840	0.822	0.804	0.777	0.741	0.687	0.600	0.547
0.006	0.876	0.849	0.822	0.796	0.756	0.702	0.622	0.533	0.489
0.007	0.887	0.851	0.815	0.780	0.726	0.655	0.562	0.486	0.448
0.008	0.894	0.849	0.804	0.759	0.692	0.602	0.517	0.450	0.417
0.009	0.899	0.844	0.790	0.735	0.654	0.558	0.481	0.422	0.393
0.010	0.901	0.837	0.773	0.709	0.613	0.522	0.453	0.400	0.373
0.011	0.903	0.829	0.755	0.682	0.576	0.493	0.430	0.382	0.358
0.012	0.903	0.819	0.736	0.653	0.544	0.468	0.411	0.367	0.344
0.013	0.902	0.809	0.716	0.623	0.518	0.448	0.395	0.354	0.333
0.014	0.901	0.798	0.695	0.593	0.495	0.430	0.381	0.343	0.324
0.015	0.899	0.787	0.674	0.567	0.476	0.415	0.369	0.333	0.316
	Valores de γ								
0.002	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375	0.375
0.003	0.405	0.407	0.408	0.409	0.411	0.414	0.418	0.425	0.432
0.004	0.427	0.430	0.433	0.436	0.441	0.449	0.460	0.482	0.507
0.005	0.441	0.446	0.452	0.457	0.466	0.479	0.501	0.543	0.568
0.006	0.451	0.459	0.466	0.474	0.488	0.508	0.545	0.586	0.602
0.007	0.459	0.469	0.479	0.490	0.508	0.538	0.582	0.611	0.622
0.008	0.466	0.477	0.490	0.504	0.529	0.570	0.607	0.627	0.633
0.009	0.471	0.484	0.500	0.518	0.550	0.595	0.623	0.636	0.638
0.010	0.475	0.491	0.509	0.531	0.573	0.613	0.634	0.641	0.641
0.011	0.479	0.497	0.519	0.546	0.594	0.626	0.641	0.644	0.642
0.012	0.482	0.503	0.528	0.560	0.610	0.635	0.645	0.645	0.641
0.013	0.485	0.508	0.538	0.576	0.622	0.642	0.648	0.645	0.640
0.014	0.488	0.514	0.547	0.592	0.631	0.646	0.649	0.644	0.638
0.015	0.490	0.519	0.557	0.606	0.638	0.650	0.649	0.642	0.635

[a] De la referencia 6.5

ecs. 6.6 y 6.7 para los bloques 2 y 3 de esfuerzos (esto es, cuando $\varepsilon_{cm} \geq 0.002$) e indica la variación de estos parámetros con la deformación ε_{cm} y el parámetro Z. Las ecs. 2.8 a 2.10 dan el parámetro Z como

$$Z = \frac{0.5}{\dfrac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} + \dfrac{3}{4}\rho_s\sqrt{\dfrac{b''}{s_h}} - 0.002} \tag{6.27}$$

en que f'_c = resistencia de cilindro del concreto en lb/plg^2 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2), ρ_s = relación del volumen de los aros al volumen del núcleo de concreto medido hasta afuera de los aros, b'' = ancho del núcleo confinado medido hasta afuera de los aros y s_h = separación de los aros. En la tabla 6.3 se listan los valores de Z de la ec. 6.27. Nótese que los valores de $\alpha = 0.728$ y $\gamma = 0.425$ dados por las tablas 6.2 y 6.3 cuando $f'_c = 4000$ lb/plg^2(27.6 N/mm^2), $\rho_s = 0$ ($\therefore$ $Z = 300$) y $\varepsilon_{cm} = 0.003$, se comparan bien con los valores de $\alpha = 0.85 \times 0.85 = 0.723$ y $\gamma = 0.5 \times 0.85 = 0.425$ dados por el bloque de esfuerzos rectangulares del código ACI.[6.1] En las tablas se aprecian las mejores características de los miembros a flexión con concreto confinado. Se pueden utilizar las tablas 6.2 y 6.3 para determinar la capacidad a flexión y curvatura de los miembros confinados en deformaciones de compresión muy altas.

La relación anterior esfuerzo - deformación para el concreto confinado se obtuvo de resultados de prueba de probetas de concreto con aros que solamente encerraban el concreto a compresión (vea la fig. 6.16*a*). Se puede cuestionar el uso de una relación basada en tales datos de prueba para determinar el bloque de esfuerzos de compresión, cuando parte de la sección está en tensión (vea la fig. 6.16*b*) debido a que parte del aro está en la región a tensión. Sin embargo, en este caso el concreto esforzado ligeramente, cerca del eje neutro, ayuda a confinar el concreto altamente

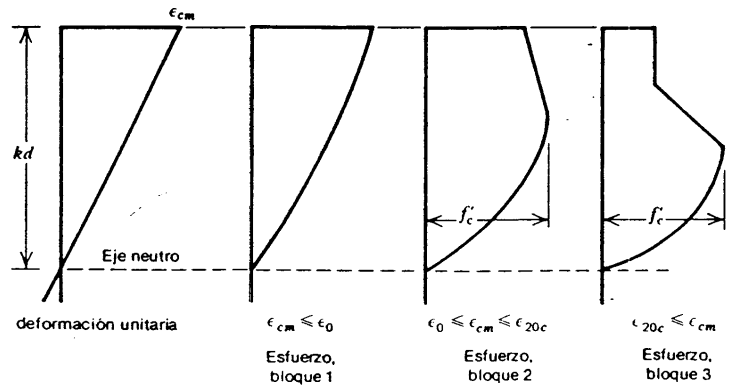


Figura 6.15 Bloques posibles de esfuerzos a compresión del concreto.[6.5]

Tabla 6.3 Parámetro Z como función de s_h/b'', ρ_s, y f'_c, de la ec. 6.27

		f'_c, lb/plg² (N/mm²)		
$\frac{s_h}{b''}$	ρ_s	3000 (20.7)	4000 (27.6)	5000 (34.5)
0.25	0	200	300	400
	0.005	50	55	57
	0.01	29	30	31
	0.02	15	16	16
	0.03	11	11	11
0.50	0	200	300	400
	0.005	64	72	76
	0.01	38	41	42
	0.02	21	22	22
	0.03	15	15	15
0.75	0	200	300	400
	0.005	73	83	90
	0.01	45	48	51
	0.02	25	26	27
	0.03	18	18	18
1.00	0	200	300	400
	0.005	80	92	100
	0.01	50	55	57
	0.02	29	30	31
	0.03	20	21	21

esforzado; en consecuencia no tiene mayor significado que el aro termine en la zona a tensión. Conservadoramente se sugiere que ρ_s para este caso todavía se defina como la relación del volumen del acero del aro al volumen del concreto encerrado por los aros, en vez de mediante cualquiera nueva definición que considere un volumen efectivo del aro y el volumen del concreto comprimido.

En la práctica se pueden necesitar distintos arreglos de acero transversal que comprendan aros traslapados o aros con ganchos transversales suplementarios para proporcionar soporte lateral a las varillas longitudinales intermedias. Estos ganchos transversales adicionales a través de la sección ayudan a confinar el concreto y se deben tomar en cuenta. Para incluir el efecto de tales ganchos transversales adicionales, se puede calcular el parámetro Z en la relación esfuerzo - deformación para aros simples para la sección de concreto particionado. A manera de ejemplo, considérese la sección de columna con aros traslapados mostrada en la fig. 6.16*c*. Para determinar Z de la ec. 6.27 para el bloque de esfuerzos de

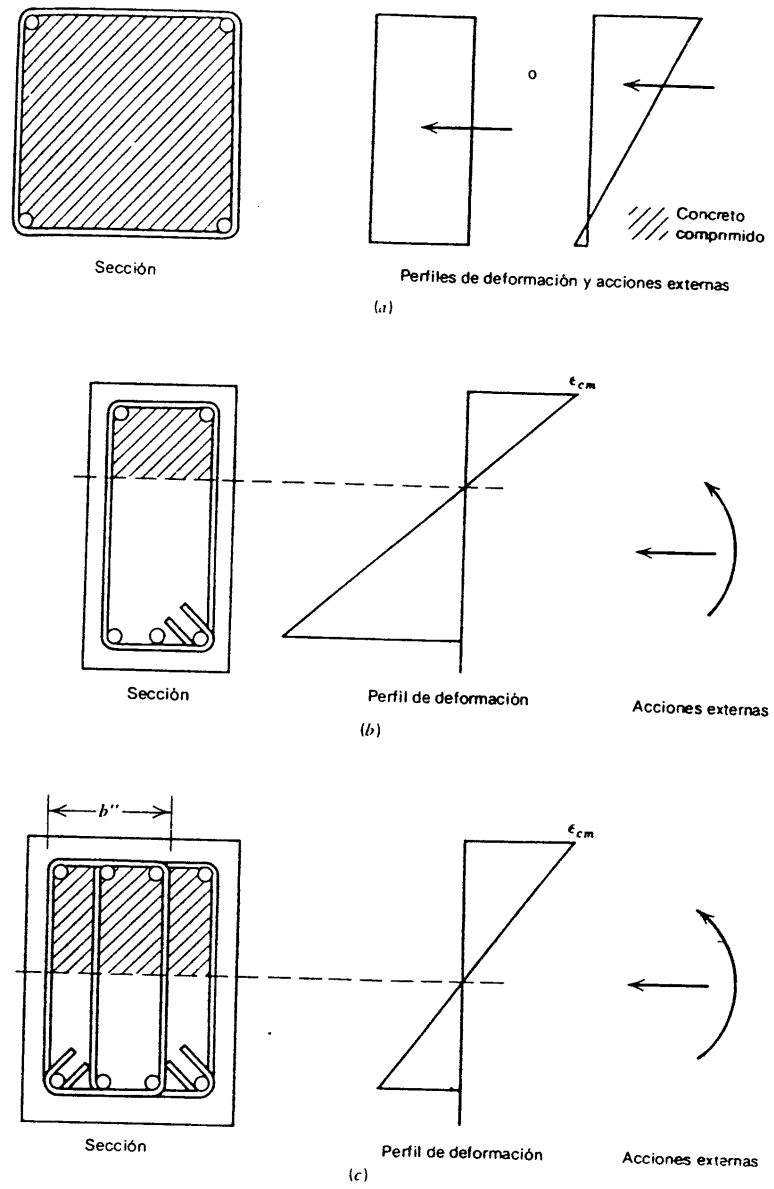


Figura 6.16 Acero transversal de confinamiento en los miembros. (*a*) Tipo de espécimen utilizado para determinar la curva esfuerzo - deformación.[6.5] (*b*) Miembro con aros simples. (*c*) Miembro con aros traslapados.

compresión de esta sección, sería razonable suponer que ρ_s es la relación del volumen de un aro al volumen del núcleo de concreto dentro de este aro, b'' es el ancho del lado de un aro y s_h es la separación de los conjuntos de aros traslapados. Esta definición de ρ_s es más conservadora que la alternativa de considerar a ρ_s como la relación del volumen total de aros al volumen total de núcleo de concreto, pero dada la carencia de datos de prueba relativa a la eficiencia de los aros traslapados, probablemente sea más prudente utilizar la definición más conservadora. Es evidente que se requiere más trabajo experimental para probar la eficiencia de distintos arreglos de acero transversal que comprendan aros con ganchos transversales suplementarios y aros traslapados.

6.5.3 Curvas teóricas momento - curvatura para secciones con concreto confinado

Las curvas teóricas momento - curvatura para secciones de concreto reforzado confinado se pueden obtener utilizando el procedimiento descrito en la Sección 6.2.2 y las curvas esfuerzo - deformación para el concreto confinado y acero.

Aquí se utilizará la curva esfuerzo - deformación para el concreto confinado mostrada en la fig. 2.18, que proporcionó los parámetros del bloque de esfuerzos deducidos en la Sección 6.5.2. A deformaciones grandes es probable que el concreto no confinado fuera de los aros (el concreto de recubrimiento) se desconche, lo que es especialmente cierto para las secciones que contienen aros transversales abundantes, ya que el acero transversal crea un plano de debilidad que tiende a precipitar el desconchamiento del recubrimiento. Para pequeñas cantidades de acero transversal, el concreto de recubrimiento tiende a actuar más en conjunto con el concreto del núcleo. Es difícil determinar a que deformación se inicia el desconchamiento del recubrimiento ya que dicho proceso ocurre gradualmente. Sin embargo, se puede suponer que el recubrimiento sigue la misma curva esfuerzo - deformación que el concreto confinado hasta una deformación de 0.004, pero que no toma ningún esfuerzo a deformaciones más elevadas. Baker y Amarakone[6.6] también hicieron esta suposición de la inefectividad del recubrimiento de concreto a deformaciones mayores que 0.0035, y Blume y colaboradores[6.2] a deformaciones mayores que 0.004. Sin embargo otros (v.gr., Corley[6.7]) han ignorado el desconchamiento del concreto a deformaciones más elevadas. El comportamiento real está en algún punto entre esos dos límites.

A grandes deformaciones también es probable que el acero haya entrado al rango de endurecimiento por deformación. En consecuencia, para obtener una estimación exacta de la relación momento - curvatura se debe considerar el perfil real de la curva esfuerzo - deformación del acero. La fig. 2.25*c* muestra el perfil general de la curva esfuerzo - deformación del

acero. Hay tres regiones, que se pueden representar mediante las siguientes ecuaciones:

región AB: $\varepsilon_s \leqslant \varepsilon_y$

$$f_s = \varepsilon_s E_s \tag{6.28}$$

región BC: $\varepsilon_y \leqslant \varepsilon_s \leqslant \varepsilon_{sh}$

$$f_s = f_y \tag{6.29}$$

región CD: $\varepsilon_{sh} \leqslant \varepsilon_s \leqslant \varepsilon_{su}$

$$f_s = f_y\left[\frac{m(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}) + 2}{60(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh}) + 2} + \frac{(\varepsilon_s - \varepsilon_{sh})(60 - m)}{2(30r + 1)^2}\right] \tag{6.30}$$

en que

$$m = \frac{(f_{su}/f_y)(30r + 1)^2 - 60r - 1}{15r^2} \tag{6.31}$$

$$r = \varepsilon_{su} - \varepsilon_{sh} \tag{6.32}$$

La notación utilizada en las ecs. 6.28 a 6.32 está ilustrada en la fig. 2.25*c*. La ec. 6.30 es similar a la que obtuvieron Burns y Siess[6.8] excepto porque sigue una forma generalizada para el acero con distintos valores de f_{su}/f_y y ε_{su}. Por lo común se ignora la posibilidad del pandeo del acero de compresión, debido a que se supone que el acero transversal está a centros suficientemente próximos para impedirlo. Es difícil estimar con exactitud la carga de pandeo del refuerzo de acero en las vigas (véase la Sección 13.5). Después de que el recubrimiento se ha desconchado puede existir cierta restricción lateral del concreto que lo rodea. Adicionalmente, la curvatura de la varilla debe cambiar de signo para pandearse, debido a que habrá seguido la curvatura del miembro.

Ejemplo 6.2

Una sección de viga de concreto simplemente reforzada (fig. 6.17*a*) contiene estribos cerrados núm. 3 (9.5 mm de diámetro) a centros de 4 plg (102 mm) y cuatro varillas longitudinales núm. 9 (28.7 mm de diámetro). El recubrimiento es de 1 1/2 plg (38 mm). El acero tiene una resistencia de cedencia de 52,000 lb/plg^2 (359 N/mm^2), un módulo de elasticidad de 29×10^6 lb/plg^2 (200,000 N/mm^2) y el endurecimiento por la deformación comienza a una deformación de 16 veces la deformación de cedencia. El concreto tiene una resistencia de cilindro de 4000 lb/plg^2 (27.6 N/mm^2).

Calcular el momento y la curvatura cuando la deformación del concreto en la parte superior del concreto confinado es de 0.008, utilizando los parámetros del bloque de esfuerzos de la tabla 6.2.

Solución

La dimensión del concreto confinado al exterior de los estribos es de 9 plg por 17 plg. Las dimensiones a las líneas de centros de los estribos son de 8.63 plg por 16.63 plg.

$$\therefore \quad \rho_s = \frac{0.11 \times 2(8.63 + 16.63)}{9 \times 17 \times 4} = 0.0091$$

En consecuencia, de la ec. 6.27 (o de la tabla 6.3)

$$Z = \frac{0.5}{(3 + 8)/3000 + \frac{3}{4} \times 0.0091\sqrt{9/4} - 0.002} = 42$$

Se requiere una solución a base de pruebas sucesivas para determinar la profundidad del eje neutro. Se estima que el eje neutro está a 7.5 plg por debajo de la parte superior de la sección original. Entonces, debido a que se requiere que la deformación en la parte superior del concreto confinado sea de 0.008, se puede dibujar el diagrama de deformaciones como en la fig. 6.17*b*. Si se considera que el concreto no confinado que tenga una deformación de compresión mayor que 0.004 ya no es efectivo, el área restante a compresión se asemeja a la fig. 6.17*b*. Se supone que el concreto no confinado restante tiene la misma curva esfuerzo - deformación que el concreto confinado.

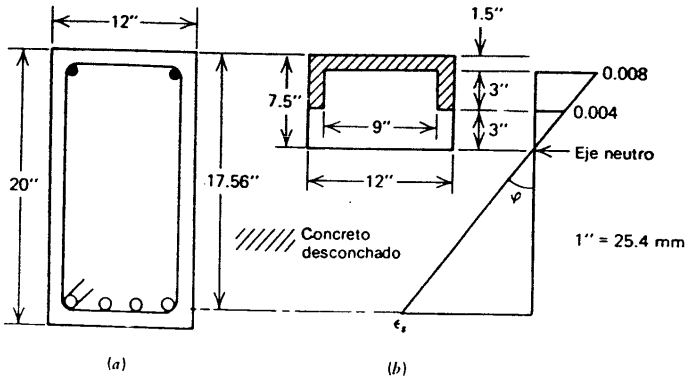


Figura 6.17 Ejemplo 6.2. (*a*) Sección. (*b*) Area comprimida de concreto y diagrama de deformación para la profundidad estimada del eje neutro.

Para el concreto dentro de los estribos

De la tabla 6.2 con $\varepsilon_{cm} = 0.008$ y $Z = 41$, se encuentra

$\alpha = 0.824 \qquad \gamma = 0.484$

En consecuencia, la fuerza de compresión en el concreto confinado

$= 0.824 \times 4000 \times 9 \times 6 = 178{,}000$ lb

que actúa a una distancia del acero de tensión

$= 17.56 - 1.5 - 0.484 \times 6 = 13.16$ plg

Para el concreto fuera de los estribos

De la tabla 6.2 con $\varepsilon_{cm} = 0.004$ y $Z = 41$, se encuentra

$\alpha = 0.812 \qquad \gamma = 0.432$

En consecuencia, la fuerza de compresión en este concreto

$= 0.812 \times 4000 \times 3 \times 3 = 29{,}200$ lb

que actúa a una distancia del acero de tensión

$= 17.56 - 4.5 - 0.432 \times 3 = 11.76$ plg

$\therefore \quad C = 178{,}000 + 29{,}200 = 207{,}200$ lb

Para el acero, del diagrama de deformaciones

$$\varepsilon_s = 0.008 \frac{17.56 - 1.5 - 6}{6} = 0.0134$$

Luego

$$\varepsilon_y = \frac{52{,}000}{29 \times 10^6} = 0.00179 < \varepsilon_s \qquad \text{y}$$

$16\varepsilon_y = 16 \times 0.00179 = 0.0287 > \varepsilon_s$

En consecuencia, el acero está en la resistencia de cedencia, $f_s = 52{,}000$ lb/plg^2.

$\therefore \quad T = 52{,}000 \times 4 = 208{,}000$ lb

Entonces $T \simeq C$ en consecuencia, se eligió la profundidad correcta del eje neutro.

$$\therefore \text{momento } M = (178{,}000 \times 13.16) + (29{,}200 \times 11.76)$$
$$= 2.69 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg } (304 \text{ kN} \cdot \text{m})$$
$$\text{curvatura } \varphi = \frac{0.008}{6}$$
$$= 0.00133 \text{ rad/plg } (0.0523 \text{ rad/m})$$

(Nota: Se puede mostrar que el momento anterior es 0.86 del momento en $\varepsilon_{cm} = 0.003$, lo que indica la pérdida de momento debida al desconchamiento del concreto, pero la curvatura es 2.66 veces mayor que en $\varepsilon_{cm} = 0.003$.)

Ejemplo 6.3

Determinar las curvas momento - curvatura posteriores a la cedencia para secciones de columna cuadradas de concreto reforzado con las siguientes propiedades fijas: $b = h = 30$ plg (762 mm), (762 mm), lb/plg² $f'_c = 4000$ (27 6 N/mm²), lb/plg² $E_s = 29 \times 10^6$ (200,000 N/mm²), $f_y = 40{,}000$ lb/plg² (276 N/mm²), lb/plg² $f_{su} = 66{,}800$ lb/plg² (461 N/mm²), $\varepsilon_{sh} = 16\varepsilon_y$, $\varepsilon_{su} = \varepsilon_{sh} + 0.14$, recubrimiento = 1.5 plg (38 mm), $P/f'_c bh = 0.3$.
Las propiedades variables son como sigue: acero longitudinal: $A_{st}/bh = 0.031$ y 0.055, distribuido uniformemente alrededor del perímetro de la sección; acero transversal: un rango de contenidos de acero transversal desde aros traslapados de 1/2 plg (12.7 mm) de diámetro con centros a 6 plg (152 mm) a aros traslapados de 3/4 plg (19.1 mm) de diámetro con centros a 2 plg (51 mm). En la fig. 6.18 se muestra la disposición del acero transversal.

Solución

En este ejemplo, se pueden calcular los valores de Z para los contenidos de acero transversal utilizando la ec. 6.27 y las suposiciones sugeridas al final de la sección 6.5.2. Para la disposición del acero transversal de la fig. 6.18 con aros traslapados de 1/2 plg de diámetro con centros a 6 plg, se tiene

$$Z = \frac{0.5}{\left(\frac{3+8}{3000}\right) + \left(\frac{3}{4} \times \frac{90 \times 0.20}{19 \times 27 \times 6}\sqrt{\frac{19}{6}}\right) - 0.002} = 52.7$$

Análogamente, para el arreglo de acero transversal con aros traslapados de 3/4 plg de diámetro con centros a 2 plg, $Z = 5.6$. También se pueden calcular los valores de Z para otros diámetros y separación de varillas transversales.

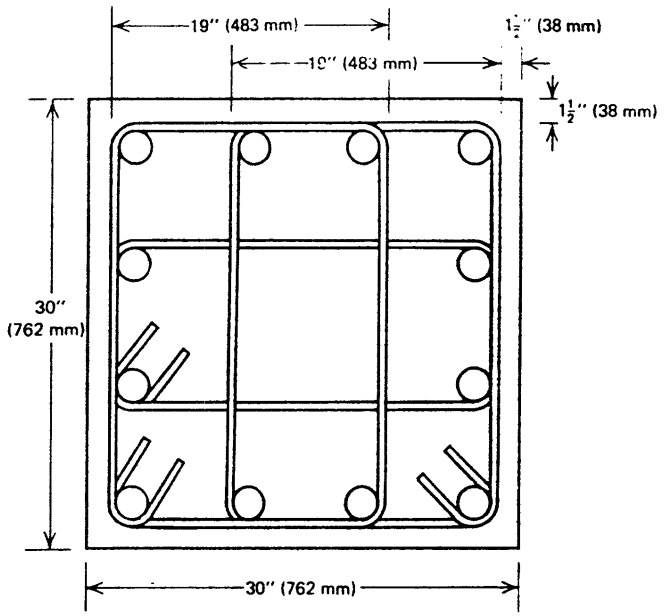


Figura 6.18. Arreglo de acero transversal, ejemplo 6.3.

La mejor forma de calcular las relaciones momento - curvatura es empleando una computadora digital. Para determinar las curvas momento - curvatura asociadas con distintos niveles de carga axial, es conveniente dividir la sección en una cantidad de láminas discretas, cada una con la orientación del eje neutro, y remplazar el refuerzo de acero mediante un tubo delgado equivalente con el espesor adecuado de pared como en la fig. 6.19. Entonces cada lámina contiene cierta cantidad de concreto de recubrimiento, concreto de núcleo y acero. Los esfuerzos en el concreto y acero en cada lámina se encuentran de la deformación promedio en la lámina y las relaciones esfuerzo - deformación. Las ecs. 2.6 y 2.7 con el valor apropiado de Z sustituido y la 2.11 dan las relaciones esfuerzo - deformación para el concreto. Las ecs. 6.28 a 6.32 proporcionan las relaciones esfuerzo - deformación para el acero.

Se puede determinar la relación teórica momento - curvatura para un nivel dado de carga incrementando la deformación del concreto en la fibra extrema a compresión, ε_{cm}. Para cada valor de ε_{cm} se encuentra la profundidad del eje neutro kd que satisface la ecuación del equilibrio de fuerzas

$$P = \sum_{i=1}^{n} f_{ci} A_{ci} + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si} \qquad (6.33)$$

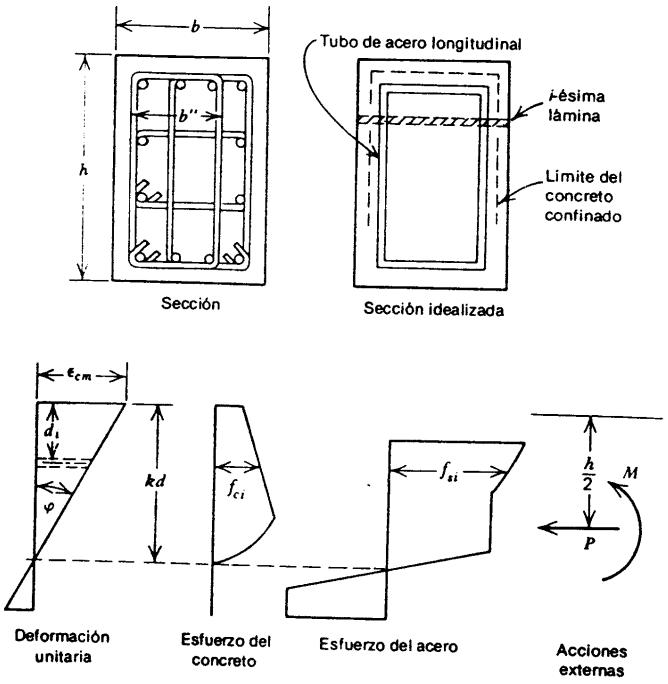


Figura 6.19. Sección con distribución de esfuerzos y deformaciones, ejemplo 6.3.

en que f_{ci}, f_{si} = esfuerzos en el concreto y acero en la i-ésima lámina, A_{ci}, A_{si} = áreas del concreto y acero en la i-ésima lámina y n = número de láminas. Entonces se determina el momento M, que corresponde a ese valor de ε_{cm} y carga P, tomando momentos de las fuerzas internas alrededor de un eje adecuado

$$M = \sum_{i=1}^{n} f_{ci} A_{ci} d_i + \sum_{i=1}^{n} f_{si} A_{si} d_i - P\frac{h}{2} \qquad (6.34)$$

y $\varphi = \varepsilon_{cm}/kd$, da la curvatura, en que d_i = distancia del centroide de la i-ésima lámina a la fibra extrema a compresión y h = peralte de la sección.

La fig. 6.20 grafica las relaciones momento - curvatura, para la sección en forma adimensional, para el nivel dado de carga, las dos cuantías de acero longitudinal y un rango de valores de Z que

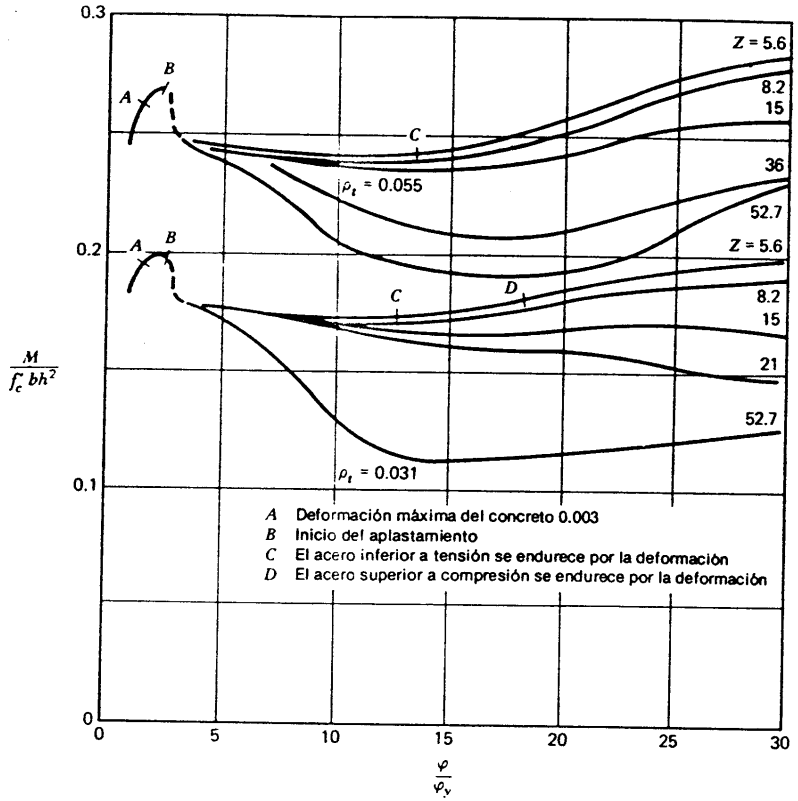


Figura 6.20. Curvas momento - ductilidad de curvatura para sección de columna con $P = 0.3f'_c bh$. ejemplo 6.3.

corresponden a los distintos contenidos de acero transversal. Las curvas muestran una repentina reducción en la capacidad del momento al inicio supuesto del aplastamiento de la capa de concreto de recubrimiento a una deformación de la fibra extrema de 0.004. Con mayor curvatura, la contribución del concreto a la capacidad de transmisión de momentos proviene del concreto de la cubierta, que está a una deformación inferior a 0.004, y del núcleo confinado. A curvaturas suficientemente elevadas para provocar el endurecimiento por deformación del acero a tensión, es claro que habrá un aumento significativo en el momento. Se ha supuesto que el acero a compresión no se pandea.

Las curvas de la fig. 6.20 ilustran que el buen confinamiento (valores bajos de Z) es esencial para la columna del ejemplo 6.3, si se requiere que

se mantenga una capacidad razonable de momentos después que haya comenzado el aplastamiento del recubrimiento. Si se hubieran considerado niveles de carga más elevados que $0.3f'_c bh$ la cantidad de acero de confinamiento hubiera sido todavía más importante. En general, a mayor nivel de carga, mayor será la cantidad de acero de confinamiento necesario para mantener una capacidad razonable de transmisión de momentos a curvaturas elevadas después del inicio del aplastamiento.

El ACI 318-71[6.1] requiere acero transversal especial, si la carga de diseño de la columna es mayor que $0.4P_b$, en que P_b es la carga balanceada a la falla. Una carga de $0.4P_b$ corresponde a un valor de $P/f'_c bh$ para la sección estudiada en el ejemplo 6.3 de aproximadamente 0.20 a 0.23, por lo que se requeriría acero transversal especial en la columna del ejemplo. Se puede obtener la cantidad de acero transversal especial, recomendado por el código para la disposición de los aros utilizados en el ejemplo, con aros de 5/8 plg (15.9 mm) de diámetro con centros a 2.8 plg (71 mm), lo que equivale a $Z = 13$. De la fig. 6.20, es evidente que para esta columna específica, la cantidad de acero transversal especificada por el código asegura que la capacidad de momentos después que se haya iniciado el aplastamiento del concreto se mantiene relativamente bien a mayores curvaturas. En el capítulo 11 se examina la cantidad de acero transversal requerido en los casos más generales.

6.6 DEFORMACIONES DE FLEXION DE LOS MIEMBROS

6.6.1 Cálculo de las deformaciones a partir de curvaturas

Se puede calcular la rotación y deflexión de un miembro integrando las curvaturas a lo largo del mismo. Ya que la curvatura se define como la rotación por longitud unitaria del miembro, la relación

$$\theta_{AB} = \int_A^B \varphi \, dx \tag{6.35}$$

proporciona la rotación entre dos puntos cualesquiera A y B del miembro, en que dx es un elemento de longitud del miembro.

La fig. 6.21 muestra un voladizo con deformación debida a la rotación $d\theta$ en el elemento de longitud dx solamente. La rotación $d\theta$ es igual a $\varphi \, dx$, en que φ es la curvatura en el elemento. La deflexión transversal $d\Delta$ en el punto A desde la tangente al eje del miembro en el extremo empotrado B, debido a la rotación $d\theta$ entre los extremos del elemento, es $x \, d\theta$ ó $x\varphi \, dx$. En consecuencia, la deflexión transversal del punto A desde la tangente al eje del miembro en el punto B debido a la curvatura a lo largo de toda la longitud del miembro entre esos puntos está dado por

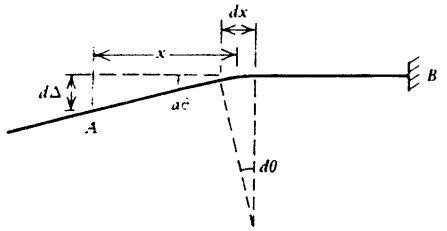


Figura 6.21. Deflexión debida a deformación por flexión de un elemento.

$$\Delta_{AB} = \int_A^B x\varphi \, dx \tag{6.36}$$

en que x es la distancia del elemento dx desde A.

Las ecs. 6.35 y 6.36 son generalizaciones de los teoremas del área de momento y se aplican si están involucradas curvaturas elásticas o plásticas. Se pueden utilizar estas dos ecuaciones para calcular las rotaciones y deflexiones de los miembros cuando se conocen las relaciones momento - curvatura, como se calcularon en las secciones anteriores, y la distribución del momento flexionante. Este tipo de enfoque que utiliza las ecs. 6.35 y 6.36 ignora el efecto del aumento en rigidez de los miembros, debido a la tensión que transmite el concreto entre las grietas, al igual que las deformaciones adicionales provocadas por las grietas a tensión diagonal debidas al cortante y por el deslizamiento de adherencia del refuerzo. En la siguiente sección se estudian estos efectos adicionales.

6.6.2 Efectos adicionales en las deformaciones de miembros calculadas a partir de las curvaturas

Efectos de la tensión del concreto entre grietas de flexión

La fig. 6.22*a* representa parte de un miembro a flexión de concreto reforzado. El miembro se ha agrietado a intervalos discretos, debido a que se ha excedido la resistencia a tensión del concreto. En la sección agrietada, el refuerzo de acero transmite toda la tensión. Sin embargo, hay cierto esfuerzo de tensión en el concreto entre las grietas, debido a que entre las grietas se transmite cierta tensión desde el acero al concreto por efecto de los esfuerzos de adherencia. La magnitud y distribución del esfuerzo de adherencia entre las grietas determina la distribución de los esfuerzos de tensión en el concreto y el acero entre las grietas. Se pueden formar grietas adicionales entre las grietas iniciales a momentos mayores, si se excede la resistencia a tensión del concreto. Se alcanza el espaciado de las grietas

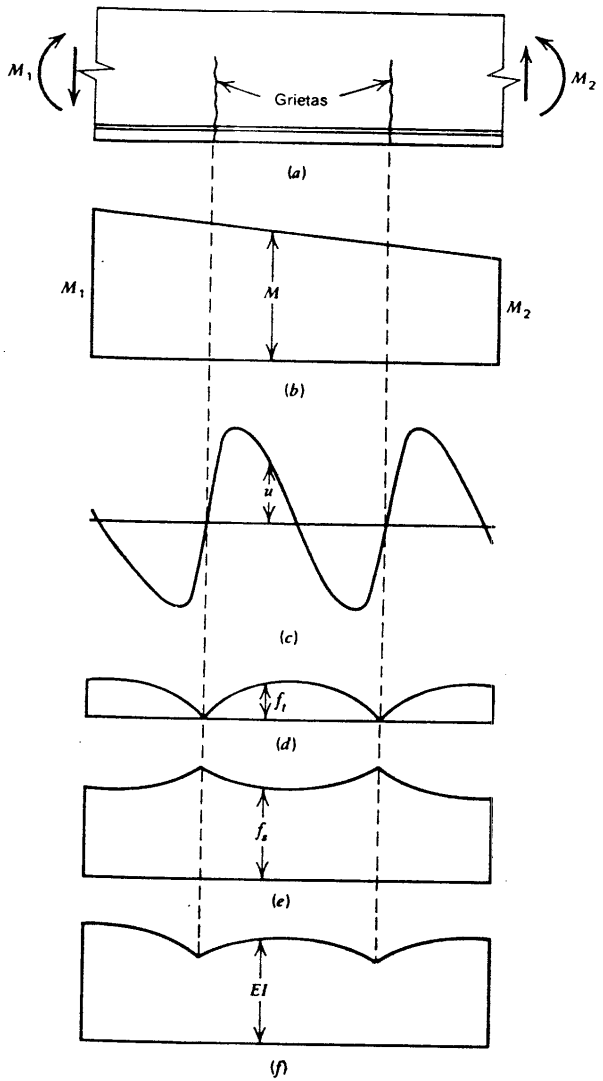


Figura 6.22. Efecto de agrietamiento de un elemento a flexión de concreto reforzado. (*a*) Elemento de viga. (*b*) Distribución de momento flexionante. (*c*) Distribución de esfuerzo de adherencia. (*d*) Distribución de esfuerzos de tensión del concreto. (*e*) Distribución de esfuerzos de tensión del acero. (*f*) Distribución de rigidez a flexión en el rango elástico.

finales, cuando ya no se puede transferir por adherencia del acero al concreto una fuerza de tensión de magnitud suficiente para formar una grieta adicional entre dos grietas existentes.

Las figs. 6.22*c*, 6.22*d* y 6.22*e* dan distribuciones idealizadas de esfuerzo de adherencia y esfuerzos de tensión del acero y concreto entre las grietas. Debido a que el miembro transmite cierta tensión entre las grietas, claramente la rigidez a flexión es mayor entre las grietas que en las grietas, como lo indica la fig. 6.22*f*. Esta variación en la rigidez a flexión entre las grietas, hace difícil determinar con exactitud las deformaciones a partir de las relaciones momento - curvatura en el rango elástico, debido a que las relaciones M–φ deducidas en las Secciones 6.2 a 6.5 no se aplican estrictamente a las secciones entre las grietas.

Se pueden estimar las deformaciones en el rango elástico sustituyendo la relación $\varphi = M/EI$ en las ecs. 6.35 y 6.36, en que M es el momento en el elemento y EI es la rigidez a flexión elástica en el elemento. El uso de un valor de EI que esté entre los valores "no agrietada" y "totalmente agrietada" lleva a una exactitud razonable. Como se verá en la Sección 10.3.3, el ACI 318-71[6.1] sugiere utilizar el siguiente momento efectivo de inercia para determinar la rigidez a flexión para los cálculos de deflexiones de miembros agrietados en el rango elástico:

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \qquad (6.37)$$

en que M_{cr} es el momento en el primer agrietamiento, M_a es el momento máximo en el miembro en la etapa para que se está calculando la deflexión, I_g es el momento de inercia de la sección bruta de concreto alrededor del eje centroidal, ignorando el refuerzo e I_{cr} es el momento de inercia de la sección transformada agrietada (toda en concreto). La rigidez a flexión obtenida utilizando el momento efectivo de inercia de la ec. 6.37 y el módulo de elasticidad del concreto está entre los valores para las condiciones "no agrietada" y "totalmente agrietada", en que la magnitud real depende del grado de agrietamiento. En la sección 10.3.3 se da la fundamentación de la ec. 6.37, que es empírica.

Cuando el momento máximo excede considerablemente el momento de agrietamiento, la ec. 6.37 indica que el efecto rigidizante de la tensión tomada por el concreto entre las grietas tiene mucho menor significado, y el valor I_{cr} de la sección agrietada puede utilizarse con poco error. Este efecto rigidizante de la tensión es especialmente pequeño en las regiones plásticas de los miembros.

Otro método de manejar el efecto rigidizante de la tensión del concreto entre grietas, usando una distribución supuesta de esfuerzo de adherencia, para calcular las relaciones efectivas momento - rotación, para elementos de vigas entre grietas, se estudia en la sección 6.6.5.

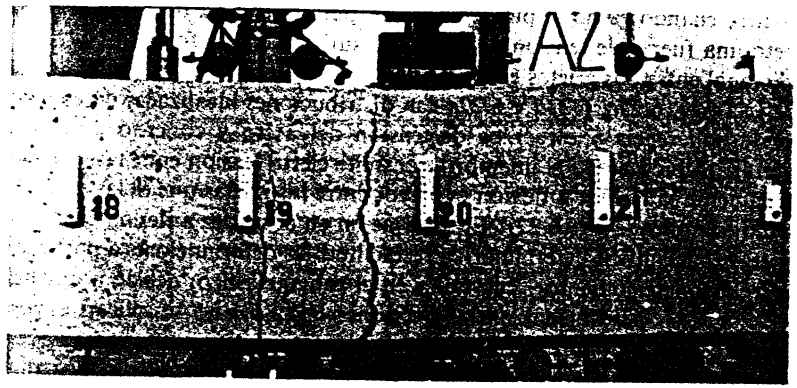


Figura 6.23. Grietas a flexión en una viga de concreto reforzado cerca del momento último sin fuerza cortante significativa.[6.9]

Efecto de las grietas de tensión diagonal y deslizamiento de adherencia

La determinación de las rotaciones y deflexiones integrando las curvaturas a lo largo de los miembros utilizando las ecs. 6.35 y 6.36 ignora los efectos en las deformaciones de las grietas de tensión diagonal debidas a la fuerza cortante, y al deslizamiento de adherencia en las zonas de anclaje.

Las grietas de tensión diagonal se forman en los miembros debido a la presencia de fuerzas cortantes relativamente grandes que actúan en conjunción con la flexión. El esfuerzo principal de tensión, desarrollado como resultado de los esfuerzos combinados a cortante y a flexión, está inclinado formando un ángulo con el eje del miembro y produce grietas de tensión diagonal (inclinadas). Las figs. 6.23 y 6.24 muestran grietas desarrolladas en los miembros a flexión de concreto reforzado cerca del momento último, en ausencia de fuerza cortante y en presencia de fuerza cortante, respectivamente. Es evidente la inclinación de las grietas debido a la presencia de fuerza cortante. Como lo muestra la fig. 6.23, cuando sólo ocurren grietas a flexión, la cedencia del acero de tensión se concentra a través de una o dos grietas críticas. Sin embargo, cuando hay grietas de tensión diagonal, la cedencia del acero ocurre en una zona mucho más ancha, como lo revela el agrietamiento más extenso en la fig. 6.24. En la sección 7.5.1 se estudia este efecto con relación al efecto de la fuerza cortante en el requerimiento de acero por flexión. Se demuestra que cuando hay grietas de tensión diagonal en un miembro, la tensión en el refuerzo por flexión en las secciones alejadas de la sección del momento máximo puede ser mayor que la calculada del diagrama de momento flexionante. En la fig. 7.19 se ilustra este efecto de agrietamiento por tensión diagonal. Es evidente que la tensión interna permanece casi constante en el valor

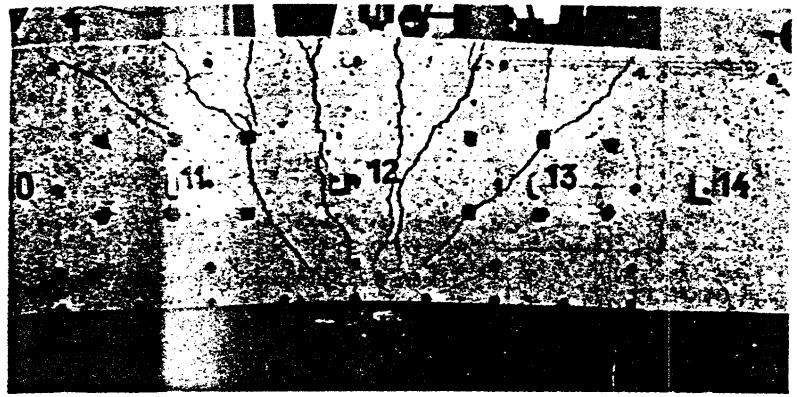


Figura 6.24. Grietas de tensión diagonal en una viga de concreto reforzado cerca del momento último con fuerza cortante significativa. [6.9]

máximo en una distancia e_v de la sección crítica. La distancia e_v depende del peralte del miembro y del contenido de refuerzo del alma, como se muestra en la fig. 7.20. En consecuencia, cuando hay grietas de tensión diagonal, la región en que el refuerzo cede (la zona de articulación plástica) es más extensa de lo que implica el diagrama de momentos flexionantes. Algunos investigadores han sugerido usar un diagrama de momentos flexionantes desplazados horizontalmente en las zonas plásticas, como en las figs. 7.19 y 7.20, para calcular las curvaturas (v.gr. Rosenblueth y Díaz de Cossío[6.10] y Sawyer[6.11]).

El deslizamiento de adherencia del refuerzo en zonas de anclaje también aumenta las deformaciones. Se puede tomar en cuenta el efecto de deslizamiento de adherencia si se conoce la cantidad de deslizamiento. Por ejemplo, si δ, es el deslizamiento del acero de tensión de la viga a través del núcleo de la unión viga-columna (fig. 6.25), la rotación adicional de la viga en la cara de la columna será $\delta/(d - c)$, en que $d - c$ es la distancia desde el acero de tensión al eje neutro.

No obstante las dificultades obvias de explicar con exactitud las deformaciones adicionales debidas al cortante y al deslizamiento de adherencia, a menudo es posible obtener concordancia razonable entre las rotaciones y desplazamientos calculados y experimentales directamente de la distribución de momentos flexionantes y las relaciones momento - curvatura, ya que no siempre es importante el efecto del cortante y el deslizamiento de adherencia. En general, las rotaciones plásticas calculadas ignorando el efecto del cortante y del deslizamiento de adherencia subestiman las rotaciones plásticas reales, lo que da una indicación conservadora de la ductilidad disponible.

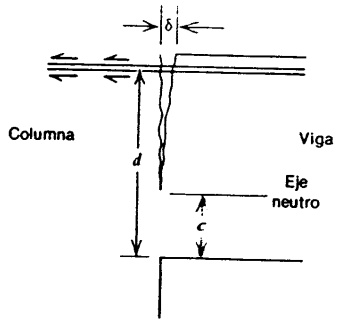


Figura 6.25. Efecto del deslizamiento de adherencia del refuerzo en la deformación.

6.6.3 Deformaciones máximas idealizadas calculadas a partir de las curvaturas

La fig. 6.26 muestra parte de un miembro a flexión de concreto reforzado que ha alcanzado la curvatura máxima y momento flexionante en la sección crítica. Por ejemplo, el extremo A del miembro es el extremo libre de un voladizo o un punto de inflexión, y el extremo B es una cara de columna. Es evidente la distribución de la curvatura a lo largo del miembro. La región de curvatura inelástica se extiende sobre una longitud de la viga, como se estudiara anteriormente, y esta región es al menos aquélla en que el momento flexionante excede el momento de cedencia de la sección. En las regiones de la viga, la curvatura fluctúa debido a la mayor rigidez del miembro entre las grietas, como se describió antes. Cada uno de los picos de curvatura corresponde a una posición de grieta.

En las predicciones de ductilidad es necesario determinar la deformación ocurrida cuando se alcanza el momento último. Se puede obtener la rotación y la deflexión del miembro en la condición última a partir de la distribución de curvatura real utilizando las ecs. 6.35 y 6.36. Se puede idealizar la distribución real de la curvatura en el momento último en regiones elástica e inelástica (vease la fig. 6.26*c*). Usando $\varphi = M/EI$ de las ecs. 6.35 y 6.36 se puede calcular la contribución elástica a la rotación y a la deflexión.

$$\theta = \int_A^B \frac{M}{EI}\,dx \tag{6.38}$$

La relación proporciona la contribución elástica a la rotación en toda la longitud del miembro (el área no sombreada del diagrama de curvatura de la fig. 6.26*c*) en que la rigidez a flexión EI está dada por una idealización apropiada. Si se supone una sección completamente agrietada a lo largo de toda la longitud del miembro, $E_c I_{cr} = M_y/\varphi_y$, da EI, o aproximadamente la da M_u/φ_y. Como se viera anteriormente, estos valores sobrestiman la rotación elástica (también vease la fig. 6.27 para una comparación), y usando $E_c I_e$ daría un resultado más exacto, con I_e de la ec. 6.37.

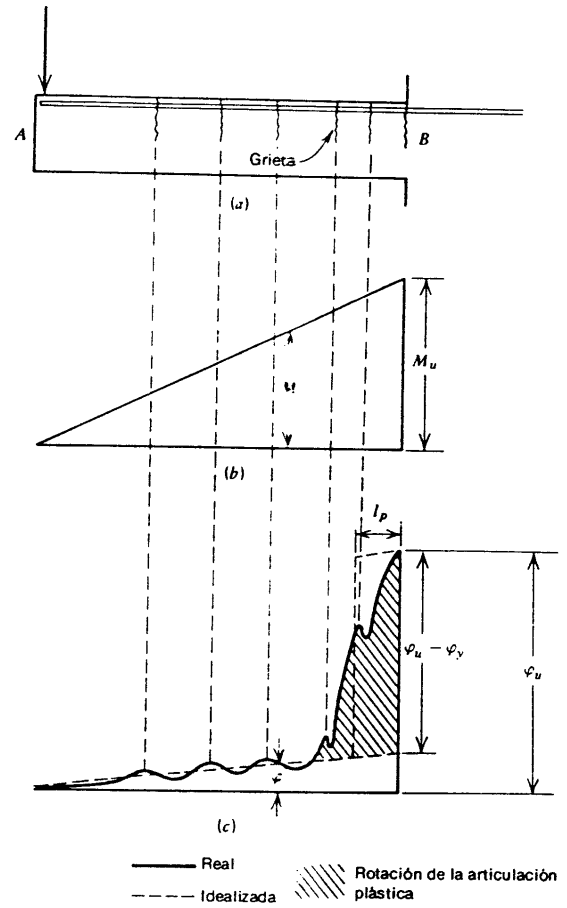


Figura 6.26. Distribución de curvatura a lo largo de una viga bajo momento último. (*a*) Viga. (*b*) Diagrama de momento flexionante. (*c*) Diagrama de curvatura.

El área sombreada de la fig. 6.26*c* es la rotación inelástica que puede ocurrir en la "articulación plástica" en la vecindad de la sección crítica. Es decir que el área sombreada representa la rotación plástica que ocurre además de la rotación elástica en la etapa última del miembro. Se puede reemplazar el área inelástica en la etapa última mediante un rectángulo equivalente de altura $\varphi_u - \varphi_y$ y anchura l_p, que tenga la misma área que la distribución real de curvatura inelástica, como en la fig. 6.26*c*. El ancho l_p es la longitud equivalente de la articulación plástica en que se considera

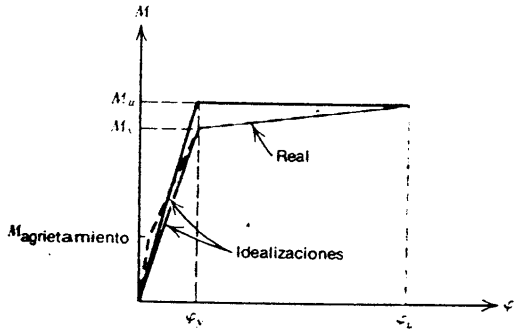


Figura 6.27. Curvas real e idealizada momento - curvatura en las secciones agrietadas.

constante la curvatura plástica. En consecuencia, la rotación de la articulación plástica a un lado de la sección crítica se puede escribir como

$$\theta_p = (\varphi_u - \varphi_y) l_p \tag{6.39}$$

Ejemplo 6.4

Para el voladizo AB de la fig. 6.38*a* con la carga concentrada, determinar la rotación entre los extremos y la deflexión vertical del extremo, cuando se alcanza el momento último en la sección crítica. Se puede suponer una distribución de curvatura inelástica idealizada y una sección completamente agrietada en la región elástica. Se pueden ignorar los efectos de cortante y deslizamiento de adherencia.

Solución

Las figs. 6.28*b* y 6.28*c* representan el diagrama de momentos flexionantes y la distribución de curvatura supuesta en el momento último, respectivamente. La ec. 6.35 o las ecs. 6.38 y 6.39 dan la rotación entre A y B.

$$\therefore \quad \theta_{AB} = \theta_e + \theta_p$$
$$= \varphi_y \frac{l}{2} + (\varphi_u - \varphi_y) l_p$$

Nótese que θ_{AB} es el área del diagrama de curvatura.

La ec. 6.36 da la deflexión vertical en A como el momento del diagrama de curvatura alrededor de A.

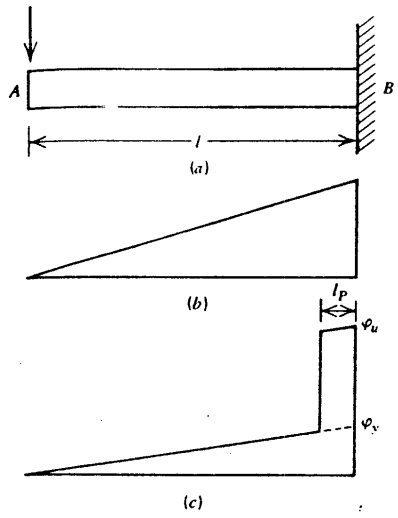


Figura 6.28. Ejemplo 6.4. (*a*) Voladizo. (*b*) Distribución de momento flexionante. (*c*) Distribución de curvatura.

$$\therefore \quad \Delta_{AB} = \left(\frac{\varphi_y l}{2}\frac{2l}{3}\right) + (\varphi_u - \varphi_y) l_p \left(1 - \frac{l_p}{2}\right)$$

6.6.4 Expresiones empíricas para la rotación plástica máxima calculada a partir de las curvaturas

Las variables significativas

La ec. 6.39 da la rotación plástica en términos de las curvaturas en el momento último, del esfuerzo de cedencia y de la longitud de la articulación plástica equivalente. En la fig. 6.29 se muestran los diagramas de deformación cuando hay tensión en parte de la sección en estas etapas. De las ecs. 6.1 y 6.39, la rotación de la articulación plástica a un lado de la sección crítica es:

$$\theta_p = \left(\frac{\varepsilon_c}{c} - \frac{\varepsilon_{ce}}{kd}\right) l_p \tag{6.40}$$

en que c es la profundidad del eje neutro en el momento último, ε_c es la deformación del concreto en la fibra extrema a compresión en la curvatura última, kd es la profundidad del eje neutro cuando se alcanza la curvatura de cedencia y ε_{ce} es la deformación del concreto en la fibra extrema a compresión, cuando se alcanza la curvatura de cedencia. Por lo general, ε_{ce} es la deformación del concreto cuando cede el acero de tensión, aunque el

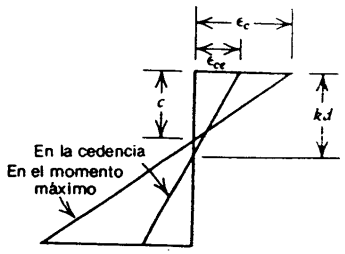


Figura 6.29. Diagramas de deformación en cedencia y curvaturas últimas.

concreto puede alcanzar la región inelástica antes que ceda el acero de tensión en columnas cargadas intensamente o vigas sobrerreforzadas. Se puede considerar que la deformación en el extremo del rango elástico del concreto es de 0.001 o mayor, según la resistencia del mismo (véase la fig. 2.1 o 2.2). En consecuencia ε_{cc} es la deformación del concreto en el extremo del rango elástico o la deformación del concreto cuando el acero de tensión comienza a ceder, lo que sea más pequeño.

Para estimar θ_p de la ec. 6.40, se debe conocer la longitud equivalente de la articulación plástica l_p La fig. 6.30*a* es el diagrama momento - curvatura para las secciones de un miembro. La fig. 6.30*b* da la distribución del momento flexionante y el momento interno *Tjd* a lo largo del miembro, cuando se alcanza el momento último en la región crítica para dos casos de agrietamiento. El diagrama de la izquierda de la fig. 6.30*b* corresponde al caso en que sólo hay grietas de flexión; el diagrama de la derecha es para cuando hay grietas de tensión diagonal. Como se indica en la sección 6.6.2, las grietas de tensión diagonal ocasionan fuerzas de tensión T más elevadas en el refuerzo de flexión que lo que implica el diagrama de momentos flexionantes, en las secciones alejadas de la sección de momento flexionante máximo. Para ambos casos de agrietamiento, en todas las regiones de la viga en que el momento interno excede al momento de cedencia M_y, el acero está cediendo. La distribución de curvatura en la región teórica de cedencia ($M_y \leqslant M \leqslant M_u$) en el miembro sin grietas de tensión diagonal puede calcularse de las ordenadas del momento flexionante y del diagrama momento - curvatura, como se muestra en la fig. 6.30*c*. Se puede estimar el valor de l_p de la distribución determinada de curvatura inelástica, determinando el ancho del rectángulo que tenga la misma área que la distribución de curvatura inelástica. Para el miembro con grietas de tensión diagonal, la curva momento - curvatura se aplica sólo muy aproximadamente al diagrama de momentos internos (*Tjd*) En consecuencia, no se puede estimar con exactitud la curvatura inelástica adicional debida a las grietas diagonales. Sin embargo, la fig. 6.30 indica las variables que pueden influir en la longitud equivalente de la articulación plástica l_p. El tipo de acero y la resistencia del concreto afectan el

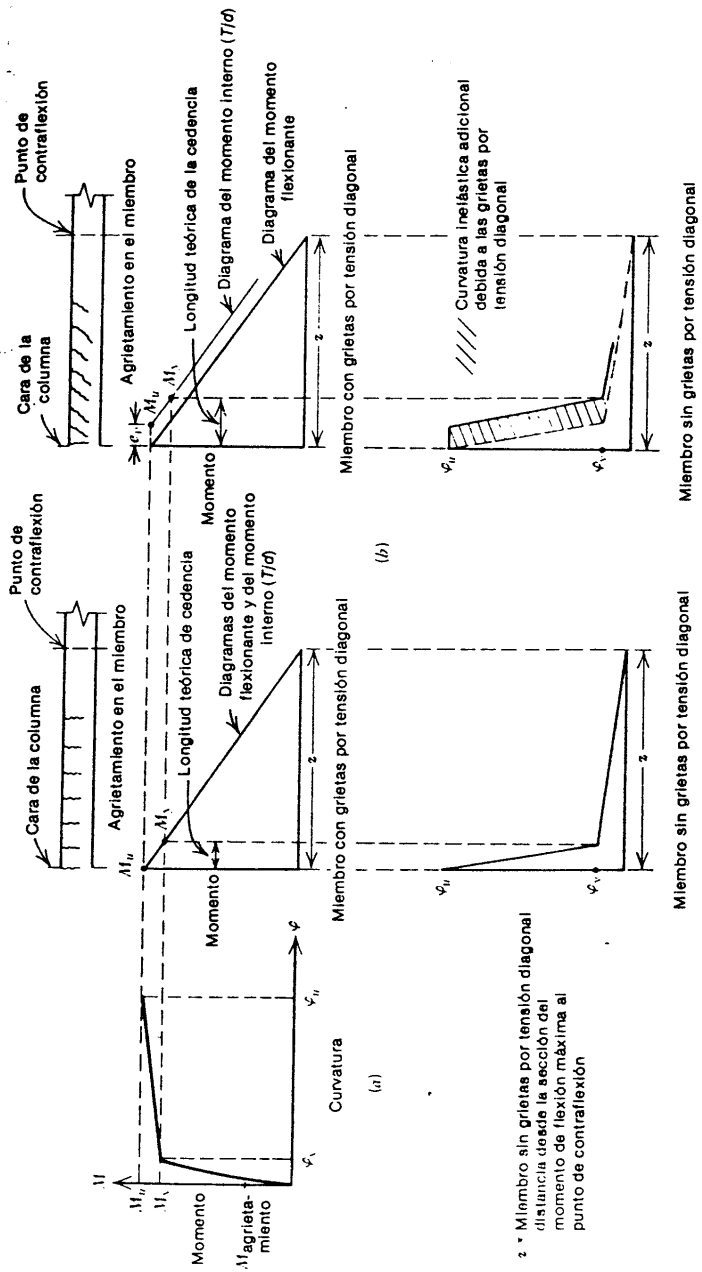


Figura 6.30. Extensión de la zona de cedencia a lo largo de un miembro en el momento último. (*a*) Relación momento - curvatura. (*b*) Diagramas de momentos flexionantes e internos. (*c*) Diagramas de curvatura idealizada.

perfil de la curva momento - curvatura, por lo que influyen en la longitud de cedencia y en la distribución de la curvatura en la zona de cedencia para una distribución de momentos flexionantes dada. Adicionalmente, la distancia z desde la sección crítica al punto de inflexión tendrá un efecto significativo en l_p debido a que como indica la fig. 6.30, a mayor valor de z, mayor la longitud de cedencia. A estas variables se debe agregar el efecto del cortante, que quizás esté mejor expresado por la intensidad nominal del esfuerzo constante V/bd.

Expresiones empíricas

Los investigadores han propuesto distintas expresiones empíricas para la longitud equivalente de la articulación plástica l_p y la deformación ε_c máxima del concreto en la curvatura última, que se estudian a continuación.

BAKER[6.2,6.13,6.6]

1. *Para miembros con concreto no confinado*

$$l_p = k_1 k_2 k_3 \left(\frac{z}{d}\right)^{1/4} d \tag{6.41}$$

en que $k_1 = 0.7$ para acero suave ó 0.9 para acero rolado en frío,
$k_2 = 1 + 0.5P_u/P_0$, en que P_u = fuerza axial de compresión en el miembro y P_0 = resistencia axial a compresión del miembro sin momento flexionante
$k_3 = 0.6$ cuando $f'_c = 5100$ lb/plg^2 (35.2 N/mm^2) ó 0.9 cuando $f'_c = 1700$ lb/plg^2 (11.7 N/mm^2), suponiendo $f'_c = 0.85 \times$ resistencia de cubo del concreto
z = distancia de la sección crítica al punto de inflexión.
d = peralte efectivo del miembro

Baker ha indicado que para el intervalo de las relaciones claro/d y z/d normalmente encontradas en la práctica, l_p toma valores entre $0.4d$ y $2.4d$.

2. *Para miembros confinados por acero transversal*

En trabajos recientes reportados por Baker[6.6] se propone una expresión para θ_p que implica que para los miembros con tensión en parte de la sección

$$l_p = 0.8 k_1 k_3 \left(\frac{z}{d}\right) c \tag{6.42}$$

en que c es la profundidad del eje neutro en el momento último y los otros símbolos tienen el significado anterior.

Cuando se utiliza la ec. 6.41 en combinación con la ec. 6.40, $\varepsilon_c = 0.0035$

Cuando se utiliza la ec. 6.42 en combinación con la ec. 6.40, ε_c tiene el siguiente valor:

$$\varepsilon_c = 0.0015\left[1 + 150\rho_s + (0.7 - 10\rho_s)\frac{d}{c}\right] \leqslant 0.01 \tag{6.43}$$

en que ρ_s es la relación del volumen del refuerzo transversal de confinamiento al volumen del núcleo de concreto.

Cuando se emplean estos valores en los cálculos de resistencia, Baker recomienda que se utilice un bloque de esfuerzos de compresión de concreto dado por la curva esfuerzo - deformación de la fig. 2.17*b*, en que L_2 es el valor límite de la deformación dado por 0.0035 para concreto no confinado o por la ec. 6.43 para el concreto confinado. El esfuerzo máximo f''_c del concreto está dado por

$$f''_c = \left(0.8 + 0.1\frac{d}{c}\right) f'_c \leqslant f'_c \tag{6.44}$$

Baker recomienda que se considere que el concreto no confinado en deformaciones mayores que 0.0035 se ha desconchado y que no es efectivo.

Los resultados de las pruebas para θ_p muestran una dispersión considerable debida principalmente a la variación de la deformación del concreto en la curvatura última. Baker asevera que el valor de θ_p dado por las ecuaciones anteriores proporciona una predicción razonablemente segura de la rotación plástica disponible, debido a que se han utilizado valores límites seguros.

CORLEY[6.7]

De los resultados de pruebas en vigas simplemente soportadas, Corley ha propuesto la siguiente expresión para la longitud equivalente de la articulación plástica:

$$l_p = 0.5d + 0.2\sqrt{d}\left(\frac{z}{d}\right) \tag{6.45}$$

También sugiere la siguiente como límite inferior para la deformación máxima del concreto:

$$\varepsilon_c = 0.003 + 0.02\frac{b}{z} + \left(\frac{\rho_s f_y}{20}\right)^2 \tag{6.46}$$

en que z = distancia desde la sección crítica al punto de inflexión, b = ancho de la viga, b = peralte efectivo de la viga en pulgadas (1 plg =

25.4 mm), ρ_s = relación del volumen del acero de confinamiento (incluyéndose el acero de compresión) al volumen del núcleo de concreto y f_y = resistencia de cedencia del acero de confinamiento en kips por pulgada cuadrada (1 kip/plg² = 6.89N/mm²). Se puede calcular la rotación plástica sustituyendo estos valores de l_p y ε_c en la ec. 6.40.

Al estudiar la publicación de Corley, Mattock[6.14] sugirió que dos formas más simples de las ecs. 6.45 y 6.46 que ajustaban la tendencia de los datos razonablemente bien eran

$$l_p = 0.5d + 0.05z \tag{6.47}$$

$$\varepsilon_c = 0.003 + 0.02\frac{b}{z} + 0.2\rho_s \tag{6.48}$$

Esta modificación a la ecuación para ε_c la hace más conservadora para valores elevados de ρ_s.

Al utilizar estos valores en cálculos de resistencia, se ignoró el desconchamiento del recubrimiento a deformaciones elevadas y se emplearon los parámetros del bloque de esfuerzos de concreto a compresión del ACI. También se enfatizó que a curvaturas últimas grandes las deformaciones del acero son elevadas, y el acero puede estar en el rango de endurecimiento de deformación. La fuerza de tensión incrementada por el endurecimiento de deformación aumenta la profundidad del eje neutro y debe tomarse en cuenta al calcular c, pues en caso contrario puede sobrestimarse la curvatura última.

SAWYER[6.11]

Sawyer propone la siguiente expresión para la longitud equivalente de la articulación plástica:

$$l_p = 0.25d + 0.075z \tag{6.49}$$

Esta ecuación se basa en las suposiciones de que el momento máximo en el miembro es el momento último, que $M_y/M_u = 0.85$, y de que la zona de cedencia se extiende a $d/4$ más allá de la sección en que el momento flexionante se reduce a M_y.

Ejemplo 6.5

Calcular la longitud de la articulación plástica equivalente de una viga de concreto reforzada con acero suave, en que f'_c = 3000 lb/plg² (20.7 N/mm²) y $z/d = 5$.

Solución

La ecuación de Baker (6.41) $l_p = 0.7 \times 1 \times 0.79(5)^{1.4}d = 0.83d$
La ecuación de Mattock (6.47) $l_p = (0.5 + 0.05 \times 5)d = 0.75d$
La ecuación de Sawyer (6.49) $l_p = (0.25 + 0.075 \times 5)d = 0.63d$

Se debe notar que l_p es la longitud de la articulación plástica equivalente en un lado de la sección crítica. En consecuencia, una articulación plástica dentro del claro de una viga cargada simétricamente tendrá una longitud equivalente total de $2l_p$.

Las diferencias entre las distintas expresiones empíricas demuestran que en la actualidad sólo se puede conocer aproximadamente la capacidad de rotación de las articulaciones plásticas en los miembros de concreto reforzado. Se necesita más investigación para aclarar las diferencias entre las distintas expresiones empíricas.

6.6.5 Enfoque alterno para el cálculo de las deformaciones en base a la suma de rotaciones discretas en las grietas

Bachmann[6.9] propuso en 1970 un método para calcular las deformaciones de los miembros a flexión de concreto reforzado a partir de las rotaciones de los elementos entre las grietas más que de las curvaturas en las secciones. El método toma en cuenta el efecto de la inclinación de las grietas y los efectos rigidizantes de la tensión del concreto entre las grietas. En el análisis se divide el miembro en "elementos con grietas de flexión" (por ejemplo, como en la viga de la fig. 6.23, en que el momento flexionante predomina y por tanto sólo pueden ocurrir grietas verticales de flexión) y "elementos con grietas de cortante" (v.gr., como en la viga de la fig. 6.24, en que existen fuerzas cortantes relativamente grandes con momento flexionante, y ocurre agrietamiento a tensión diagonal).

Deformaciones en las regiones de elementos con grietas de flexión

En la fig. 6.31 se muestra un segmento de miembro con elementos de grietas de flexión. Se supone que las grietas están espaciadas a una distancia a. Bachmann prefiere calcular la rotación en términos de los anchos de

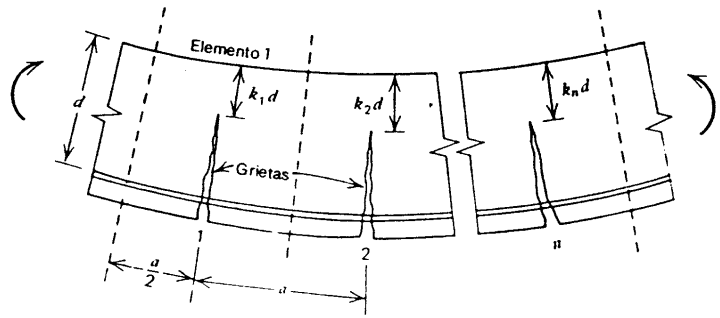


Figura 6.31. Miembro con elementos de grietas de flexión.

las grietas, pero es más directo calcular la rotación en términos de la elongación del acero entre las grietas. Se puede escribir la rotación total θ entre los extremos de un segmento de miembro consistente en n elementos como

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} \frac{s_i}{d - k_i d} \tag{6.50}$$

en que d es la profundidad efectiva del acero a tensión, s_i es la elongación del acero entre los extremos del elemento i, y $k_i d$ es la profundidad del eje neutro en la grieta del elemento i. Una aproximación realizada en la ec. 6.50 es que la profundidad del eje neutro a lo largo de la longitud del elemento es constante en el valor de la sección de la grieta.

Al considerar un elemento con grietas de flexión típico (fig. 6.32), es evidente que para calcular la elongación del acero, se deben conocer las características de adherencia del refuerzo de acero. Por otra parte, el cambio en la fuerza del acero en una varilla de refuerzo de diámetro d_b en una longitud dx debida al cambio en el esfuerzo df_s en el acero está dado por

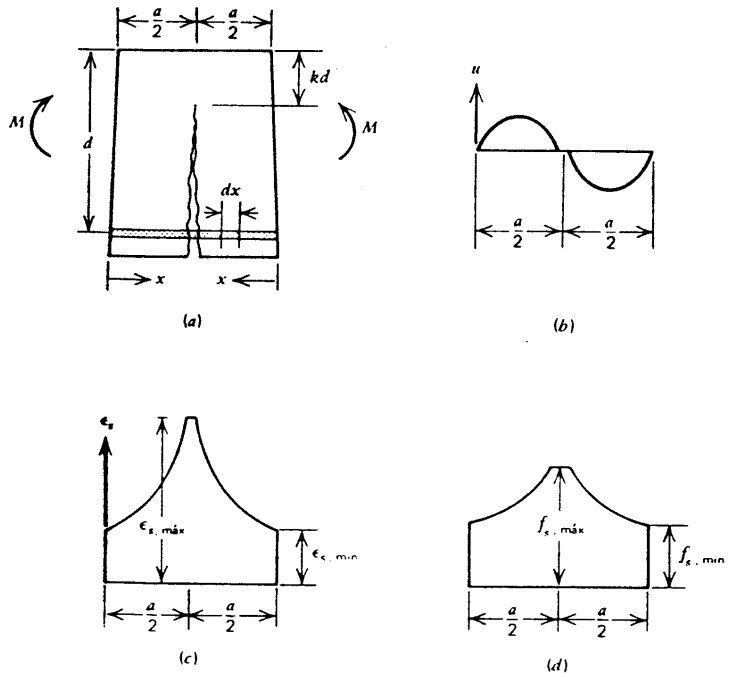


Figura 6.32. Distribuciones en un elemento con grieta de flexión (*a*), con esfuerzo de adherencia (*b*), deformación del acero (*c*), y esfuerzo del acero (*d*).

$$df_s \frac{\pi d_b^2}{4} = u \pi d_b \, dx$$

$$\therefore \quad \frac{df_s}{dx} = \frac{4u}{d_b} \tag{6.51}$$

en que u, el esfuerzo de adherencia, es una función de la distancia x medida desde el punto medio entre las grietas. La relación

$$ds = \varepsilon_s \, dx$$

$$\therefore \quad \frac{ds}{dx} = \varepsilon_s \tag{6.52}$$

da la elongación ds del acero en la longitud dx, en que ε_s es una función del esfuerzo f_s del acero.

De la ec. 6.51 se obtiene el cambio en el esfuerzo del acero entre la grieta y el punto medio entre las grietas como

$$f_{s,\text{máx}} - f_{s,\text{mín}} = \int_0^{0.5a} \frac{4u}{d_b} dx \tag{6.53}$$

La elongación del acero entre dos grietas también está dada por las ecs. 6.51 y 6.52 como

$$s = 2 \int_0^{0.5a} \varepsilon_s \, dx = \frac{d_b}{2} \int_{f_{s,\text{mín}}}^{f_{s,\text{máx}}} \frac{\varepsilon_s}{u} df_s \tag{6.54}$$

De las propiedades de la sección usando la teoría convencional de las secciones agrietadas se puede calcular el esfuerzo del acero en la grieta $f_{s,\text{máx}}$. Luego se puede calcular el esfuerzo del acero en el punto medio entre grietas $f_{s,\text{mín}}$ para una separación a dada de grietas, distribución de esfuerzos de adherencia y curva esfuerzo - deformación del acero, de la ec. 6.53 y la elongación del acero entre dos grietas s de la ec. 6.54. Estos cálculos pueden desarrollarse para todos los elementos con grietas de flexión. Entonces se pueden sustituir las elongaciones del acero entre las grietas encontradas de esa manera y las profundidades del eje neutro en las grietas en la ec. 6.50 para dar la rotación θ a lo largo de la longitud del miembro.

Para encontrar la rotación última total de una región de articulación plástica, se deben tomar en cuenta todos los elementos con grietas de flexión en que ocurren deformaciones plásticas del acero. Bachmann ha mostrado[6.3] que el método da una buena estimación de la rotación plástica disponible, si se conocen el espaciado de las grietas, la distribución de esfuerzos de adherencia y la curva esfuerzo - deformación para el acero.

Deformaciones en las regiones de elementos de grietas cortantes

En la sección 6.6.2 se estudió el aumento en las fuerzas del acero debido a las grietas de tensión diagonal inclinadas. Las grietas de tensión diagonal en las zonas de articulaciones plásticas aumentan la rotación plástica disponible al extender la zona de cedencia a lo largo del miembro. Para un patrón dado de grietas de tensión diagonal, con inclinaciones y posiciones conocidas, se pueden estimar los esfuerzos del acero en las grietas mediante estática, utilizando las ecuaciones de equilibrio que toman en cuenta el efecto del cortante transmitido por el refuerzo de cortante dado por la ec. 7.32. Este cálculo de los esfuerzos en el acero longitudinal se estudia con mayor detalle en el capítulo 7. Una vez determinados estos esfuerzos en el acero, se puede calcular la elongación del acero a partir de la separación de las grietas, la distribución del esfuerzo de adherencia y la curva esfuerzo - deformación del acero, usando las ecs. 6.53 y 6.54; la rotación se calcula usando la ec. 6.50. Quizás la mayor dificultad en el cálculo sea postular la inclinación y posición de las grietas de tensión diagonal.

Las anteriores consideraciones indican la dependencia de la rotación última de la fuerza cortante presente en la región de la articulación plástica. En una articulación a flexión pura las rotaciones plásticas están concentradas en una zona relativamente pequeña y la rotación plástica resultante puede no ser grande. Si el esfuerzo cortante es suficientemente elevado para provocar grietas de tensión diagonal, se forma una articulación de grieta cortante y aumenta la capacidad de rotación plástica, ya que las deformaciones plásticas ocurren en una zona más amplia. Sin embargo, es evidente que todavía no puede determinarse analíticamente el comportamiento detallado de zonas de articulación plástica con cortante. Se necesita más investigación en esta área.

6.7 DEFORMACIONES DE MIEMBROS CON CARGA CICLICA

6.7.1 Relaciones momento - curvatura

Casi todos los datos relativos al comportamiento inelástico de los miembros de concreto reforzado se han obtenido del trabajo teórico o de pruebas en que se han aplicado cargas monotónicamente hasta que se alcanza la carga máxima. Pocos investigadores han intentado determinar el comportamiento de las vigas de concreto reforzado y de las secciones de columnas bajo cargas de alta intensidad típica de los movimientos sísmicos. Algunos ejemplos de las investigaciones teóricas sobre el comportamiento de los miembros bajo cargas cíclicas son las de Aoyama, [6.15] Agrawal, Tulin y Gerstle,[6.16] Bertero y Bresler,[6.17] Brown y Jirsa,[6.18] y

Park, Kent y Sampson.[6.19] Casi todas estas teorías se basan en un perfil supuesto de deformación lineal sobre el peralte de la sección y curvas idealizadas esfuerzo - deformación para el concreto y el acero. Por lo general el ciclo momento - curvatura se obtiene calculando el momento y la curvatura que corresponde a un rango de deformaciones en la fibra extrema del miembro. Para una deformación dada en la fibra extrema, se ajusta la profundidad del eje neutro hasta que los esfuerzos en el concreto y acero, determinados del perfil de deformación y las curvas esfuerzo - deformación para los materiales y tomando en cuenta la historia previa de deformaciones, produzcan fuerzas internas que balanceen las fuerzas externas que actúan en la sección. Entonces se calculan el momento y curvatura que corresponden a ese perfil de deformación. En seguida se presenta el método usado por Park, Kent y Sampson.[6.19]

Curvas esfuerzo - deformación supuestas

En la sección 2.2.4 se estudió la curva esfuerzo - deformación para el acero bajo cargas cíclicas. La fig. 6.33 proporciona la forma general de la curva. La trayectoria de descarga para esfuerzos de ambos signos sigue la pendiente elástica inicial. Después de la excursión a la primera cedencia, las ramas de carga de la curva esfuerzo - deformación pueden representarse mediante la relación de Ramberg - Osgood

$$\varepsilon_s - \varepsilon_{si} = \frac{f_s}{E_s}\left(1 + \left|\frac{f_s}{f_{ch}}\right|^{r-1}\right) \tag{6.55}$$

con los siguientes valores empíricos determinados por Kent y Park[6.20] para acero de grado intermedio

$$f_{ch} = f_y\left[\frac{0.744}{\ln(1 + 1{,}000\,\varepsilon_{ip})} - \frac{0.071}{1 - e^{1{,}000\varepsilon_{ip}}} + 0.241\right] \tag{6.56}$$

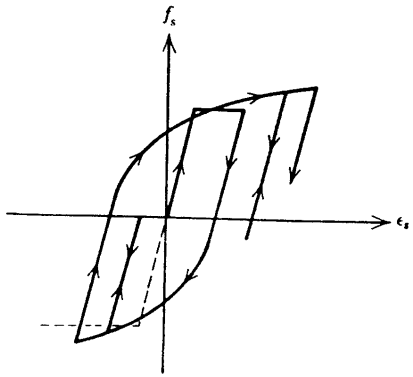


Figura 6.33 Curva esfuerzo - deformación para el acero con carga cíclica que ilustra el efecto Bauschinger.

Para las corridas impares de carga ($n = 1, 3, 5, \ldots$)

$$r = \frac{4.49}{\ln (1 + n)} - \frac{6.03}{e^n - 1} + 0.297 \tag{6.57}$$

Para las corridas pares de carga ($n = 2, 4, 6, \ldots$)

$$r = \frac{2.20}{\ln (1 + n)} - \frac{0.469}{e^n - 1} + 3.04 \tag{6.58}$$

en que ε_s es la deformación del acero, ε_{si} es la deformación del acero al principio de la corrida de carga, f_s es el esfuerzo en el acero, E_s es el módulo de elasticidad del acero, ε_{ip} es la deformación plástica en el acero producida en la corrida anterior de carga y n es el número de la corrida de carga (la primera cedencia ocurre en $n = 0$, $n = 1$ es la primera inversión de esfuerzo posterior a la cedencia, $n = 2$ es la segunda inversión de esfuerzo posterior a la cedencia etc.). Se supone que la presencia de acero transversal espaciado estrechamente alrededor del acero longitudinal impide el pandeo del acero a compresión.

En la fig. 6.34 se muestra la curva esfuerzo - deformación para el concreto bajo cargas cíclicas. Se puede representar la curva envolvente *ABCD* para el esfuerzo de compresión mediante las relaciones determinadas por Kent y Park[6.5] dadas por las ecs. 2.6 a 2.11 para el concreto confinado mediante aros rectangulares bajo cargas monotónicas. Los datos de prueba han demostrado (vea la sección 2.1.1) que la curva envolvente para el concreto no confinado que sufre cargas inelásticas repetidas es aproximadamente idéntica a la curva monotónica. Se supone el mismo comportamiento para el concreto confinado. Se puede suponer una curva lineal esfuerzo - deformación para el concreto a tensión, que tenga la misma pendiente que la curva para la compresión a esfuerzo cero. Se puede considerar que el valor del módulo de ruptura es el dado por la ec. 2.2.

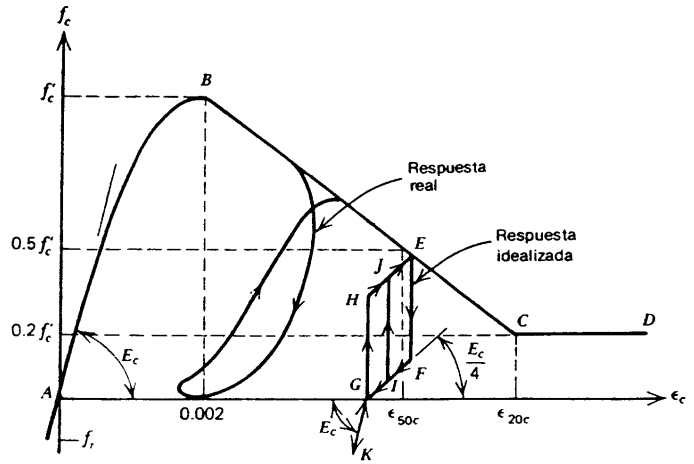


Figura 6.34. Comportamiento esfuerzo - deformación del concreto con cargas cíclicas.[6.19]

En la fig. 2.4 se muestra el comportamiento del concreto bajo cargas repetidas. Se puede suponer el comportamiento idealizado de la fig. 6.34. Al descargar desde el punto *E*, se supone que se pierde 0.75 del esfuerzo previo sin disminución en la deformación y luego se sigue una trayectoria lineal de pendiente $0.25E_c$ hasta el punto *G*. Si no se ha agrietado el concreto, éste puede trasmitir esfuerzos de tensión hasta el punto *K*; pero si el concreto se ha agrietado previamente, o si se forman grietas durante esta etapa de carga, las deformaciones de tensión aumentan, pero no se desarrollan esfuerzos de tensión. Al volver a cargar, la deformación debe alcanzar nuevamente el valor en *G* antes de que se pueda soportar nuevamente el esfuerzo de compresión. Si la recarga comienza antes que la descarga produzca un esfuerzo de compresión cero, la recarga sigue uno de las trayectorias *IJ*. Nótese que la pendiente promedio del ciclo supuesto entre *E* y *G* es paralela al módulo tangente inicial de la curva esfuerzo - deformación. Se considera que no se justifica una idealización más elaborada del ciclo.

Se puede suponer que la curva esfuerzo - deformación para el concreto de recubrimiento (fuera de los aros) en compresión sigue la curva para el núcleo confinado en deformaciones menores a 0.004. Se puede considerar que a deformaciones mayores que 0.004, el recubrimiento se desconcha y tiene resistencia cero, debido a que el acero transversal forma un plano de debilidad entre el núcleo y el concreto de la cubierta y éste puede hacerse inefectivo después de varias cargas cíclicas de gran intensidad.

Método de análisis

La mejor forma de determinar las curvas teóricas momento - curvatura para secciones de concreto reforzado cargadas cíclicamente entre límites de curvatura estipulados es usando una computadora digital. Durante los ciclos de carga ocurren distribuciones complicadas de esfuerzos a compresión del concreto, de manera que el método más conveniente de determinar la magnitud y posición de las fuerzas internas que actúan en la sección consiste en sumar los esfuerzos que actúan en elementos discretos de la sección. En este enfoque se divide la sección en un conjunto de elementos horizontales, cada uno de los cuales tiene el ancho de la sección en ese nivel. La fig. 6.35 presenta el arreglo para una sección *T*. Si hay n elementos numerados desde la parte superior, cada uno tiene H/n de peralte, en que h es el peralte total de la sección. El acero superior e inferior están localizados en los elementos nd'/h y nd/h, respectivamente. Si la deformación de la fibra superior es ε_{cm} y la profundidad del eje neutro es kd, la

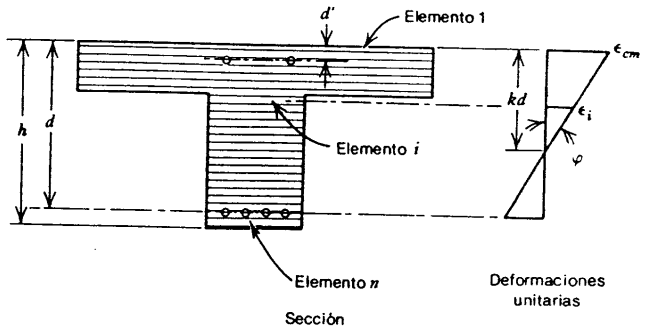


Figura 6.35. Elementos discretos para una sección T.

deformación promedio en el elemento i es

$$\varepsilon_i = \varepsilon_{cm} \frac{n(kd/h) - i + 0.5}{n(kd/h)} \tag{6.59}$$

El esfuerzo en el concreto y el acero en cada elemento se encuentra de las curvas supuestas esfuerzo - deformación y se considera como el esfuerzo correspondiente a la deformación promedio en el elemento. Se pueden determinar las fuerzas en la sección a partir de los esfuerzos y las áreas del concreto y acero en cada elemento.

Se puede utilizar una técnica iterativa para calcular los puntos en las curvas momento - curvatura. La deformación ε_{cm} en la fibra superior del concreto se ajusta en una cantidad fija. Para cada valor de ε_{cm}, se estima la profundidad del eje neutro kd, y se calculan los esfuerzos en el elemento para este perfil de deformaciones. Luego se calculan las fuerzas que actúan en los elementos y se comprueba el equilibrio de las fuerzas utilizando el requerimiento de que

$$\sum C - \sum T = P \tag{6.60}$$

en que C y T son las fuerzas de compresión y de tensión que actúan en los elementos, respectivamente, y P es la carga de compresión que actúa en la sección (cero en el caso de una viga). Si no se satisface la ec. 6.60 del equilibrio, es incorrecta la posición estimada del eje neutro y debe ajustarse hasta lograr el equilibrio de las fuerzas. Logrado el equilibrio, se calculan el momento M y curvatura φ para el valor específico de ε_{cm} y P.

La técnica del elemento discreto tiene la ventaja de que maneja las complejas distribuciones de esfuerzos debidas a las cargas cíclicas, y es cuestión simple el alterar la fuerza del elemento por las reducciónes de área atribuibles al desconchamiento y registrar los elementos que se han agrietado. La técnica tiene la desventaja de ser relativamente lenta, ya que

para calcular el esfuerzo correspondiente a una deformación dada, es necesario almacenar para cada elemento los parámetros que registran el avance a lo largo de la trayectoria esfuerzo - deformación.

Comparación de respuestas momento - curvatura

Se ha comparado el enfoque teórico recién estudiado con los resultados experimentales[6-19] obtenidos de vigas de concreto doblemente reforzado, cargadas cíclicamente, con una sección transversal rectangular de 4.94 plg (125 mm) de ancho por 8 plg (203 mm) de peralte. Las vigas estaban sujetas con pasadores en cada extremo para dar un claro soportado simplemente de 6 pies (1.83 m) y se cargaron estáticamente a la mitad del claro a través de una saliente de columna. La carga se aplicó cíclicamente invirtiendo la dirección de su aplicación. Se aplicaron varios ciclos de carga hasta el rango inelástico. La fig. 6.36 muestra una viga después de la prueba. Las deformaciones se midieron en los refuerzos superior e inferior en una longitud calibrada de 2 plg (51 mm) en la región crítica de la viga adyacente a la saliente de la columna. A partir de estas deformaciones se calculó la curvatura experimental usando $(\varepsilon_s - \varepsilon'_s)/(d - d')$, en que ε'_s y ε_s son las deformaciones en el acero superior e inferior respectivamente (las deformaciones a tensión se consideran positivas, las deformaciones a compresión negativas), y $d - d'$ es la distancia entre el acero superior e inferior. Las figs. 6.37 y 6.38 comparan las curvas experimentales y teóricas momento - curvatura para dos de las vigas. La viga 24 contenía igual cantidad de acero superior e inferior ($\rho = \rho' = 1.11\%$), viga 27 contenía desiguales cantidades de acero superior e inferior ($\rho = 3.54\%$, $\rho' = 1.14\%$), en que ρ es el área del acero inferior bd, es el área del acero superior/bd, b es el ancho de la viga y d es la profundidad del acero inferior. Ambas vigas

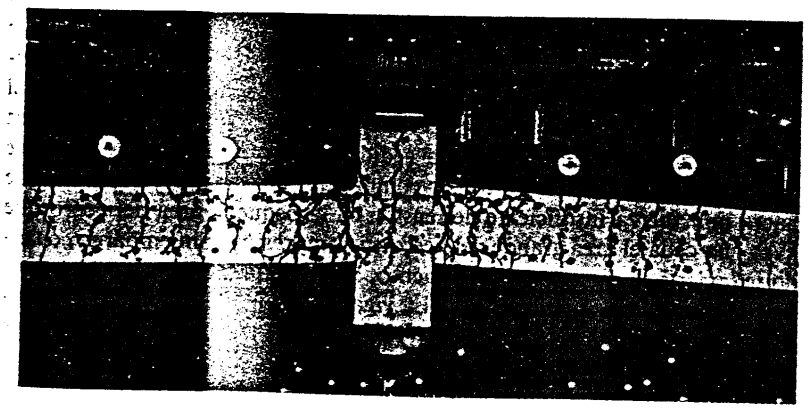


Figura 6.36. Viga 65 con $\rho = 1.77\%$, $\rho' = 1.12\%$, y $\rho_s = 0.77\%$ después de cargada en el rango inelástico en cada dirección.[6-19]

contenían estribos cerrados de 1/4 plg (6.35 mm) de diámetro con distancias de centros de 2 pl(50.8 mm) (ρ_s = 2.3 %). El esfuerzo longitudinal consistió en varillas corrugadas de acero con una resistencia de cedencia de aproximadamente 48 kips plg^{-2} (330 N/mm^2). Las líneas verticales más que los puntos indican la curvatura experimental en las figs. 6.37 y 6.38, reflejando el efecto del flujo plástico en cada incremento. Las curvas teóricas se calcularon entre los puntos experimentales de curvatura en que ocurrió la inversión de la carga. Las partes de las curvas teóricas donde se toma el momento mediante un par de acero solamente, están indicadas en las curvas.

Para evaluar la exactitud del enfoque teórico para secciones de columnas, se han comparado con la teoría[6.19] los resultados experimentales obtenidos por Aoyama[6.15] para un miembro sujeto a carga axial y momento flexionante variable cíclicamente. Se utilizó el espécimen A-2 de Aoyama y la comparación aparece en la fig. 6.39. Las curvaturas experimentales se obtuvieron de lecturas de deformación medidas en una longitud calibrada de 6 plg (152 mm) en la zona de momento constante en la región de momento flexionante máximo. En la publicación de Aoyama se dibujaron los puntos experimentales momento - curvatura para los incrementos 20 a 32 (la segunda inversión de carga) trasladados a la posición simétrica con respecto al origen, permitiendo con ello una comparación directa con los puntos de la primera inversión de carga. En la fig. 6.39 se han graficado esos puntos experimentales (20 a 32) trasladados a sus posiciones reales.

La concordancia que se encuentra entre los resultados experimentales y teóricos para la viga y secciones de columna es buena. En una gran proporción de las curvas teóricas para las vigas, sólo el par de acero transmite el momento. Este comportamiento se debe a la cedencia del acero en tensión, lo que provoca grietas en la zona de tensión que no se cierran cuando se invierte la dirección del momento, debido a la elongación plástica del acero. En la zona a compresión existirán grietas abiertas hasta que ceda el acero a compresión y permita que las grietas se cierren. Sólo entonces el concreto tomará parte de la fuerza de compresión. En especial para las vigas con distinto refuerzo superior e inferior (fig. 6.38), una vez que el área grande del acero haya cedido en tensión, el concreto en ese lado del miembro puede no tomar compresión nuevamente, debido a que habrá una fuerza insuficiente de tensión en la pequeña área del acero que haga que ceda el área grande del acero en compresión. Sin embargo, cuando se invierte la dirección del momento, la pequeña área de acero en compresión cede a un momento bajo. La viga de la fig. 6.37 tiene iguales cantidades de acero superior e inferior, y después de la primera excursión de cedencia el par de acero es el principal transmisor de la carga. Para secciones de columna, el efecto del agrietamiento también puede ser muy marcado. En la fig. 6.39 no se han indicado las regiones de la curva teórica en que sólo el par de acero está actuando; pero es evidente que des-

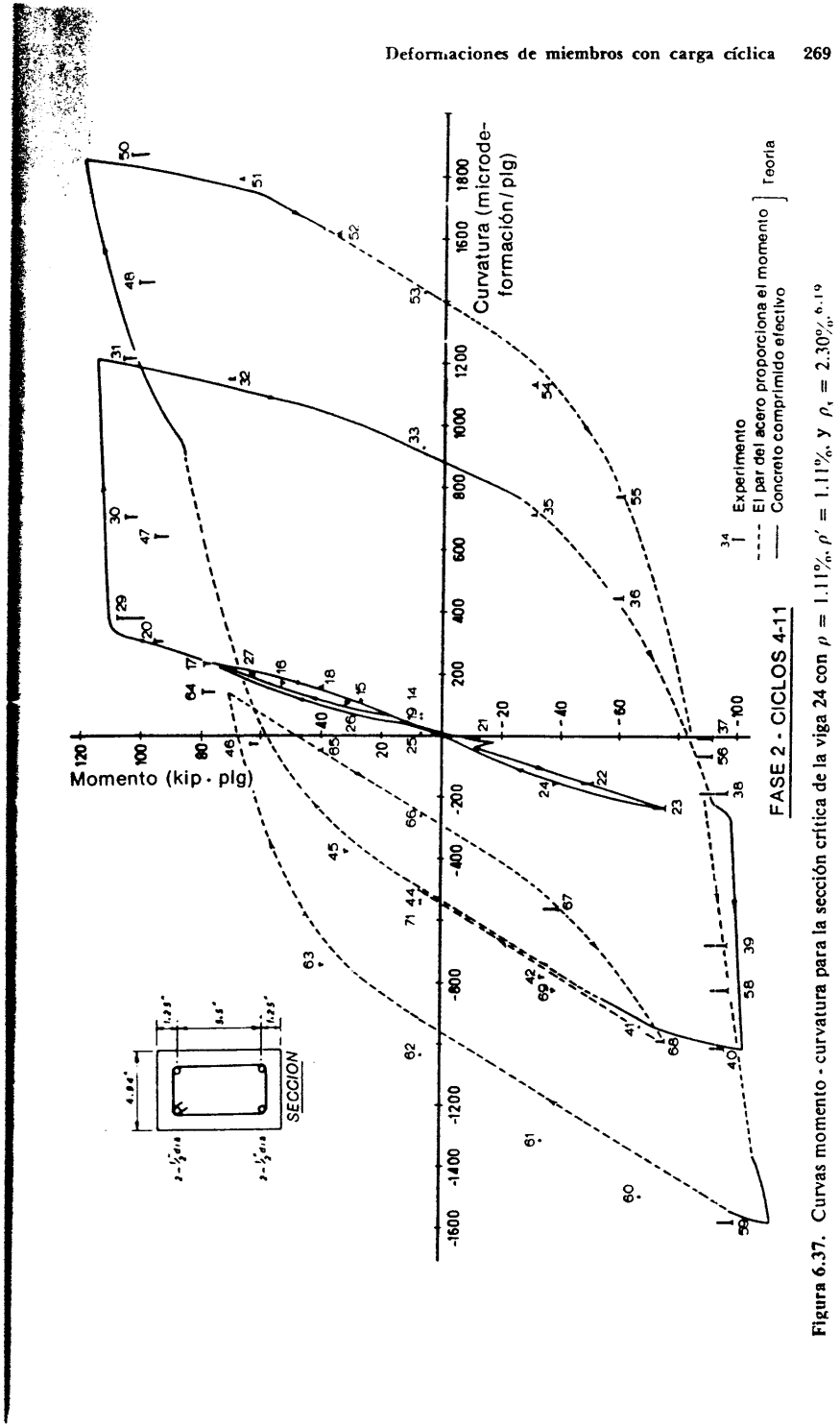


Figura 6.37. Curvas momento - curvatura para la sección crítica de la viga 24 con ρ = 1.11%, ρ' = 1.11%, y ρ_t = 2.30%.[6.19]

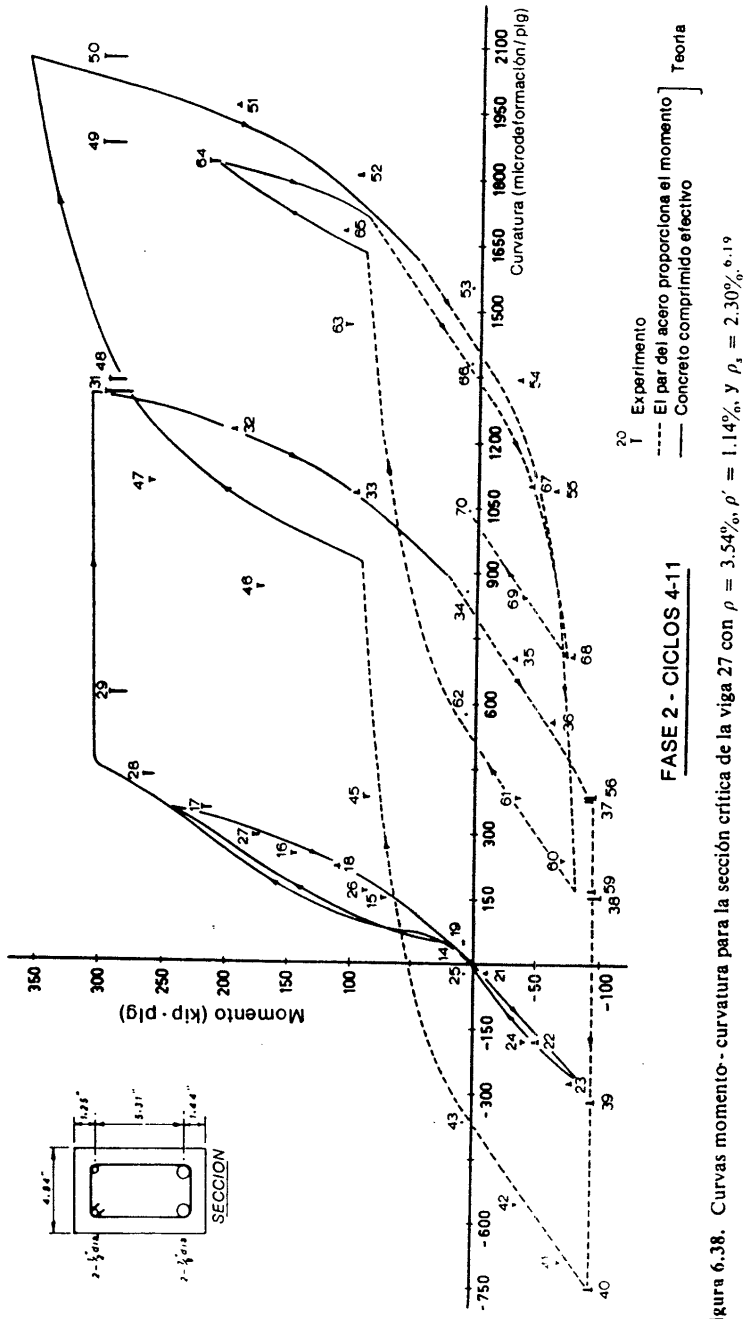


Figura 6.38. Curvas momento - curvatura para la sección crítica de la viga 27 con $\rho = 3.54\%$, $\rho' = 1.14\%$, y $\rho_s = 2.30\%$.[6.19]

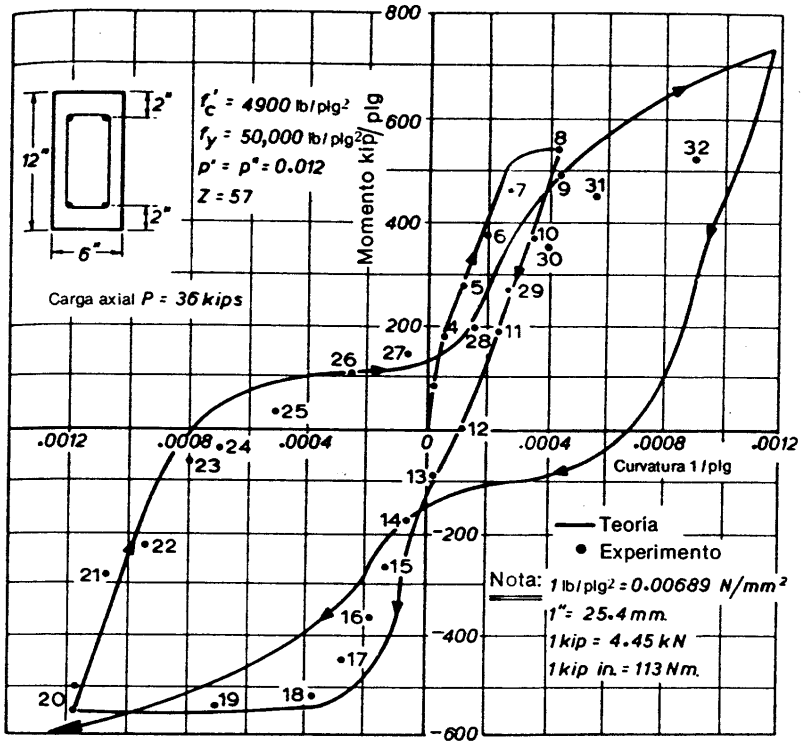


Figura 6.39. Curvas momento - curvatura para la probeta A-2 de Aoyama con carga axial y flexión.[6.19]

pués de la primera excursión de cedencia, en la parte inicial de las curvas momento - curvatura, el acero es el único que transmite el momento. Para las secciones de columna, la presencia de compresión axial, al igual que de flexión, significa que hasta para secciones con igual cantidad de acero en cada cara, el acero en compresión cede a un momento bajo y cierra la grieta.

Es evidente que la rigidez a flexión de la sección se reduce cuando sólo el par de acero transmite el momento, pero que aumenta cuando el concreto comienza a transmitir compresión. El aumento en rigidez debido a que las grietas se cierran en la zona a compresión es más repentino en las curvas teóricas que en las pruebas, como lo indica la fig. 6.38. Probablemente esto se debe a que en realidad se puede trasmitir algo de compresión a través de las grietas antes de que se cierren. Las partículas de concreto que se desprenden durante el agrietamiento, y pequeños desplazamientos cortantes relativos, a lo largo de las grietas, provocan que la

compresión se transfiera gradualmente a través de las grietas, conforme las salientes entran en contacto, más que repentinamente como lo implica la teoría. Sin embargo, es evidente que la presencia de grietas abiertas, que con el tiempo se cierran en la zona a compresión, provoca estrechamientos marcados en la respuesta momento - curvatura.

El efecto Bauschinger del acero hace que las relaciones momento - curvatura sean curvas después de la primera excursión a la cedencia. La viga de la fig. 6.37 tiene iguales cantidades de acero superior e inferior, y después de la primera excursión a la cedencia el par de acero es el principal transmisor de la carga. En consecuencia, la forma del ciclo esfuerzo - deformación para el acero influencia fuertemente la forma del ciclo momento - curvatura.

Es evidente que tanto el ciclo teórico como el experimental de momento - curvatura distan mucho en su comportamiento del paralelogramo elastoplástico clásico normalmente supuesto. El redondeo y estrechamiento de los ciclos significa que el área dentro del ciclo es más pequeña que la suposición elastoplástica, por lo que habrá menor disipación de energía por ciclo de lo que normalmente se supone. Esto tiene importancia en el análisis dinámico de los marcos de concreto reforzado que responden a intensos movimientos sísmicos y puede conducir a una respuesta de la estructura mayor de lo que se esperaba. Para las vigas, una mejor idealización de la forma real de los ciclos sería el prototipo de respuesta de Ramberg - Osgood o la respuesta de rigidez degradada sugerida por Clough[6.21] (vea la fig. 6.40). Para vigas con áreas de acero superior e inferior muy distintas, y para columnas, el efecto de estrechamiento mostrado por las curvas experimental y teórica es más señalado, y parecería ser necesario tener un ciclo con área más pequeña que las idealizaciones anteriores.

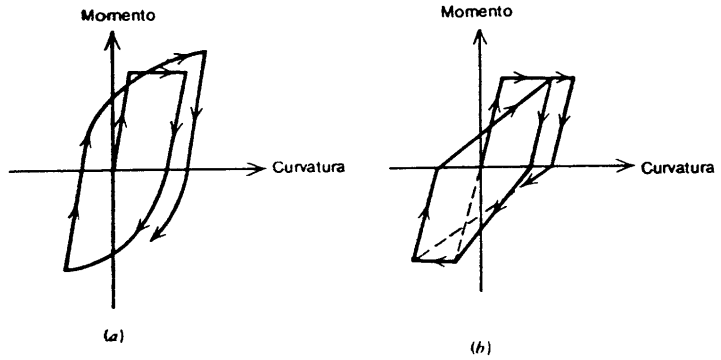


Figura 6.40. Respuestas idealizadas momento - curvatura. (*a*), Respuesta de Ramberg-Osgood. (*b*), Respuesta de rigidez degradada de Clough.

Para resumir, se puede concluir que las curvas teóricas momento - curvatura para miembros de concreto reforzado, sujetos a cargas cíclicas, se puede deducir suponiendo un perfil de deformación lineal y curvas esfuerzo - deformación idealizadas para el acero y concreto. Esta teoría muestra buena concordancia con los resultados de prueba y predice la reducción en rigidez, debido al efecto Bauschinger del acero y debido a las grietas abiertas en la zona a compresión que pueden llegar a cerrarse. Por lo general, la resistencia a flexión no es afectada por la menor rigidez, y subsecuentemente se alcanza a mayores deflexiones. La capacidad de momento máximo no se reduce con la carga cíclica a menos que el aplastamiento del concreto provoque una reducción en la sección transversal del concreto.

6.7.2 Comportamiento de la curva carga - deformación

Se puede determinar el comportamiento de la curva carga - deformación para miembros cargados cíclicamente a partir de las relaciones momento - curvatura, utilizando las ecs. 6.35 y 6.36. Como ejemplo de este procedimiento, se utilizaron curvas teóricas momento - curvatura para determinar la deflexión central teórica de las vigas simplemente soportadas con la carga cíclica aplicada centralmente, discutida en la sección anterior.[6.19] Se encontró que es conveniente dividir los miembros en una cantidad de elementos longitudinales cortos y suponer que el momento en el centro de cada elemento es constante en toda la longitud de ese elemento. Ajustando la deformación ε_{cm} del concreto, en la fibra extrema del elemento central de la viga, y utilizando la técnica iterativa descrita antes para encontrar la profundidad del eje neutro, momento flexionante y curvatura para ese valor de ε_{cm} para el elemento, se obtuvieron los cambios en las deflexiones. Luego se pudo determinar la carga que produce este momento flexionante y se determinaron los momentos flexionantes en los elementos restantes. Para cada uno de los elementos restantes, el procedimiento fue como sigue: ajustar el valor de ε_{cm} obtenido para el elemento en el incremento anterior, localizar la posición del eje neutro para tener compatibilidad de deformación y equilibrio y calcular el momento flexionante para el valor de prueba de ε_{cm}. Luego se comparó el momento flexionante calculado con el requerido y se ajustó ε_{cm} hasta que coincidieran los momentos flexionantes calculado y requerido. De esta manera se calcularon la curvatura correspondiente a los momentos flexionantes para todas las secciones. El perfil de deflexiones se calculó a partir de las curvaturas. Entonces se pudieron calcular las respuestas teóricas de carga - deflexión de las vigas entre las deflexiones en que ocurrió la inversión de la carga.

En la fig. 6.41 se muestran las curvas de carga teórica deflexión central para la viga 24. En el análisis teórico, cada medio claro de la viga (cada lado de la saliente de columna) se dividió en 9 elementos longitudinales de longitud igual y la sección de cada elemento en 10 elementos horizontales

discretos. La respuesta carga - deflexión está fuertemente influida por la distribución de la curvatura en la región de momento máximo; en consecuencia, la selección de la longitud del elemento longitudinal puede tener un efecto marcado en las deformaciones calculadas. Idealmente, se debieron tomar muchos más elementos; pero debido a que están involucrados tantos procesos de iteración, se hubiera requerido mucho tiempo de computadora. La fig. 6.41 muestra también los puntos experimentales para la viga. Por lo general, las formas de los ciclos teórico y experimental son semejantes.

En vista del mucho tiempo de computadora necesario para producir las gráficas teóricas de carga - deflexión, es deseable tener cierta simplificación. La fig. 6.42 presenta las curvas de carga teórica - deflexión calculadas utilizando las suposiciones de Clough de momento - curvatura de rigidez degradada[6.21] de la fig. 6.40*b*. El análisis se realizó tanto con 10 como con 100 elementos longitudinales en cada medio claro. La concordancia entre la teoría y el experimento dada por esta idealización en la fig. 6.42 es buena. Sin embargo, se debe notar que la relación supuesta de Clough de $M-\varphi$ no reproduce el efecto de estrechamiento que ocurre en las vigas cuando ρ y ρ' son significativamente distintos, y en las columnas; en consecuencia, debe utilizarse con precaución en esos casos.

Las deflexiones teóricas anteriores se han calculado ignorando los efectos de rigidez por la tensión del concreto entre las grietas, lo que evidentemente no ha inducido a tanto error como se esperaría. En los miembros bajo cargas cíclicas, el efecto de rigidez del concreto entre las grietas puede no ser muy importante. Es definitivo que ocurre un deterioro gradual de la adherencia entre el concreto y el acero en miembros bajo carga cíclica de elevada intensidad (véase la fig. 9.12), lo que a su vez reduce la influencia del concreto. También para estas vigas simplemente soportadas, el deslizamiento de las varillas en las zonas de anclaje en los extremos del miembro hubiera sido despreciable y no se tomó en cuenta.

Los cálculos teóricos también ignoraron el efecto del cortante; y las curvaturas se determinaron a partir del diagrama real de momentos, en vez del diagrama desplazado horizontalmente.

La fig. 6.36 indica que en las vigas de prueba analizadas ocurrió muy poco agrietamiento por tensión diagonal, y el uso del diagrama de momentos reales fue aparentemente satisfactorio. Sin embargo, se debe notar que otras pruebas[6.22] han mostrado que para las vigas en que ocurre flexión con elevado cortante[v.gr., un esfuerzo cortante nominal $V/bd > 3\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 ($0.25\sqrt{f'_c}$ N/mm^2)], puede ocurrir una reducción adicional en la rigidez en cada ciclo de carga debido al cortante, y el cortante puede iniciar la falla. El elevado cortante provoca un estrechamiento de las curvas carga - desplazamiento del miembro, debido principalmente al deslizamiento a lo largo y al cierre de grietas en las zonas de articulación plástica. En consecuencia, aunque el cortante que provoca grietas de ten-

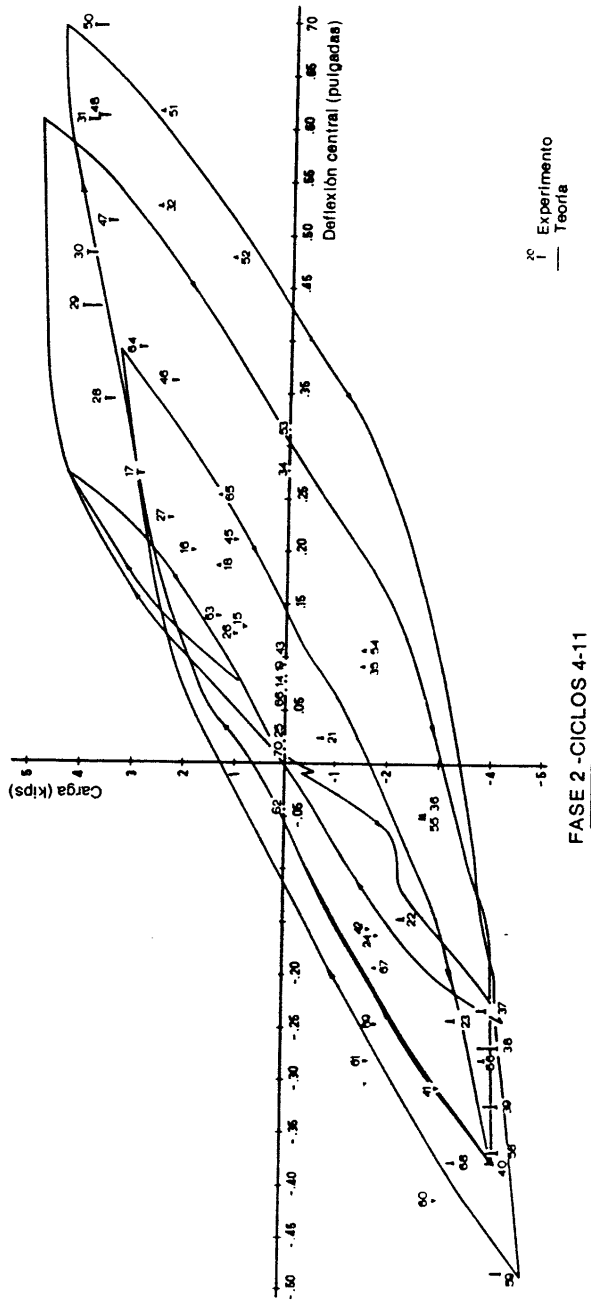


Figura 6.41. Curva carga - deflexión central para la viga 24 con $\rho = \rho' = 1.11\%$.[6.19]

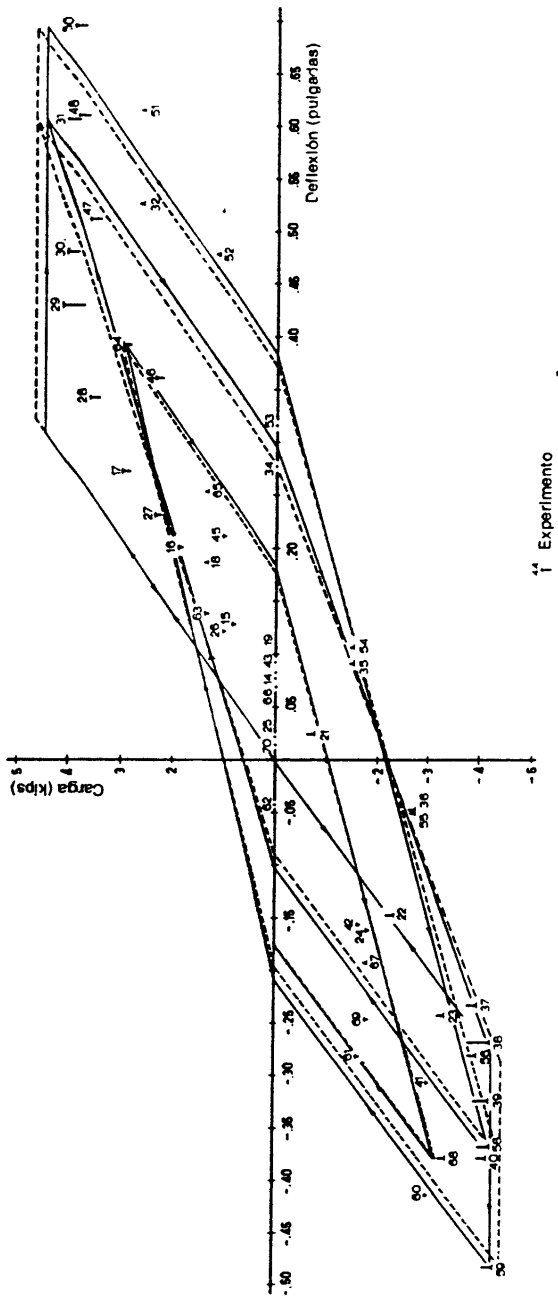


Figura 6.42. Curvas carga - deflexión central para la viga 24 utilizando la respuesta de Clough.[6.19]

sión diagonal puede servir para extender la zona de cedencia del acero a flexión, y por tanto aumentar la ductilidad, puede producir pérdida de rigidez debido a deformaciones cortantes en la zona de la articulación plástica y una falla cortante eventual con carga cíclica. También se debe tener presente que durante las cargas cíclicas pueden existir grietas a flexión abiertas hasta el peralte total del miembro, lo cual podría afectar severamente la habilidad del concreto de trasmitir fuerza cortante, y las fuerzas de dovela podrían provocar la rajadura a lo largo de las varillas longitudinales. En consecuencia, se debe proporcionar refuerzo de cortante que trasmita la mayor parte de la fuerza cortante. Cuando ocurre flexión con cortante elevado y una elevada fuerza de compresión axial, la reducción en la resistencia y rigidez con cada ciclo de carga puede ser apreciable, a menos que la columna contenga cantidad suficiente de acero transversal para el refuerzo de cortante y para el confinamiento del concreto. En el capítulo 7 se estudia el comportamiento de los miembros con fuerza cortante.

6.8 APLICACION DE LA TEORIA

En este capítulo se ha estudiado ampliamente la determinación de deformaciones por flexión en la carga última, debido a su importancia, en las consideraciones de ductilidad en el diseño al límite y el diseño sísmico. La teoría descrita permite evaluar la ductilidad de los miembros e indica cómo se puede mejorar ésta. La teoría no tiene aplicación a los casos de diseño, cuando la ductilidad de los miembros no es importante. En el capítulo 11 se estudian la aplicación de la teoría al diseño al límite y al diseño sísmico.

6.9 BIBLIOGRAFIA

6.1 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.

6.2 J. A. Blume, N. M. Newmark, y L. H. Corning, "Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions", Portland Cement Association, Chicago, 1961, pág. 318.

6.3 E. O. Pfrang, C. P. Siess, y M. A. Sozen, "Load - Moment - Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Cross Sections", *Journal ACI*, Vol. 61, No. 7, julio 1964, págs. 763-778.

6.4 G. B. Base y J. B. Read, "Effectiveness of Helical Binding in the Compression Zone of Concrete Beams", *Journal ACI*, Vol. 62, No. 7, julio de 1965, págs. 763-781.

6.5 D. C. Kent y R. Park, "Flexural Members with Confined Concrete", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST7, julio 1971, págs. 1969-1990.

6.6 A. L. L. Baker y A. M. N. Amarakone, "Inelastic Hyperstatic Frames Analysis", *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, ASCE-ACI, Miami, noviembre 1964, págs. 85-142.

6.7 W. G. Corley, "Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams", *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 92, ST5, octubre 1966, págs. 121-146.

6.8 N. H. Burns, y C. P. Siess, "Load - Deformation Characteristics of Beam - Column Connections in Reinforced Concrete", Civil Engineering Studies, Structural Research Series No. 234, University of Illinois, enero 1962, pág. 261.
6.9 H. Bachmann, "Influence of Shear and Bond on Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams", Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, 1970; Vol. 30, Parte II, págs. 11-28.
6.10 E. Rosenblueth and R. Diaz de Cossio, "Instability Considerations in Limit Design of Concrete Frames", *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, ASCE - ACI, Miami, noviembre 1964, págs. 439-456.
6.11 H. A. Sawyer, "Design of Concrete Frames for Two Failure States", *Proceedings of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, ASCE - ACI, Miami, noviembre 1964, págs. 405-431.
6.12 A. L. L. Baker, *Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames*, Concrete Publications Ltd, Londres, 1956, pág. 91.
6.13 ICE Research Committee, "Ultimate Load Design of Concrete Structures", *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 21, febrero 1962, págs. 399-442.
6.14 A. H. Mattock, Discussion of "Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams", por W. G. Corley, *Journal of Structural Division, ASCE*, Vol. 93, ST2, abril 1967, págs. 519-522.
6.15 H. Aoyama, "Moment - Curvature Characteristics of Reinforced Concrete Members Subjected to Axial Load and Reversal of Bending", *Proceedings of International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete*, ASCE - ACI, Miami, noviembre 1964, págs. 183-212.
6.16 G. L. Agrawal, L. G. Tulin, y K. H. Gerstle, "Response of Doubly Reinforced Concrete Beams to Cyclic Loading", *Journal ACI*, Vol. 62, No. 7, julio 1965, págs. 823-836.
6.17 V. V. Bertero y B. Bresler, "Seismic Behaviour of Reinforced Concrete Framed Structures", *Proceedings of Fourth World Conference on Earthquake Engineering*, Vol. 1, Session B-2, Chile, 1969, págs. 109-124.
6.18 R. H. Brown y J. O. Jirsa, "Reinforced Concrete Beams Under Reversed Loading", *Journal ACI*, Vol. 68, No. 5, mayo 1971, págs. 380-390.
6.19 R. Park, D. C. Kent, y R. A. Sampson, "Reinforced Concrete Members with Cyclic, Loading", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 98, ST7, julio 1972, págs. 1341-1360.
6.20 D. C. Kent y R. Park, "Cyclic Load Behaviour of Reinforcing Steel", *Strain* (Journal of the British Society for Strain Measurement), Vol. 9, No. 3, julio 1973, págs. 98-103.
6.21 R. W. Clough, "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements", Reporte No. 66-16, Structural Engineering Laboratory, University of California, Berkeley, octubre 1966, pág. 67.
6.22 M. Celebi y J. Penzien", Behaviour of Reinforced Concrete Beams Under Combined Moment and Shear Reversal", *Symposium on Resistance and Ultimate Deformability of Structures Acted on by Well - Defined Repeated Loads*, Reports of Working Commissions, Vol. 13, International Association for Bridge and Structural Engineering, Lisboa, 1973, págs. 193-198.

7

Resistencia y deformación de miembros sometidos a cortante

7.1 INTRODUCCION

El amplio estudio del comportamiento de miembros a flexión de concreto reforzado ha aclarado el mecanismo de falla a flexión, a grado tal que en muchos países se incorporan conclusiones bien comprendidas en sus códigos de diseño. El avance en la comprensión y evaluación cuantitativa del comportamiento de miembros sujetos a flexión y cortante ha sido sensiblemente menos espectacular. Cientos de publicaciones, la mayoría de las cuales ha aparecido en los 15 últimos años, hablan de la complejidad del problema.

La gran mayoría de los miembros estructurales de concreto reforzado no pueden escapar de tener que resistir fuerzas cortantes. Estas fuerzas rara vez actúan por sí mismas, sino en combinación con flexión, carga axial y quizás torsión. Además de identificar el efecto de fuerzas cortantes que actúan por sí solas, es necesario examinar las interacciones posibles con las otras acciones estructurales. En los miembros a flexión en especial, los mecanismos que resisten el cortante interactúan íntimamente con la adherencia entre el concreto y el refuerzo y el anclaje de éste.

La transmisión de cortante en las vigas de concreto reforzado se apoya fuertemente en la resistencia a tensión y compresión del concreto. En consecuencia, no es de sorprender que una falla a cortante por lo general sea no dúctil. En consecuencia, se debe intentar suprimir dicha falla. En especial, en las estructuras resistentes a sismos se pone gran atención a la ductilidad, como se describe en otros capítulos, razón por la que el diseñador debe asegurarse de que jamás ocurra una falla a cortante, lo que implica que cuando es esencial la ductilidad, la resistencia a cortante del miembro debe ser algo mayor que la resistencia máxima a flexión que éste podría desarrollar. Es conveniente aun utilizar los conceptos clásicos de esfuerzo cortante en los cuerpos homogéneos, isotrópicos y elásticos al tratar con miembros de concreto reforzado. Modificada en forma ade-

cuada, la teoría elástica puede proporcionar predicciones aceptables con respecto a resistencia y a la formación de grietas. Sin embargo, con el desarrollo de grietas se origina un patrón sumamente complejo de esfuerzos, al grado que en esta etapa muchas ecuaciones que actualmente se utilizan tienen poco que ver con el comportamiento real. Sin embargo, el trabajo experimental extenso, especialmente en años recientes, ha extendido considerablemente el conocimiento de distintos mecanismos resistentes al cortante, los que aquí se estudian con cierto detalle.

Bresler y McGregor prepararon una síntesis muy útil del problema del cortante.[7.1] El comité 326[7.3] del ACI-ASCE presentó en 1962 la fundamentación de las recomendaciones del código actual del ACI[7.2] que se usa extensamente desde 1963. En 1973 el Comité conjunto 426 del ACI-ASCE publicó un informe similar del estado del arte.[7.4] En un interesante estudio de Hognestad[7.5] se puede encontrar descrita la evolución del enfoque al diseño por cortante en el concreto reforzado.

7.2 EL CONCEPTO DE ESFUERZOS CORTANTES

La fuerza transversal o cortante en cualquier sección de un miembro estructural puede deducirse por consideraciones de equilibrio. La intensidad de esta fuerza se muestra convenientemente mediante un "diagrama de fuerzas cortantes." La suma de los esfuerzos cortantes en esa sección transversal naturalmente debe equilibrar la fuerza cortante externa en esa sección. Al considerar el equilibrio de un elemento infinitesimal de un miembro, se hace evidente que las intensidades del esfuerzo cortante vertical y horizontal en cada elemento deben ser las mismas.

Es fácil deducir los esfuerzos cortantes horizontales a lo largo de cualquier fibra de una viga homogénea, isotrópica, no agrietada a partir de las consideraciones de equilibrio interno de los esfuerzos a flexión. Usando la notación de la fig. 7.1, el equilibrio de la parte sombreada del elemento de viga se satisface cuando el esfuerzo cortante horizontal es

$$v = \frac{VA_i\bar{y}}{bI} \tag{7.1}$$

en que I es el segundo momento del área de la sección.
Se puede demostrar con base en principios fundamentales que con respecto al eje centroidal

$$z = \frac{I}{A_i\bar{y}}$$

y que allí el flujo de cortante $q = vb$ siempre es un máximo; es decir,

$$q_{máx} = \frac{V}{z} \tag{7.2}$$

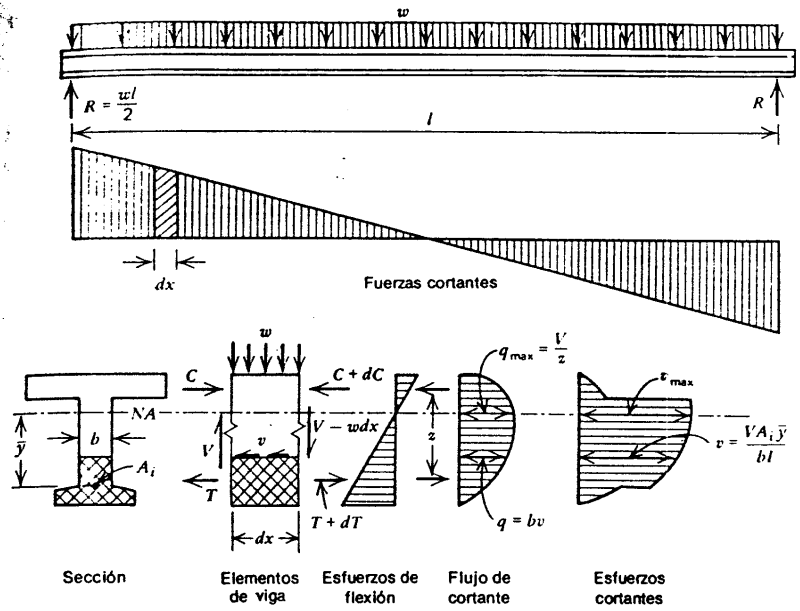


Figura 7.1. Fuerza cortante, flujo de cortante y esfuerzos cortantes en una viga elástica isotrópica homogénea.

en que z es el brazo de palanca interno; normalmente en el eje neutro se localiza el esfuerzo cortante máximo, si el ancho b en esa fibra es suficientemente pequeño (vea la fig. 7.1).

Entonces es posible combinar los esfuerzos cortantes así generados con los esfuerzos a flexión en cualquier fibra. De nuevo, considerando el equilibrio de un elemento infinitesimal, la magnitud f_1 y f_2 y la inclinación φ de los esfuerzos principales, resultantes de la aplicación simultánea de un esfuerzo de tensión f y un esfuerzo cortante v ilustrado en la fig. 7.2, se pueden obtener como sigue:

$$\text{tensión principal} \qquad f_1 = \frac{f}{2} + \sqrt{f^2 + 4v^2} \tag{7.3a}$$

$$\text{compresión principal} \qquad f_2 = \frac{f}{2} - \sqrt{f^2 + 4v^2} \tag{7.3b}$$

la inclinación del esfuerzo principal de tensión con respecto al eje de la viga se encuentra de

$$\tan 2\varphi = \frac{2v}{f} \qquad \text{ó} \qquad \tan\varphi = \frac{v}{f_1} \tag{7.3c}$$

En la fig. 7.2 se ilustra la inclinación de los esfuerzos principales para el caso de una viga rectangular simplemente soportada y cargada unifor-

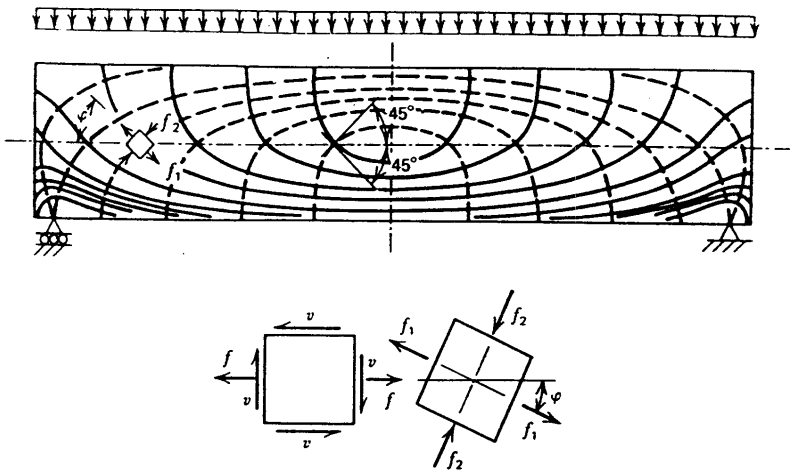


Figura 7.2. Trayectorias de los esfuerzos principales en una viga isotrópica homogénea.

mente. Las trayectorias de los esfuerzos intersectan al eje neutro a 45°. Cuando los esfuerzos principales de tensión son excesivos, se desarrollan grietas aproximadamente perpendiculares a estas trayectorias de esfuerzo principal de tensión.

Los pioneros[7.5] de la teoría del concreto reforzado extendieron estos conceptos tradicionales a la sección idealizada de una viga de concreto reforzado agrietado. Como lo muestra la fig. 7.3, la fuerza horizontal que se ha de transferir a través de la zona agrietada de la sección permanece constante; en consecuencia, el flujo de cortante en la zona a tensión es constante. Utilizando los conceptos de la fig. 7.1, la fuerza diferencial de tensión es $dT = vb_w dx$, y por tanto se tiene

$$v = \frac{1}{b_w}\frac{dT}{dx} = \frac{dM}{dx}\frac{1}{b_w jd} = \frac{V}{b_w jd} \tag{7.4}$$

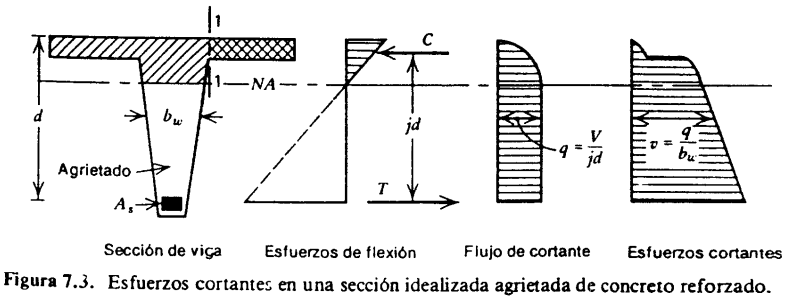


Figura 7.3. Esfuerzos cortantes en una sección idealizada agrietada de concreto reforzado.

o

$$q = \frac{V}{jd} \tag{7.4a}$$

Es evidente que el esfuerzo cortante depende del ancho del alma, ilustrado en la fig. 7.3 para un ejemplo específico. Ya que se supone que el concreto por debajo del eje neutro (*NA*) está en estado de cortante puro, se ha utilizado esta ecuación como la medida de tensión diagonal en la zona de tensión agrietada de una viga de concreto reforzado, lo que también implica que los esfuerzos cortantes verticales se trasmiten de esta manera a través de secciones, sin importar la presencia de grietas a flexión.

Todavía se utiliza esta ecuación tradicional del esfuerzo cortante en muchos países, ya que es un "índice" conveniente para medir la intensidad de cortante, pero como los siguientes párrafos indican, no se puede considerar que dé un esfuerzo cortante en ninguna localización especial en una viga de concreto reforzado agrietada. Por conveniencia, el ACI adoptó como índice de la intensidad de cortante la ecuación simple

$$v = \frac{V}{b_w d} \tag{7.5}$$

En determinados casos, el esfuerzo cortante máximo podría ocurrir en una fibra no localizada en el alma de la sección. Cuando el patín de una sección T trasmite una fuerza grande de compresión, como en el área sombreada a la derecha de la sección 1 (fig. 7.3), el cortante en la unión patín-alma puede ser crítica, y necesitarse por ello refuerzo horizontal en el patín. En las vigas que soportan pisos de edificios, generalmente el refuerzo de flexión en la losa es adecuado para este propósito.

Cuando el peralte del miembro varía a lo largo de su longitud, la magnitud de la fuerza que provoca los esfuerzos cortantes, será afectada por las fuerzas internas debidas a la flexión. De la fig. 7.4 es evidente que la fuerza inclinada interna de compresión, $C = C'/\cos\theta'$, tiene una componente vertical que resiste algo del cortante externo V aplicado a la sección. Usando la notación de la fig. 7.4, se puede expresar la fuerza cortante efectiva como

$$V_{\text{eff}} = V - C\,\text{sen}\,\theta' = V - C'\tan\theta' = V - \frac{M_s}{jd}\tan\theta' \tag{7.6}$$

en que

$$M_s = M - Ne_s \tag{7.6a}$$

El cortante externa sólo se reduce si el peralte del miembro aumenta en la misma dirección en que aumentan los momentos flexionantes. Cuando sucede lo contrario, se debe tomar como negativo el valor de θ' en la ec. 7.6. En la fig. 7.5 se muestran cualitativamente tres casos típicos de la dis-

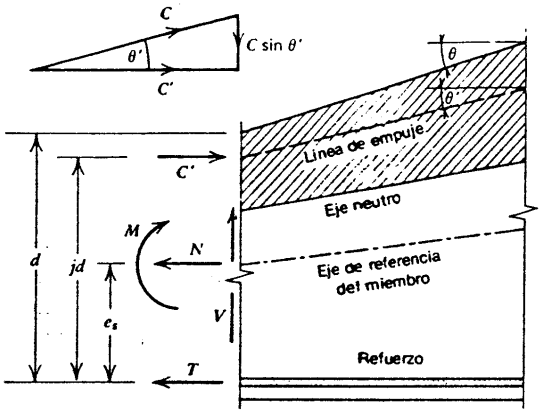


Figura 7.4. Acciones externas e internas en una viga de peralte variable.

tribución de cortante externo y efectivo para vigas acarteladas, que soportan cargas uniformemente distribuidas.

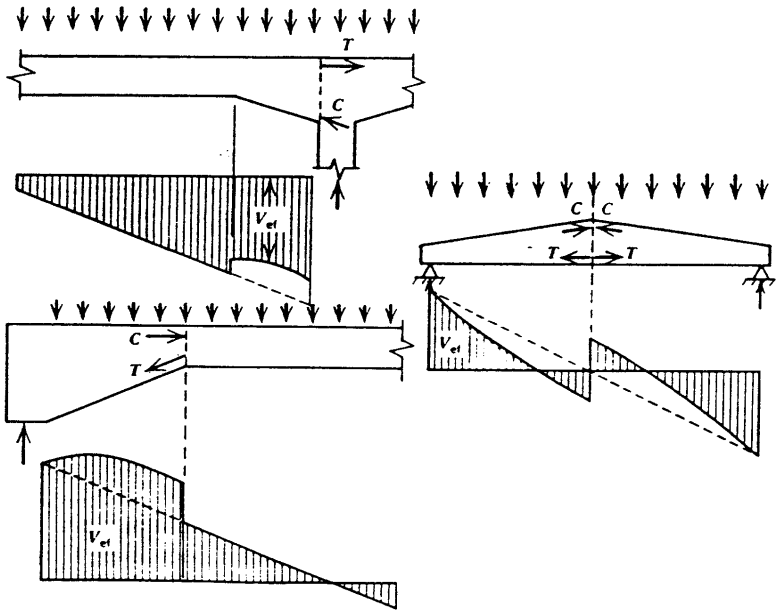


Figura 7.5. El cortante efectivo en vigas acarteladas.

7.3 EL MECANISMO DE RESISTENCIA A CORTANTE EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO SIN REFUERZO EN EL ALMA

7.3.1 La formación de grietas diagonales

La flexión y cortante se combinan en un miembro de concreto reforzado para crear un estado biaxial de esfuerzos. En la fig. 7.2 se ilustran los esfuerzos principales así generados. Cuando los esfuerzos principales de tensión exceden la resistencia a tensión del concreto, se forman grietas. En una región de grandes momentos flexionantes, estos esfuerzos son máximos en la fibra extrema a tensión del miembro y producen grietas de flexión perpendiculares al eje del miembro. En la región de elevada fuerza cortante, se pueden generar esfuerzos principales de tensión significativos, también conocidos como tensión diagonal, aproximadamente a 45° respecto al eje del miembro, lo que puede producir grietas inclinadas (tensión diagonal). Con pocas excepciones, estas grietas inclinadas son extensiones de grietas de flexión. Sólo en casos relativamente especiales, como en almas de vigas con patines, las grietas de tensión diagonal se inician en la proximidad del eje neutro. El concepto de esfuerzo principal tiene poco valor en la evaluación del comportamiento subsiguiente, a menos que se considere la compleja distribución de esfuerzos en el concreto después del agrietamiento. O un miembro a flexión de concreto reforzado se desploma inmediatamente después de la formación de grietas diagonales, o se desarrolla un mecanismo totalmente nuevo de trasmisión de cortante capaz de soportar mayo carga en la viga agrietada.

Por lo general, la carga de agrietamiento diagonal que se origina de la flexión y cortante es bastante más pequeña de lo que se esperaría del análisis de esfuerzos principales y de la resistencia a tensión del concreto, lo cual se debe a la presencia de esfuerzos de contracción, a la redistribución de esfuerzos cortantes entre grietas de flexión y al debilitamiento local de una sección transversal por el refuerzo transversal, que provoca un patrón regular de discontinuidades a lo largo de la viga.

En las primeras etapas del diseño de concreto reforzado, se consideraba indeseable el agrietamiento diagonal. Sin embargo, en la actualidad se reconoce que es aceptable el agrietamiento diagonal bajo condiciones de carga de servicio, con tal que los anchos de las grietas permanezcan dentro de los mismos límites aceptados para las grietas de flexión.

7.3.2 Equilibrio en el claro de cortante de una viga

La fig. 7.6*a* muestra parte de una viga simplemente soportada sobre la que la fuerza cortante es constante. Se pueden identificar las fuerzas internas y externas que mantienen el equilibrio de este cuerpo libre, limitado en un lado por una grieta diagonal. Se puede ver que la fuerza V transversal externa total está resistida por la combinación de:

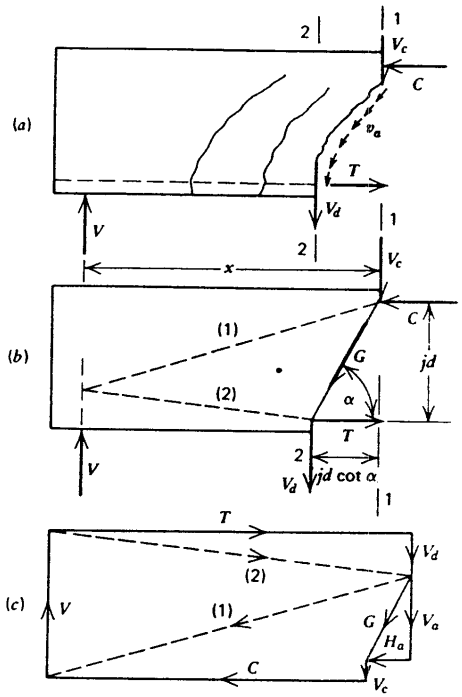


Figura 7.6. Requerimientos de equilibrio en el claro de cortante de una viga.

1. Una fuerza cortante a través de la zona de compresión V_c.
2. Una fuerza de dovela transmitida a través de la grieta mediante el refuerzo V_d. de flexión.
3. Las componentes verticales de los esfuerzos cortantes inclinados v_a transmitidos a través de la grieta inclinada por medio de la trabazón de las partículas del agregado.

Para simplificar la expresión de equilibrio, se supone que es posible agrupar los esfuerzos de cortante transmitidos por la trabazón del agregado en una sola fuerza G, cuya línea de acción pasa a través de dos puntos distintos del cuerpo libre (fig. 7.6*b*). Con esta simplificación, el polígono de fuerzas de la fig. 7.6*c* representa el equilibrio del cuerpo libre, condición que también se puede expresar en la forma

$$V = V_c + V_a + V_d \tag{7.7}$$

que representa la contribución de la zona de compresión, la trabazón del agregado y la acción de dovela a la resistencia a cortante en una viga sin refuerzo en el alma.

El momento de resistencia de la viga se expresa mediante

$$M = xV = jd(T + V_d \cot \alpha) \tag{7.8}$$

Si se ignora la contribución de la fuerza de dovela a la resistencia a flexión (un paso justificable para fines de diseño, especialmente en la ausencia de estribos), el momento de resistencia se simplifica a

$$M = Tjd \tag{7.9}$$

Es importante notar que el momento y la fuerza de tensión, relacionados entre sí en la fig. 7.6*b* y en la ec. 7.9, no ocurren en la misma sección transversal de la viga. Se ve que la tensión en el refuerzo de flexión a la distancia $(x - jd \cot \alpha)$ del soporte está gobernada por el momento a una distancia x del soporte de la viga. El aumento en los esfuerzos del acero claramente depende de la pendiente de la grieta diagonal idealizada. Cuando α es un poco menor que 45°, $jd \cot \alpha \approx d$. que se debe tomar en cuenta cuando al determinar el recorte del refuerzo de flexión. En la sección 7.5.1 se examina más detalladamente este corrimiento en la distribución de las fuerzas de tensión, cuando también se considera la contribución del refuerzo del alma.

7.3.3 Los mecanismos principales de la resistencia a cortante

Cuando se combinan las relaciones entre el momento externo y el momento interno de resistencia dado por la ec. 7.9 con la bien conocida relación entre cortante y la razón de cambio del momento flexionante a lo largo de una viga, resultan los siguientes modos de resistencia cortante interna:

$$V = \frac{dM}{dx} = \frac{d}{dx}(Tjd) = jd\frac{dT}{dx} + T\frac{d(jd)}{dx} \tag{7.10}$$

El término $jd(dT/dx)$ expresa el comportamiento de un miembro verdaderamente prismático a flexión en que la fuerza interna de tensión T que actúa con un brazo de palanca constante jd cambia de punto a punto a lo largo de la viga, para balancear exactamente la intensidad del momento externo. El término dT/dx, la razón de cambio de la fuerza de tensión interna, se denomina la fuerza de adherencia q aplicada al refuerzo de flexión por longitud unitaria de la viga. (Véase también la fig. 7.3.) Si el brazo de palanca interno permance constante (una suposición aceptada normalmente en la teoría elástica de los miembros prismáticos a flexión) de manera que $d(jd)/dx = 0$, se obtiene la ecuación de "acción de viga" perfecta como sigue

$$V = jd\frac{dT}{dx} = qjd \tag{7.11}$$

El mismo resultado se obtuvo en la ec. 7.4*a* en que se llamó flujo de cortante a q, la fuerza de adherencia por longitud unitaria del miembro en e inmediatamente arriba del nivel del refuerzo de flexión. Es evidente que esa simplificación de comportamiento sólo es posible si se puede transferir con eficiencia el flujo de cortante o fuerza de adherencia entre el refuerzo a flexión y el concreto que lo rodea. Da origen al fenómeno de adherencia, examinado en el siguiente capítulo. Durante más de medio siglo se ha creído generalmente que en ausencia de refuerzo del alma, la "acción de viga" resistía al cortante de esta manera.

Cuando por cualquier razón se destruye la adherencia entre el acero y concreto en toda la longitud del claro de cortante, no puede cambiar la fuerza T de tensión, por lo que $dT/dx = 0$. Bajo tales circunstancias, la única manera de resistir al cortante externo es mediante compresión interna inclinada, caso extremo que puede denominarse "acción de arco." Su resistencia de cortante se expresa mediante el segundo término del miembro derecho de la ec. 7.10, es decir,

$$V = T\frac{d(jd)}{dx} = C\frac{d(jd)}{dx} \tag{7.12}$$

Aquí se sustituye la tensión interna T mediante la fuerza interna de compresión C, para indicar que es la componente vertical de una fuerza de compresión, con pendiente constante, la que equilibra a la fuerza cortante externa.

En una viga normal de concreto reforzado en que (debido al deslizamiento, agrietamiento y otras causas) no se puede desarrollar toda la fuerza q de adherencia necesaria para la acción de viga, los dos mecanismos, expresados por la ec. 7.10, ofrecen una resistencia combinada contra las fuerzas cortantes. El grado en que cada mecanismo contribuye a la resistencia cortante en distintos niveles de intensidad de carga externa depende de la compatibilidad de las deformaciones asociadas con estas acciones.

Acción de viga en el claro de cortante

Las grietas inducidas por la carga en una viga simplemente soportada dividen la zona de tensión en una serie de bloques (vease la fig. 7.6*a*). Se puede considerar que cada uno de estos bloques actúa como voladizo con su base en la zona de compresión del concreto y que su extremo libre está justo más alla del refuerzo de tensión. Debido a la analogía, se dice que los bloques son "voladizos de concreto."

En la eq. 7.11 se mostró que para que ocurra acción de viga perfecta, se debe resistir efectivamente toda la fuerza q de adherencia. Queda por ver cómo es que los voladizos de concreto pueden satisfacer este requerimiento. Se puede examinar con mayor detalle la resistencia, si primero se

identifican todas las acciones a las que se sujeta un voladizo típico. Las componentes de la acción de voladizo (vease la fig. 7.7), son como sigue:

1. El aumento de la fuerza de tensión en el refuerzo de flexión entre grietas adyacentes produce una fuerza de adherencia, $\Delta T = T_1 - T_2$.
2. Con tal que ocurran desplazamientos de cortante en las dos caras de una grieta, se pueden generar esfuerzos cortantes v_{a1} y v_{a2} por efecto de la trabazón del agregado.
3. Los mismos desplazamientos de cortante también pueden inducir fuerzas de dovela V_{d1} y V_{d2} a través del refuerzo de flexión.
4. En el extremo "empotrado del voladizo, se inducen una fuerza axial P, una fuerza cortante transversal V_h, y un momento M_c para equilibrar las fuerzas mencionadas antes en el voladizo.

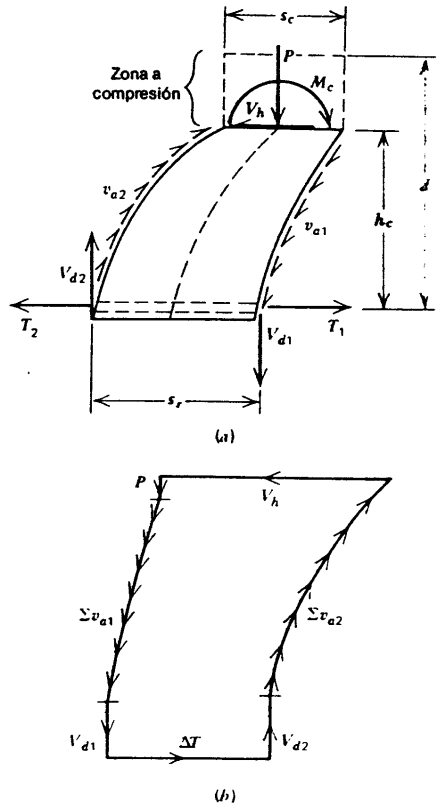


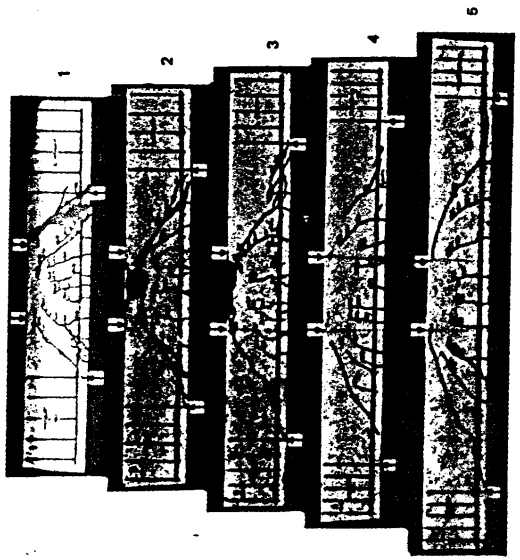
Figura 7.7. Acciones en un voladizo de concreto en el claro de cortante de una viga.

Se notará que el momento de voladizo ejercido por la fuerza de adherencia, ΔT, está resistido por las fuerzas de dovela y de trabazón del agregado, además de la resistencia a flexión M_c del concreto. Mediante pruebas [7.6] se ha podido hacer una comparación cuantitativa entre estos tres modos de resistencia de voladizo. La resistencia a flexión del concreto depende principalmente de la resistencia a tensión del concreto, del patrón de esfuerzos resultante de las acciones de P, V_h, y M_c (Véase la fig. 7.7), y de la profundidad s_c de la sección crítica de voladizo. A menudo la profundidad s_c es bastante pequeña, especialmente en etapas avanzadas del agrietamiento. La viga 5 en la fig. 7.8, que muestra una serie de vigas probadas por Leonhardt y Walther, [7.7] es un buen ejemplo de este fenómeno. Los experimentos [7.6] han indicado que en vigas de dimensiones normales, se podría resistir a lo más 20% de la fuerza de adherencia, por flexión en el "extremo empotrado" de los voladizos de concreto.

Cuando ocurre desplazamiento cortante a lo largo de una grieta inclinada, cierta cantidad de cortante se transfiere por efecto de la acción de dovela del refuerzo de flexión. En los puntos donde las varillas se apoyan contra el concreto de recubrimiento, la resistencia a tensión del concreto limita la capacidad de dovela. Una vez que ocurren grietas por desgajamiento, se reduce considerablemente la rigidez, y en consecuencia la efectividad de la acción de dovela. Este desgajamiento también afecta adversamente el funcionamiento de la adherencia de las varillas. A su vez, la resistencia al desgajamiento del concreto depende del área efectiva del concreto entre las varillas de una capa a través de la cual se debe resistir la tensión. De especial importancia es la posición relativa de una varilla en el momento en que se cuela el concreto. Debido a la elevada sedimentación y a la ganancia de agua bajo las varillas en la parte superior de la viga, éstas requieren desplazamientos cortantes considerablemente mayores que las varillas inferiores de la viga para ofrecer la misma resistencia de dovela.

Las pruebas indican [7.6, 7.8] que en las vigas sin refuerzo en el alma, la contribución de la acción de dovela no excede 25% de la resistencia total del voladizo. Sin embargo, la acción de dovela es más significativa cuando se utilizan estribos, debido a que una varilla de flexión puede apoyarse con mayor efectividad contra un estribo que esté doblado estrechamente contra ella. Sin embargo, se desarrollan grietas aproximadamente paralelas a las varillas de flexión antes que los estribos contribuyan a transmitir fuerzas de dovela. La rigidez del mecanismo de dovela depende considerablemente de la posición de una grieta relativa a los estribos adyacentes que podrían soportar una fuerza de dovela. Taylor, [7.8] Baumann y Rüsch, [7.9] y otros han estudiado las características de la acción de dovela en las vigas con grietas suaves diagonales preformadas. En la fig. 7.9 se presentan relaciones cualitativas de carga - desplazamiento para la acción de dovela. Cuando el desplazamiento cortante es suficientemente grande, y las varillas de flexión están soportadas firmemente con estribos, las fuerzas de

Marca	Claro (plg)	Claro (m)	$\frac{a}{d}$
1	35.4	0.90	1.0
2	41.3	1.15	1.5
3	57.0	1.46	2.0
4	66.9	1.70	2.5
5	76.7	1.95	3.0
6	92.5	2.35	4.0
7/1	112.1	3.10	5.0
8/1	141.9	3.60	6.0
10/1	185.2	4.70	8.0
9/1	228.2	5.80	7.0



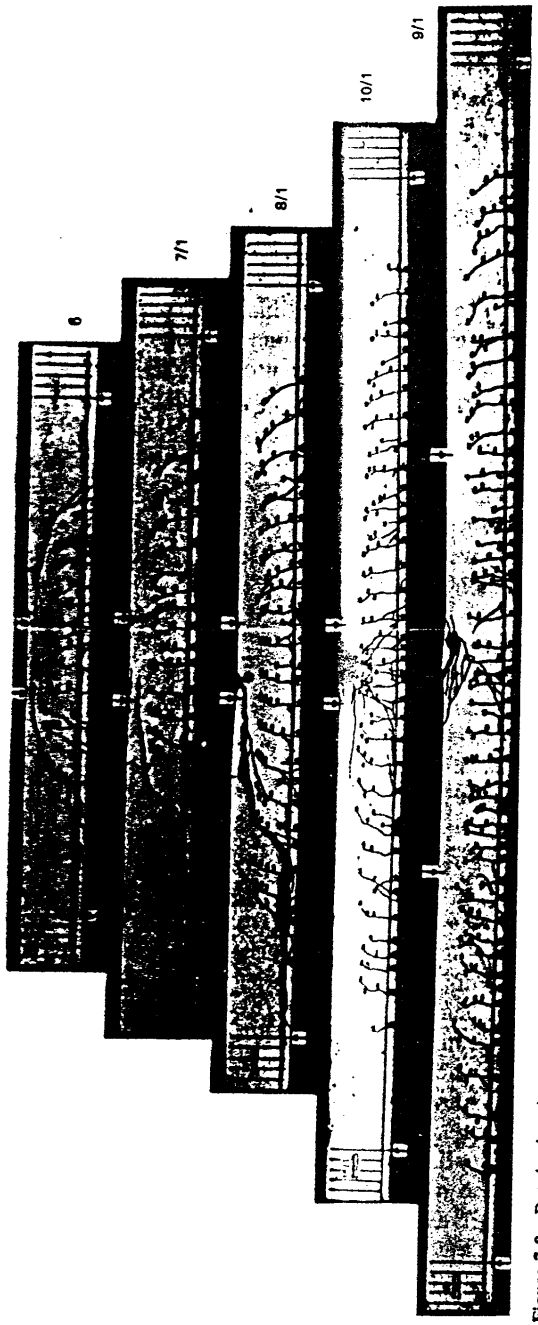


Figura 7.8. Patrón de grietas en vigas probadas por Leonhardt y Walther.[7.7]

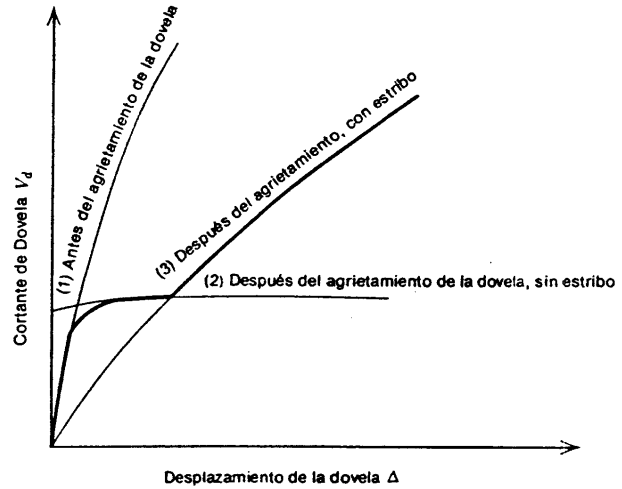


Figura 7.9. Relación general cortante de dovela - desplazamiento de dovela.

dovela pueden transmitirse por la torcedura de las varillas.[7.10] Esto es muy importante dentro de las articulaciones plásticas donde el refuerzo de flexión ha cedido ó a lo largo de uniones donde puede ocurrir cortante deslizante. (Vea la fig. 7.29.)

Cuando se da un desplazamiento cortante relativo a las dos caras de una grieta de flexión de ancho moderado, cierta cantidad de partículas de agregado grueso que se proyectan a través de la grieta permiten la transmisión de pequeñas fuerzas cortantes. Es claro que entre muchas variables, entre las más importantes estarán el ancho y aspereza de la grieta, el desplazamiento cortante y la resistencia del encaje (es decir, la resistencia del concreto). Es sorprendente que se pueda trasmitir una fuerza muy considerable de esta manera. De hecho, en una serie de probetas de laboratorio [7.6] no se pudo obtener una falla de trabazón del agregado, debido a otras causas, tales como tensión diagonal a cierta distancia de la grieta observada, que terminó la capacidad de transmisión de carga. Cuando se suprimieron esas fallas y se mantuvo constante el ancho de la grieta, se pudieron obtener esfuerzos cortantes en la trabazón del agregado superior a 1000 lb/plg^2(69 N/mm^2)[7.11] (Véase la fig. 7.28). Las mediciones en vigas de prueba [7.6, 7.13] sin refuerzo en el alma indicaron que el mecanismo de trabazón del agregado resistió entre 50 y 70% de la fuerza de adherencia, que actuaba en el voladizo de concreto mostrado en la fig. 7.7. Fenwick [7.6] demostró esto en forma convincente mediante una comparación con una viga en que se eliminó el mecanismo de la trabazón del agregado a través de grietas lisas preformadas.

Las capacidades máximas de los tres mecanismos de la acción de viga (acción de dovela, trabazón del agregado y la resistencia a flexión del extremo empotrado del voladizo) no necesariamente se suman cuando la falla es inminente. El avance de las grietas inclinadas hacia la zona de compresión reduce considerablemente el "empotramiento" del voladizo, lo que produce grandes rotaciones, especialmente en el "extremo libre" de los voladizos, que a su vez significa que se ha agotado la capacidad de dovela. La formación de grietas de dovela y giretas diagonales secundarias cerca del refuerzo, visibles especialmente en la viga 8/1 de la fig. 7.8, afecta la acción de trabazón del agregado, que en esta etapa transmite el grueso de la carga. Una reducción repentina de esta acción, tal como Σv_{a2} en la fig. 7.7 a un lado del voladizo provoca el desequilibrio, a menos que se pueda desarrollar una tensión correspondiente en el origen del voladizo. Esas fuerzas de tensión normalmente conducen a una propagación adicional de grietas, que no puede impedirse en las vigas esbeltas. A esto se le conoce como una falla a tensión diagonal, que es especialmente indeseable, ya que por lo general ocurre muy repentinamente.

Las vigas 7/1 y 8/1 (fig. 7.8) son buenos ejemplos de la falla de acción de viga en el claro de cortante.

Se acostumbra referirse a la resistencia a cortante de la zona de compresión de una viga, suponiendo que las acciones de trabazón del agregado y de dovela no son medios viables de resistencia a cortante. Sin embargo, experimentos recientes han demostrado nuevamente que no sucede así. Taylor [7.12] examinó las zonas de compresión del concreto por sobre las grietas diagonales y encontró que el cortante transmitido en esta área (V_c en la fig. 7.6) aumentó lentamente hasta un máximo de 25 a 40% de la fuerza cortante total a través de la sección conforme las vigas se aproximaban a la falla. En consecuencia, el resto del cortante debe transmitirse por debajo del eje neutro en la zona de tensión de la viga. Después de la falla de los mecanismos de la trabazón del agregado y del de dovela, generalmente la zona de compresión no puede transmitir el cortante incrementado, además de la fuerza de compresión resultante de la flexión, por lo que falla la viga.

Acción de arco en el claro de cortante

El segundo término de la ec. 7.10 indica que la compresión inclinada en una viga puede soportar el cortante, como lo ilustra la fig. 7.10. La acción de arco requiere una reacción horizontal apreciable en el apoyo que en las vigas simplemente soportadas lo proporciona el refuerzo de flexión. Esto impone severas exigencias a los anclajes, y ciertamente explica el tipo más común de falla de arco. En la viga idealizada de la fig. 7.10, se supone anclaje total, con lo que se puede desarrollar una fuerza constante de tensión en el refuerzo inferior, en toda la longitud, como se requiere. El área sombreada indica la porción de concreto comprimido fuera de la cual

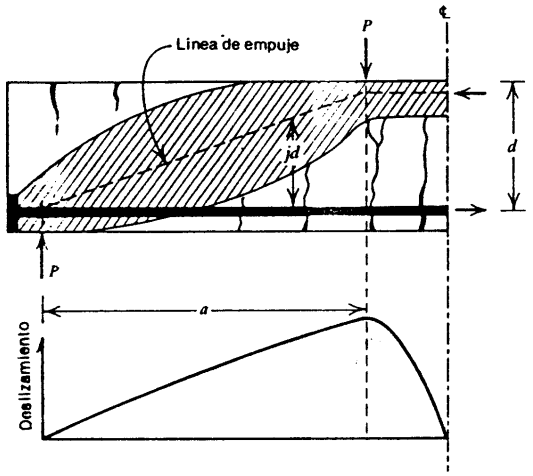


Figura 7.10. Deslizamiento asociado con la acción de arco en una viga idealizada.

se pueden formar las grietas. Al considerar los requerimientos de compatibilidad de deformación, y suponiendo una distribución lineal de deformaciones a través de toda la sección del concreto, se puede determinar una posición única de la línea de empuje. La extensión total del refuerzo entre los anclajes debe ser igual a la elongación total de la fibra de concreto situada en el mismo nivel. En donde el concreto está agrietado, se puede deducir la elongación a partir de la extrapolación lineal de las deformaciones en la zona de compresión. Satisfechos estos criterios, se puede determinar el desplazamiento de traslación del acero con relación al concreto que le rodea (es decir, el deslizamiento). En la fig. 7.10 se muestra una distribución típica de deslizamiento a lo largo del claro de cortante.

Del estudio de esa viga idealizada [7.6] surgieron tres puntos que conviene notar:

1. La acción de arco sólo puede ocurrir a costa del deslizamiento (es decir, de la pérdida completa de transferencia de adherencia).
2. Los desplazamientos de traslación requeridos para la acción completa de arco aumentan hacia el punto de carga y alcanzan un valor aproximadamente igual a la extensión total del acero en el claro de cortante.
3. En la proximidad del punto de carga, la línea de empuje y por tanto el eje neutro, se elevan bastante por arriba de la posición predicha por la teoría estándar de flexión.

En las vigas reales, especialmente cuando se emplean varillas corrugadas, no puede ocurrir deslizamiento apreciable entre el acero y el con-

creto. El desplazamiento de traslación ocurre principalmente como resultado de la deformación a flexión o la falla de los voladizos de concreto formados entre grietas diagonales y la flexión de la zona de compresión arriba de estas grietas. También, la transición de acción de viga a acción de arco en una viga real es gradual, lo que se puede determinar si se observa el desarrollo de la fuerza de tensión a lo largo del refuerzo, y en consecuencia la variación del brazo de palanca interno en las vigas de prueba. No es posible combinar la resistencia total de las acciones de arco y de viga debido a la incompatibilidad general de las deformaciones asociadas con los dos mecanismos.

La resistencia disponible de la acción de arco depende principalmente de que se pueda dar lugar a los esfuerzos de compresión diagonal resultantes. Para una fuerza de acero y ancho de viga dadas, la intensidad de los esfuerzos de compresión diagonal depende de la inclinación de la línea de empuje. La relación del claro de cortante al peralte (a/d en la fig. 7.10) es una medida de esta inclinación que también puede expresarse en términos del momento y el cortante como sigue

$$\frac{a}{d} = \frac{Va}{Vd} = \frac{M}{Vd} \tag{7.13}$$

Excluyendo la pérdida de anclaje, se pueden clasificar las fallas de arco en tres grupos.

1. Después de la falla de la acción de viga, la propagación de una grieta inclinada reduce excesivamente la zona de compresión. Se alcanza una cierta pendiente cuando el área disponible de concreto en la vecindad del punto de carga es demasiado pequeña para resistir la fuerza de compresión y se aplasta. A esto se le conoce como una falla de "compresión cortante." Las vigas 4, 5 y 6 de la figura 7.8 son buenos ejemplos de esta falla.

2. La línea de empuje puede ser tan excéntrica que ocurra una falla a tensión por flexión en la "zona de compresión." Un ejemplo de ese comportamiento es la viga 7/1 de la figura 7.8. La falla es repentina.

3. Cuando la línea de empuje es más inclinada (por ejemplo, cuando a/d es menor que 2), se puede disponer de mucha resistencia de reserva, debido a la acción de arco más eficiente. La falla puede deberse finalmente al aplastamiento o desgajamiento por compresión diagonal, que puede asemejarse a la falla en la prueba brasileña realizada en un cilindro de concreto estándar (vea la viga 1 de la fig. 7.8). A menudo se alcanza la capacidad a flexión de una viga debido a que el mecanismo de arco es suficiente para soportar la fuerza cortante requerida (vea la viga 2 de la fig. 7.8).

Es importante notar que la única manera como puede ocurrir la acción de arco en las vigas sin refuerzo en el alma es aplicando cargas a la zona

de compresión de la viga. Así sucedió con todas las vigas de prueba de la figura 7.8. La situación de la carga puede ser más seria cuando una trabe soporta vigas secundarias cerca de su borde inferior. Es evidente que no se puede desarrollar acción efectiva de arco en una viga, cuando la fuerza cortante externa se introduce en la zona de tensión. En el capítulo 13 se estudian las medidas precautorias para estos casos. El material anterior ha indicado claramente que la acción de arco debe ser el modo dominante de resistencia a cortante en vigas de gran peralte cargadas en la zona de compresión.

7.3.4 Efectos del tamaño

Por razones obvias, casi todas las pruebas de cortante se han desarrollado en vigas relativamente pequeñas. Recientemente se ha encontrado que no es posible aplicar los resultados de dichas pruebas de laboratorio en las vigas de tamaño natural. La resistencia a cortante de las vigas sin refuerzo en el alma parece disminuir al aumentar el peralte efectivo. En sus experimentos, Kani ha demostrado esto muy efectivamente. [7.14] Si se toma en cuenta la debida reducción a escala de todas las propiedades, el efecto del tamaño absoluto de una viga sobre su resistencia a cortante no es tan grande. [7.15] Las acciones de dovela y de trabazón del agregado en especial se pueden reducir considerablemente en las vigas grandes, si no se reducen a escala debidamente los tamaños del agregado y de las varillas de refuerzo. Sin embargo, los experimentos en la Universidad de Stuttgart han indicado que la pérdida relativa de resistencia a cortante de las vigas grandes no era importante cuando se compararon las vigas con refuerzo en el alma. [7.16]

7.3.5 Mecanismos de falla a cortante

Los mecanismos de falla a cortante de vigas simplemente soportadas, cargadas con cargas concentradas de los tipos descritos antes, caen en tres grupos aproximados de relaciones de a/d, que pueden observarse en las vigas probadas por Leonhardt y Walther [7.7] fig. 7.8). En la figura 7.11 se grafican los momentos de falla y las fuerzas cortantes últimas para las 10 vigas de la figura 7.8, contra la relación del claro de cortante al peralte (ecuación 7.13). Las vigas no contenían estribos y las propiedades de los materiales de todos los especímenes eran casi idénticas.

Tipo I Falla del mecanismo de viga en la aplicación de la carga de agrietamiento diagonal, o poco después de ella cuando $3 < a/d < 7$. el mecanismo subsecuente de arco no puede soportar la carga de agrietamiento.

Tipo II. Falla de compresión por cortante o falla de tensión por flexión de la zona a compresión por encima de la carga de agrietamiento diagonal, lo que generalmente es una falla de acción de arco, cuando $2 < a/d < 3$.

Tipo III. Falla por aplastamiento o desgajamiento del concreto (es decir, una falla de acción de arco) cuando a/d es menor que 2.5.

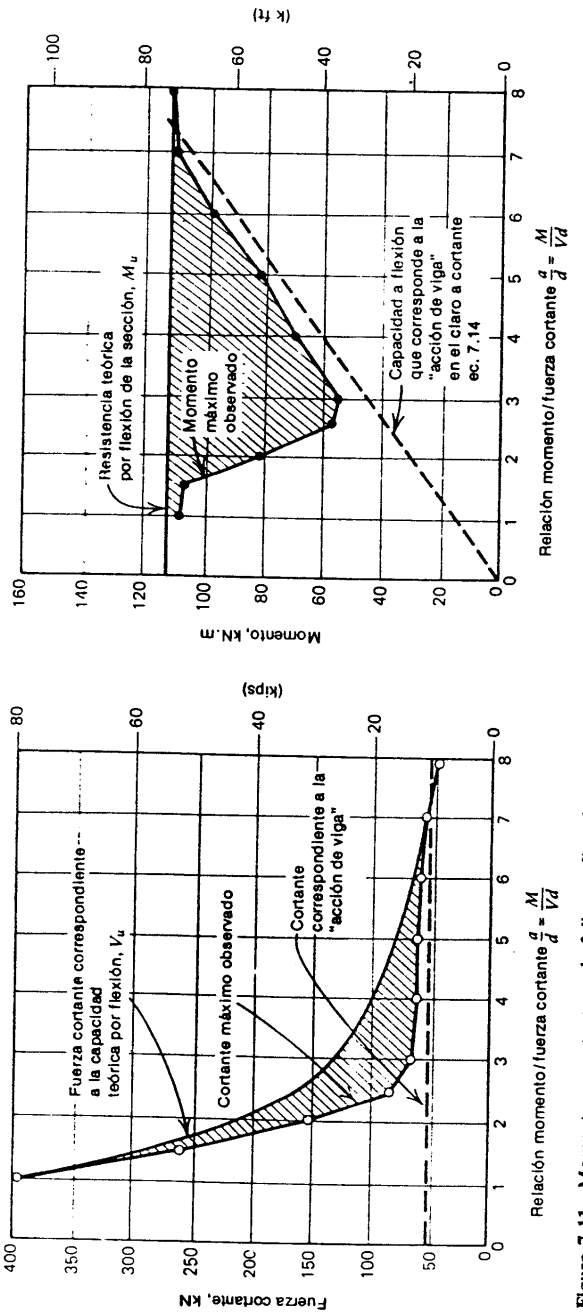


Figura 7.11. Momentos y cortante en la falla, graficando contra la relación del claro de cortante al peralte.[7.7]

La figura 7.11 revela que cuando $1.5 < a/d < 7$, no se logra la capacidad a flexión de la viga, por lo que el cortante rige en el diseño.

Al considerar la acción de viga de la resistencia de cortante, como se describió antes, queda claro que la magnitud de la fuerza de adherencia ΔT, transmitida entre dos grietas adyacentes, está limitada por la resistencia del bloque de voladizo formado entre las grietas (figura 7.7). Al suponer que la resistencia de cada voladizo en el claro de cortante de una viga prismática es la misma, $\Delta T_{máx} = q_{máx}\,\Delta x$, el momento máximo que puede desarrollarse por acción de la viga queda como

$$M_{máx} = jdT_{máx} = jd\sum_{0}^{x} q_{máx}\,\Delta x = q_{máx}jdx \tag{7.14}$$

en que $q_{máx}$ es la máxima fuerza de adherencia por longitud unitaria de la viga, Δx es la distancia entre grietas y x es la distancia de la sección de momento máximo desde el apoyo. Cuando este momento es menor que la resistencia a flexión de la sección M_u, la resistencia a cortante, asociada con la acción de la viga, rige la capacidad de la viga. De la ecuación 7.14 es evidente que el momento que toman los voladizos de concreto de la acción de viga en el claro de cortante aumenta con la distancia x desde el soporte. La acción de viga también implica resistencia cortante constante, limitada por $q_{máx}$, que es independiente de la relación a/d de claro de cortante a peralte.

Las líneas punteadas de la figura 7.11 designan las capacidades a flexión y cortante de la "acción de viga." Al compararse con los valores últimos observados, demuestra que la acción de viga rige el comportamiento cuando a/d es mayor que 3. Cuando esta razón es mayor que 7, la resistencia a cortante es mayor que la resistencia a flexión de estas vigas; en consecuencia, la flexión rige su resistencia. En la fig. 7.11 se indica mediante el área sombreada la discrepancia entre la capacidad teórica a flexión y la resistencia observada a cortante de estas vigas.

La cuantía de acero de flexión para las vigas representadas en la figura 7.11 fue de 2%. Para una cuantía mayor de acero, el "valle" en $a/d \approx 2.5$ es más profundo y para un menor porcentaje de acero será menos profundo. Kani ha demostrado este cambio con la cuantía de acero de flexión en pruebas en muchas vigas.[7.17]

Sin embargo, una elevada cuantía de acero en el claro de cortante significa grietas más estrechas de flexión a una carga dada, lo que permite que las acciones de trabazón de agregado y de dovela transmitan una carga más elevada. Las pruebas[7.17] también han demostrado la mayor resistencia de la acción de viga, producto de la mayor cuantía de acero de flexión (vea la fig. 7.12).

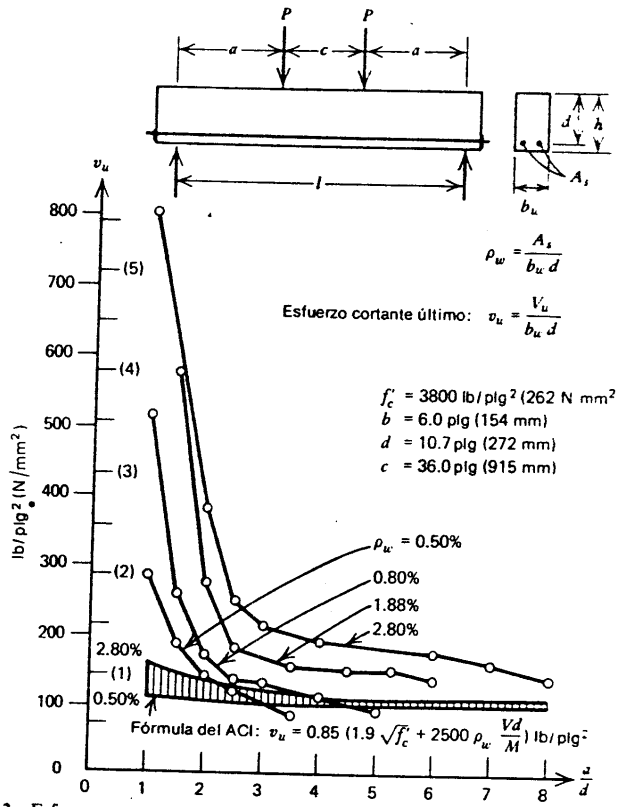


Figura 7.12. Esfuerzo cortante en la falla en función de la relación del claro de cortante al peralte.[7.17]

7.3.6 El diseño por cortante de vigas sin refuerzo en el alma

En las páginas anteriores se estudió la naturaleza de la resistencia a cortante en vigas simplemente soportadas, sin refuerzo en el alma sujetas a cargas concentradas. Se vio que el mecanismo de falla a cortante, especialmente el de vigas con $2.5 < a/d < 7$, depende considerablemente de la resistencia a tensión del concreto. En consecuencia, no es de sorprender que haya gran dispersión de los datos de prueba de miembro aparentemente semejantes. Para vigas sujetas a carga distribuida uniformemente a lo largo del borde de compresión, se obtienen resultados ligeramente más favorables. Por otra parte, la relación a/d en las vigas continuas no representa la misma situación que se encuentra en vigas simplemente soportadas, debido a que las secciones no coinciden con los soportes en que se aplican las reacciones. Por este motivo el ACI ha adoptado una ecuación de diseño semiempírica relativamente simple, en base a los resultados de numerosas pruebas. Dicha ecuación predice conservadoramente la resistencia a cortante de las vigas en la mayoría de los casos.[7.3] También toma en cuenta los principales factores que influyen en la resistencia a cortante, tal como la resistencia a tensión del concreto, medida por el parámetro $\sqrt{f'_c}$, el control de las grietas expresado por $\rho_w = A_s/b_w d$, y la relación del claro de cortante al peralte M/Vd; en esta forma

$$v_c = \frac{V_c}{b_w d} = 1.9\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u} \leqslant 3.5\sqrt{f'_c} \qquad (7.15)$$

en que todas las cantidades están en unidades de libras y pulgadas y $(V_u d/M_u) \leqslant 1.0$ en cualquier sección.

A menudo no se justifica la utilización del segundo término de la ecuación 7.15 (véase el área sombreada de la fig. 7.12), de manera que puede obtenerse un diseño igualmente satisfactorio usando la expresión más simple y ligeramente más conservadora

$$v_c = 2.0\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \quad \text{ó} \quad v_c = 0.166\sqrt{f'_c}\ (\text{N/mm}^2) \qquad (7.16)$$

La figura 7.13 compara las ecuaciones 7.15 y 7.16 con los resultados experimentales.

Sin importar lo pequeño que pueda ser el esfuerzo cortante nominal, es buena práctica proporcionar una cantidad mínima de refuerzo en el alma

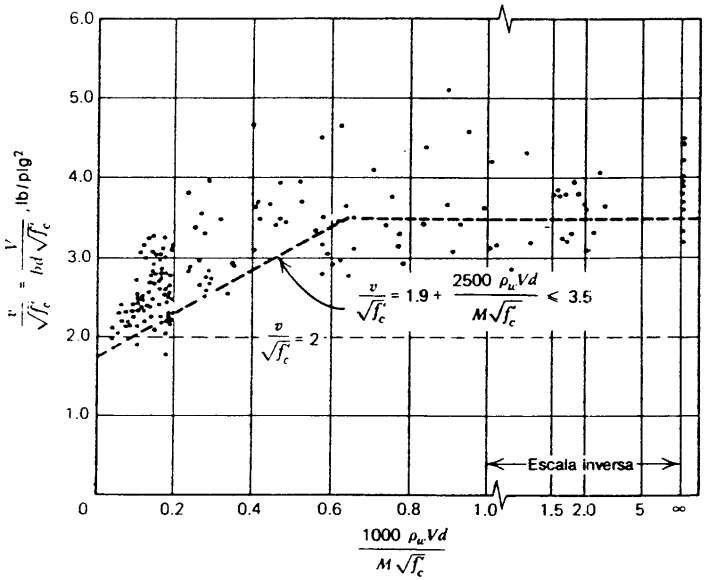


Figura 7.13. Comparación de las ecuaciones 7.15 y 7.16 con los resultados experimentales.[7.3]

en todas las vigas, como se sugiere en el sección 7.4.3, para asegurar que una posible grieta diagonal no sea seguida de un desplome inmediato. Esto es importante debido a que además de las pruebas de Kani (fig. 7.12), hay evidencia adicional [7.18] de que la ecuación 7.15 podría no ser conservadora cuando la cuantía de acero de flexión es pequeña. Adicionalmente, la tensión axial imprevista en un miembro podría reducir a v_c.

Es inevitable que una expresión general como la ecuación 7.15, que intenta predecir las resistencias de dos mecanismos tan distintos como son la acción de viga y la de arco, tenga limitaciones. Sin embargo, a la fecha no ha sido posible tomar en cuenta racionalmente todos los factores que afectan cada una de las componentes del mecanismo resistente de cortante y su interacción. Zsutty [7.19] dedujo una de las mejores correlaciones entre la resistencia a cortante de distintas vigas esbeltas experimentales ($a/d > 2.5$) y los tres parámetros más importantes que rigen la resistencia a cortante (agrietamiento diagonal)

$$v_c = 59\left(\frac{f'_c \rho_w d}{a}\right)^{1/3} \quad (\text{lb/plg}^2) \qquad (7.17)$$

utilizando análisis dimensional y de regresión estadística. Regan [7.20] y Placas [7.21] obtuvieron resultados bastante semejantes de un enfoque semiempírico en su extensa investigación en el Colegio Imperial. En las vigas con relaciones de a/d inferiores a 2.5, cargadas en los bordes superior e inferior, Zsutty propuso la siguiente ecuación

$$v_c = \text{Eq. } 7.17\left(\frac{2.5d}{a}\right) \qquad (7.17a)$$

para tomar en cuenta la acción de arco.[7.22]

7.4 EL MECANISMO DE RESISTENCIA A CORTANTE EN VIGAS DE CONCRETO REFORZADO CON REFUERZO EN EL ALMA

7.4.1 El papel del refuerzo en el alma

La inclusión de refuerzo en el alma tal como estribos no cambia fundamentalmente los mecanismos descritos antes de resistencia a cortante. Los voladizos de concreto, que son los elementos principales del mecanismo de viga, actúan como voladizos con estribos. Además de la fuerza de adherencia ΔT, resistida por la combinación de trabazón del agregado, acción de dovela y la acción de flexión de los voladizos, se puede tomar otra fuerza de adherencia $\Delta T'$ por lo que tradicionalmente se conoce como "acción de armadura." En esta armadura los voladizos actúan como miembros a compresión diagonal (vea la fig. 7.14).

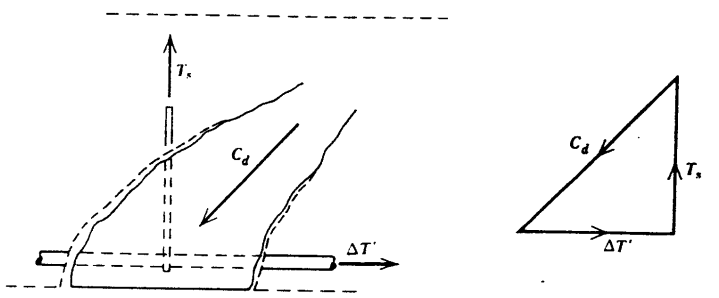


Figura 7.14. Voladizos de concreto actuando como puntales.

La presencia de estribos es también benéfica a la acción de viga en otros aspectos. Los estribos contribuyen a la resistencia de los mecanismos de cortante de la siguiente manera:

1. Mejora la contribución de la acción de dovela. Un estribo puede soportar efectivamente una varilla longitudinal que está cruzada por una grieta cortante de flexión próxima a un estribo.
2. Suprime los esfuerzos de tensión por flexión en los bloques de voladizo mediante la fuerza C_d, a compresión diagonal, producto de la acción de armadura.
3. Limita la abertura de las grietas diagonales dentro del rango elástico, realzando y preservando con ello la transferencia de cortante, mediante la trabazón del agregado.
4. Proporciona confinamiento, cuando los estribos están espaciados suficientemente cerca, aumentando con ello la resistencia a compresión de las localidades especialmente afectadas por la acción de arco.
5. Impide la ruptura de la adherencia cuando se desarrollan grietas de desgajamiento en las zonas de anclaje debido a las fuerzas de dovela y anclaje.

Se puede decir que el refuerzo en el alma detallado adecuadamente preserva la integridad, y por tanto la resistencia, del mecanismo de viga V_c, definido antes, permitiendo con ello que el mecanismo de armadura resista las fuerzas V_s cortantes adicionales.

7.4.2 Analogía de la armadura

La analogía entre la resistencia a cortante de una armadura de cuerdas paralelas y una viga de concreto reforzado en el alma es un concepto viejo de las estructuras de concreto. Esta, que postuló Mörsh a principios de siglo, [7.23] implica que el alma de la armadura equivalente consiste en estribos que actúan como miembros a tensión y puntales de concreto que corren paralelos a las grietas diagonales, generalmente a 45° respecto del eje de la viga. La zona a compresión por flexión del concreto y el refuerzo

de flexión forman las cuerdas superior e inferior de esta armadura análoga conectada en sus nudos por pasadores. Las fuerzas en la armadura pueden determinarse de puras consideraciones de equilibrio. El comportamiento de la armadura es semejante a la "acción de viga perfecta" definida antes en la medida que puede soportar fuerzas $\Delta T'$ discretas de adherencia en las uniones hipotéticas de pasador a lo largo del refuerzo de flexión, resistiendo con ello los momentos externos variables con un brazo de palanca interno constante.

Las deformaciones asociadas con la acción de viga o de arco y el mecanismo de armadura dentro de la viga no son compatibles. Esta incompatibilidad de deformación ignorada tradicionalmente, poco a poco se hace menos significativa al aproximarse las condiciones últimas (esto es, plásticas).

La armadura análoga que aparece en la figura 7.15 ilustra el caso general del refuerzo en el alma inclinado a un ángulo β con respecto a la horizontal. Sirve para ilustrar la relación entre la fuerza V_s, externa cortante que debe resistir la armadura, y las distintas fuerzas internas. Los puntales a compresión diagonal, que resisten una fuerza C_d, están inclinadas a un ángulo α con la horizontal. Del polígono de fuerzas de equilibrio dibujado para el nudo X en la figura 7.15 es evidente que

$$V_s = C_d \operatorname{sen} \alpha = T_s \operatorname{sen} \beta \tag{7.18}$$

en que T_s es la resultante de todas las fuerzas en los estribos a través de la grieta diagonal. La fuerza del acero del alma por longitud unitaria de la viga es T_s/s, en que de la geometría de la armadura análoga, la separación entre estribos es

$$s = jd(\cot \alpha + \cot \beta) \tag{7.19}$$

De las ecuaciones 7.18 y 7.19, la fuerza del estribo por longitud unitaria es

$$\frac{T_s}{s} = \frac{V_s}{jd \operatorname{sen} \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{A_v f_s}{s} \tag{7.20}$$

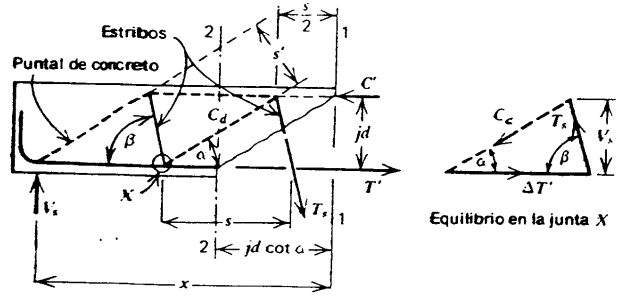


Figura 7.15. Fuerzas internas en una armadura análoga.

en que A_v es el área del refuerzo del alma espaciado a una distancia s a lo largo de la viga y f_s es el esfuerzo en el estribo.

Para fines de diseño es conveniente expresar el cortante en términos de esfuerzos nominales, como en la figura 7.15. Se supone que el cortante total V_u está parcialmente resistido por el mecanismo de armadura (V_s) y parcialmente por el mecanismo descrito antes de viga o arco (V_c). En términos de esfuerzo, esto se expresa como

$$v_u = v_c + v_s \tag{7.21}$$

en que

$$v_s = \frac{V_s}{b_w jd} \approx \frac{V_s}{b_w d} \tag{7.22}$$

Combinando las ecuaciones 7.20 y 7.22, el área requerida de refuerzo en el alma a la resistencia ideal, cuando $f_s = f_y$, queda como

$$A_v = \frac{v_s}{\operatorname{sen} \beta (\cot \alpha + \cot \beta)} \frac{sb_w}{f_y} \tag{7.23}$$

Se supone que la fuerza C_d de compresión diagonal genera esfuerzos uniformes en los puntales de la armadura. Los puntales tienen una profundidad efectiva de $s' = s \operatorname{sen} \alpha = jd \operatorname{sen} \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)$. En consecuencia, se pueden aproximar los esfuerzos de compresión diagonal debidos al mecanismo de armadura mediante

$$f_{cd} = \frac{C_d}{b_w s'} = \frac{V_s}{b_w jd \operatorname{sen}^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)} = \frac{v_s}{\operatorname{sen}^2 \alpha (\cot \alpha + \cot \beta)} \tag{7.24}$$

Para los casos comunes de arreglos de acero en el alma, las ecuaciones 7.23 y 7.24 se simplifican como sigue:

1. ESTRIBOS VERTICALES, $\beta = 90°$

Diagonales a compresión a $\alpha = 45°$

$$A_v = v_s \frac{sb_w}{f_y} \tag{7.23a}$$

$$f_{cd} = 2v_s \tag{7.24a}$$

Diagonales a compresión a $\alpha = 30°$

$$A_v = 0.58 v_s \frac{sb_w}{f_y} \tag{7.23b}$$

$$f_{cd} = 2.31 v_s \tag{7.24b}$$

2. REFUERZO INCLINADO EN EL ALMA, $\beta < 90°$

Diagonales a compresión a $\alpha = 45°$

$$A_v = \frac{v_s}{(\operatorname{sen}\beta + \cos\beta)} \frac{sb_w}{f_y} \tag{7.23c}$$

$$f_{cd} = \frac{2v_s}{1 + \cot\beta} \tag{7.24c}$$

Refuerzo en el alma y puntales a 45°

$$A_v = 0.50 \frac{sb_w}{f_y} \tag{7.23d}$$

$$f_{cd} = v_s \tag{7.24d}$$

Tradicionalmente se ha supuesto que la pendiente de las diagonales a compresión es de 45° al eje de la viga. Sin embargo, se ha observado que la pendiente de las grietas diagonales en los límites de los puntales varían a lo largo de la viga. Los estudios[7.24] basados en consideraciones de energía de deformación muestran que el ángulo óptimo de los puntales es de aproximadamente 38°. De la ecuación 7.23 es evidente que la demanda de acero en el alma se reduce conforme el ángulo de las diagonales a compresión se hace menor que 45°, debido a que se encuentran más estribos a través de una grieta plana. Esto sucede a menudo, de manera que las ecuaciones de diseño basadas en los puntales a compresión a 45° son conservadores. Por otra parte, los puntales son más empinados en la vecindad de cargas concentradas. Sin embargo, en estas áreas la acción de arco local realza la capacidad de los otros mecanismos de transmisión de cortante. Por lo general, en una viga que tiene elevada resistencia de concreto y baja cuantía de acero en el alma, que representa un sistema a tensión menos rígido, los puntales a compresión están a un ángulo menor que 45°, por lo que los estribos son más efectivos que en una armadura a 45°. Inversamente, con una elevada cuantía de acero en el alma y menor resistencia del concreto, la carga del concreto se alivia a costa de la mayor participación de los estribo.[7.24] En la fig. 7.16 se muestran las pendientes de las grietas diagonales en la vecindad de cargas concentradas y en un punto de inflexión.

Los puntales planos a compresión diagonal y los estribos muy empinados implican esfuerzos mayores de compresión del concreto (cf. ecuaciones 7.24*d* y 7.24*b*). Esto indica que no se puede aumentar indefinidamente la cuantía de acero en el alma. La figura 7.16 muestra una viga con patines, continua, de alma delgada con fuerte refuerzo en el alma. En tales vigas, se puede presentar la falla a cortante por el aplastamiento del alma provocado por la compresión diagonal (ecuación 7.24). Al evaluar la resistencia a compresión del alma de las vigas, es necesario considerar los siguientes factores adicionales:

1. Los puntales diagonales también están sujetos a momentos flexionantes, si han de participar en la acción de viga (véase la figura 7.7). Se

introducen momentos secundarios debido a la ausencia de verdaderas "uniones de pasador" en la armadura.

2. Los estribos que pasan a través transmiten tensión a estos puntales mediante adherencia, de manera que generalmente prevalece un estado biaxial de deformaciones. Se sabe que la capacidad a compresión del concreto se reduce drásticamente cuando se imponen deformaciones a tensión transversales simultáneas (véase la figura 2.8).

3. Las fuerzas de compresión se introducen en las "uniones" de la armadura análoga, y estas fuerzas distan mucho de estar distribuidas uniformemente a través del alma. Puede haber excentricidades y esfuerzos transversales de tensión.

4. Algunas diagonales pueden estar inclinadas a un ángulo mucho menor de 45° a la horizontal, lo que produce un aumento significativo en los esfuerzos de compresión diagonal (véase la ecuación 7.24 y la figura 7.16).

Estas observaciones señalan la necesidad de limitar los esfuerzos diagonales del concreto a un valor bastante por debajo de la resistencia al aplastamiento del concreto. Por este motivo el ACI limita la contribución del mecanismo de la armadura a resistencia a cortante a un valor muy conservador de $v_s = 8\sqrt{f'_c}$ (lb/plg²). Por tanto, de las ecs. 7.15 y 7.21, el esfuerzo cortante nominal máximo absoluto en una viga (en unidades de lb/plg²) es $10\sqrt{f'_c} < v_{u,\text{máx}} < 11.5\sqrt{f'_c}$, dependiendo del valor de v_c. Sin embargo, Kupfer y Baumann [7.24] y otros han demostrado que con estribos espaciados estrechamente, como los que se utilizan en la viga de concreto precolado de doble patín de la fig. 7.16, podían alcanzarse esfuerzos cortantes nominales del orden de $20\sqrt{f'_c}$ (lb/plg²) aún después de 50 aplicaciones de carga a un medio de esa intensidad. Como regla general, en las vigas de sección transversal rectangular no pudieron obtenerse esfuerzos cortantes de esta magnitud.

Los estribos pueden desarrollar su resistencia asignada sólo si están anclados adecuadamente. Una grieta diagonal puede cruzar un estribo en cualquier punto a lo largo de su longitud. Ya que la grieta puede estar muy próxima al borde a tensión o compresión del miembro, un estribo debe poder desarrollar su resistencia de cedencia en toda su longitud. Consecuentemente, es importante que los estribos se doblen alrededor de fuertes varillas longitudinales y que se extiendan más allá de ellas, en una longitud adecuada de desarrollo. Los códigos estipulan distintas formas de anclaje satisfactorio. Para la acción efectiva de armadura, el estribo debe eliminar su carga en la "unión de pasador" o cerca de ella. Como se describe en el capítulo 13, se debe asegurar cuidadosamente esta transferencia de carga. La concentración de la transferencia de carga en las esquinas de los estribos puede conducir a aplastamiento local del concreto, si no se asegura un buen ajuste a una varilla de flexión longitudinal. En algunos miembros se han observado deslizamientos de estribos de hasta 0.02 plg (0.5 mm).

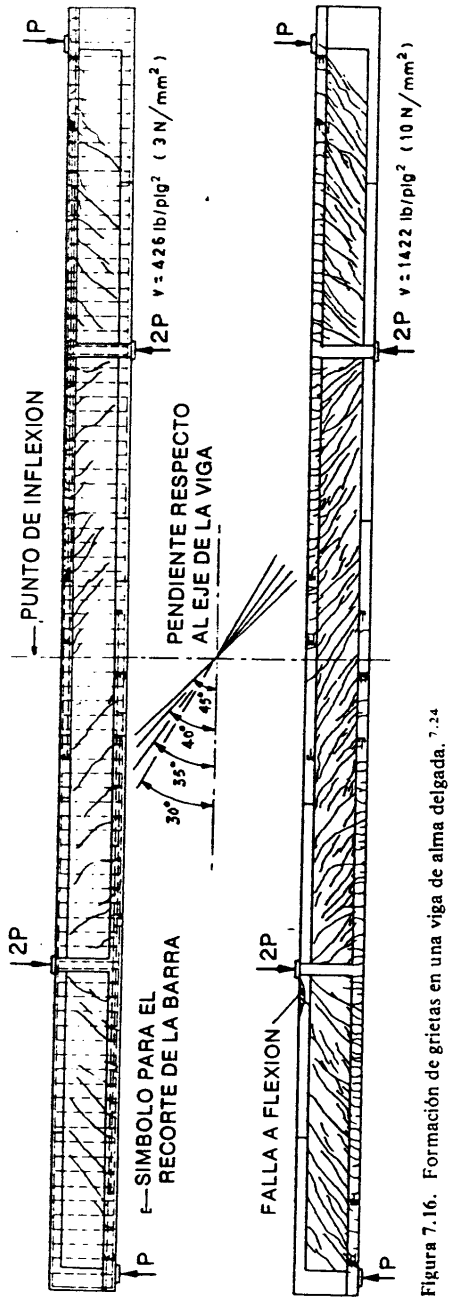


Figura 7.16. Formación de grietas en una viga de alma delgada.[7.24]

En las vigas poco peraltadas, estos deslizamientos pueden aumentar considerablemente el ancho de las grietas diagonales.

A veces cede un conjunto de estribos, cruzados por una grieta diagonal continua; entonces comienza el ensanchamiento irrestricto de esa grieta, y queda sin efecto una de las componentes importantes de la resistencia a cortante, la acción de trabazón del agregado. La resistencia a cortante perdida de esa manera no puede transferirse a los mecanismos de dovela y armadura, debido a que ya están agotados, por lo que sigue la falla con pequeña deformación adicional. Para impedir dicha falla no dúctil es buena práctica, e incluso es obligatoria en el diseño sísmico, asegurar que los estribos no cedan antes que se agote completamente la capacidad a flexión del miembro.

Un mecanismo de armadura en las vigas puede funcionar sólo después que se formen grietas diagonales (es decir, después que desaparezca la tensión diagonal en el concreto). El papel principal de los estribos es transferir el cortante transversal (vertical) a través de una grieta de falla diagonal potencial. Ocasionalmente se recomienda utilizar refuerzo de malla en el alma, que es capaz de resistir fuerzas horizontales y verticales, aunque no es más efectiva para resistir el cortante, debido a que el refuerzo horizontal en el alma de vigas normales no puede contribuir a resistir fuerzas transversales[7.20] (verticales) aparte de ayudar al control de las grietas y aumentar la acción de dovela. El refuerzo horizontal en el alma da mayor resistencia a la "contribución del concreto" v_c pero no afecta la resistencia a cortante del mecanismo de armadura v_s (véase la ecuación 7.21). Sin embargo, en las vigas de gran peralte (examinadas en el capítulo 13), se puede aumentar considerablemente el mecanismo de arco agregando varillas horizontales bien ancladas en la zona de soporte.

7.4.3 El diseño por cortante de vigas con refuerzo en el alma

Se ha demostrado que el mecanismo resistente a cortante de una viga sin refuerzo en el alma, especialmente de acción de trabazón del agregado, funciona mientras el ancho de las grietas no sea excesivo. En consecuencia, en presencia de refuerzo en el alma, la acción de viga resiste las fuerzas cortantes, siempre que las deformaciones del refuerzo en el alma no sean grandes (es decir que los estribos no cedan). En consecuencia, recién iniciada la cedencia de los estribos o antes es posible sobreponer la resistencia de las dos acciones así:

$$v_u = v_c + v_s \tag{7.21}$$

La ecuación 7.15 ó 7.16 proporciona un valor conservador para v_c, especificado por el ACI, y que es esencialmente una función de la resistencia a tensión del concreto. En consecuencia, el cortante restante $v_s = v_u - v_c$, debe asignarse al refuerzo en el alma de acuerdo con la ecuación 7.23

usando estribos verticales, varillas dobladas o una combinación de ambos. La relación simple entre la resistencia cortante total requerida v_u y la resistencia requerida de los estribos verticales v_s está representada en la figura 7.17. Se debe recordar que en la especificación del ACI se supone que los puntales a compresión están inclinados a $\alpha = 45°$. Otra posibilidad es[7.24] que la contribución del concreto v_c sea despreciable y que la inclinación de los puntales diagonales de concreto sea menor que 45°, por lo que más estribos cruzan la grieta potencial. (Véase por ejemplo, la figura 7.16.) Las líneas discontinuas de la fig. 7.17 indican las relaciones correspondientes para distintos valores de α.

Para la mayoría de las vigas, la resistencia a cortante predicha por los dos enfoques es muy semejante.

En la figura 7.18 se compara el enfoque de diseño del ACI con el comportamiento de las vigas probadas por Leonhardt y Walther.[7.7] Se ve que el ACI subestima la contribución del concreto en la carga última, v_c. Las líneas punteadas muestran la relación teórica (ec. 7.23*a*) reescrita para expresar el esfuerzo de los estribos como $f_s = (v_u - v_c)/\rho_v$, en que $\rho_v = A_v/sb_w$. La fig. 7.18*a* compara el enfoque del ACI con los resultados de pruebas de cuatro vigas con refuerzo idéntico en el alma. En estas vigas sólo varió el ancho del alma; la relación de ancho de patín a ancho del alma varió entre 1 y 6. De acuerdo con esto, se puede esperar que la contribución del concreto v_c, aumente proporcionalmente al aumentar el espesor del alma (vea la ec. 7.15), suposición que apoyan las pruebas.

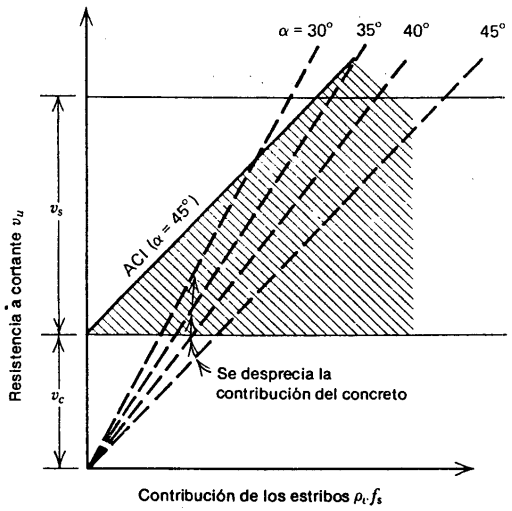


Figura 7.17. La contribución de los estribos a la resistencia a cortante.

Más aun, se verá que el cortante antes de la elevación significativa de los esfuerzos en los estribos, que anteriormente se denominó como cortante que provocaba agrietamiento diagonal, se mantiene, en tanto que los esfuerzos en el estribo se elevan al nivel de cedencia (es decir, que v_c permanece casi constante). En la fig. 7.18*b* se ilustra el mismo comportamiento mediante cuatro vigas *T* idénticas,[7.7] en que la participación teórica de los estribos en la resistencia a cortante total, $\eta = v_s/v_u$, varió entre 27 y 93%.

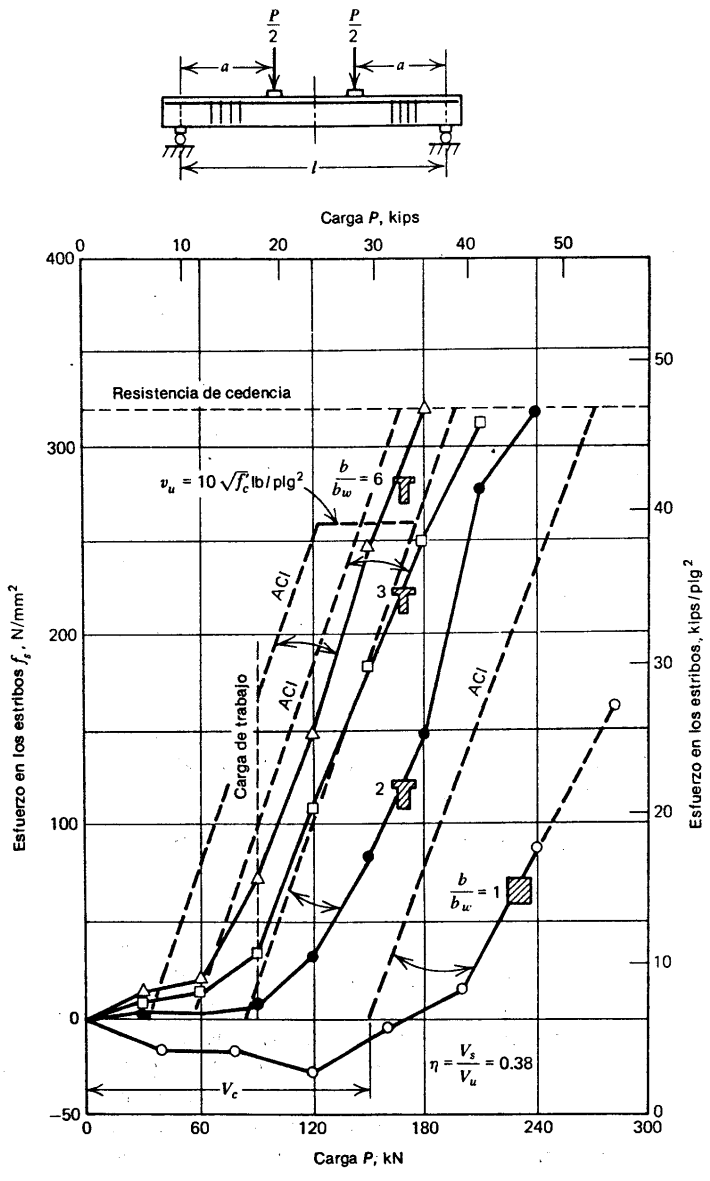
En cada viga[7.2] (ec. 7.23*a*) se debería proporcionar un refuerzo mínimo en el alma, correspondiente con al menos $v_s = 50$ lb/plg^2(0.35 N/mm^2), sin importar la intensidad del cortante. Adicionalmente, para asegurar que cada grieta potencial esté cruzada efectivamente por estribos, la separación s no debe ser mayor que $d/2$. Cuando puedan formarse articulaciones plásticas, la separación de los estribos no debe ser mayor que $d/4$. Cuando cede el acero de flexión, es inevitable que también aumenten las grietas diagonales, que son una continuación de las grietas de flexión. En estas áreas debe ignorarse la contribución del concreto a la resistencia a cortante v_c y proporcionar refuerzo en el alma para todo el cortante (es decir, $v_s = v_u$).

Cuando se esperan inversiones de momentos, tales como bajo cargas sísmicas, se deben espaciar estrechamente los estribos cerrados. Estos estribos proporcionan confinamiento al concreto comprimido y soporte lateral a las varillas de compresión en las regiones donde se desarrolla la resistencia a flexión. El refuerzo diagonal en el alma es efectivo solamente en una dirección; en consecuencia, no debe utilizarse cuando pueda invertirse la carga, a menos que se proporcione en ambas direcciones.

Un ejemplo, dado al final de este capítulo, ilustra la aplicación de estos principios. En el capítulo 13 se estudian aspectos adicionales del cortante, que afectan el detallado de los miembros estructurales.

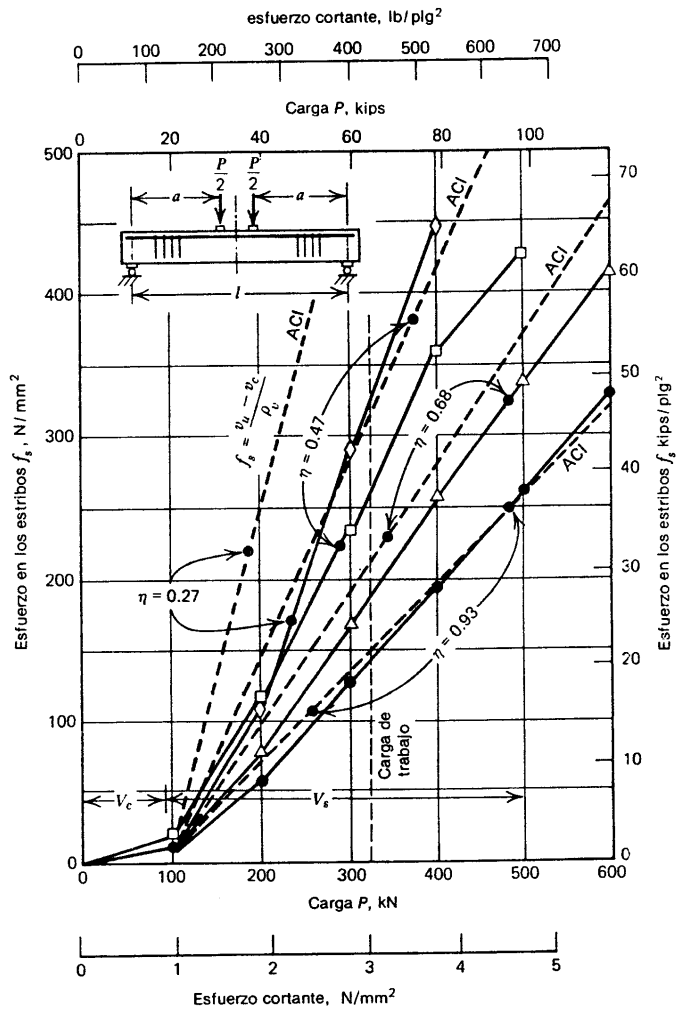
7.5 LA INTERACCION DE FLEXION Y CORTANTE

Los experimentos con vigas de concreto reforzado normal con refuerzo adecuado en el alma indican que la fuerza cortante no tiene influencia patente en el desarrollo de la capacidad a flexión, lo que permite al diseñador ignorar la interacción y manejar por separado la flexión y el cortante. Sin embargo, los estudios anteriores muestran que existe una relación íntima entre la flexión, cortante, adherencia y anclaje en el claro a cortante de una viga, lo que es evidente de un examen del comportamiento del refuerzo de flexión a lo largo de la viga. Cuando se requiere trasmitir grandes fuerzas cortantes a través de una sección en momento último, se puede afectar la distribución de las deformaciones por flexión en el concreto y el acero. Las fuerzas cortantes en las vigas de gran peralte también pueden ser tan dominantes que gobiernen la resistencia del miembro, inhibiendo el desarrollo de toda la capacidad a flexión, que se obtiene de los principios presentados en los capítulos anteriores.



(a)

Figura 7.18. Relación esfuerzo del estribo - carga. (a) Vigas con cuantía constante de acero en el alma. (b) Vigas con cuantía variable de acero en el alma.[7.7]



(b)

7.5.1 El efecto del cortante en los requerimientos de acero de flexión

Es posible determinar la tensión inducida en el refuerzo de flexión por las fuerzas asociadas con el mecanismo de armadura únicamente con referencia a la fig. 7.15. Tomando el momento alrededor de la resultante C' a compresión en la sección 1-1, se obtiene la siguiente relación:

$$M'_1 = V_s x = M'_2 + V_s jd \cot \alpha = T' jd + \frac{s}{2} T_s \operatorname{sen} \beta \qquad (7.25)$$

en que M'_1 y M'_2 son los momentos flexionantes generados por las fuerzas externas en las secciones 1 y 2 respectivamente. Sustituyendo T_s y s de las ecs. 7.18 y 7.19, se obtiene

$$T' = \frac{M'_2}{jd} + \frac{V_s}{2}(\cot \alpha - \cot \beta) \qquad (7.26)$$

En forma análoga, considerando la acción de viga de una viga sin refuerzo en el alma, en que se desarrollan grietas diagonales a un ángulo α, con respecto al eje de la viga, el equilibrio de momentos en las secciones 1 y 2 (fig. 7.6) requiere que

$$M''_1 = T'' jd = M''_2 + V_c jd \cot \alpha \qquad (7.27)$$

Nótese que en este caso hay mecanismos distintos al refuerzo en el alma (es decir, $T_s = 0$ en la fig. 7.15) que resisten el cortante V_c. Es importante notar que de la ec. 7.27

$$T'' = \frac{M''_1}{jd} = \frac{M''_2}{jd} + V_c \cot \alpha \qquad (7.27a)$$

que muestra que la fuerza de tensión en la sección 2, T'', está gobernada por el momento flexionante en la sección 1.

Ahora se combinan los dos mecanismos de acuerdo con la ec. 7.21, con lo que

$$V_u = V_c + V_s \quad \therefore \quad M_u = M'_2 + M''_2 \quad \text{and} \quad T_u = T' + T''$$

Entonces se obtiene la fuerza de tensión total en el refuerzo de flexión en la sección 2 como sigue

$$T_u = \frac{M_u}{jd} + V_c \cot \alpha + \frac{V_s}{2}(\cot \alpha - \cot \beta) \qquad (7.28)$$

Es conveniente introducir el factor

$$\eta = \frac{V_s}{V_u} = \frac{v_s}{v_u} \qquad (7.29)$$

que expresa la participación del refuerzo en el alma para resistir el cortante total. Usando este factor, la fuerza de tensión queda como

$$T_u = \frac{M_u}{jd} + \frac{e_v}{d} V_u \qquad (7.30)$$

en que

$$\frac{e_v}{d} = \cot \alpha - \frac{\eta}{2}(\cot \alpha + \cot \beta) \geq 0 \qquad (7.30a)$$

De la ec. 7.30 es evidente que después de la formación de grietas diagonales, la fuerza de tensión T_u en el acero de tensión se hace mayor que la requerida para resistir el momento externo de esa sección. El aumento depende principalmente de la inclinación de las grietas (es decir, el ángulo α, de los puntales diagonales).

Este hallazgo es especialmente importante para el corte del refuerzo de flexión. La fig. 7.19 ilustra una viga simple y el diagrama de momentos flexionantes M asociado con las cargas dadas. Se supone que es práctico cortar en un lugar adecuado un tercio del refuerzo de flexión (por ejemplo, dos varillas), del requerido bajo la carga P_1 a medio claro (seis varillas). Al principio parece que se requieren solamente dos tercios del refuerzo positivo a flexión a su capacidad total en la sección 2. Sin embargo, debido al agrietamiento diagonal, el momento requerido de resistencia ha aumentado en $e_v V_u$ allí y en la totalidad del claro izquierdo a cortante, lo que se muestra por la envolvente punteada. En consecuencia, se requieren dos tercios del refuerzo de tensión con su capacidad de resistencia total (f_y) en la sección 3, que está localizada a la distancia e_v con respecto a la sección 2, en la dirección de momentos decrecientes. Si se desea terminar dos varillas adicionales de las varillas de flexión positiva, se deben extender en la longitud de desarrollo total l_d más allá de la sección 3. (En el capítulo 9 se examinan las longitudes de anclaje y desarrollo.) Las mismas (dos) varillas también se deben extender al menos hasta la sección 4 debido a que el tercio restante del acero del momento positivo es insuficiente para proporcionar el momento de resistencia requerido en la sección 4 (es decir, en la longitud del pequeño triángulo sombreado). Este último requerimiento no se aplica en el otro extremo de las varillas en cuestión, ya que su extremo pasa bastante más allá de la sección 5. Mediante consideraciones semejantes también se determinaron los extremos cortados de las varillas más cortas en el claro, mostradas solamente en elevación en la fig. 7.19. El corte del refuerzo negativo, sobre el soporte del lado derecho, se determinó suponiendo que se pueden cortar ocho varillas de tamaño más pequeño por parejas.

Se puede determinar convenientemente el corte del refuerzo de flexión de la envolvente del momento de resistencia Tjd, mostrado por la línea punteada de la fig. 7.19, que es sencillamente el diagrama de momentos

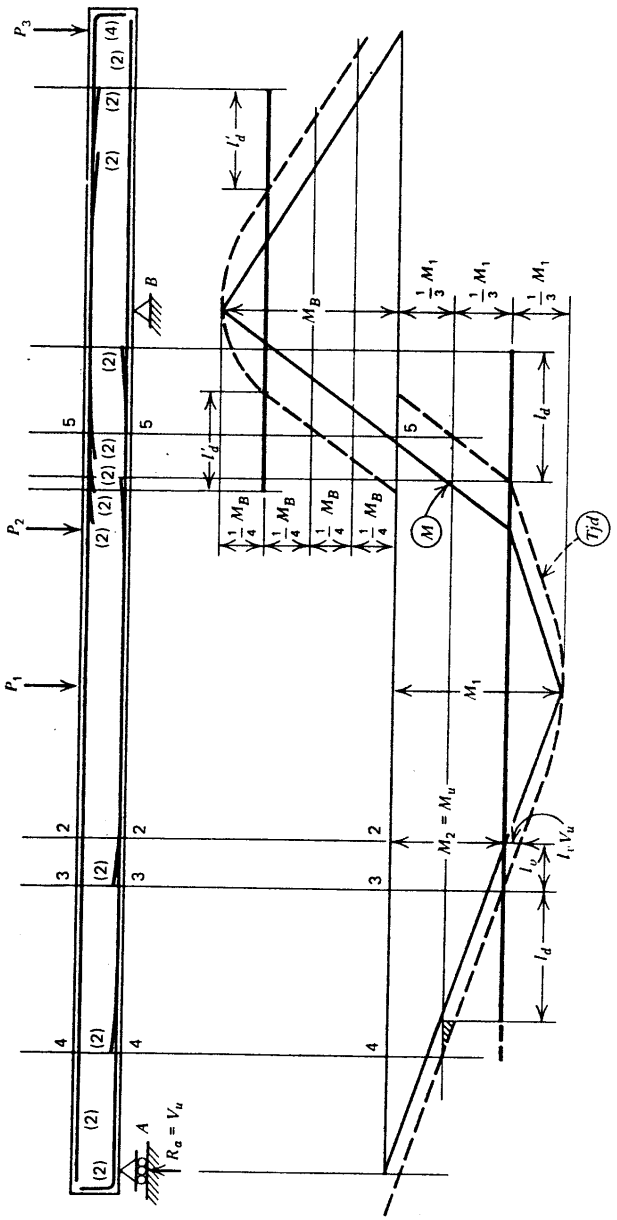


Figura 7.19. La relación entre el momento flexionante externo M y los requerimientos del momento de resistencia T_{jd}.

flexionantes desplazando horizontalmente una distancia e_v, cuya magnitud depende del factor η del refuerzo en el alma y la inclinación α, de las grietas.

El valor de e_v/d de la ec. 7.30*a* está dado en la tabla 7.1 para distintos valores de α, β, y η. Se notará que para cuantías moderadas de acero en el alma, $\eta < 0.5$, y una inclinación de grieta ligeramente inferior a 40°, el valor de e_v es aproximadamente igual al peralte efectivo d.

Tabla 7.1 El valor de e_v/d

Inclinación		Factor η de refuerzo en el alma		
Grietas, α	Acero en el alma, β	1.00	0.50	0.00
45°	45°	0.00	0.45	0.90
45°	90°	0.45	0.68	0.90
38°	90°	0.58	0.86	1.15
30°	90°	0.78	1.17	1.56

Para simplificar el procedimiento de diseño, el código[7.2] del ACI exige que las varillas de flexión se extiendan más allá del punto en que ya no necesitan resistir la flexión, una distancia igual al peralte efectivo del miembro. Esto implica que e_v, como se muestra en la fig. 7.19 es d. Se debe proporcionar la longitud de desarrollo l_d más allá de este punto.

La fig. 7.19 demuestra otro fenómeno que con frecuencia se ignora. Después del desarrollo de grietas diagonales, tanto el refuerzo superior como el inferior estarán en tensión en el punto de inflexión (es decir, en el punto de momento cero teórico). Para equilibrar estas fuerzas de tensión, se desarrolla una fuerza de compresión igual y opuesta cerca de la mitad del peralte de la sección, fenómenos que se han verificado en los experimentos.

7.5.2 Cortante en las articulaciones plásticas

La fig. 7.16 ilustra que en el soporte inferior de una viga las grietas diagonales, en vez de ser paralelas, tienden a radiar desde la zona a compresión en el punto de carga. Cuando ha cedido el refuerzo de flexión, el ancho de estas grietas aumenta y es prudente suponer que se puede trasmitir muy poco cortante ya sea por trabazón del agregado o por acción de dovela. En consecuencia, casi toda la fuerza cortante tendrá que ser transmitida a través de la zona a compresión de la sección vertical adyacente al soporte. En la fig. 7.20*a* se muestra una situación idealizada de la unión de una viga y la cara de una columna. Se puede suponer que cada una de las grietas radiantes, a una pendiente mínima de 1:1.5, forma el límite de un

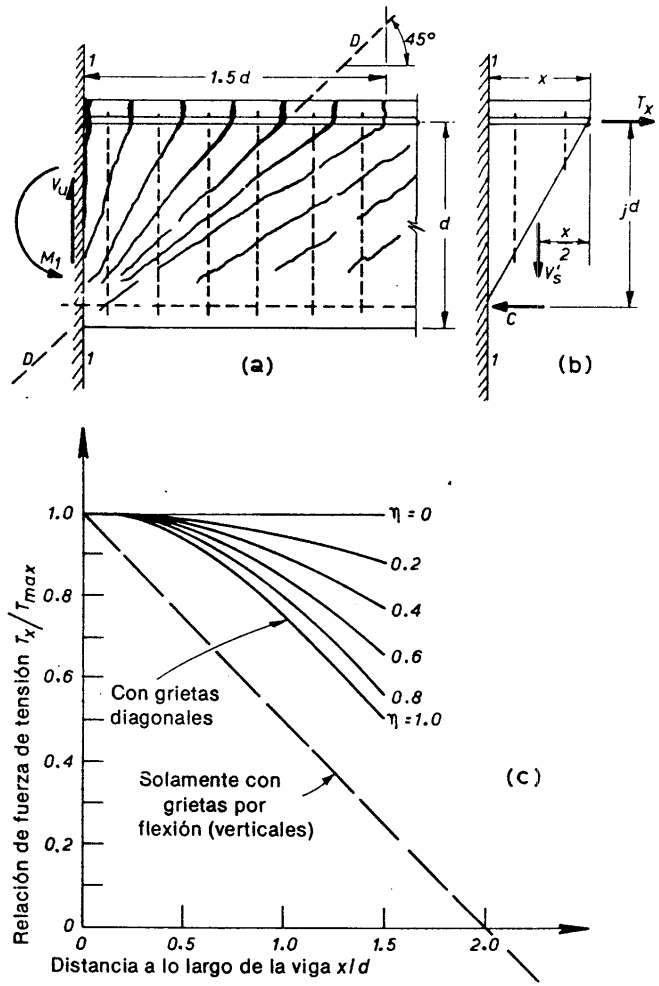


Figura 7.20. La distribución de las fuerzas en el acero afectada por el cortante en una articulación plástica.

puntal inclinado. Casi todas las fuerzas de compresión diagonal en estos puntales pasan a través de la zona a compresión de la viga en la sección 1; en consecuencia es justificable suponer que la fuerza cortante total se transfiere a través de la zona a compresión entre el último estribo y la cara de la columna. Es evidente que la capacidad de la zona a compresión por flexión de una viga se reduce cuando la fuerza cortante a través de la articulación plastica es grande. Sin embargo, el confinamiento que proporcionan los estribos y la columna adyacente con estribos fortalece al concreto y permite que se transmita la compresión en la viga, generada por la flexión M_1 y cortante V_u, También en las situaciones comunes, bajo cargas monotónicas, la transferencia de compresión por flexión se auxilia por la presencia de refuerzo de compresión en la viga, efecto adverso del cortante que no se observa.

En la fig. 7.20*b* se muestra un cuerpo libre limitado por una de las grietas diagonales. Los estribos que cruzan esta grieta específica se supone que resisten una fuerza $V'_s = V_s x/d$, en que V_s es la fuerza total que resisten los estribos que cruzan una diagonal a 45°, la sección D-D, de acuerdo con la analogía de la armadura, estudiada antes. Esto puede o no ser la fuerza cortante total, según el valor de η (es decir, $0 < \eta < 1$). Del requerimiento de equilibrio para el cuerpo libre mostrado se tiene

$$M_1 = T_x jd + \frac{x}{2} V'_s \tag{7.31}$$

en que $x < 1.5d$ para el ejemplo en la fig. 7.20*a*. En consecuencia, la ec. 7.31 da

$$T_x = \frac{1}{jd}\left(M_1 - \frac{x^2\eta}{2d} V_u\right) \tag{7.32}$$

En la fig. 7.20*c* se muestra la variación correspondiente de la fuerza de tensión en la vecindad de la cara de la columna, en términos del valor máximo, para distintas capacidades relativas η de acero en el alma. En este ejemplo se supuso arbitrariamente que $M/Vd = 2$.

Si sólo se hubieran formado grietas verticales de flexión, la fuerza de tensión en cualquier sección hubiera sido

$$T_x = \frac{M_x}{jd} = \frac{1}{jd}(M_1 - xV_u) \tag{7.33}$$

como lo indica la línea discontinua de la fig. 7.20*c*. Así es evidente que el agrietamiento diagonal provocado por el cortante, puede tener un efecto marcado en la distribución de los esfuerzos del acero, cerca de una articulación plástica potencial, especialmente cuando los estribos resisten solamente una pequeña fracción del cortante. Esto quiere decir que la cedencia del refuerzo de flexión se extiende en una longitud considerable de la viga, aumentando significativamente con ello la longitud de la articulación plástica. Este aumento en la capacidad de rotación plástica permite una mayor redistribución de momentos (vease el capítulo 6) en las estructuras continuas de concreto reforzado. [7.25]

En las vigas *T,* las fuerzas cortantes grandes provocan que las grietas diagonales penetren hasta la parte baja de los patines a compresión, lo que indica que en tales casos una porción del alma que se requiere para transmitir compresión no se puede utilizar para este propósito. [7.24]

7.5.3 Efectos de interacción en vigas de gran peralte

En las vigas de gran peralte continuas o simplemente soportadas, en que las cargas externas y reacciones se aplican a las caras superior e inferior de la viga, el modo de transferencia de cortante después de la formación de grietas diagonales es principalmente por acción de arco. En el capítulo 13 se estudia el comportamiento y diseño de esas vigas.

La redistribución de las fuerzas a lo largo del refuerzo de flexión, examinado en la sección anterior, puede dominar el comportamiento de vigas de fachada cortas y relativamente peraltadas. Dichas vigas ocurren comúnmente en muros de cortante acoplados. Debido a que se introducen en ambos extremos momentos flexionantes aproximadamente iguales pero opuestos, el punto de momento cero ocurre a la mitad del claro de esas vigas. La distribución de las fuerzas internas de tensión será entonces semejante a la indicada por la envolvente *Tjd* en el punto de inflexión de la viga y en sus proximidades, tal como aparece en la fig. 7.19. Cuando la distancia e_t es igual o mayor que la mitad del claro, la tensión ocurre en el refuerzo superior e inferior en todo el claro de dicha viga de fachada. En la sección 12.5.3 se estudia más extensamente la evidencia experimental en este sentido,[7.26] y sus consecuencias con respecto al comportamiento.

7.6 LA INTERACCION DE FUERZAS CORTANTES DE FLEXION Y AXIALES

Rara vez la combinación de fuerzas cortantes, de flexión y axial es crítica cuando la carga en la estructura se origina por la gravedad. Sin embargo, bajo condiciones de carga sísmica las columnas de una estructura de plantas múltiples están sujetas a grandes fuerzas cortantes y flexión, además de compresión axial. Las perturbaciones sísmicas pueden incluso generar tensión neta en determinadas columnas, especialmente en las esquinas de los edificios. La fig. 7.21 presenta un ejemplo típico de una falla a cortante-compresión, que ocurrió en las columnas de 43 plg (1092 mm) de diámetro del Hotel Macuto-Sheraton durante el terremoto de Caracas en 1967.[7.27]

Ya que el cortante está asociado con el fenómeno de tensión diagonal, se espera que la compresión axial aumente (o recíprocamente, que la tensión axial disminuya) la capacidad a cortante de los miembros de concreto reforzado.

7.6.1 Cortante y compresión axial

Anteriormente se mostró que en los miembros con refuerzo en el alma se puede transmitir una fuerza cortante V_c aproximadamente igual a la carga de agrietamiento diagonal junto con el cortante resistido por el mecanismo de armadura con puntales diagonales a 45°, que también es la base para el enfoque actual del ACI al diseño de los miembros a flexión sujetos a fuerzas axiales. La ec. 7.15 semiempírica, basada en el concepto de esfuerzo principal, que predice en forma conservadora la carga de agrietamiento diagonal e incorpora los principales parámetros de resistencia a cortante, puede modificarse adecuadamente[7.3] para tomar en cuenta el efecto de las fuerzas axiales. La fuerza axial N_u, que actúa con la excentricidad apropiada, se toma en cuenta cuando se deducen los esfuerzos de tensión que provocan el agrietamiento diagonal en la sección. Se puede remplazar el momento M_u en la ec. 7.15 por un momento equivalente M_m, que produce el mismo efecto en el agrietamiento diagonal que el momento M_u actuando con la fuerza axial N_u.[7.3] Este es aproximadamente

$$M_m = M_u - \frac{(4h - d)}{8} N_u \qquad (7.34a)$$

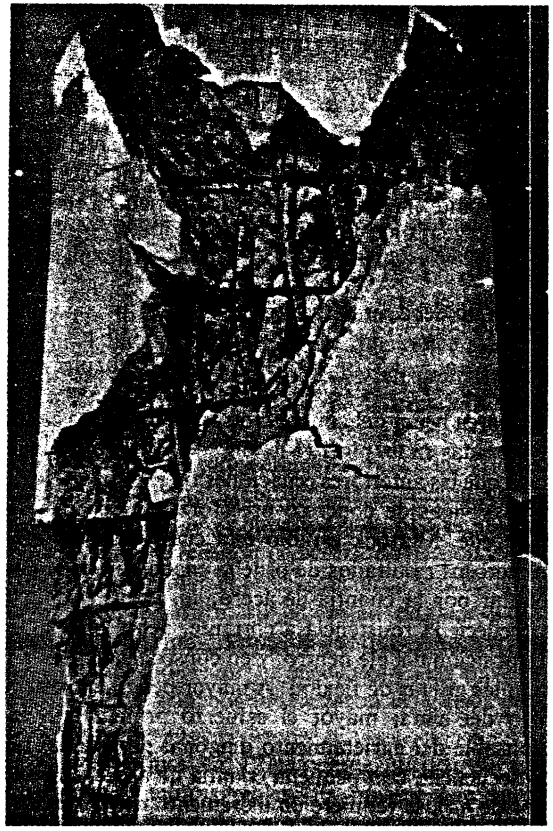


Figura 7.21. Falla a cortante en una columna grande, durante el terremoto de Venezuela de 1967. Cortesía del American Iron and Steel Intitute.

en que h es el peralte total del miembro. En consecuencia, el esfuerzo cortante nominal en el agrietamiento diagonal queda, de la ec. 7.15

$$v_c = 1.9\sqrt{f'_c} + \frac{2500\rho_w V_u d}{M_m} \quad (\text{lb/plg}^2) \qquad (7.34b)$$

Ya que con frecuencia es difícil aplicar la ec. 7.34*b* en el diseño, el código ACI [7.2] permite utilizar las siguientes ecs. simplificadas para calcular el cortante que transmite el concreto en las vigas sujetas a fuerzas axiales

$$v_c = 2\left(1 + 0.0005\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c} \quad (\text{lb/plg}^2) \qquad (7.35a)$$

Sin embargo, v/c no debe ser mayor que

$$v_c = 3.5\sqrt{f'_c}\sqrt{1 + 0.002\frac{N_u}{A_g}} \quad (\text{lb/plg}^2) \qquad (7.35b)$$

en que A_g es el área bruta del concreto de la sección y las cantidades N_u/A_g y f'_c están expresadas en lb/plg². (1 lb/plg² = 0.00689 N/mm².)

Se esperaría que las anteriores ecuaciones fueran predicciones adecuadas también para las vigas de concreto preesforzado, cosa que desafortunadamente no sucede. Mattock estudió esta cuestión [7.28] y de una comparación de numerosos resultados de prueba encontró que el producto de la relación modular por la cuantía de acero, $n\rho$, es un parámetro más adecuado para predecir la resistencia a cortante, debido a que es una buena medida de la posición del eje neutro, y en consecuencia, de la profundidad a que penetran las grietas de flexión. A mayor penetración de las grietas de flexión dentro del alma, mayor el esfuerzo principal en la raíz de las grietas, responsable del agrietamiento diagonal para un cortante aplicado dada. En consecuencia, con pequeña cuantía de acero de flexión (es decir, pequeño valor de $n\rho$), se requiere un incremento de fuerza cortante mucho más pequeño para iniciar el agrietamiento diagonal, lo que sucede a menudo en las vigas de concreto preesforzado. Rajagopalan y Ferguson [7.18] también han señalado el efecto adverso de una baja cuantía de acero de flexión y la naturaleza no conservadora de las ecs. 7.15 o 7.34*b* para ese caso. También se encontro [7.28] que la carga axial afecta la magnitud del cortante al principio del agrietamiento a flexión, pero que aparentemente no afecta el incremento de cortante entre el agrietamiento por flexión y el inicio de agrietamiento por tensión diagonal.

En consecuencia, en presencia de compresión axial, las grietas diagonales tienden a ser más planas que 45°, por lo que el enfoque actual de diseño para el refuerzo del alma, en base a la analogía de la armadura con puntales a 45°, es conservadora.

7.6.2 Cortante y tensión axial

Si las suposiciones anteriores con respecto al agrietamiento diagonal son correctas, las ecs. 7.34*b* y 7.35 también deben predecir la capacidad de

agrietamiento a cortante de los miembros, en presencia de tensión axial, tomando en este caso el valor de N_u como negativo. En pruebas en la Universidad de Washington, [7.29] unas vigas con refuerzo en el alma, sujetas a tensión axial y a cortante que cubrían el amplio intervalo de esfuerzos cortantes permitidos por el código del ACI [7.2] y diseñadas de acuerdo con las ecs. 7.23*a* y 7.34*b*, transmitieron cargas que eran al menos 30% mayores que la carga teórica a la falla. Parece ser que la tensión axial no afecta el funcionamiento de la acción de armadura, sino que sólo reduce la resistencia a cortante de los otros mecanismos (es decir, que se reduce v_c).

De las consideraciones de esfuerzos principales, se esperaría que se formen grietas diagonales a un ángulo mayor que 45° al eje del miembro. En este caso el número de estribos encontrados por una grieta diagonal sería menor de lo que se supone en la analogía de la armadura. Sin embargo, las pruebas [7.29] han demostrado consistentemente que la tensión axial no afecta apreciablemente el ángulo de inclinación de las grietas diagonales y que el mecanismo resistente a cortante de la acción de armadura permanece operativo. La fig. 7.22 muestra una viga de una serie de pruebas [7.10] en que se varió la relación de fuerza de tensión axial a fuerza cortante entre 1 y 3. Deliberadamente se espaciaron mucho los estribos ($s = 0.8d$) para determinar si se formaría una grieta de falla diagonal potencial entre dos estribos adyacentes. Se puede ver que el patrón de las grietas es esencialmente el mismo que el que se encuentra en las vigas sin carga axial, excepto porque las grietas inclinadas cruzaron las grietas de flexión que se desarrollaron bajo cargas más bajas.

La carga axial y el momento flexionante pueden no aplicarse simultáneamente en las estructuras reales. Es posible que una tensión axial grande (por ejemplo, deformaciones de contracción) provoque la formación de grietas en todo el peralte de un miembro, perpendiculares a su eje, antes de aplicar ninguna fuerza cortante. Un ejemplo de esa región es un punto de inflexión en que los momentos no cierran las grietas a tensión, o peor aún, el acero de flexión puede estar a tensión cerca de ambas caras de las vigas, como en la fig. 7.19. A veces se cree que una viga agrietada completamente no será efectiva para resistir las fuerzas cortantes aplicadas subsecuentemente, en cuyo caso se ha encontrado que la acción de trabazón del agregado es efectiva para trasmitir el cortante. En una serie de pruebas, Sayani [7.30] encontró que después de aplicar momento y cortante se formaron nuevas grietas diagonales y que las grietas de tensión desarrolladas anteriormente no afectaron la resistencia de las vigas de prueba.

En las columnas de edificios de plantas múltiples se puede presentar un caso semejante durante perturbaciones sísmicas intensas. En el punto de inflexión, se pueden generar grandes fuerzas concurrentes de tensión axial y cortante. Sin embargo, ya que las varillas de las columnas normalmente



Figura 7.22. Patrón de grietas en una viga con estribos muy separados, cuando la relación de la tensión axial a la fuerza cortante fue de 3.[7.10]

no están recortadas, los esfuerzos axiales en estas localidades serán bajos; en consecuencia, no es posible un ensanchamiento de una grieta de tensión. Por lo tanto, permanece operativa la transferencia de cortante por la trabazón del agregado (que se examina con mayor detalle en la sección 7.8) y la capacidad a cortante no debe ser inferior a la correspondiente en las regiones de elevados momentos de la misma columna, donde el agrietamiento siempre será más extenso.

Hay cierta evidencia de que después de una carga cíclica alternada se pueda formar la grieta diagonal potencial, inducida por el cortante y la tensión axial, a un ángulo mayor que 45° al eje del miembro, debido a que las grietas diagonales que se propagan desde una cara de un miembro pueden enlazarse con las grietas de flexión que se formaron durante un ciclo previo de cargas alternadas en la cara opuesta de ese miembro.

En algunas vigas sujetas a tensión, la carga de agrietamiento diagonal cayó por debajo de lo predicho por la aplicación apropiada de la ec. 7.34. En consecuencia, el Comité 426 del ACI sugirió una interpolación[7.31] lineal simple y conservadora entre $v_c = 2\sqrt{f'_c}$ sin tensión y $v_c = 0$ para un esfuerzo de tensión axial de 500 lb/plg . Así se tiene

$$v_c = 2\left(1 + 0.002\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c}\ (\text{psi}) \tag{7.36}$$

en que N_u es negativa para la tensión.

7.7 DEFORMACIONES POR CORTANTE

Las deformaciones provocadas por el cortante pueden ser apreciables para las vigas cortas rectangulares muy peraltadas y para las vigas T continuas. En consecuencia, cuando se examinan las condiciones de servicio, el diseñador también debe poder evaluar el orden de deflexiones cortantes esperados. El efecto del cortante en las deflexiones es despreciable para la mayoría de los miembros relativamente esbeltos sujetos a cortante moderado.

7.7.1 Miembros no agrietados

Antes de que se formen grietas de flexión o diagonales, se puede predecir satisfactoriamente el comportamiento de una viga utilizando los principios de elasticidad. Es posible aproximar el módulo de rigidez (módulo de elasticidad en cortante) para el concreto a partir de la bien conocida relación.

$$G = \frac{E_c}{2(1 + \mu)} \tag{7.37}$$

en que $E_c = 57{,}000\sqrt{f'_c}$ es el módulo de Young para el concreto de peso normal y μ es la relación de Poisson, aproximadamente igual a 0.16 a 0.30 para concreto de peso normal.

La rigidez a cortante K'_v es la magnitud de la fuerza cortante que, cuando se aplica a una viga de longitud unitaria, provoca desplazamiento unitario de cortante de un extremo de la viga relativo al otro. El área transversal de la viga, que normalmente se debe considerar al determinar la rigidez a cortante, es solamente el área del alma, $b_w d$.

Con $G = 0.4E_c$, la rigidez a cortante de una viga no agrietada de longitud unitaria será

$$K'_v = \frac{0.4E_c b_w d}{f} \tag{7.38}$$

El factor f toma en cuenta la distribución no uniforme de los esfuerzos cortantes. Para las secciones rectangulares, $f = 1.2$ y para las secciones T e I se puede tomar como la unidad.

7.7.2 Deformaciones por cortante en miembros agrietados

En las vigas sujetas a grandes fuerzas cortantes y que están reforzadas en el alma en forma correspondiente, se deben esperar grietas diagonales durante las condiciones de servicio, y esas grietas pueden aumentar considerablemente la deformación por cortante de la viga. Ya que la acción de armadura probablemente transmita la mayor proporción de la carga, son de interés las características de deformación de este mecanismo.

Es posible aproximar las distorsiones por cortante que ocurren en el alma de la mayoría de las vigas de concreto reforzadas convencionalmente, utilizando el modelo de la armadura análoga presentada en la fig. 7.15. Por razones de simplicidad, se supone que los estribos verticales y puntales diagonales a 45° forman los miembros del alma (fig. 7.23*a*). Para fines de determinar solamente las distorsiones del alma, se supone que los miembros de las cuerdas son infinitamente rígidos; es decir, que el área de la cuerda a es infinita (fig. 7.23*b*). La elongación de los estribos es Δ_s y la contracción del puntal a compresión es Δ_c. Aplicando los principios de Williot, se puede encontrar la distorsión por cortante de las figs. 7.23*b* y 7.23*c* como sigue:

$$\Delta_v = \Delta_s + \Delta_R = \Delta_s + \sqrt{2}\Delta_c \tag{7.39}$$

Usando las ecs. 7.22 y 7.23*a*, se puede expresar el esfuerzo en el estribo como

$$f_s = \frac{V_s s}{jdA_v} \approx \frac{V_s s}{dA_v} \tag{7.40}$$

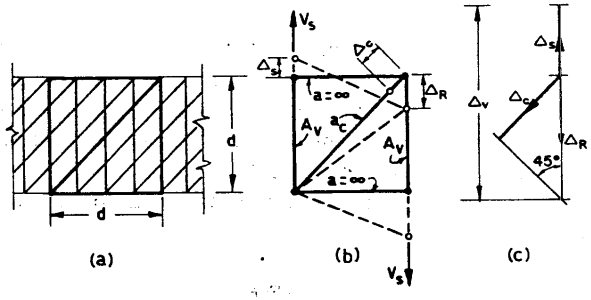


Figura 7.23. Distorsiones por cortante en el alma de una viga de concreto reforzado modelada según los miembros del alma de una armadura análoga.

En consecuencia, la elongación de los estribos es

$$\Delta_s = \frac{f_s}{E_s} d = \frac{V_s s}{E_s A_v} \tag{7.41}$$

El esfuerzo de compresión diagonal del concreto se obtiene en forma semejante de la ec. 7.24*a*

$$f_{cd} = 2v_s = 2\frac{V_s}{b_w d}$$

En consecuencia, la contracción del puntal diagonal es

$$\Delta_c = \frac{f_{cd}}{E_c}\sqrt{2}d = \frac{2\sqrt{2}V_s}{E_c b_w} \tag{7.42}$$

Por tanto, la distorsión por cortante por longitud unitaria de la viga queda como

$$\theta_v = \frac{\Delta_v}{d} = \frac{1}{d}\left(\frac{V_s s}{E_s A_v} + \sqrt{2}\frac{2\sqrt{2}V_s}{E_c b_w}\right) = \frac{V_s}{E_s b_w d}\left(\frac{s b_w}{A_v} + \frac{4E_s}{E_c}\right) \tag{7.43a}$$

Haciendo la sustitución apropiada de la cuantía de acero del alma $\rho_v = A_v/sb_w$, y la relación modular $n = E_s/E_c$, se encuentra que

$$\theta_v = \frac{V_s}{E_s b_w d}\left(\frac{1}{\rho_v} + 4n\right) \tag{7.43b}$$

De acuerdo con la acción de armadura, la rigidez a cortante de la viga con grietas diagonales a 45° es el valor de V_s cuando $\theta_v = 1$, y por tanto está dada por

$$K_{v,45} = \frac{\rho_v}{1 + 4n\rho_v} E_s b_w d \tag{7.44}$$

La similitud entre las ecs. 7.38 y 7.44 es clara.

Es posible deducir expresiones semejantes para otras inclinaciones de los puntales α a compresión y de los estribos β. Usando la notación de la fig. 7.15, puede mostrarse con facilidad para el caso general que el esfuerzo en el estribo será

$$f_s = \frac{v_s}{\rho_v(\cot\alpha + \cot\beta)\operatorname{sen}^2\beta} \tag{7.45}$$

en que la longitud del estribo es $d/\operatorname{sen}\beta$.

La ec. 7.24 da los esfuerzos de compresión para los puntales de longitud $d/\operatorname{sin}\alpha$

Al combinar las relaciones anteriores, la siguiente expresión puede definir la rigidez a cortante:

$$K_v = \frac{\rho_v \operatorname{sen}^4 \alpha \operatorname{sen}^4 \beta \, (\cot \alpha + \cot \beta)^2}{\operatorname{sen}^4 \alpha + n\rho_v \operatorname{sen}^4 \beta} E_s b_w d \qquad (7.46)$$

en que $\rho_v = A_v/(sb_w \operatorname{sen} \beta)$ para el caso general.

Dilger ha refinado todavía más estas expresiones calculando la inclinación de los puntales a compresión a partir de consideraciones de energía de deformación de la armadura análoga.[7.32] Sus experimentos demuestran que este enfoque subestima en pequeña medida la distorsión por cortante en las vigas. El análisis se basa en el modelo considerablemente simplificado de la armadura análoga, y no se toman en cuenta las deformaciones en los anclajes de los estribos. Los deslizamientos en los extremos de los estribos (véase la sección 9.4.2) pueden aumentar mucho las deformaciones por cortante, especialmente en las vigas poco peraltadas en que el deslizamiento de anclaje representa una mayor fracción de la distorsión total.

Una comparación de las ecs. 7.38 y 7.44 indica que la rigidez a cortante de un miembro agrietado diagonalmente es cerca del 10 al 30% de la rigidez a cortante del miembro no agrietado, dependiendo de la cantidad de acero en el alma. Así es evidente que el agrietamiento puede tener un efecto mucho mayor sobre la rigidez a cortante que sobre la rigidez a flexión.

Estudios analíticos y experimentales han verificado que la rigidez de las vigas de gran peralte agrietadas (por ejemplo como en la fig. 12.28), en que dominan las deformaciones por cortante, es aproximadamente sólo 15% de la rigidez en el estado no agrietado cuando se consideran las distorsiones por cortante y por flexión. El mecanismo de armadura en esas vigas consiste en una serie de puntales radiantes más que miembros paralelos a 45°, lo que debe tomarse en cuenta en el análisis.[7.26] La pérdida de rigidez es significativa cuando se evalúan las distorsiones bajo carga de servicio en las estructuras, o su respuesta a excitación dinámica.

En la fig. 7.24 se comparan las deflexiones de cuatro vigas,[7.7] semejantes a las de la fig. 7.18*a*. Todas las vigas trasmiten la misma carga distribuida uniformemente y contienen el mismo refuerzo de flexión y en el alma, pero tienen distintos anchos de alma. La rigidez a flexión de la viga *T* de alma delgada GT4 es solamente un poco menor que la correspondiente a la viga GTI después de ocurrido el agrietamiento de flexión. La diferencia en las deflexiones mostrada en la fig. 7.24 se debe principalmente a las distorsiones por cortante, que se vuelven más significativas al reducir el área del alma.

La contribución de las distorsiones por cortante a la deflexión total de las vigas *T* continuas es muy importante cuando el refuerzo en el alma resiste una gran proporción del cortante ($\eta \approx 1.0$).

7.8 CORTANTE DE ENTRECARA

En todos los casos examinados hasta ahora, las fuerzas cortantes aplicadas han producido agrietamiento inclinado a través de un miembro. También

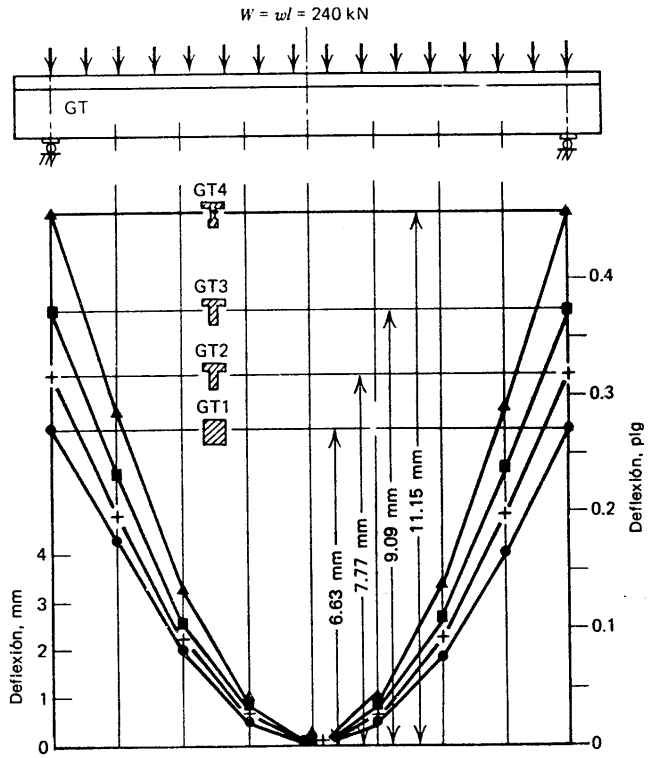


Figura 7.24. Deflexiones observadas bajo la misma carga con ancho variable del alma.[7.7]

es posible que los esfuerzos cortantes provoquen un tipo deslizante de falla a lo largo de un plano bien definido. Debido a la tensión externa, contracción o causas accidentales, se puede formar una grieta a lo largo de ese plano, incluso antes de que actúe el cortante. Entonces se presenta la posibilidad de transferencia de cortante por la acción de trabazón del agregado y de dovela estudiada antes. Por ejemplo, puede ser necesario que se trasmita el cortante en esta manera en las vigas de gran peralte, ménsulas (que se estudiarán en el capítulo 13), juntas entre elementos precolados de concreto y muros de cortante. Se utiliza el término "transferencia de cortante de entrecara" para designar el mecanismo, y en seguida se estudian sus componentes posibles.

La transferencia de cortante de entrecara en los miembros a flexión sólo puede ser crítica si la relación de claro de cortante a peralte es muy pequeña (por ejemplo, < 0.5) o cuando se debilita una sección específica a lo largo de la cual puede ocurrir desplazamiento por cortante (y por ende transferencia a cortante tangencial). El mecanismo de cortante de en-

trecara, es distinto en el concreto inicialmente no agrietado que en el inicialmente agrietado, aunque el enfoque para el diseño de ambos será el mismo.

Cuando se requiere, se provee refuerzo, generalmente perpendicular al plano de cortante, principalmente para proporcionar una fuerza de agarre entre las dos caras deslizantes potenciales. Para asegurar el desarrollo del esfuerzo de cedencia, se debe anclar debidamente esas varillas a ambos lados del plano potencial de cortante. También es evidente que para iniciar la acción de agarre del refuerzo, las caras de la grieta deben separarse ligeramente. Este tipo de fuerza de agarre puede suplementarse mediante fuerzas de compresión aplicadas externamente a través de un plano de cortante. Recíprocamente, una tensión aplicada externamente puede disminuir la fuerza de agarre disponible para el mecanismo de transferencia de cortante.

Recientemente se ha llevado a cabo una diversidad de estudios relativos al cortante de entrecara. Aquí se hace referencia solamente a los de Mast, [7.33] Mattock y Hawkins, [7.34] y al trabajo desarrollado en la Universidad de Canterbury. [7.11, 7.35] El informe de Mattock y Hawkins contiene importantes referencias adicionales. La fig. 7.25 muestra especímenes típicos de empuje utilizados para determinar experimentalmente el mecanismo de transferencia de cortante de entrecara.

7.8.1 Transferencia de cortante a través de entrecaras no agrietadas de concreto

Cuando se trasmite una fuerza cortante a lo largo de un plano a cortante potencial no agrietado, se generan esfuerzos principales diagonales. Posteriormente se desarrollan a través del plano a cortante grietas cortas a 45° o más horizontales, que en presencia del acero transversal, producen la transferencia de cortante por un mecanismo de armadura, como se indica en la fig. 7.26. Los puntales diagonales cortos están sujetos a compresión σ y esfuerzos cortantes τ (vease el detalle en la fig. 7.26). Como lo indica la envolvente de falla estudiada en el capítulo 2 (véase la fig. 2.10), los esfuerzos principales resultantes gobiernan el criterio de falla para el concreto. El refuerzo debe desarrollar la fuerza N de agarre dentro de su rango de cedencia después de la formación de grietas y mediante cualquier compresión externa disponible. Muy pequeños desplazamientos a cortante ocurren antes y en el desarrollo de las grietas. Normalmente la falla ocurre cuando el acero transversal cede permitiendo que los puntales de concreto roten y las grietas se propaguen con un ángulo muy agudo, casi paralelo con el plano a cortante. Mattock y Hawkins [7.34] encontraron buena correlación experimental con la hipótesis de la envolvente de falla para el concreto (fig. 2.10). Para fines de diseño se supone que puede existir una grieta a lo largo del plano de cortante; en consecuencia, los diseñadores

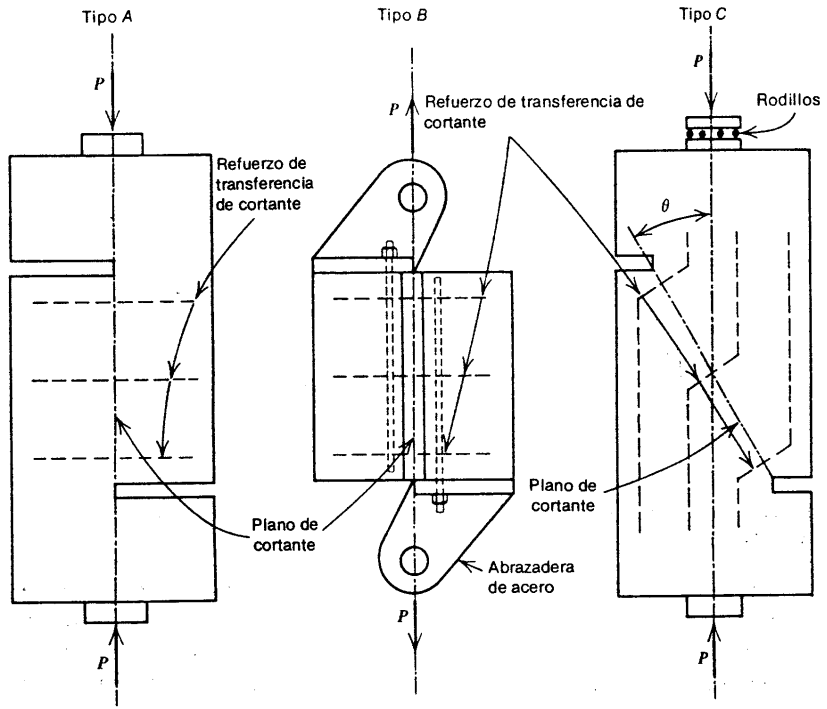


Figura 7.25. Probetas típicas de transferencia de cortante en entrecaras por empuje. [7.34]

confían en una menor resistencia a cortante, descrita en la siguiente sección.

7.8.2 Transferencia de cortante a través de entrecaras preagrietadas de concreto

En la sección 7.3.3 se describió brevemente el mecanismo de transferencia de cortante mediante la trabazón del agregado. Una consideración de dos superficies de trabazón, ásperas, a lo largo de una grieta en el plano de cortante general (fig. 7.27) indica que ahora se requerirán desplazamientos a cortantes bastante mayores que los que se encontrarán a lo largo de entrecaras inicialmente no agrietadas, para trabar efectivamente las partículas de agregado que sobresalen a través del plano a cortante. A mayor anchura de la grieta, w, mayor será el desplazamiento Δ, a cortante y menor la resistencia última alcanzable. También es evidente que, conforme aumenta el desplazamiento a cortante, las masas de concreto a ambos lados de la grieta se empujan alejándose; en consecuencia, el ancho de la grieta tiende a aumentar. A menos que se domine la tendencia a aumentar del ancho de la grieta, mediante una fuerza efectiva de agarre o de restricción, se podrá transmitir muy poco cortante.

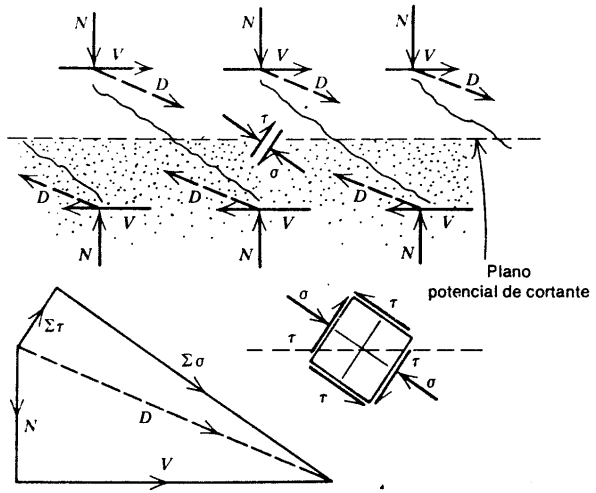


Figura 7.26. El mecanismo de transferencia de cortante en entrecaras a través de un plano de cortante no agrietado.

En la fig. 7.28 se muestran relaciones típicas de esfuerzo cortante-desplazamiento cortante que obtuvo Loeber [7.11] con probetas de forma semejante al tipo *A* ilustradas en la fig. 7.25. No había refuerzos que atravesaran la grieta. Sin embargo, su ancho se mantuvo constante mediante las fuerzas externas de agarre. Se observó una respuesta bilineal hasta un esfuerzo cortante promedio de aproximadamente 1000 lb/plg²(6.9 N/mm²), A cargas bajas se requiere un deslizamiento mayor antes de que las partículas mayores entren en contacto, después de lo cual la junta se hace más rígida. Cuando los investigadores utilizaron distintos agregados gruesos, no notaron diferencia significativa en la respuesta de las

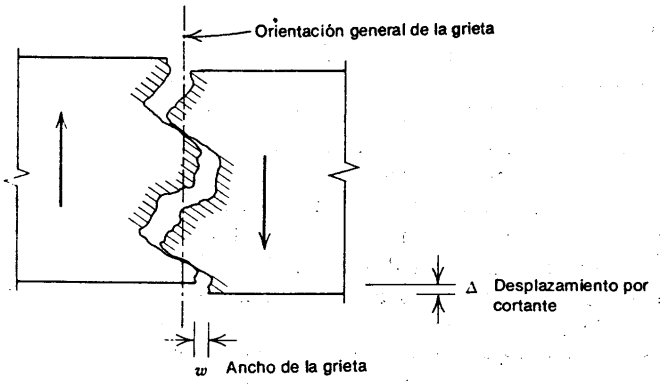


Figura 7.27. Desplasamiento a lo largo de un plano agrietado de cortante.

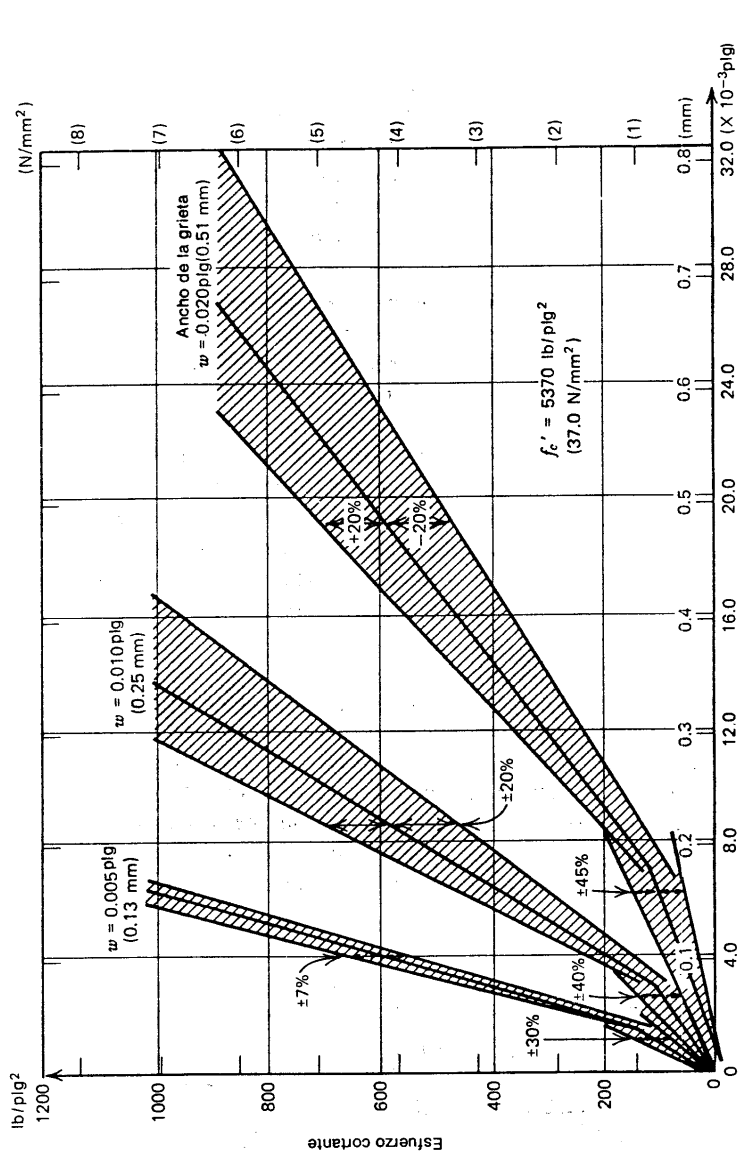


Figura 7.28. Relaciones típicas esfuerzo cortante medio - desplazamiento de cortante para el mecanismo de trabazón del agregado. [7.11]

probetas, utilizando tamaños nominales de 3/8 plg (9 mm) y 3/4 plg (19 mm). En una estructura real, tanto el ancho de la grieta como la fuerza de agarre varían conforme aumentan la carga y el desplazamiento a cortante, pero la obra de Loeber proporciona una buena indicación de la resistencia a cortante disponible de la trabazón del agregado.

Se puede controlar la abertura de la grieta mediante refuerzo que normalmente cruza el plano de cortante en forma perpendicular. Dichas varillas también estarán sujetas a desplazamiento a cortante, por lo que se puede trasmitir cierta cantidad de cortante adicional mediante acción de dovela. A menudo los diseñadores de antaño confiaban intuitivamente en esta acción de dovela, al igual que en los remaches y tornillos en la construcción del acero.

Hay tres mecanismos que pueden desarrollar la resistencia de dovela a través de un plano de cortante: la flexión de las varillas de refuerzo, la resistencia a cortante a través de la varillas y la torcedura del refuerzo. Estos mecanismos están ilustrados en la fig. 7.29, en donde la fuerza cortante asociada V_d también está expresada en términos de la resistencia de cedencia de la varilla. Sin embargo, también se debe notar que no es posible utilizar completamente la resistencia de cedencia de una varilla en flexión y cortante, para acción de dovela, si se requiere que la misma varilla proporcione igualmente una fuerza de agarre. Por tanto, los valores de V_d dados en la fig. 7.29 para la flexión y cortante son límites superiores. Las pruebas realizadas por Phillips[7.35] indicaron que es probable que la torcedura sea la principal fuente de resistencia de dovela, especialmente cuando se emplean varillas de tamaño pequeño. La fig. 7.30 muestra la respuesta típica de varillas de diámetro pequeño a la acción de dovela, obtenida de las pruebas[7.35] de empuje en probetas en que se impidió la transferencia de cortante a lo largo de la entrecara, mediante mecanismos distintos a la acción de dovela, aplicando cera a la superficie lisa. La fig. 7.30*a* indica el efecto de la cuantía variable de acero a través de la entrecara, y la fig. 7.30*b* compara tres distintos tamaños de varillas utilizados para obtener la misma cuantía de acero de $\rho_{vf} = 0.0123$.

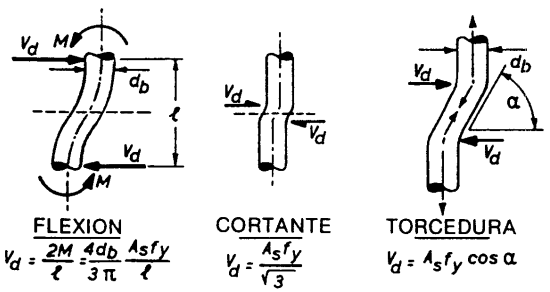


Figura 7.29. El mecanismo de acción de dovela a través de una entrecara a cortante.

Para desarrollar resistencia de dovela de cierto significado (fig. 7.30), son necesarios grandes desplazamientos a lo largo del plano de cortante. Este deslizamiento bien puede superar lo que podría considerarse aceptable dentro de los límites de la utilidad estructural. Si se considera aceptable un deslizamiento de cortante de 0.01 plg (0.25 mm) y se emplea 1.23% de acero transversal, se puede desarrollar un esfuerzo cortante de aproximadamente 150 lb/plg^2(1 N/mm^2) en acción de dovela, mediante un arreglo razonable de varillas, de acuerdo con la fig. 7.30*b*. Sin embargo, para el mismo deslizamiento, se generarían esfuerzos cortantes por trabazón del agregado considerablemente mayores, como en la fig. 7.28, a menos que el ancho de la grieta fuera muy grande. En consecuencia, la acción de dovela no es una componente importante del mecanismo resistente a cortante a través de las entrecaras agrietadas a desplazamientos aceptables de cortante.

El diseño de la transferencia de cortante de entrecara se puede basar en los conceptos tradicionales de fricción. Experimentalmente se ha encontrado que el coeficiente μ de fricción de la superficie agrietada es al menos 1.4.[7.33] La fuerza normal puede ser provista por el refuerzo A_{vf} en la cedencia, por lo que el esfuerzo v_{uf}, cortante transferible a través de una superficie de concreto agrietado de área A_g, es

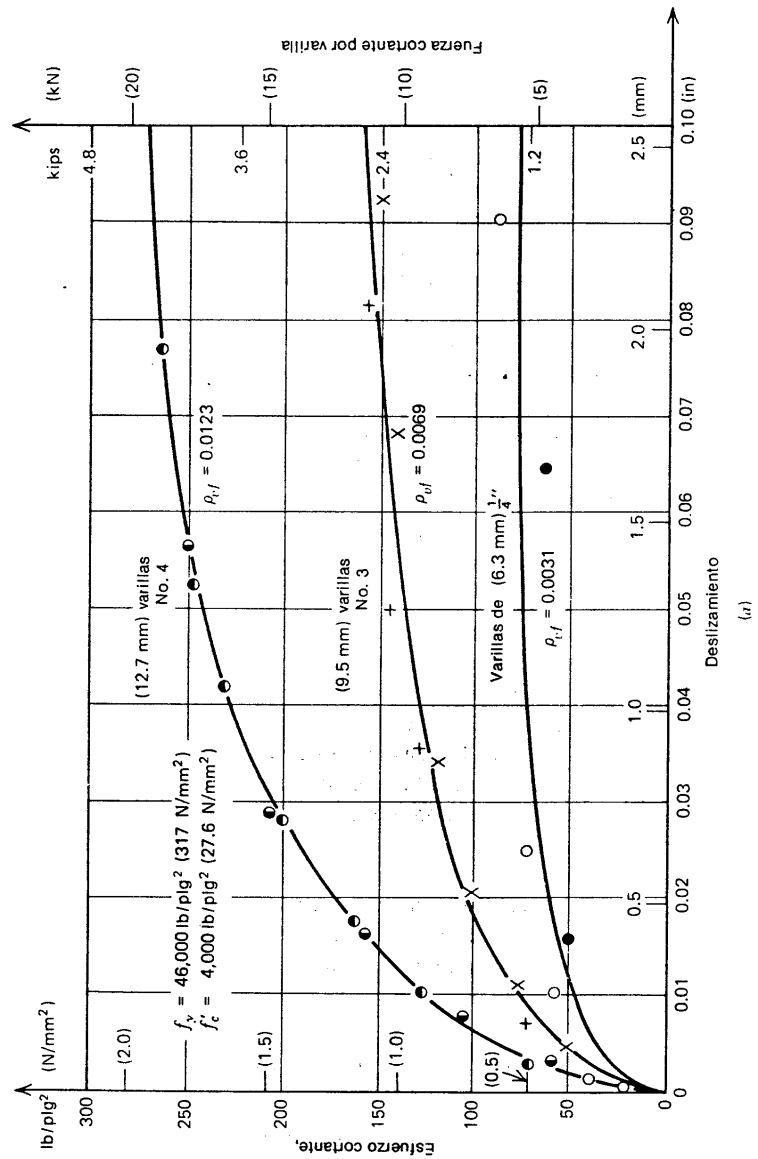
$$v_{uf} = \mu \frac{A_{vf} f_y}{A_g} = \mu \rho_{vf} f_y \tag{7.47}$$

Se ha encontrado que a niveles moderados de carga, esta relación es independiente de la resistencia del concreto.[7.34] Cuando se aplican grandes esfuerzos cortantes, se puede esperar que se rompa el concreto en el mecanismo de trabazón. Esta carga requiere fuerte refuerzo y compresión transversal externa. Entonces la resistencia queda gobernada por el mismo mecanismo de falla que inicialmente controla las interacciones no agrietadas, estudiado en la sección 7.8.1. El código ACI[7.2] fija un límite superior conservador de $v_{uf} = 0.2f'_c$ u 800 lb/plg^2 (5.5 N/mm^2) para protección contra una falla del concreto. El código recomienda que se utilice $\mu = 1.0$ cuando se coloca al concreto contra concreto endurecido y $\mu = 1.4$ para el concreto colado monolíticamente.

Las pruebas de la Universidad de Washington[7.34] produjeron la siguiente ecuación

$$v_{uf} = 200 + 0.8\left(\rho_{vf} f_y + \frac{N}{A_g}\right) < 0.3f'_c \tag{7.48}$$

en que los esfuerzos están en unidades de lb/plg^2 y N es la fuerza de compresión aplicada externamente normal a la interacción. Si N es una fuerza de tensión, se debe tomar negativa. De pruebas en ménsulas se obtuvo evidencia para el caso de tensión. Todo esto se estudia en el capítulo 13.



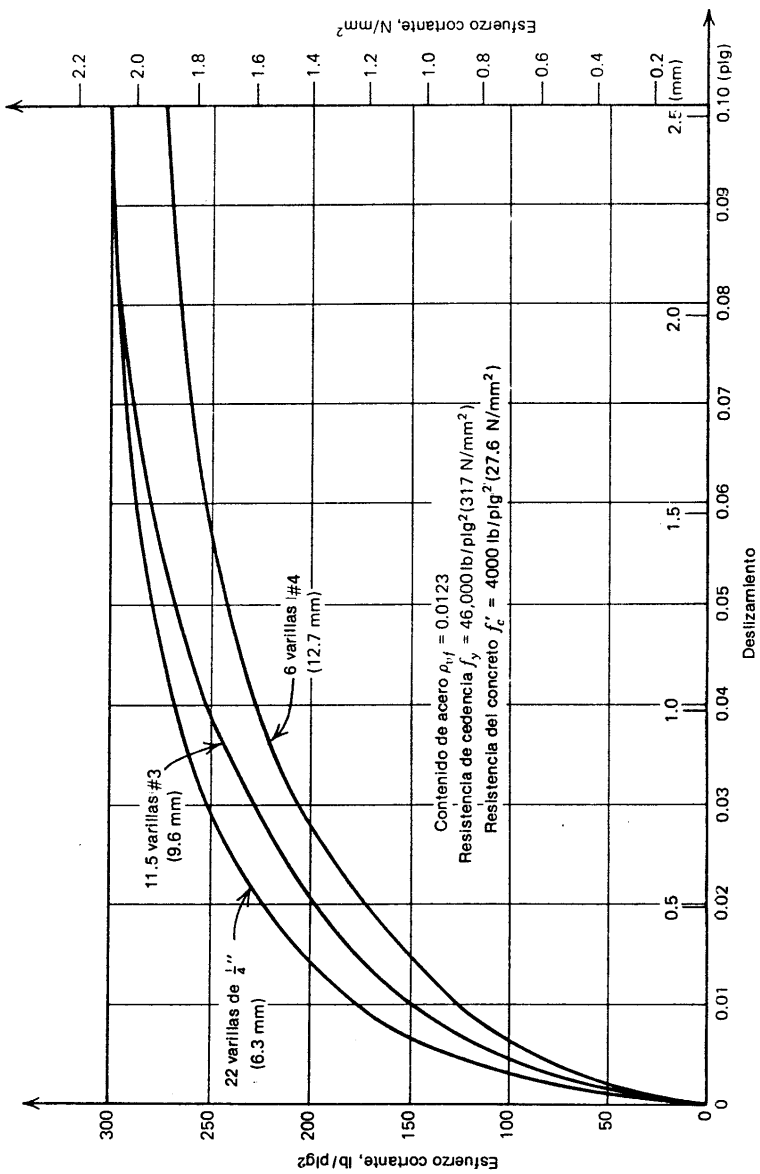
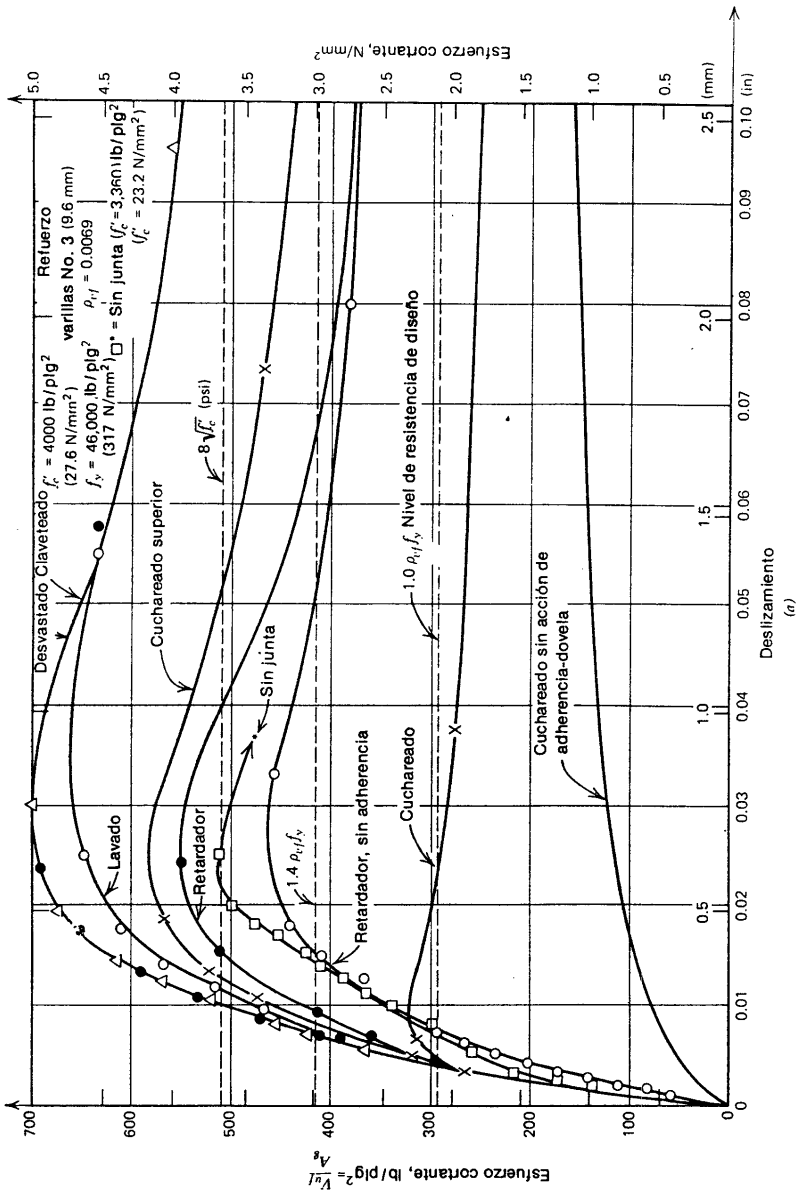


Figura 7.30. Relación carga - deslizamiento para acción de dovela sola [7.35] (*a*) utilizando distintas cuantías de acero. (*b*) utilizando 1.23% de acero y distintas varillas.



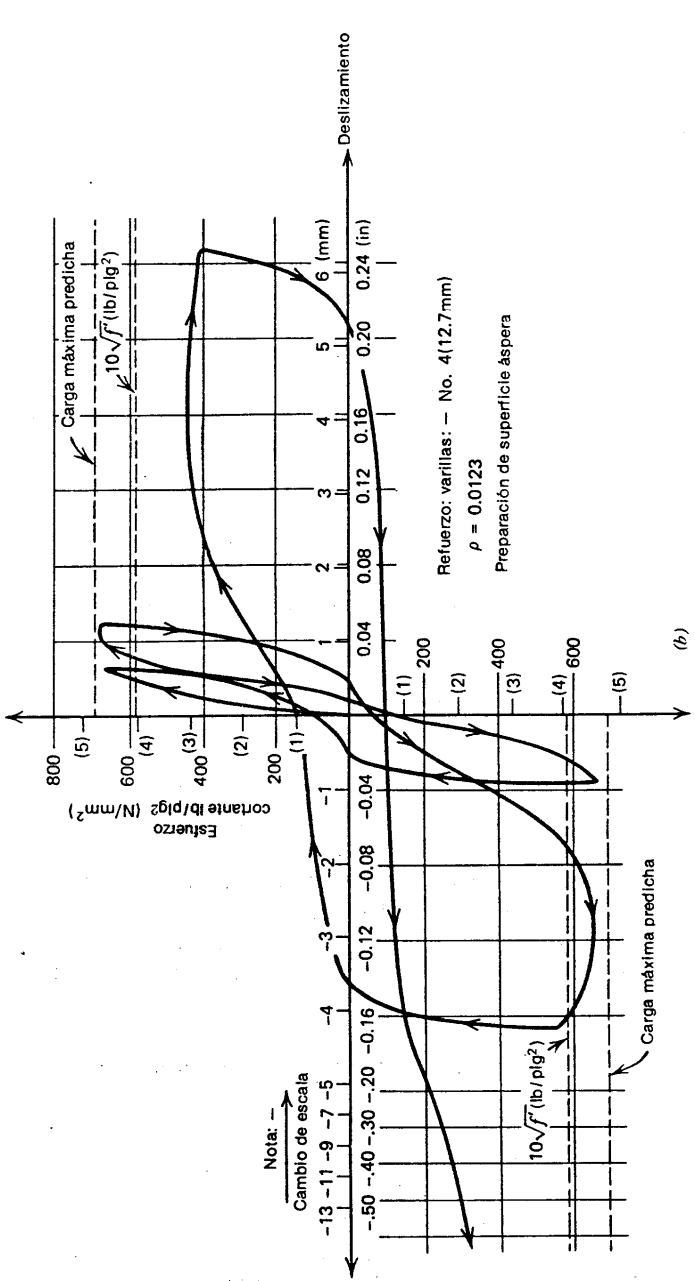


Figura 7.31. Curvas carga-deslizamiento para transferencia de cortante a través de juntas de construcción.[7.35] (a) Transferencia de cortante de concreto con distintas preparaciones de la superficie, (b) Transferencia de cortante total bajo carga cíclica alternada.

7.8.3 Transferencia de cortante a través de juntas de construcción

Las juntas de construcción en las vigas, columnas y muros pueden presentar una debilidad potencial si se necesita transmitir grandes fuerzas cortantes a través de ellas. En las vigas esbeltas, una junta de construcción bien preparada normalmente no significa ningún problema, debido a que la resistencia a cortante o flexión de estos miembros es mucho menor que la capacidad de cortante de entrecara en una junta de construcción a través de los miembros. Sin embargo, terremotos recientes han demostrado que las juntas de construcción en algunos miembros, especialmente los muros de cortante, pueden constituir el eslabón más débil en el mecanismo resistente de carga de la estructura. Durante los terremotos de 1964 en Alaska y de 1971 en San Fernando quedaron visibles juntas de construcción horizontal tanto en edificios medianos como altos. Parte del daño en las juntas de construcción quedó casi imposible de reparar. Las losas de piso de concreto ligero, que dan dos juntas de construcción en cada nivel de piso, representan una debilidad particular en los muros de cortante, de concreto de peso normal. El diseño de una junta de construcción debe basarse en la premisa de que su capacidad debe ser al menos igual a la capacidad a cortante (tensión diagonal) de las partes adjuntas.

El concreto de una junta de construcción puede poseer poca resistencia a la tensión a través de la entrecara, por lo que es aconsejable suponer que hay una grieta presente en la junta antes de aplicar cualquier cortante. En consecuencia, se puede aplicar el concepto de fricción cortante descrito en la sección anterior. Sin embargo, el tipo de preparación de superficie utilizado para la junta puede influir en la capacidad a cortante de esa entrecara. Ya que la capacidad en la entrecara podría ser menor que la que se encuentra a lo largo de grietas formadas en el concreto monolítico, conviene utilizar un menor coeficiente de fricción.

De los estudios experimentales realizados sobre el funcionamiento de las juntas de construcción en la Universidad de Canterbury [7.35] surgieron las siguientes observaciones:

1. Las juntas de construcción horizontal adecuadamente reforzadas, con una superficie limpia y áspera, a las cuales pueda adherirse el concreto recién vaciado, pueden desarrollar una resistencia a cortante de entrecara igual a o mayor que la capacidad a tensión diagonal de la estructura. Se obtuvieron superficies ásperas de varias maneras: eliminando el mortero de entre las partículas mayores de agregado con un chorro de agua y cepillo suave, cuando el concreto estaba en un estado semiendurecido; aplicando primeramente un retardador químico a la superficie; mediante desbastado; proporcionando llaves (vea la fig. 7.32), o formando ranuras cruciformes con una herramienta afilada a lo largo de una superficie húmeda aplanada con cuchara.

2. La falta de adherencia al concreto viejo en las probetas en que estaba barnizada la superficie produjo aproximadamente el doble de deslizamiento inicial del ocurrido en las juntas de construcción con adherencia.

3. Las superficies aplanadas con cuchara con pequeña rugocidad produjeron fallas poco después del desarrollo de una grieta, cuando falló la adherencia en las entrecaras.

4. En la fig. 7.31*a* se muestran las respuestas de las juntas de construcción con distintas preparaciones de superficie y con una cuantía de refuerzo correspondiente a $\rho_v f_y = 295$ lb/plg^2(2.03 N/mm^2) La curva más baja muestra la contribución solamente de la acción de dovela, y las curvas superiores representan solamente la contribución del concreto, en que se ha restado el esfuerzo cortante, trasmitido por la acción de dovela. También se presentan tres niveles significativos de esfuerzo de diseño. Es claro que fácilmente podría desarrollarse la resistencia de diseño sin la contribución de la acción de dovela, basándose en un coeficiente de fricción $\mu = 1.0$, para todas las superficies ásperas después de un deslizamiento de aproximadamente 0.005 plg (0.12) mm). Esta intensidad de carga jamás será excedida en una estructura bien diseñada, debido a que otros modos de falla más deseables (cedencia a flexión) limitarán el nivel de carga.

5. En una junta de construcción bien diseñada y ejecutada, es seguro que el plano de la falla a cortante deslizante esté localizado por debajo del nivel de la junta en una capa de concreto inferior, la que se forma en la parte superior de una "colada" como resultado de la acumulación de partículas con baja gravedad específica, ganancia de agua y aumento consecuente de la relación de agua-cemento, y en especial por el atrape de aire bajo el agregado grueso. La adherencia entre las partículas gruesas de agregado y la matriz de mortero, que constituye un eslabón potencialmente débil en el mecanismo de trabazón del agregado, puede debilitarse todavía más por la sedimentación en el concreto fresco, que a su vez es afectada por la impermeabilidad de la cimbra y la altura de una "colada." En consecuencia, la resistencia del concreto utilizado en la estructura probablemente proporcione una estimación muy optimista de la resistencia disponible inmediatamente por debajo del plano de una junta de construcción horizontal. En la fig. 7.32 se muestran algunos modos de fallas típicas de juntas de construcción.

En el capítulo 12 se estudia con mayor detalle la determinación del refuerzo vertical colocado a través de una junta de construcción en un muro de cortante en el diseño sísmico, incluyendo los efectos de las cargas de gravedad y aceleraciones verticales.

7.9 LOS EFECTOS DE CARGA REPETIDA Y CICLICA EN LA RESISTENCIA A CORTANTE

La contribución de los estribos en la resistencia a cortante de las vigas de concreto reforzado se ha determinado principalmente por medio de

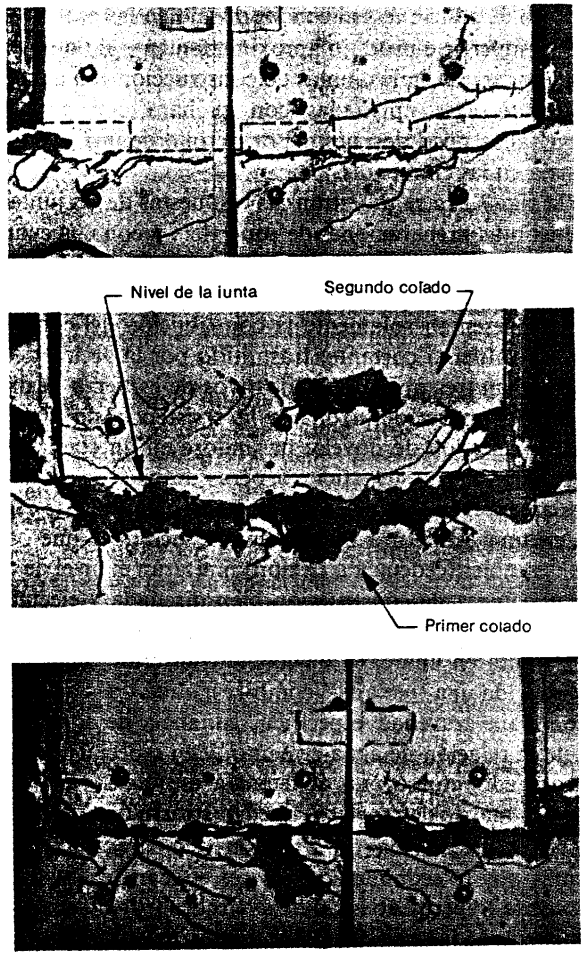


Figura 7.32. La falla de juntas de construcción con 0.6% de cuantía de acero.[7.35] (a) Junta con llaves. (b) Superficie áspera obtenida con retardador químico; cargas cíclica. (c) Nuevo concreto vaciado sobre superficie cuchareada.

pruebas en que se aumentó monotónicamente la carga hasta que ocurriera la falla. En muchos casos se pueden aplicar a la estructura cargas repetidas de alta intensidad debidas al tráfico o viento. En las zonas sísmicas existe un criterio todavía más severo en que tenga que desarrollarse completamente la resistencia de la estructura varias veces en direcciones alternas (cargas cíclicas), con la posibilidad de sobrepasar el rango elástico. En consecuencia, se estudiarán brevemente de nuevo algunos aspectos de la resistencia a cortante que aparecen bajo los efectos de cargas repetidas y cíclicas.

7.9.1 Efectos del refuerzo en el alma

Un estudio de Mayer[7.36] indicó que el enfoque actual de diseño para el cortante también es aplicable cuando ocurre un número elevado de repeticiones de carga. La fig. 7.33 muestra los esfuerzos medidos en estribos simples en una de varias vigas rectangulares durante unos 900,000 ciclos de cargas. Se proporcionaron los estribos para resistir 114% de la fuerza cortante asociada con la resistencia a flexión de la viga. La carga se cicló entre 13 y 71% de la resistencia a flexión, por lo que el esfuerzo cortante nominal en el claro a cortante varió entre 70 lb/plg^2 (0.48 N/mm^2) y 400 lb/plg^2 = $5.3\sqrt{f'_c}$ (2.76 N/mm^2), lo que correspondió a un cambio teórico en el esfuerzo del acero de flexión de 34,000 lb/plg^2 (234 N/mm^2). Después de (aproximadamente) 100,000 ciclos, se dejó la viga sin carga durante 15 horas. Como se esperara, los mecanismos resistentes a cortante exceptuando el de acción de armadura del acero en el alma se deterioraron al continuar la carga repetida. Como lo revela la fig. 7.33, la contribución de los estribos aumentó considerablemente en los 100,000 primeros ciclos, pero el mecanismo resistente a cortante se estabilizó después de 400,000 ciclos.

Suponiendo que en el rango elástico el esfuerzo cortante resistido por el concreto v_c es el dado por la ec. 7.15, y que se puede obtener el esfuerzo cortante resistido por la acción de armadura de la ec. 7.23*a*, en que se remplaza f_y por el esfuerzo f_s requerido del estribo (que puede justificarse mediante referencia a la fig. 7.18), se puede calcular que el esfuerzo promedio en los estribos cuando se aplicó 71% de la resistencia a flexión es f_{s1} = 21 Kips plg (145 N/mm^2). Cuando se ignora la contribución del concreto (ec. 7.15) dejando que el mecanismo de armadura transmita todo el cortante, los esfuerzos del estribo en este nivel de carga tendrían que aumentar hasta f_{s2} = 36.0 Kips plg^2 (250 N/mm^2). Estos dos límites están designados mediante líneas punteadas en la fig. 7.33. Al comparar estos límites de esfuerzo teórico con los valores medidos, se debe considerar el esfuerzo medio en tres estribos adyacentes, que corresponde a una grieta diagonal potencial. La falla ocurrió eventualmente como resultado de la fractura del refuerzo de flexión en el claro a cortante después de más de 10^6 repeticiones de la carga. Los aumentos en los esfuerzos de los estribos bajo cargas repetidas, en una viga idéntica en que se utilizaron varillas corrugadas para los estribos, fueron todavía menores. Esto se debe probablemente al mejor control de grietas que proporcionan las varillas corrugadas, y en consecuencia al menor deterioro del mecanismo resistente a cortante del concreto. También se ha verificado la participación eficiente del refuerzo en el alma con solamente un pequeño aumento en los esfuerzos medidos después de 50 ciclos de carga de servicio aplicada, con un esfuerzo cortante nominal de 710 lb/plg^2 (4.9 N/mm^2), para vigas con patines de alma delgada.[7.24]

El deterioro de los mecanismos resistentes a cortante del concreto es mucho más rápido, si el refuerzo de flexión cede como resultado de las

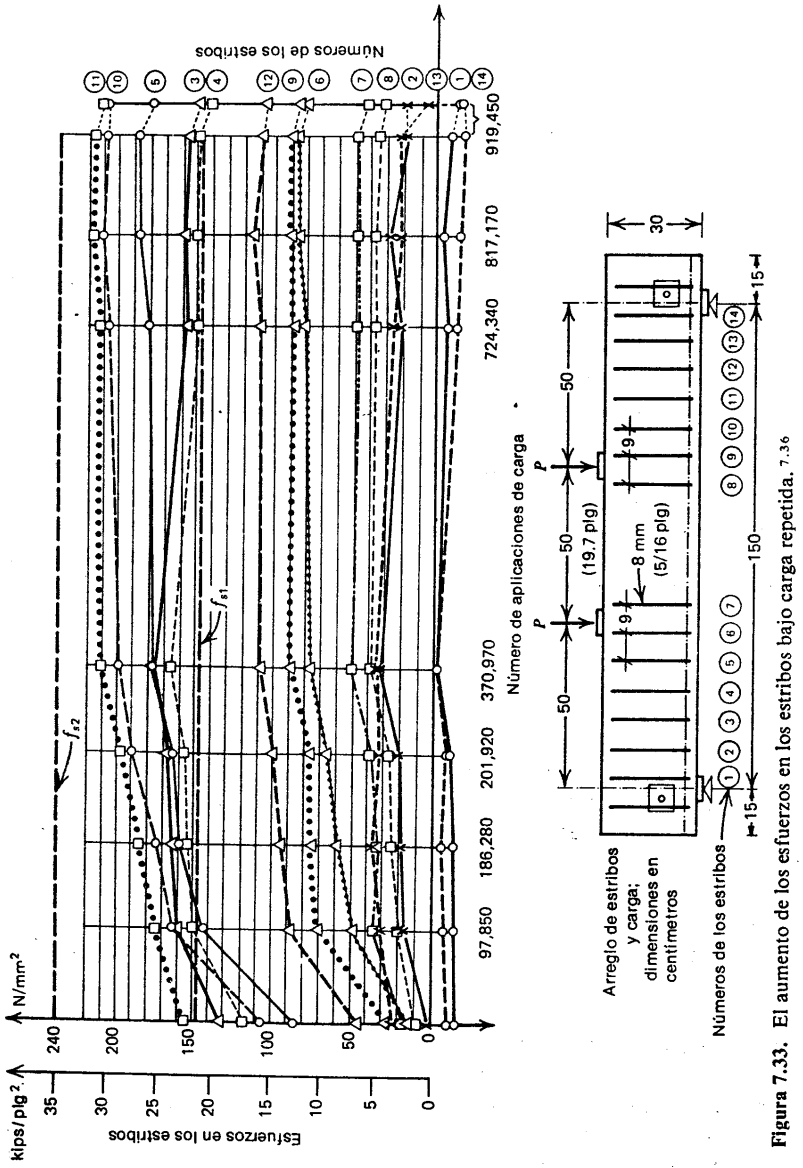


Figura 7.33. El aumento de los esfuerzos en los estribos bajo carga repetida. [7.36]

cargas cíclicas alternadas de alta intensidad. La fig. 7.34 muestra la fuerza cortante total trasmitida a través de la grieta de falla diagonal potencial por todos los estribos, en una viga de fachada aproximadamente cuadrada, semejante a la que aparece en la fig. 12.28. Las mayores deformaciones medidas ocurrieron en cada estribo donde éste fue cruzado por la grieta de falla potencial. Se aprecia que durante los cinco primeros ciclos de carga los mecanismos que no contenían estribos resistieron unos 40 kips (178 kN). Hasta esta etapa no ocurrió ninguna cedencia en el refuerzo de flexión. Después del quinto ciclo, se impuso cedencia alternante en el refuerzo principal, y como revela la fig. 7.34, casi todo el cortante aplicado lo resistieron los estribos en el noveno ciclo. Los porcentajes dados en la fig. 7.34 muestran la proporción del cortante aplicado total resistido por los estribos. Los resultados de las pruebas señalan la necesidad de ignorar los mecanismos resistentes a cortante del concreto y de propor-

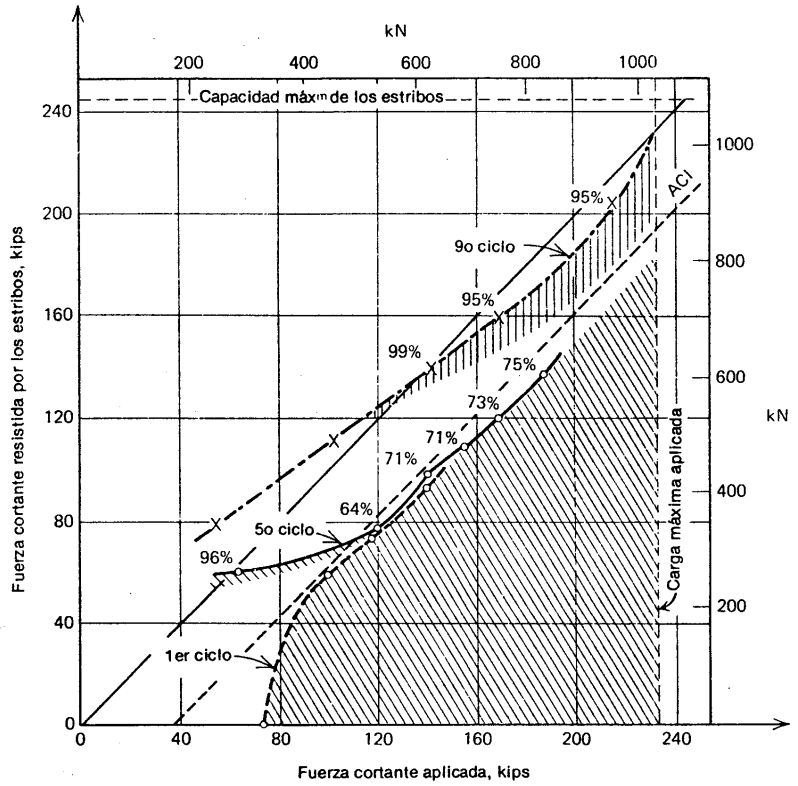


Figura 7.34 La fuerza cortante total transmitida a través de la grieta de falla diagonal potencial a través de una viga de fachada.

cionar refuerzo en el alma para resistir la fuerza cortante total en las regiones en que es una posibilidad la cedencia del refuerzo de flexión bajo cargas cíclica alternadas.

Se debe esperar que las cargas cíclicas de alta intensidad provoquen cierta degradación de la rigidez, efecto especialmente evidente cuando se permite que las grietas diagonales se ensanchen.[7.26] Por lo general la reducción en la rigidez depende principalmente de la magnitud de las cargas impuestas previamente, más que del número de ciclos aplicados.[7.37]

7.9.2 Efectos en la transferencia de cortante de entrecara

Cuando no se desarrollan grietas a lo largo del plano de cortante durante la transferencia de cortante de entrecara, no se puede esperar un deterioro de la capacidad a cortante después de unos cuantos ciclos de cargas repetidas de alta intensidad, lo que se ha observado en un número limitado de pruebas en juntas de construcción horizontales.[7.35] La fricción cortante por la trabazón del agregado no es operativa sino hasta que se desarrollan las grietas; en consecuencia, antes del agrietamiento el acero transversal que cruza la entrecara no tiene papel significativo en la transferencia de la carga. Sin embargo, después del desarrollo de grietas, las cargas repetidas provocan un deterioro de la aspereza de la entrecara, con una reducción correspondiente en el coeficiente equivalente de fricción.

En la fig. 7.35 se ilustra una relación típica esfuerzo cortante-desplazamiento cortante de una prueba de trabazón de agregado[7.11] en la que se aplicaron unas cuantas repeticiones de cargas cortantes elevadas ($v_u \approx 12.5\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 $\approx 1.04\sqrt{f'_c}$ N/mm^2) mientras se mantuvo un ancho constante de grieta mediante agarraderas externas. Se aprecia que el deslizamiento residual aumenta con ritmo decreciente, y que ocurre cierto aumento en la rigidez del sistema. Cuando el refuerzo transversal proporciona internamente la fuerza de agarre, la abertura de la grieta no queda tan bien controlada y se debe esperar un deterioro más rápido. En las pruebas de juntas de construcción, ocurrieron deslizamientos residuales muy grandes, con una pérdida grande de resistencia a cortante a través de la entrecara, después que había cedido el refuerzo.[7.35] Como lo muestra la fig. 7.31*b*, el deterioro de la entrecara es especialmente significativo cuando se aplica una carga alternada de alta intensidad, tipo de acción que tiende a desalojar con mayor facilidad las partículas embebidas del agregado. La intensidad de la carga requerida para provocar este deterioro resultó ser mayor que los valores máximos especificados en las provisiones de fricción cortante del código ACI.[7.2]

Como puede esperarse, el deterioro de la entrecara es bastante menor con una baja intensidad de transferencia de cortante. La Asociación de Cemento Portland[7.38] estudió la efectividad de las juntas en las losas de pavimento de concreto, en función del ancho de las grietas. En la fig. 7.36 se muestran algunos resultados: una efectividad de 100% indica que no

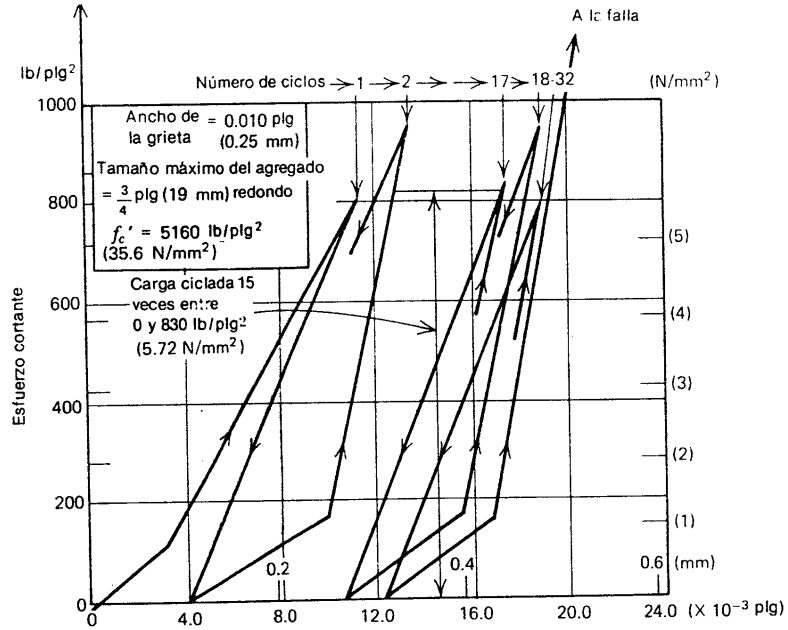


Figura 7.35. Relaciones esfuerzo cortante vs. desplazamiento de cortante para carga repetida en probetas con trabazón del agregado.[7.11]

hay desplazamiento relativo a lo largo de la entrecara. El cortante transferido fue de 28 lb/plg^2 (0.19 N/mm^2). Es por demás evidente la pérdida drástica de efectividad con la mayor abertura de la junta (ancho de la grieta). El efecto de las cargas cíclicas en la fuerza de agarre y el deslizamiento, a intensidades moderadas del esfuerzo cortante, a lo largo de una entrecara con anchos prestablecidos de grieta, fue estudiado por White y Holley,[7.39] para determinar los niveles de seguridad para los esfuerzos de membranas en recipientes agrietados de concreto. En la fig. 7.37 se proporciona el aumento observado en deslizamiento para dos anchos prefijados de grietas, durante 50 ciclos de inversiones completas de esfuerzos con $v = 164$ lb/plg^2(1.11 N/mm^2).

7.10 MIEMBROS Y CARGAS ESPECIALES

En las secciones anteriores de este capítulo se estudió el fenómeno de cortante principalmente con relación a las vigas. Sin embargo, el cortante puede ser parte crítica del diseño en distintos casos en que se deba deter-

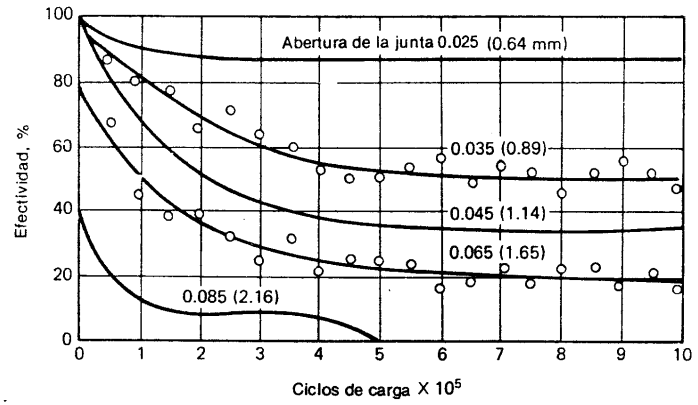


Figura 7.36. Efectividad de junta en pavimentos bajo carga repetida.[7.38]

minar uno u otro aspecto de los mecanismos resistentes predominantes a cortante. Un examen detallado de esos casos está más alla del alcance de este libro.

El diseñador familiarizado con los conceptos básico del cortante en vigas de concreto reforzado no tendrá dificultad para identificar el modo predominante de resistencia a cortante en otra componente estructural. La tarea principal será entonces arreglar el refuerzo para que permita que este mecanismo específico funcione con eficiencia. Por esta razón, en el capítulo 13 se examina brevemente una diversidad de casos en que el arreglo del refuerzo puede tener un efecto importante en el rendimiento por cortante.

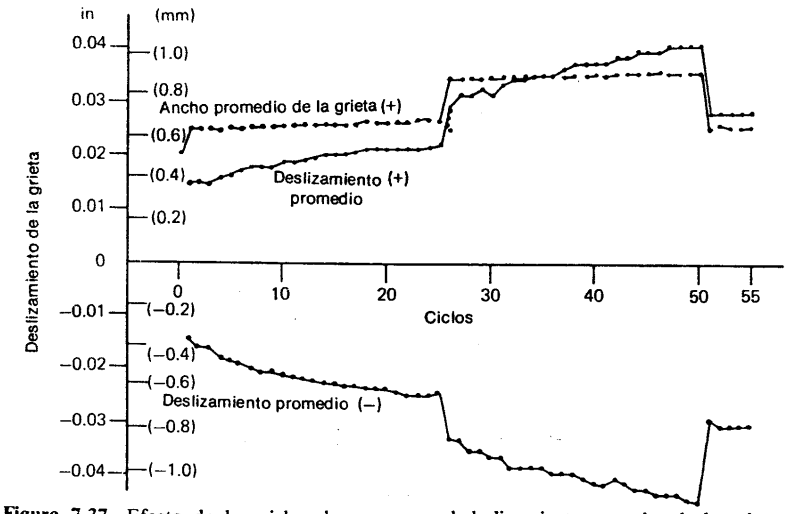


Figura 7.37. Efecto de los ciclos de cargas en el deslizamiento y ancho de la grieta en pruebas de cortante en entrecaras.[7.39]

La carga aplicada a una viga puede ser tal que no se pueda desarrollar la acción de armadura o de arco sin introducir refuerzo adicional. Este caso se puede plantear en trabes que soporten vigas secundarias. También se debe examinar cuidadosamente el alma de las vigas para determinar la resistencia a cortante cuando se debe proporcionar aberturas en ellas. El mecanismo de arco requerirá atención especial en las vigas de gran peralte en que se puedan formar grietas diagonales con ángulos muy empinados. Las ménsulas y repisas pueden transmitir fuerzas muy grandes con un brazo corto de palanca, permitiendo que la acción de arco y la transferencia de cortante en la entrecara se constituyan en los principales modos de resistencia a cortante. Los efectos de viga de gran peralte pueden regir el comportamiento de determinados muros de cortante, los que se estudian en el capítulo 12. En las juntas de viga-columna de marcos de concreto reforzado se puede plantear un problema especialmente severo de cortante, lo que se estudia con cierto detalle en el capítulo 13.

Ejemplo 7.1. El diseño del refuerzo en el alma y el recorte del refuerzo de flexión en una viga de cimentación

Una viga simétrica de cimentación (la mitad de la cual se muestra en la fig. 7.38*a*) soporta dos columnas cargadas axialmente con centros a 30 pies (9.14 m). La carga última en cada columna es de 480 k (2136 kN) y la presión reactiva correspondiente del terreno de 20 k/pie (292 kN/m) se supone que está distribuida uniformemente en la longitud total de 48 pies (14.63 m) de la viga. Se han calculado los momentos flexionantes correspondientes, que están graficados en la fig. 7.38*b*.

Propiedades

En la sección *A-A* se muestran las dimensiones de la sección transversal de la viga *T* invertida. El refuerzo superior a mitad del claro consiste en nueve varillas núm. 9 (28.6 mm) y siete varillas núm. 8 (25.4 mm) bajo las columnas constituyen el refuerzo inferior de flexión (positivo); se utilizan varillas del núm. 4 (12.7 mm) para los estribos.

Materiales: $f'_c = 3600$ lb/plg^2 (24.8 N/mm^2); $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2).

Revisión del refuerzo de flexión

1. *Acero superior a mitad del claro, nueve núm. 9,* $A_s = 9.0$ plg^2.

Fuerza total a tensión $T = A_s f_y = 9.0 \times 60 = 540$ k. Por tanto $a = T/0.85 f'_c b = 540/(0.85 \times 3.6 \times 48) = 3.7$ pulg., d $= 42 - 4.75 = 37.25$ plg., $jd = d - a/2 = 37.25 - 0.5 \times 3.7 = 35.4$ plg.

$M_u = Tjd = 540 \times 35.4 = 19{,}120$ k · plg^2

Confiable $M_u = \varphi M_u = 0.9 \times 19{,}120 = 17.204 \approx 17.280$ k plg (Fig. 7.38*b*)

2. *Refuerzo inferior bajo las columnas,.ocho núm. 8,* $A_s = 5.5$ plg.^{2},

$a = 5.5 \times 60/(0.85 \times 3.6 \times 14) = 7.7$plg $d = 42 - 3 = 39$plg $jd = 35.15$ plg

$M_u = 5.5 \times 60 \times 35.15 = 11{,}600$ k ·plg·

$\therefore$ confiable $M_u = 0.9 \times 11{,}600 = 10{,}440 > 9720$ k ·plg.

Fuerzas y esfuerzos cortantes

La sección crítica por cortante está a una distancia d a la derecha de las columnas, como lo indica la línea interrumpida a 45°. Para fines de cálculos de esfuerzo, se supone un peralte medio efectivo de 38 plg. En consecuencia, el cortante máximo que provoca la tensión diagonal será $V_{max} = [15 - (7 + 38)/12]\ 20 = 225$ k. La resistencia a cortante que debe de suministrarse $V_u = V_{max}/\varphi = 225/0.85 = 265$ k. En consecuencia, de la ec. 7.5 $v_u = V_u/b_w d = 265{,}000/(14 \times 38) \approx 500$ lb/plg^2. El concreto puede resistir cuando menos $v_c = 2.0\sqrt{f'_c} = 120$ lb/plg^2 (ec. 7.16). En consecuencia, el esfuerzo cortante máximo que se puede asignar a esta sección no debe ser mayor que (vea la sección 7.4.2) $10\sqrt{f'_c} = 600$ lb/plg^2 > 500 lb/plg^2. Por lo tanto, las dimensiones del concreto son adecuadas. Los estribos necesitan resistir esfuerzos cortantes equivalentes (ec. 7.21) de $v_s = v_u - v_c = 500 - 120 = 380$ lb/plg^2. De la ec. 7.29 esto corresponde a $\eta = v_s/v_u = 380/500 = 0.76$.
El diseño se basará en puntales diagonales a 45°, $\alpha = 45°$, y estribos verticales $\beta = 90°$ (véase la fig. 7.15).

Corte del refuerzo de flexión

El acero de flexión se limitará de acuerdo con un diagrama "*Tjd*" como el de la fig. 7.19. La cantidad e_v, en que se desplaza el diagrama *Tjd* del diagrama de momentos flexionantes se obtiene de la ec. 7.30*a* como

$$e_v = [\cot\alpha - 0.5\eta(\cot\alpha + \cot\beta)]\, d$$
$$= [1 - 0.5 \times 0.76(1 + 0)]\, d = 0.62d$$

Sin embargo, a los estribos hacia el centro de la viga se les asigna una fracción más pequeña del cortante total; en consecuencia $\eta <$ 0.76. Por esta razón se supone que $e_v \approx 0.8d \approx 30$ plg. (Nótese que el código del ACI implica que $e_v = d = 38$ plg.) De acuerdo con esto, en la fig. 7.38*b* se muestra el diagrama *Tjd* mediante las curvas interrumpidas. Las varillas se deben extender más allá de esta curva en la longitud l_d. total de desarrollo. Para las varillas superiores núm. 9 $l_d = 1.4 \times 40 = 56$ plg, para las varillas inferiores núm. 8, $l_d = 1.0 \times 32 = 32$ plg (véase el capítulo 9.).
La fig. 7.38*b* muestra dónde se pueden interrumpir las varillas de flexión. El acero así suministrado está indicado por la envolvente escalonada de momento. Se empalman dos varillas y se llevan hasta el extremo del voladizo. Se puede seguir el mismo procedimiento para el corte, generalmente en parejas, de las varillas inferiores del núm. 8. Nuevamente se llevan dos varillas a la mitad del claro y se empalman con varillas semejantes de la otra mitad de la viga. En cada caso se ha elegido conservadoramente el punto de corte, para dar a las varillas una longitud de corte a las 6 pulgadas más próximas.

Refuerzo de estribos

Los cálculos preliminares o la experiencia indican que se pueden utilizar estribos formados con dos o tres ramas del núm. 4; en consecuencia, un conjunto de estribos da un área de 0.40 plg^2 o 0.60 plg^2 de acero.
De la ec. 7.15, los esfuerzos cortantes resistidos por los mecanismos de concreto en la sección crítica son $v_c = 1.9\sqrt{f'_c} + 2500\,\rho_w V_u d/M_u$ en que $\rho_w = 5.5/(14 \times 38) \approx 0.01$, $d = 38$ plg y $M_u \approx 2100$ k · plg que se ha tomado a escala del diagrama de momentos flexionantes; en consecuencia

$V_u d/M_u = 225 \times 38/2100 > 1$

$v_c = 1.9\sqrt{3600} + (2500 \times 0.01 \times 1) = 114 + 25 = 139$ lb/plg^2

o

$v_c = 3.5\sqrt{f'_c} = 210$ lb/plg$^2 > 139$ lb/plg^2

A una sección a 7 pies de la línea de centros de la viga de la ec. 7.15 se encuentra que

$$v_c = 114 + 2500 \times 0.015 \times 140 \times \frac{38}{11{,}400} = 114 + 17 = 131 \text{ lb/plg}^2$$

En consecuencia, en esta región y hacia el centro del claro, la estimación más simple de la ec. 7.16 será bastante satisfactoria; es decir

$v_c = 2\sqrt{f'_c} = 120$ lb/plg^2

En la fig. 7.38*c* están graficadas las ecs. 7.15 y 7.16 como se aplicaron a la viga del ejemplo.

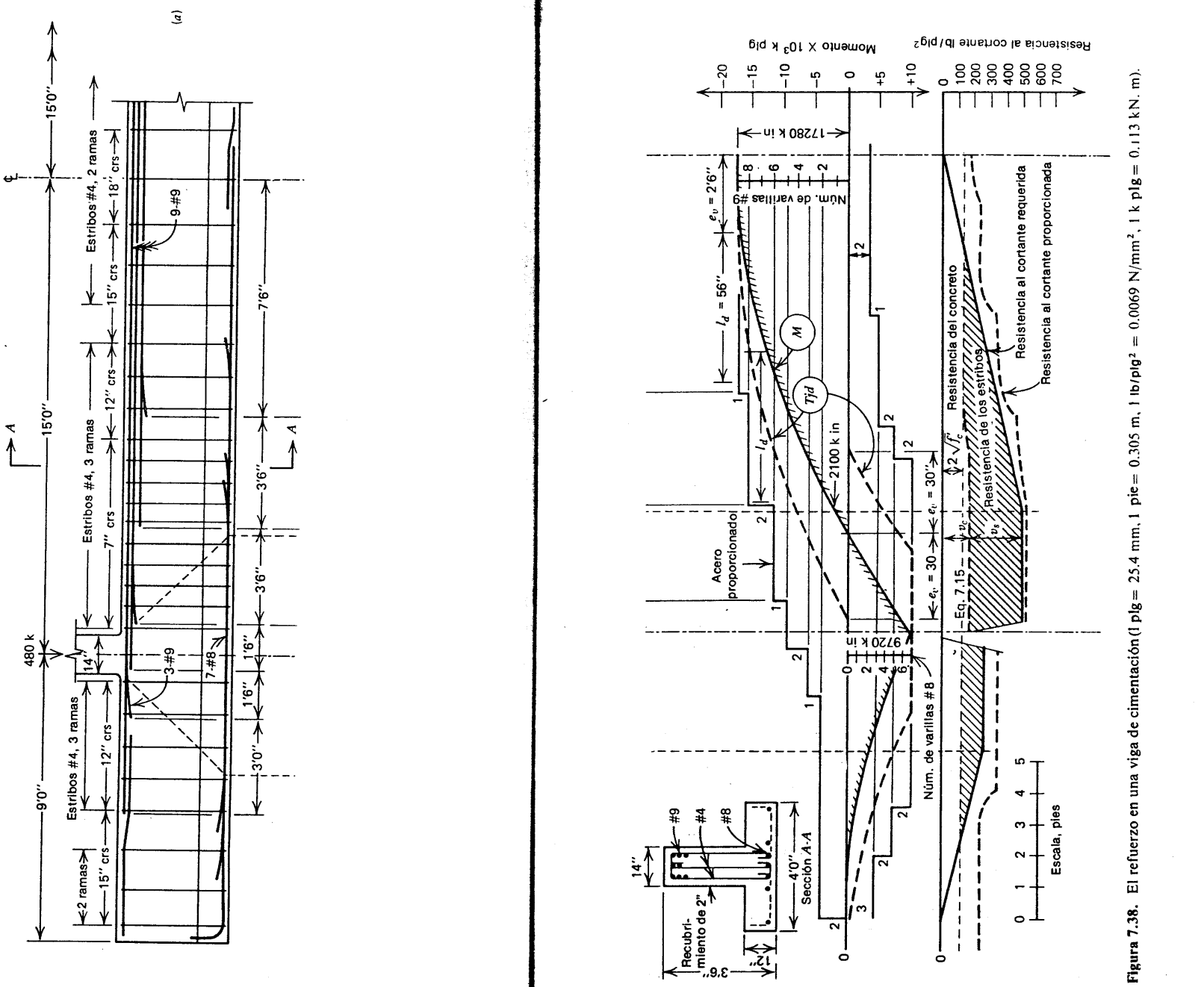


Figura 7.38. El refuerzo en una viga de cimentación (1 plg = 25.4 mm, 1 pie = 0.305 m, 1 lb/plg² = 0.0069 N/mm², 1 k plg = 0.113 kN. m).

Se necesitará proporcionar refuerzo de estribos en el área crítica cerca de la columna para $v_s = v_u - v_c = 500 - 139 = 361\,\text{lb/plg}^2$. Por tanto el área requerida de estribo por 1 pie ($s = 12$ plg) de longitud de viga de la ec. 7.23*a* $A_v = v_s s b_w / f_y = 361 \times 12 \times 14/60{,}000 = 1.01$ plg^2 /pie. Usando tres ramas del núm, $s = 0.60 \times 12/1.01 = 7.2$ plg; por ejemplo, se puede utilizar espaciado de 7 plgs.

A 7 pies de la linea de centros de la viga, la fig. 7.38*c* da $v_s \approx 310 - 120 = 190\,\text{lb/plg}^2$; en consecuencia se puede aumentar el espaciado a $361 \times 7.2/190 = 13.5$ plg por ejemplo, se puede utilizar espaciado de 12 plg.

A 5 pies de la línea de centros, del mismo diagrama, $v_s \approx 220 - 120 = 100\,\text{lb/plg}^2$. Usando solamente dos ramas del num. 4, $s = A_v f_y / v_s b_w = 0.4 \times 60/(0.1 \times 14) = 17.1$ plg. En consecuencia, el espaciado podría ser de 15 plg.

El refuerzo mínimo del alma (véase la sección 7.4.3) debe corresponder a $v_s = 50\,\text{lb/plg}^2$, así que $A_{v,\min} = 50 \times 12 \times 14/60{,}000 = 0.14^2$ /pie. Se requieren dos ramas del núm. 4 en $s = 0.40 \times 12/0.14 = 34$ plg, pero el espaciado máximo no debe ser mayor que $d/2 = 38/2 = 19$ plg. Se utilizará un estribo nominal con centros a 18 plg.

La resistencia a cortante proporcionada de esa manera está representada por la envolvente de líneas interrumpidas de la fig. 7.38*c*. Unos cuantos estribos resuelven satisfactoriamente la situación menos crítica en la porción de voladizo de la viga.

7.11 BIBLIOGRAFIA

7.1 B. Bresler and J. G. MacGregor, "Review of Concrete Beams Failing in Shear," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 93, STI, febrero de 1967, págs. 343-372.

7.2 "Building Code Requeriments for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág, 78.

7.3 ACI-ASCE Commitee 326, "Shear and Diagonal Tensión," *Journal ACI,* Vol. 59, enero, febrero, marzo 1962, págs. 1-30, 277-334, 352-396.

7.4 Joint ASCE-ACI Task Committee 426, "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 99, ST6, junio 1973, págs. 1091-1187.

7.5 E. Hognestad, "What Do We Know About Diagonal Tension and Web Reinforcement in Concrete? A Historical Study," *University of Illinois Bulletin,* Vol. 49, No. 50, marzo 1952, pág. 47.

7.6 R. C. Fenwick y T. Paulay, "Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 94, ST10, octubre 1968, págs. 2235-2350.

7.7 F. Leonhardt, "Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs", *Magazine of Concrete Research,* Vol. 17, No. 53, diciembre de 1965, págs. 137-198. (Este es un breve resumen de las pruebas realizadas en Stuttgart sólo de 1961 a 1963. Las referencias dan la fuente de la parte principal de la obra de Leonhardt y Walther tal como apareció en Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Comité Alemán para el Concreto Reforzado).

7.8 H. P. J. Taylor, "Investigation of the Dowel Shear Forces Carried by the Tensile Steel in Reinforced Concrete Beams," Cement and Concrete Association, Londres, TRA 431, 1969, pág. 24.

7.9 T. Baumann y H. Rüsch, "Versuche zum Studium der Verdübelungswirkung der Biegezugbewehrung eines Stahlbetonbalkens," Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Boletín No. 210, Berlín, 1970, págs. 42-83.

7.10 A. J. O'Leary, "Shear, Flexure and Axial Tensión in Reinforced Concrete Members." Tesis para Ph. D., Universidad de Canterbury, Christchurch, Nueva Zelanda, 1970, 380 pág.

7.11 T. Paulay y P.J. Loeber, "Shear Transfer by Aggregate Interlock," *Shear in Reinforced Concrete,* Publicación especial núm. 42 de ACI, Vol. 1, Detroit, 1974, págs. 1-15.

7.12 H. P. J. Taylor, "Further Tests to Determine Shear Stresses in Reinforced Concrete Beams," Cement and Concrete Association, Londres TRA 438, febrero de 1970, pág. 27.

7.13 H. P. J. Taylor, "Investigation of the Forces Carried Across Cracks in Reinforced Concrete Beams in Shear by Interlock of Aggregate," Cement and Concrete Association, Londres, TRA 42.447, 1970, pág. 22.

7.14 G. N. J. Kani, "How Safe Are our Large Reinforced Concrete Beams?" *Journal ACI,* Vol. 64, marzo de 1967, págs. 128-141.

7.15 H. P. J. Taylor, "Shear Strength of Large Beams," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 98, STll, noviembre de 1972, págs. 2473-2490.

7.16 N. S. Bhal, "Über den Einfluss der Balkenhöhe auf die Schubtragfähigkeit von einfeldrigen Stahlbetonbalken mit und ohne Schubbewehrung." Tesis para Dr.Ing. Universidad de Stuttgart, 1968, pág. 124.

7.17 G. N. J. Kani, "Basic Facts Concerning Shear Failure," *Journal ACI,* Vol. 63, junio de 1966. págs. 675-692.

7.18 K. S. Rajagopalan y P. M. Ferguson, "Exploratory Shear Test Emphasizing Percentage of Longitudinal Steel," *Journal ACI,* Vol. 65, agosto 1968, págs. 634-638; Vol. 66, febrero de 1969, págs. 150-154.

7.19 T. C. Zsutty, "Beam Shear Strength Prediction by Analysis of Existing Data," *Journal ACI,* Vol. 65, noviembre de 1968, págs. 943-951.

7.20 P. E. Regan, "Bechaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Subjected to Shear Force," *Proceedings, Institution of Civil Engineers,* Publicación 7441S, suplemento de 1971 (XVII), págs. 337-364.

7.21 A. Placas y P. E. Regan, "Shear Failure of Reinforced Concrete Beams," *Journal ACI,* Vol. 68, octubre de 1971, págs. 763-773.

7.22 T. Zsutty. "Shear Strength Prediction for Separate Categories of Simple Beam Tests." *Journal ACI,* Vol. 68, febrero de 1971, págs. 138-143.

7.23 E. Mörsch, "Der Eisenbeton. Seine Theorie und Anwendung," Wittwer, Stuttgart, 1908.

7.24 H. Kupfer y T. Baumann, "Staffelung der Biegezugbewehrung bei hohen Schubspannungen in Schlanken Stahlbetonträgern mit I-Querschnitt," *Beton-und Stahlbetonbau,* Vol. 64, diciembre 1969, págs. 278-283.

7.25 H. Bachmann, "Influence of Shear and Bond on Rotational Capacity of Reinforced Concrete Beams," Publications, International Association for Bridge and Structural Engineering. Vol. 30, Part II, Zürich, 1970, págs. 11-28.
7.26 T. Paulay, "Coupling Beams of Reinforced Concrete Shear Walls," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 97, ST3, marzo de 1971, págs. 843-862.
7.27 M. A. Sozen, "The Caracas Earthquake julio 29, 1967," *Journal ACI,* Vol. 65, mayo de 1968, págs. 394-401.
7.28 A. H. Mattock, "Diagonal Tension Cracking in Concrete Beams whit Axial Forces." *Journal of the Structural Division, ASCE,*. 95, ST9, septiembre de 1969, págs. 1887-1900.
7.29 M. J. Haddadin, S. T. Hong, y A. H. Mattock, "Stirrup Effectiveness in Reinforced Concrete Beams with Axial Force," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 97, ST9, septiembre de 1971, págs. 2277-2297.
7.30 F. H. N. Sayani, "Influence of Axial Tensión on the Shear Strength of Reinforced Concrete Beams." M. Phil. Thesis, Imperial College of Science and Technology, Universidad de Londres, 1968, pág. 118.
7.31 J. G. MacGregor y J. M. Hanson, "Proposed Changes in Shear Provisions for Reinforced and Prestressed Concrete Beams," *Journal ACI,* Vol. 66, abril de 1969, págs. 276-288.
7.32 W. Dilger, "Veränderlichkeit der Beige-und Schubsteifigkeit bei Stahlbetontragwerken und ihr Einfluss auf Schnittkraftverteilung und Traglast bei statisch unbestimmeter Lagerung," Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Bulletin No. 179, Berlin, 1966, pág. 101.
7.33 R. F. Mast, "Auxiliary Reinforcement in Concrete Connections," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 94, ST6, junio de 1968, págs. 1485-1504.
7.34 A. H. Mattock y N. M. Hawkins, "Shear Transfer in Reinforced Concrete - Recent Research." *PCI Journal,* marzo-abril de 1972, págs. 55-75.
7.35 T. Paulay, R. Park, y M. H. Phillips, "Horizontal Construction Joints in Cast in Place Reinforced Concrete," *Shear in Reinforced Concrete,* ACI Special Publication 42, Vol. 2, Detroit, 1974, págs. 599-616.
7.36 H. Mayer, "Versuche zum Studium von Grösse und Verteilung der Bügelkräfte im Stahlbeton-Rechteckbalken." Materialprüfugsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München, Informe núm. 72, 1967 (2 vols).
7.37 G. Alatorre y J. Casillas, "Shear Strength Behaviour of Concrete Beams Subjected to Alternate Loading." *RILEM International Symposium on the "Effects of Repeated Loading of Materials and Structures,"* México, 1966, Vol. 4, pág. 26.
7.38 B. E. Colley y H. A. Humphrey, "Aggregate Interlock at Joints of Concrete Pavements," Portland Cement Association Research and Development Laboratories, Boletín D 124, 1967, pág. 18.
7.39 R. N. White y M. J. Holley, "Experimental Studies of Membrane Shear Transfer," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 98, ST8, agosto de 1972, págs. 1835-1852.

8

Resistencia y deformación de miembros sometidos a torsión

8.1 INTRODUCCION

La torsión en las estructuras de concreto reforzado se debe a menudo a la continuidad entre sus miembros. Por este motivo, la torsión recibió escasa atención durante la primera mitad de este siglo, y aparentemente su omisión de las consideraciones de diseño no tuvo consecuencias serias. Sin embargo, durante los últimos 10 ó 15 años un gran aumento en la actividad de investigación ha avanzado de manera significativa en la comprensión del problema. Se han examinado, y se siguen examinando, numerosos aspectos de la torsión en el concreto en distintas partes del mundo. La primera recolección organizada significativa de conocimientos y esfuerzos de investigación en esta materia fue un simposium organizado por el Instituto Norteamericano del Concreto. El volumen del simposium[8.1] también presenta gran parte de la valiosa obra pionera.

La mayoría de las referencias de códigos a la torsión se han basado hasta hoy en conceptos prestados del comportamiento de materiales elásticos isotrópicos homogéneos. El código actual de ACI[8.2] incorpora por primera vez recomendaciones detalladas de diseño para la torsión, que se basan en un volumen considerable de evidencia experimental, aunque es probable que se modifiquen todavía más, según se consolide la información adicional derivada de los esfuerzos actuales en la investigación.

La torsión puede originarse como resultado de acciones primarias o secundarias. El caso de la torsión primaria se debe a que la carga externa no puede ser resistida sino mediante torsión. En tales casos, es posible determinar unívocamente la torsión requerida para mantener el equilibrio estático. Este caso puede llamarse torsión de equilibrio. Se trata principalmente de un problema de resistencia debido a que la estructura, o sus componentes se desploman, si no se puede proporcionar resistencia torsional. Una viga simple, con carga lineal excéntrica a lo largo de su claro,

voladizos y trabes de sección tubular cargadas excentricamente, como se ilustra en las figs. 8.1 y 8.8, constituyen ejemplos de torsión primaria o de equilibrio.

La torsión también se puede originar como acción secundaria de los requerimientos de continuidad en las estructuras estáticamente indeterminadas. El descuidar dicha continuidad en el diseño puede conducir a grietas de anchos excesivos; aunque no acarree necesariamente consecuencias más serias. A menudo, los diseñadores desprecian intuitivamente dichos efectos torsionales secundarios. Las vigas de borde de los marcos, las losas de soporte o las vigas secundarias son típicas de este caso (vease la fig. 8.2). En una estructura espacial de juntas rígidas es difícilmente posible evitar la torsión originada por la compatibilidad de las deformaciones. Determinadas estructuras, tales como los cascarones restringidos elásticamente por vigas de bordes,[8.3] son más sensibles a este tipo de torsión que otras. El estado actual de los conocimientos permite la evaluación realista de la torsión, que puede originarse en estructuras de concreto reforzado estáticamente indeterminadas en distintas etapas de carga.

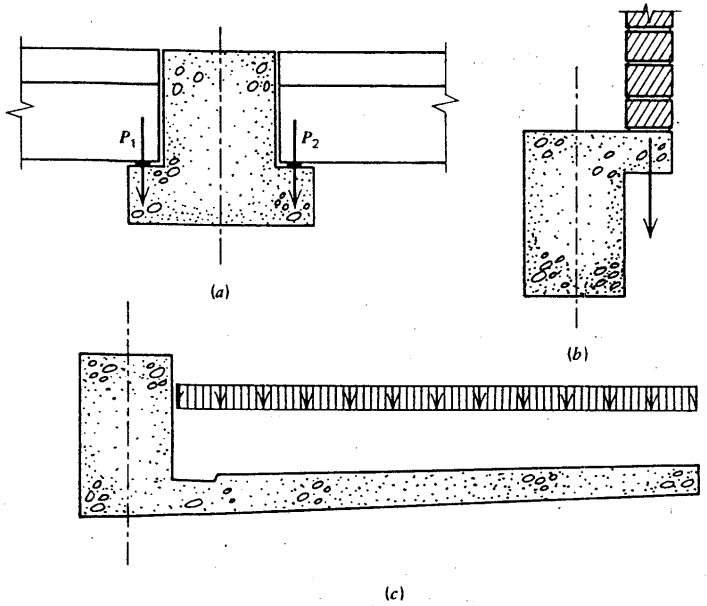


Figura 8.1. Ejemplos de torsión primaria o de equilibrio.

Es raro que la torsión en las estructuras de concreto ocurra sin otras acciones. Por lo general, también están presentes las fuerzas de flexión,

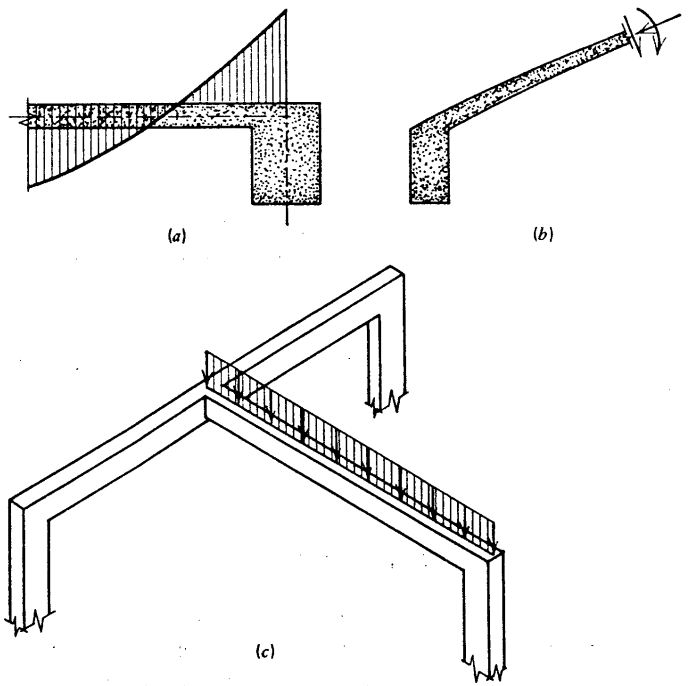


Figura 8.2. Torsión en estructuras estáticamente indeterminadas.

cortantes y axiales. Muchos de los estudios más recientes han intentado determinar las leyes de interacción que pueden existir entre la torsión y otras acciones estructurales. Debido al gran número de parámetros involucrados, todavía se requiere cierto esfuerzo para evaluar con seguridad todos los aspectos de este complejo comportamiento.

8.2 CONCRETO SIMPLE SUJETO A TORSION

El comportamiento del concreto reforzado en torsión, antes del comienzo del agrietamiento, se puede basar en el estudio del concreto simple, debido a que la contribución del refuerzo en esta etapa es de poca importancia.

8.2.1 Comportamiento elástico

Para evaluar los efectos a torsión en el concreto simple, se puede utilizar el conocido enfoque presentado en la mayoría de los textos sobre mecánica estructural. Se puede aplicar la solución clásica de St. Venant a la sección común rectangular de concreto. De acuerdo con ella, el esfuerzo cortante

torsional máximo v_t se genera en la mitad del lado largo y se puede obtener de

$$v_t = \psi_t \frac{T}{x^2 y} \tag{8.1}$$

en que T = momento torsional en la sección.
y, x = dimensiones globales de la sección rectangular, $x < y$
ψ_t = un factor de esfuerzos que es función de y/x, dada en la fig. 8.3.

Puede ser igualmente importante conocer la relación carga-desplazamiento para un miembro específico a torsión, la que se puede deducir de la conocida relación[8.4]

$$\frac{d\theta_t}{dz} = \frac{T}{GC} \tag{8.2}$$

en que θ_t = ángulo de torsión
T = momento aplicado, que puede ser función de la distancia a lo largo del claro
G = el módulo de elasticidad en cortante definido por la ec. 7.37
C = el momento torsional de inercia, que a veces se denomina constante de torsión o momento polar equivalente de inercia
z = distancia a lo largo del miembro

Para secciones rectangulares se tiene

$$C = \beta_t x^3 y \tag{8.3}$$

en que β_t, es un coeficiente que depende de la relación de forma y/x de la sección (fig. 8.3), y toma en cuenta la distribución no lineal de las deformaciones cortantes en la sección.

Estos términos permiten que se defina la rigidez torsional de un miembro de longitud l como la magnitud del momento torsional requerido para ocasionar un giro unitario de torsión en su longitud como

$$K_t = \frac{GC}{l} \tag{8.4}$$

En el análisis elástico general de una estructura estáticamente indeterminada se pueden requerir tanto la rigidez torsional como la rigidez a flexión de los miembros. Se puede comparar la ec. 8.4 para la rigidez a torsión de un miembro con la ecuación para la rigidez a flexión de un miembro con extremo lejano restringido, definida como el momento necesario para provocar un giro unitario, $4EI/l$, en que EI = rigidez a flexión de una sección.

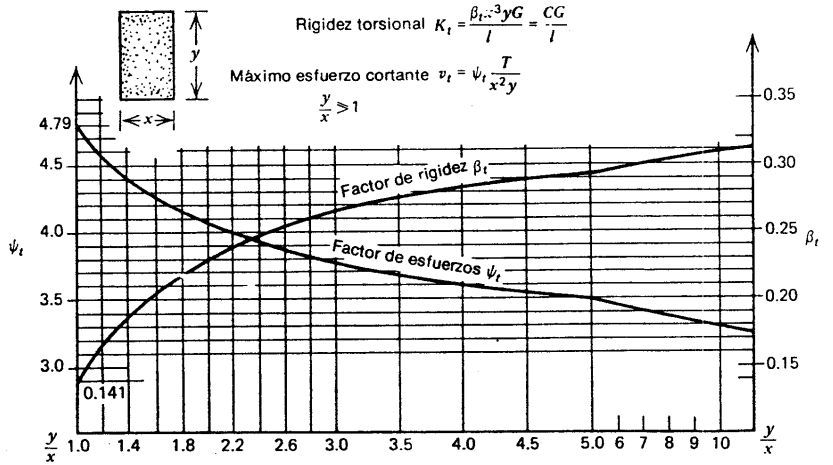


Figura 8.3. Factores de rigidez y esfuerzo para secciones rectangulares sujetas a torsión.

El comportamiento de las secciones compuestas, y de los perfiles T y L, es más complejo. Sin embargo, de acuerdo con la sugerencia[8.5] de Bach, se acostumbra suponer que una división adecuada de la sección en sus rectángulos constituyentes es una aproximación aceptable para fines de diseño. De acuerdo con ello, se supone que cada rectángulo resiste una porción de la torsión externa en proporción a su rigidez torsional. Como lo muestra la fig. 8.4*a*, las partes sobresalientes de los patines se deben

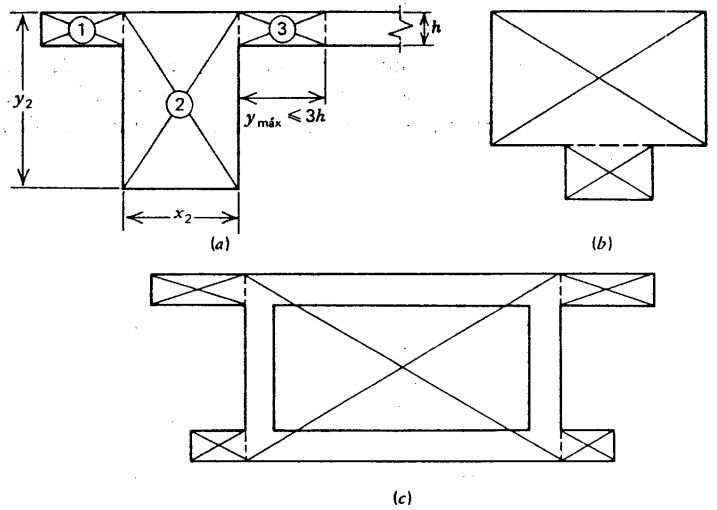


Figura 8.4. La subdivisión de secciones compuestas para el análisis torsional.

tomar sin traslape. En las losas que forman los patines de las vigas, no se debe tomar la longitud efectiva del rectángulo constituyente como tres veces mayor al espesor de la losa.[8.6] Para el caso de torsión pura, esta es una aproximación conservadora.

Utilizando la aproximación[8.5] de Bach, la porción de la torsión total T que resiste el elemento 2 de la fig. 8.4*a* es

$$T_2 = \frac{K_{t2}}{\sum_{i=1}^{3} K_{ti}} T \tag{8.5}$$

y de la ec. 8.1, el esfuerzo cortante torsional máximo es

$$v_{t2} = \psi_{t2} \frac{T_2}{x_2^2 y_2}$$

La aproximación es conservadora, debido a que se ha despreciado el "efecto de junta".

Las secciones compuestas, en que puede ocurrir flujo cortante, como en las secciones de sección tubular, se deben subdividir de una manera distinta. La fig. 8.4*c* ilustra el procedimiento.

La mejor forma de ver la distribución del esfuerzo cortante torsional elástico en las secciones transversales compuestas es mediante la analogía de la membrana de Prandtl, cuyos principios se pueden encontrar en los tratados elementales de elasticidad.[8.4] En las estructuras de concreto reforzado, rara vez se encuentran las condiciones bajo las que se satisfacen las suposiciones anteriores asociadas con el comportamiento elástico lineal.

8.2.2 Comportamiento plástico

En los materiales dúctiles es posible alcanzar un estado de cedencia por cortante en toda el área de una sección transversal específica. Si la cedencia ocurre en toda la sección, se puede calcular con relativa facilidad la torsión plástica.

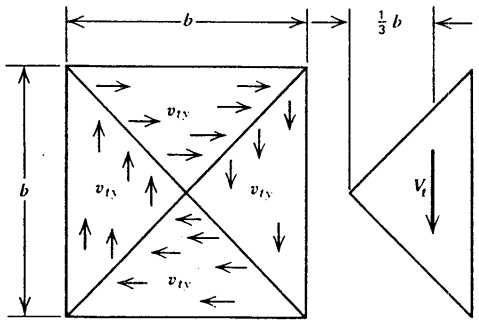


Figura 8.5. Cedencia torsional de una sección cuadrada.

Considérese la sección cuadrada que aparece en la fig. 8.5. donde la cedencia por cortante v_{ty}, se ha alcanzado en los cuadrantes. La fuerza V_t cortante total que actúa en un cuadrante es

$$V_t = b \frac{b}{2} \frac{1}{2} v_{ty} = \frac{b^2}{4} v_{ty}$$

En consecuencia, la torsión total resistida es

$$T = 4V_t \frac{b}{3} = \frac{b^3}{3} v_{ty} \tag{8.6}$$

Se pueden obtener los mismos resultados utilizando la "analogía del montón de arena"[8.7] de Nádai. De acuerdo con esta analogía, el volumen de arena colocada sobre la sección transversal dada es proporcional a la torsión plástica soportada por esta sección. La pila (o techo) sobre la sección rectangular (véase la fig. 8.6) tiene una altura xv_{ty},

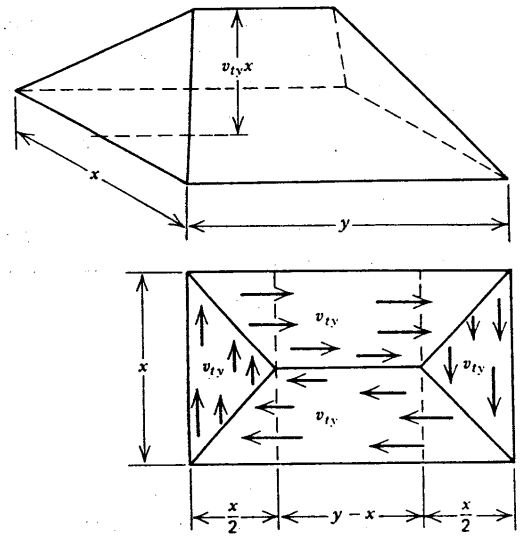


Figura 8.6. Analogía de la pila de arena de Nádai.

en que x = lado corto de la sección transversal. Por tanto, el volúmen de la pirámide sobre la sección cuadrada (fig. 8.5) es

$$T = b^2 \frac{bv_{ty}}{3} = \frac{b^3}{3} v_{ty} \tag{8.6}$$

El volumen del montón sobre la sección oblonga (fig. 8.6) es

$$T = x^2 \frac{xv_{ty}}{3} + (y - x)x \frac{xv_{ty}}{2}$$

$$= \frac{x^2}{2}\left(y - \frac{x}{3}\right)v_{ty}$$

En consecuencia

$$v_{ty} = \psi_{ty} \frac{T}{x^2 y} \tag{8.7}$$

en que

$$\psi_{ty} = \frac{2}{1 - x/3y} \tag{8.7a}$$

Es evidente que $\psi_{ty} = 3$ cuando $x/y = 1$ y que $\psi_{ty} = 2$ cuando $x/y = 0$.

Se puede ver que la ec. 8.7 es semejante a la expresión que se obtiene para el comportamiento elástico, ec. 8.1.

El concreto no es suficientemente dúctil, especialmente en la tensión, para permitir una distribución plástica perfecta de los esfuerzos cortantes, por lo que la resistencia torsional última de una sección de concreto simple estará entre los valores predichos por las analogías de la membrana (completamente elástica) y la de la pila de arena (completamente plástica). Los esfuerzos cortantes provocan esfuerzos de tensión diagonal (principales), que inician la falla. A la luz de las aproximaciones anteriores y la variabilidad de la resistencia a tensión del concreto, es aceptable la ecuación simplificada de diseño para la determinación del esfuerzo cortante último nominal inducido por la torsión en las secciones de concreto simple propuesta por ACI 318-71[8.2]:

$$v_{ty} = v_{tu} = \frac{3T_u}{x^2 y} \tag{8.8}$$

en que $x \leqslant y$.

El valor de 3 para ψ_t o ψ_{ty} es un mínimo para la teoría elástica y un máximo para la teoría plástica (véanse la fig. 8.3 y la ec. 8.7*a*).

Se puede valuar aproximadamente la resistencia a torsión última de las secciones compuestas mediante la suma de las contribuciones de los rectángulos constituyentes. Para secciones como la mostrada en la fig. 8.4, la aproximación es

$$v_{tu} = \frac{3T_u}{\Sigma x^2 y} \tag{8.8a}$$

en que $x \leqslant y$ para cada rectángulo.

En la ec. 8.8*a*, se les otorga muy poco calor a las contribuciones de las juntas (la arena que podría apilarse en los valles entre los techos adyacentes).

No es posible relacionar directamente el valor de v_{tu} a una propiedad de resistencia del concreto; sin embargo, numerosas pruebas[8.8-8.11] indican que cuando se calcula su valor de la ec. 8.8 ú 8.8*a*, está entre $4.0\sqrt{f'_c}$ lb/plg² y $7.0\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.33\sqrt{f'_c}$ y $0.58\sqrt{f'_c}$ N/mm²). Este valor también depende del tamaño absoluto de la probeta de prueba de la que se obtuvo v_{tu}. Se cree que en las vigas de concreto reforzado también se alcanzan estos esfuerzos cuando están a punto de desarrollarse grietas de tensión diagonal debidas a la torsión. Por lo tanto, el comité 438 del ACI adoptó el valor de $6.0\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.5\sqrt{f'_c}$ N/mm²) para estimar la carga de agrietamiento diagonal.

El concepto de esfuerzo principal (resistencia a la tensión) sugeriría que se desarrollaran grietas de falla en cada cara de la viga a lo largo de una espiral que corriera a 45° con respecto al eje de la viga. Sin embargo, esto no es posible, debido a que el borde de la superficie de falla debe formar un lazo cerrado. Hsu ha sugerido que la flexión ocurre alrededor de un eje que está aproximadamente a 45° con respecto al eje de la viga y paralelo a los planos de las caras largas de una viga rectangular.[8.12] Esta flexión provoca esfuerzos de compresión y de tensión en el plano a 45° a través de la viga. Estos últimos inician eventualmente una grieta superficial. Tan pronto como ocurre el agrietamiento por tensión de flexión se reduce la resistencia a flexión de la sección, la grieta se propaga rápidamente y ocurre la falla repentina. Hsu observó ésta secuencia de la falla con la asistencia de películas cinematográficas de alta velocidad.[8.12] Para la mayoría de las estructuras se puede utilizar poco la resistencia a torsión (tensión) de los miembros de concreto no reforzado.

8.2.3 Secciones tubulares

Debido a la distribución ventajosa de los esfuerzos cortantes, las secciones tubulares son muy eficientes para resistir la torsión. Se utilizan extensamente en la construcción de puentes. La fig. 8.7 ilustra las formas básicas utilizadas para las trabes de puentes. Las propiedades a torsión de las trabes mejoran pasando de las figs. 8.7*a* a la 8.7*g*

Cuando el espesor h de la pared es pequeño comparado con las dimensiones globales de la sección, se pueden suponer esfuerzos cortantes uniformes v_t a través del espesor. Considerando los momentos ejercidos alrededor de un punto adecuado por los esfuerzos cortantes, que actúan

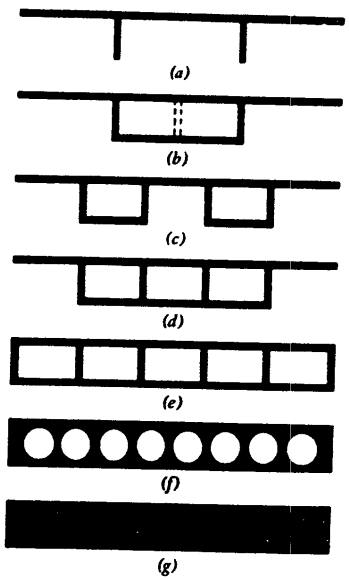


Figura 8.7. Formas básicas utilizadas para secciones transversales de puentes.[8.3]

sobre elementos infinitesimales de la sección tubular, como en la fig. 8.8*a*, se puede expresar el momento torsional resistente como

$$T = \int hv_t r\, ds \tag{8.9a}$$

El producto $hv_t = v_0$ es llamado flujo de cortante, que es una constante; por tanto

$$v_0 = \frac{T}{\oint r\, ds} \quad \text{or} \quad v_t = \frac{T}{2A_0 h} \tag{8.9b}$$

en que A_0 = el área encerrada por la línea de centros de la pared del tubo (área sombreada de la fig. 8.8).

El concepto del flujo de cortante alrededor del tubo de pared delgada es útil cuando se considera el papel del refuerzo en la torsión.

El código[8.2] del ACI sugiere que la ec. 8.8, relevante a las secciones sólidas también se utilice para secciones huecas, con la siguiente modificación cuando el espesor de la pared no sea inferior a $x/10$ (véase la fig. 8.8*c*):

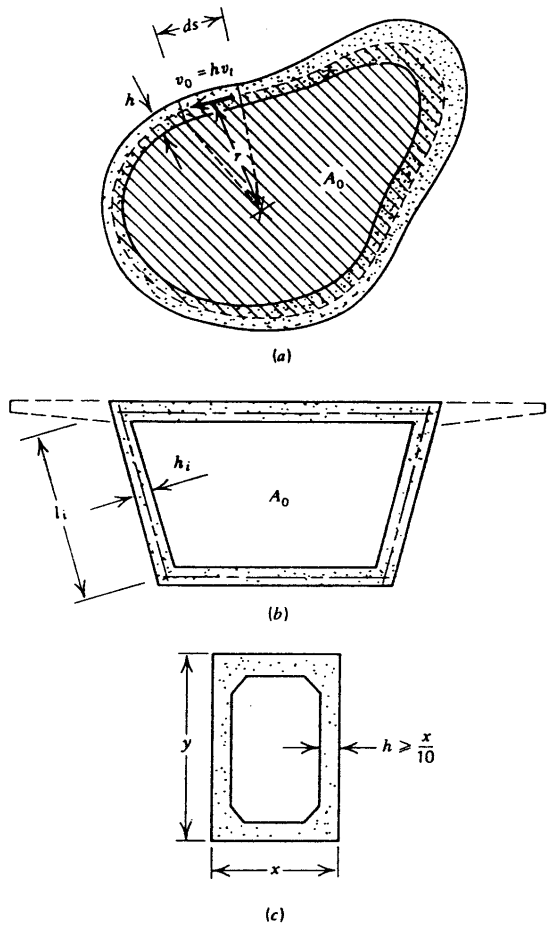


Fig. 8.8 Secciones huecas.

$$v_{tu} = \left(\frac{x}{4h}\right)\frac{3T_u}{x^2 y} \tag{8.10}$$

en que $x \leq y$.

La ec. 8.9 se obtiene de principios básicos, y tiene la ventaja de que es aplicable tanto al estado de esfuerzo elástico como al totalmente plástico.

Es fácilmente deducible la relación momento-giro para las secciones huecas, a partir de consideraciones de energía de deformación. Igualando el trabajo realizado por el momento aplicado (trabajo externo) con el de

los esfuerzos cortantes (trabajo interno), se puede encontrar la constante C_0 de torsión para las secciones tubulares como sigue:

$$\text{trabajo interno} = \tfrac{1}{2} \times (\text{suma de esfuerzo cortante} \times \text{deformación cortante que actúa en los elementos del tubo}) \times (\text{longitud unitaria}) = \frac{1}{2} \times \oint v_t \frac{v_t}{G} h\, ds \times 1$$

$$\text{trabajo externo} = \tfrac{1}{2} \times (\text{momento aplicado}) \times (\text{giro por longitud unitaria del miembro}) = \frac{1}{2} \times T \times \frac{\theta}{l}$$

En consecuencia, igualando las dos expresiones y utilizando la ec. 8.9*b*, se encuentra que la relación entre el momento y el giro es

$$T = \frac{GC_0}{l}\theta$$

y por lo tanto la rigidez torsional del miembro es

$$K_t = \frac{GC_0}{l} \tag{8.4a}$$

en que C_0 es el momento polar de inercia equivalente de la sección tubular y está dado por

$$C_0 = \frac{4A_0^2}{\oint ds/h} \tag{8.11}$$

en que s se mide alrededor de la línea de centros de la pared. La misma expresión para la forma más común de sección tubular (fig. 8.8*b*) queda como

$$C_0 = \frac{4A_0^2}{\Sigma l_i/h_i} \tag{8.11a}$$

Para espesor uniforme de pared, la ec. 8.11 se reduce todavía más a

$$C_0 = \frac{4A_0^2 h}{p} \tag{8.11b}$$

en que p es el perímetro medido a lo largo de la línea de centros del tubo.

Se advierte que el estudio anterior sobre el comportamiento elástico y plástico se refiere al concreto simple, y que las proposiciones solamente son aplicables a bajas intensidades de carga anteriores al agrietamiento. Se deben utilizar para predecir el principio del agrietamiento diagonal.

8.3 VIGAS SIN REFUERZO EN EL ALMA SUJETAS A FLEXION Y TORSION

El mecanismo de falla de las vigas sujetas a torsión y flexión depende del predominio de una u otra acción. La relación de momento torsional último a momento último, T_u/M_u, es un parámetro adecuado para medir la magnitud relativa de estas acciones. La resistencia a flexión depende primordialmente de la cantidad de refuerzo de flexión. Es más difícil evaluar el comportamiento a torsión de una viga de concreto sin refuerzo en el alma en presencia de flexión.

Los esfuerzos a flexión inician grietas diagonales en el caso de torsión, en forma semejante a como lo hacen en el caso de cortante. En presencia de flexión, se frenan esas grietas en la zona a compresión. Por este motivo, una viga agrietada diagonalmente puede transmitir cierta cantidad de torsión. En la actualidad, todavía es cuestión de especulación la manera como se resiste esta torsión. Es claro que la zona a compresión de la viga puede resistir una cantidad limitada de torsión, y el refuerzo horizontal también puede contribuir a la resistencia torsional por medio de acción de dovela.

Se ha encontrado (v. gr., Mattock[8.13]) que la resistencia a torsión de una sección agrietada es aproximadamente un medio de la resistencia última a torsión de la sección no agrietada, con la condición que haya cierta cantidad de flexión. En consecuencia, se puede soportar un medio del par que provoca el agrietamiento después de la formación de grietas. El par así transmitido es tan pequeño que se puede ignorar su influencia en la flexión.

El ACI 318-71[8.2] supone conservadoramente que el esfuerzo cortante torsional nominal que corresponde a esta torsión limitada es 40% de un esfuerzo de agrietamiento de $6\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 ($0.5\sqrt{f'_c}$ N/mm^2).

$$\therefore \quad v_{tc} = 0.4(6\sqrt{f'_c}) = 2.4\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2\ (0.2\sqrt{f'_c}\ \text{N/mm}^2) \tag{8.12}$$

y la ec. 8.8 revela que el par suministrado por la sección de concreto solamente, después del inicio del agrietamiento es

$$T_c = \frac{x^2 y}{3} v_{tc} \tag{8.13}$$

En forma semejante, para las secciones compuestas, la ec. 8.8*a* da

$$T_c = \sum \frac{x^2 y}{3} v_{tc} \tag{8.13a}$$

con las limitaciones en las partes sobresalientes como se indica en la fig. 8.4.

Cuando $T_u/M_u > 0.5$ (es decir, cuando la torsión es significativa), se ha observado una falla frágil.[8.8] Cuando el momento flexionante es más pronunciado, (es decir, cuando $T_u/M_u < 0.5$), se puede esperar una falla más dúctil. La única manera de aumentar la resistencia a torsión de una viga es agregando refuerzo en el alma. Parece que la cantidad de refuerzo de flexión no tiene influencia en la capacidad a torsión de la sección de concreto, T_c.

En las vigas T o L, la parte sobresaliente de los patines contribuye a la resistencia a tensión, lo que se ha verificado en vigas aisladas.[8.14, 8.15] Es difícil evaluar el ancho efectivo de los patines, cuando forman parte de una losa de piso. Cuando se puede desarrollar una línea de cedencia a lo largo de una viga de borde, debido a un momento flexionante negativo en la losa, como está ilustrado en la fig. 8.9, es poco probable que mucha parte del patín pueda contribuir a la resistencia a torsión. En tales casos, es recomendable confiar solamente en la sección rectangular.

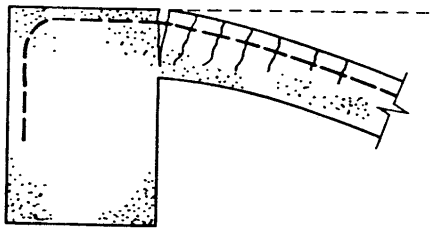


Figura 8.9. Línea de cedencia a lo largo de una viga de borde.

8.4 TORSION Y CORTANTE EN VIGAS SIN REFUERZO EN EL ALMA

Es evidente que en la superposición, los esfuerzos cortantes generados por las fuerzas cortantes y la torsión son aditivos en un lado y sustractivas en el lado opuesto de una sección de viga rectangular. Los esfuerzos críticos a tensión diagonal que resultan están afectados adicionalmente por los esfuerzos de tensión por flexión en el concreto, debido a que es imposible aplicar fuerzas cortantes sin inducir simultáneamente flexión. Que se sepa, todavía no está desarrollada una teoría completamente racional para explicar la interacción de cortante y torsión en presencia de flexión. Por lo tanto, se debe confiar en la información empírica deducida de las pruebas. Al proporcionar refuerzo de flexión más que adecuado, es posible estudiar experimentalmente los criterios de falla a cortante y torsión combinadas.

En tales pruebas se acostumbra mantener la relación de torsión a cortante constante mientras se aumenta la carga hasta la falla. Sin embargo, una de las acciones puede ocurrir primero en la práctica, imponiendo su propio patrón de grietas antes de que la otra acción sea significativa. Por ahora, es aconsejable ser conservador en la interpretación de los resultados de pruebas.

La fig. 8.10 grafica la dispersión obtenida en pruebas típicas de torsión y cortante combinadas. También indica que una relación de interacción circular (normalizada para este grupo específico de pruebas) puede resultar útil para propósitos de diseño, con tal de que se elijan valores suficientemente bajos de esfuerzos para el agrietamiento diagonal por cortante y torsión. Para esa vigas,[8.10] que no contenían refuerzo en el alma, se encontró que los esfuerzos cortantes y de torsión, que formaban un límite inferior aproximado para los puntos experimentales graficados calculados de las ecs. 7.5 y 8.8 eran, respectivamente,

$$v_c = 2.68\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2\ (0.22\sqrt{f'_c}\ \text{N/mm}^2)$$

y

$$v_{tc} = 4.80\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2\ (0.4\sqrt{f'_c}\ \text{N/mm}^2)$$

La relación de interacción circular es la base de las especificaciones del código actual del ACI.[8.2] Por conveniencia, se puede expresar la magnitud de las fuerzas cortantes y torsionales de interacción transmitida por una sección agrietada en la carga última en términos del esfuerzo nominal como

$$\left(\frac{v_{tu}}{2.4\sqrt{f'_c}}\right)^2 + \left(\frac{v_u}{2\sqrt{f'_c}}\right)^2 = 1 \qquad (8.14)$$

en donde v_{tu} = esfuerzo torsional nominal inducido, tomado por el concreto bajo momento último, dado por la ec. 8.8.

v_u = esfuerzo cortante nominal inducido, tomado por el concreto bajo momento último, dado por la ec. 7.5.

Los términos de $2.4\sqrt{f'_c}$ y $2.0\sqrt{f'_c}$ de la ec. 8.14 son los valores propuestos para la resistencia cortante torsional última nominal del concreto, después del agrietamiento sin la presencia de cortante, y la resistencia cortante última nominal del concreto sin la presencia de torsión respectivamente, ambas en unidades de libra/pulgada . En unidades SI, se remplazaría $2.4\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 por $0.2\sqrt{f'_c}$ N/mm^2, y $2.0\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 por $0.166\sqrt{f'_c}$ N/mm^2. La ec. 8.14 controla el diseño de vigas con refuerzo nominal solamente en el alma, en que se supone que los esfuerzos mencionados arriba se trans-

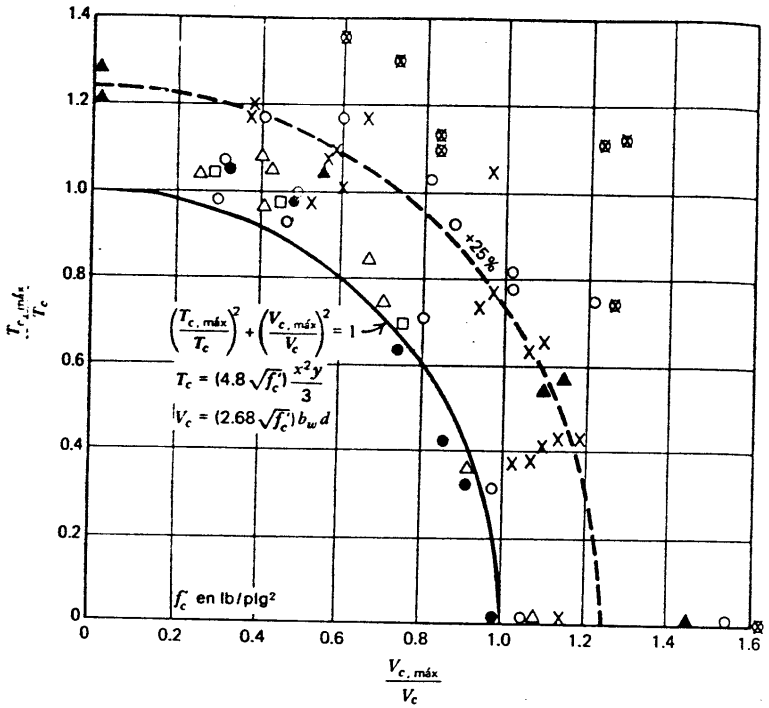


Figura 8.10. Interacción de torsión y cortante.[8.10]

miten a través de una sección agrietada por medio de mecanismos que no incluyen refuerzo en el alma.

De la ec. 8.14, ahora se tiene

$$v_{tu}^2\left[1 + \left(\frac{2.4\sqrt{f'_c}}{2.0\sqrt{f'_c}}\frac{v_u}{v_{tu}}\right)^2\right] = (2.4\sqrt{f'_c})^2$$

En consecuencia, el esfuerzo cortante nominal permisible a torsión última, que puede tomar el concreto solo en presencia de una fuerza cortante es

$$v_{tc} = \frac{2.4\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (1.2v_u/v_{tu})^2]}} \text{ lb/plg}^2 \qquad (8.15a)$$

En forma análoga, se puede demostrar que el esfuerzo cortante nominal permisible último, que puede tomar el concreto solo en presencia de torsión es

$$v_c = \frac{2.0\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (v_{tu}/1.2v_u)^2]}} \text{ lb/plg}^2 \qquad (8.15b)$$

En el diseño, basta con calcular solamente una de estas ecuaciones debido a que es evidente que los esfuerzos permisibles v_{tc} y v_c están relacionados con los esfuerzos inducidos v_{tu} y v_u mediante la relación

$$\frac{v_{tu}}{v_u} = \frac{v_{tc}}{v_c} \qquad (8.15c)$$

Se pueden deducir, a partir de un refuerzo apropiado del alma, torsión adicional y resistencia cortante.

8.5 MIEMBROS A TORSION QUE REQUIEREN REFUERZO EN EL ALMA

El papel del refuerzo en el alma en los miembros a torsión es semejante al de los estribos en los miembros a flexión sujetos a cortante. Después de la formación de grietas diagonales, ya no se pueden resistir los esfuerzos cortantes torsionales, a menos que se forme un mecanismo distinto, tal como una armadura espacial, para permitir que los esfuerzos se transfieran en forma realmente distinta al concepto de St. Venant.

El modelo tradicional en que se ha basado el diseño del refuerzo en el alma[8.16] es una armadura espacial consistente en estribos de tensión y puntales de concreto a compresión diagonal. Esta armadura aparece en la fig. 8.11*a*. Las líneas completas indican cuerdas a tensión y las franjas entre las líneas de grietas diagonales, inclinadas a un ángulo α_c, sugieren puntales a compresión. Todos los estudios primeros suponían $\alpha_c = 45°$.

Una grieta de falla diagonal potencial, como en la fig. 8.11*b*, está cruzada por $n_1 = y_0/(s \tan \alpha_c)$ número de ramas de estribos, en que y_0 es la porción recta de la rama del estribo vertical que puede cruzar efectivamente las grietas diagonales, como en la fig. 8.11*e*. En consecuencia, la tensión desarrollada a través de esta grieta a momento último.

$$N_1 = n_1 A_t f_y \qquad (8.16a)$$

en que A_t es el área de una rama de un estribo cerrado y f_y es el esfuerzo de cedencia en los estribos. En forma análoga, la tensión desarrollada a través de una grieta diagonal correspondiente en el plano superior de la armadura espacial es

$$N_2 = n_2 A_t f_y \qquad (8.16b)$$

en que el número de ramas de estribos afectadas es $n_2 = x_0/(s \tan \alpha_c)$.

Las fuerzas verticales en los estribos se descomponen en las "juntas" de la armadura, en componentes horizontales y diagonales. Estas fuerzas,

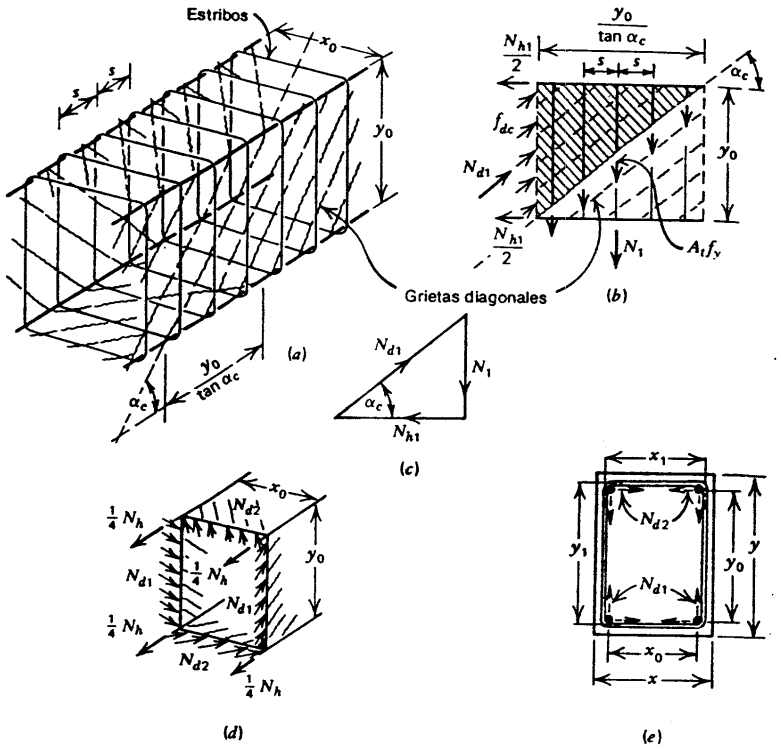


Figura 8.11. Resistencia torsional por el modelo de la armadura espacial.

que actúan en una sección transversal de una armadura espacial, están representadas en las figs. 8.11*b* a 8.11*d*. Se verá que

$$N_{d1} = \frac{N_1}{\operatorname{sen}\alpha_c} \qquad \text{y} \qquad N_{d2} = \frac{N_2}{\operatorname{sen}\alpha_c}$$

De la fig. 8.11*d* y las ecs. 8.16*a* y 8.16*b* se encuentra la fuerza horizontal total, que es la suma de las componentes horizontales de las fuerzas de compresión diagonal, como

$$N_h = 2\frac{N_{d1} + N_{d2}}{\sec\alpha_c} = 2\frac{N_1 + N_2}{\tan\alpha_c} = 2A_t f_y \frac{x_0 + y_0}{s\tan^2\alpha_c} \tag{8.17}$$

Esta fuerza de compresión debe estar balanceada por una fuerza igual y opuesta de tensión que requiere un área de acero horizontal total representada en el modelo de la fig. 8.11 por cuatro varillas longitudinales, en las esquinas de

$$A_l = 2A_t \frac{f_y}{f_{ly}} \frac{(x_0 + y_0)}{s\tan^2\alpha_c} \tag{8.18}$$

en que f_{ly} es la resistencia de cedencia de las varillas longitudinales.

La inclinación de los puntales α_c a compresión se puede determinar de la razón volumétrica efectiva de los miembros longitudinales y transversales a tensión de la armadura espacial, como sigue

$$m_t = \frac{\text{Vol}_l}{\text{Vol}_t} = \frac{A_l}{2(x_0 + y_0)} \times \frac{s}{A_t} = \frac{f_y}{f_{ly}\tan^2\alpha_c} \tag{8.19}$$

de manera que

$$A_l = \frac{2(x_0 + y_0)}{s} A_t m_t \tag{8.18a}$$

La contribución de los miembros transversales (estribos) de la armadura espacial se puede deducir de la consideración de las fuerzas a compresión diagonal del concreto (fig. 8.11*d*). Estas fuerzas se transmiten desde los estribos, a través de las cuatro varillas horizontales en las esquinas, por medio de apoyo directo.[8.17] En la fig. 8.11*e* se muestran las posiciones de las fuerzas de compresión diagonal N_{d1} y N_{d2} relativas a la sección transversal. Las componentes transversales de estas fuerzas de compresión generan la torsión y por referencia a las figs. 8.11*d* y 8.11*c* es evidente que

$$T_s = (x_0 N_{d1} + y_0 N_{d2})\operatorname{sen}\alpha_c = x_0 N_1 + y_0 N_2$$

y de las ecs. 8.16*a* y 8.16*b* se tiene

$$T_s = 2\frac{A_t f_y}{s\tan\alpha_c} x_0 y_0 \tag{8.20}$$

Esta ecuación, desarrollada por Lampert,[8.17] da la resistencia a torsión de una sección tubular, en que las líneas de los centros de las paredes del tubo pasan a través de las cuatro varillas longitudinales en las esquinas. La ec. 8.20 es la base de las recomendaciónes[8.18] actuales del CEB. Las ecuaciones correspondientes del código ACI[8.2] se basan en la armadura espacial tradicional, que tiene sus tableros en los planos de las ramas de los estribos,[8.16] de manera que el área tubular está definida por el producto $x_1 y_1$ (véase la fig. 8.11*e*) en vez de $x_0 y_0$.

Combinando las ecs. 8.19 y 8.20, se obtiene la resistencia torsional de la armadura espacial[8.17] en términos del área de una rama A_t de estribo y el área total del refuerzo longitudinal A_l como

$$T_s = 2x_0 y_0 \sqrt{\frac{A_t f_y}{s} \frac{A_l f_{ly}}{2(x_0 + y_0)}} \tag{8.21}$$

Lampert demostró[8.17] que ésta ecuación es válida para cualquier sección compacta asimétrica de la forma

$$T_s = 2A_0 \sqrt{\frac{A_t f_y}{s} \frac{A_l f_{ly}}{P_0}} \tag{8.21a}$$

en donde A_0 = área encerrada por las líneas de conexión entre los centros de las varillas longitudinales

P_0 = perímetro formado por el mismo conjunto de líneas

Una comparación con las pruebas realizadas en distintos establecimientos de investigación indica una muy buena concordancia entre la resistencia última observada y las predicciones de la ec. 8.21.[8.19] Se debe notar que se pretende que la ec. 8.21 prediga el par total T_u y que no implica ninguna contribución a la resistencia torsional de otras fuentes.

En una viga sujeta a torsión pura, las grietas se forman inicialmente a 45° con respecto al eje de la viga, sin importar el perfil de la sección transversal o la cantidad y arreglo del refuerzo. Sin embargo, conforme la carga se aproxima a la carga última, este ángulo cambia si los volúmenes de refuerzo horizontal y transversal son distintos (es decir, cuando $m_t \neq 1$).[8.20]

El contenido teórico mínimo de acero para un par dado para el acero con igual resistencia de cedencia en ambas direcciones (v.gr., $f_y = f_{ly}$), se obtiene cuando se hacen iguales los volúmenes del refuerzo horizontal y transversal,[8.17] lo que corresponde a $m_t = 1$ y $\alpha_c = 45°$ (véase la ec. 8.19).

Una simplificación correspondiente obtenida de las ecs. 8.21 y 8.18*a* con $m_t = 1$ produce una expresión de diseño que proporciona el área requerida de un estribo cerrado A_t para resistir un par dado T_s como

$$A_t = \frac{T_s s}{2 f_y x_0 y_0} \tag{8.22}$$

El espaciado de los estribos cerrados no debe exceder $(x_1 + y_1)/4$ ó 12 plg (305 mm), rigiendo el menor.[8.21]

No parece importar la manera como esté distribuido el acero longitudinal en una sección transversal, siempre que esté arreglado simétricamente y bien anclado más allá de la sección en que se introduce la torsión a la viga. Este acero permite que se desarrolle la tensión longitudinal N_h (vea la fig. 8.11*d*) necesaria para la acción de armadura, en la longitud sujeta a torsión. El esfuerzo en el acero longitudinal implica que un miembro a torsión debe elongarse después del agrietamiento diagonal, es decir,

cuando la armadura espacial comienza a contribuir a la resistencia. Toda restricción contra el alargamiento de un miembro a torsión o precompresión tiene el mismo efecto que proporcionar acero longitudinal adicional.[8.21]

Para permitir que las fuerzas de compresión diagonal se descompongan en los puntos de los nodos de la armadura espacial, es aconsejable proporcionar una varilla longitudinal apreciable en cada una de las cuatro esquinas de la sección, pues en caso contrario, los componentes que apuntan hacia afuera de los esfuerzos de compresión diagonal del concreto pueden empujar y desplazar el concreto localizado entre los estribos, especialmente cuando estos están espaciados ampliamente. Se sugiere que el diámetro mínimo de las varillas longitudinales no sea inferior a un dieciseisavo del espaciado de los estribos.[8.21]

El análisis de la armadura espacial (fig. 8.11) demuestra la similitud del comportamiento de un miembro a torsión con el comportamiento del tubo de pared delgada, estudiado en la sección 8.2.3. En efecto, de las pruebas de Lampert,[8.22] quien utilizó secciones huecas rectangulares, se tiene una verificación experimental de este análisis. En ninguna parte de la evaluación del par tomado por el refuerzo de torsión se consideraron las propiedades del concreto, ni la configuración de la sección. Es claro que debe imponerse algún límite a la cantidad de refuerzo para asegurar que los puntales de concreto diagonal no se constituyan en el eslabón más débil del mecanismo. Parece que existe un mecanismo funcional en tanto se pueda desarrollar la compresión diagonal entre los puntos nodales de estos puntales. Esto puede lograrse eficientemente, tanto en las secciones sólidas como en las huecas, con tal de que el espesor efectivo de la pared no sea demasiado pequeño. Hsu[8.20] y Lampert[8.22] encontraron que el par último era esencialmente el mismo para secciones huecas de paredes delgadas que para secciones rectangulares sólidas que tuvieran dimensiones globales idénticas y el mismo refuerzo. Se puede llegar a la misma conclusión examinando la fig. 8.11, por lo que es evidente que el núcleo sólido de las secciones de concreto reforzado no contribuye significativamente a la resistencia a torsión.

El tubo de paredes delgadas o la armadura espacial equivalente con diagonales a 45° fue el modelo matemático para la resistencia torsional, empleado generalmente por los primeros investigadores, como Rausch.[8.16]

Las principales dimensiones seccionales de este modelo fueron x_1 y y_1, mostradas en la fig. 8.11. Estas dimensiones se utilizaron en muchas de las teorías propuestas de torsión (Zia[8.23] proporciona un buen repaso de ellas) y en la formulación de las recomendaciones actuales del ACI.

La ecuación del monto de refuerzo de estribos cerrados adoptada por el código actual del ACI[8.2] tiene similitud con la ec. 8.22. La ecuación del ACI es

$$A_t = \frac{sT_s}{\alpha_t f_y x_1 y_1} \tag{8.23}$$

en que

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\left(\frac{y_1}{x_1}\right) \leqslant 1.50 \tag{8.23a}$$

y $y_1 \geqslant x_1$.

Cuando se utilizan volúmenes iguales de acero longitudinal y transversal a torsión (v.gr., cuando $m_t = 1$), $x_0 = x_1$, y $y_0 = y_1$, es raro que la analogía de la armadura o del tubo, ec. 8.22, dé $\alpha_t = 2.0$. Hsu[8.20] determinó experimentalmente el valor del ACI para α_t En la fig. 8.12 se presentan los resultados típicos de Hsu, en que se compara la relación entre la torsión última observada y el parámetro de contribución de los estribos ($x_1 y_1 A_t f_y/s$) contra las recomendaciones del CEB[8.18] para vigas rectangulares y huecas con dimensiones globales idénticas, resistencias idénticas del concreto y contenidos variables de acero con $m_t = 1$. En las vigas "subreforzadas", tanto los estribos como el acero longitudinal alcanzaron la resistencia de cedencia y la falla fue muy dúctil. En los miembros parcialmente sobrerreforzados, los estribos o las varillas longitudinales no alcanzaron la resistencia de cedencia. En las vigas completamente sobrerreforzadas, ambos tipos de varillas no alcanzaron la cedencia.

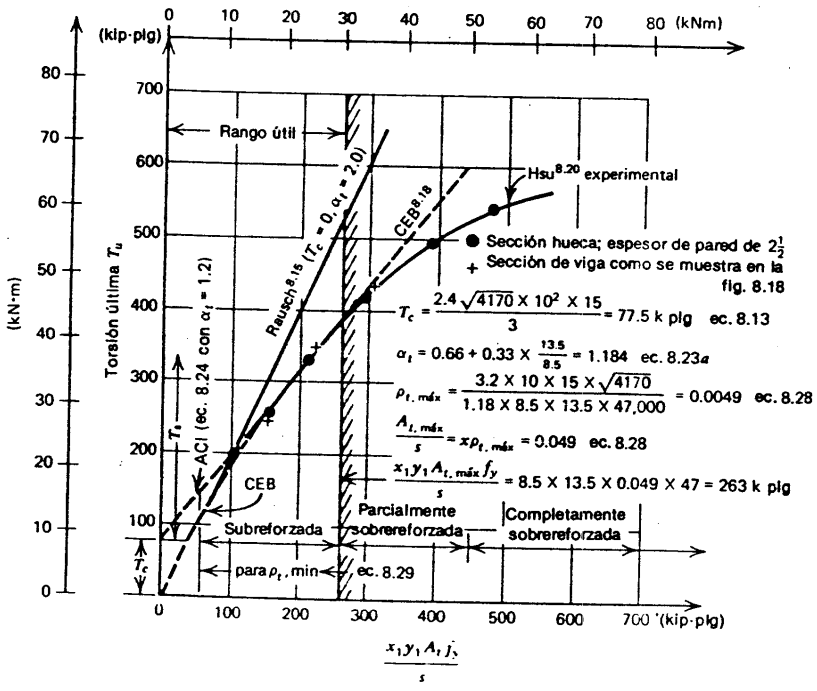


Figura 8.12. El aumento del par último con el contenido de refuerzo.

La fig. 8.12 sirve como base para estudiar la filosofía actual de diseño del ACI para la torsión pura. Cuando se combinan las ecs. 8.13 y 8.23, se puede expresar la porción recta de la curva como sigue:

$$T_u = T_c + T_s = T_c + \alpha_t \frac{x_1 y_1 A_t f_y}{s} \tag{8.24}$$

Esta ecuación predice el par último T_u, transmitido cuando ceden tanto el acero transversal como el longitudinal. La extensión hacia abajo de la línea recta, ajustada a los resultados experimentales,[8.20] indica que una porción del par T_c está resistida por un mecanismo distinto al refuerzo. Es conveniente llamar a éste la contribución del par del concreto, como se estudió en la sección 8.3. Los resultados que aparecen en la fig. 8.12 se obtuvieron de vigas de pruebas sujetas a cargas monotónicas. Es probable que varios ciclos de aplicaciones de cargas de servicio disminuyeran esta contribución del concreto y produjeran un aumento consecuente en los esfuerzos del estribo.

Una comparación de las secciones sólidas y huecas revela que la ausencia de núcleo en éstas no afectó la resistencia de estos miembros. Anteriormente se pensaba que la contribución del núcleo, quizá no totalmente agrietado, explicaba principalmente la contribución de torsión del concreto T_c. Esta evidencia experimental justifica un enfoque de diseño basado completamente en el comportamiento de las secciones huecas.[8.18]

La ecuación 8.23 de diseño del ACI para los estribos para resistir la torsión, esta basada en la condición de que se proporcione al menos una cantidad igual de varillas longitudinales. De acuerdo con ello, $m_t \geqslant 1$; en consecuencia, de la similitud con la ec. 8.18*a*, se escribe

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} \tag{8.25}$$

La falla de las vigas "sobrerreforzadas" se origina del aplastamiento prematuro del concreto en compresión. Los esfuerzos de compresión se deben principalmente a la acción de puntal, como parte de la armadura espacial lo ilustró en la fig. 8.11. Utilizando la analogía para una sección hueca, semejante a la mostrada en la fig. 8.11*d*, se puede deducir el esfuerzo de compresión diagonal de la ec. 8.16*a* como sigue:

$$f_{dc} = \frac{N_{d1}}{hy_0 \cos\alpha_c} = \frac{N_1}{hy_0 \operatorname{sen}\alpha_c \cos\alpha_c} = \frac{A_t f_y}{hs \operatorname{sen}^2 \alpha_c}$$

o, cuando $\alpha_c = 45°$ y se considera la ec. 8.20,

$$f_{dc} = 2\frac{A_t f_y}{hs} = \frac{T_s}{hx_0 y_0} \tag{8.26}$$

en que h es el espesor de la pared de la sección hueca.

Esta cantidad es el doble del esfuerzo que se obtendría utilizando el análisis convencional, tal como la ec. 8.9*b*, y el concepto de esfuerzos principales. Las medidas de deformaciones en la superficie de las vigas de prueba han demostrado que en realidad se generan esfuerzos de compresión considerablemente superiores al valor dado por la ec. 8.26. Lampert y Thürlimann[8.22] han llamado la atención a la superficie retorcida de un miembro a torsión (vea la fig. 8.13). Ya que los puntales a

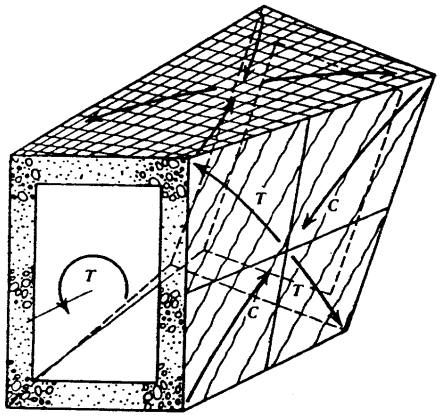


Figura 8.13. Flexión de los puntales diagonales debida a la torsión.

compresión formados entre las grietas diagonales son parte de una superficie paraboloide hiperbólica, están claramente sujetos a curvatura. El momento flexionante generado de esa manera induce compresión adicional en ellos, con lo que reduce su capacidad de puntal. Adicionalmente, estos puntales a compresión están cruzados por el refuerzo de los estribos, por lo que están sujetos simultáneamente a deformación a tensión transversal. En el capítulo 7 se estudió la pérdida de resistencia a compresión debida a este efecto con relación a la resistencia a cortante de vigas.

Es evidente que si se desea evitar una falla prematura a compresión (frágil), se debe limitar la intensidad del par último. El código ACI[8.2] ex-

presa este límite en términos de un esfuerzo cortante torsional nominal que no debe excederse. El requerimiento es

$$v_{tu} \leq 12\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \quad (v_{tu} \leq 1.0\sqrt{f'_c}\ \text{N/mm}^2) \tag{8.27}$$

Para asegurar un tipo dúctil de falla, el miembro a torsión debe estar subreforzado. Esto se logra cuando se combinan las ecs. 8.12, 8.13, 8.23 y 8.27. En consecuencia, utilizando la notación de la fig. 8.11, se encuentra que el contenido del refuerzo para el estribo cerrado para la torsión pura está limitado a

$$\rho_t = \frac{A_t}{sx} \leq \frac{3.2xy\sqrt{f'_c}}{\alpha_t x_1 y_1 f_y} = \rho_{t,\text{máx}} \tag{8.28}$$

en presencia de un volumen igual de refuerzo longitudinal. (En la ec. 8.28 se debe sustituir el número 3.2 por 0.266 cuando se expresa a f'_c en newtons por milímetro cuadrado). En las figs. 8.12 y 8.18 se muestra la relevancia de esta ecuación a algunas vigas de prueba, y también se compara con los pares máximos observados, la torsión desarrollada teóricamente según la ec. 8.28 con el contenido máximo de acero. Estas pruebas[8.20] muestran (véase la fig. 8.18) que el enfoque de diseño del ACI descrito en esta sección no es conservador, cuando el contenido de acero en el alma ρ_t excede el valor máximo especificado por la ec. 8.28.

También es evidente que se debe proporcionar una cantidad mínima de refuerzo a torsión para segurar que no siga un desplome inmediato si se alcanza el par de agrietamiento de un miembro no reforzado. Para ello, el código de ACI[8.2] recomienda que

$$\rho_{t,\min} \leq \frac{A_t}{sx} = \frac{50}{f_y}, \qquad \text{con } f_y \text{ en lb/plg}^2$$

$$= \frac{0.345}{f_y}, \qquad \text{con } f_y \text{ en N/mm}^2 \tag{8.29}$$

Debido a que la torsión tomada por el concreto después del agrietamiento diagonal es bastante menor que la torsión al iniciar el agrietamiento, el refuerzo mínimo de estribo mencionado antes, que por conveniencia se mantuvo igual al especificado para cortante, no sería adecuado. Sin embargo, con un aumento del acero longitudinal (v.gr., con $m_t > 1$), se puede estimular la resistencia torsional. En consecuencia, para aumentar la cantidad mínima de acero longitudinal, cuando se requiere solamente una pequeña cantidad de estribo a torsión, el código de ACI[8.2] estipula que

$$A_{l,\min} = \left[\frac{400xs}{f_y}\left(\frac{v_{tu}}{v_{tu} + v_u}\right) - 2A_t\right]\frac{x_1 + y_1}{s} \tag{8.25a}$$

en donde no es necesario que $2A_t$ sea menor que $50xs/f_y$. (Se debe remplazar el número 400 por 2.76 cuando los esfuerzos se expresan en newtons por milímetro cuadrado).

8.6 CORTANTE Y TORSION COMBINADAS EN VIGAS CON REFUERZO EN EL ALMA

Las recomendaciones actuales del ACI[8.2] se basan en la premisa de que mecanismos distintos a refuerzo del alma transmiten una porción de la fuerza cortante o de torsión. No se sabe con precisión cómo interactúan estos mecanismos en el caso de torsión y cortante combinada. Sin embargo, se pueden hacer aproximaciones satisfactorias en términos de la última resistencia utilizando relaciones de interacción circular o bilineal. Debido a la gran dispersión de los datos experimentales, no se puede considerar que ninguno de los enfoques sea más justificable que el otro.

Liao y Ferguson[8.24] dedujeron, de pruebas en una diversidad de vigas con distintas secciones transversales, que se puede utilizar una relación de interacción circular basada en la resistencia, incluyendo la contribución del refuerzo en el alma.

El código actual de ACI[8.2] requiere que la contribución del concreto al cortante y torsión, en la forma descrita en la sección 8.4, se suplemente mediante refuerzo en el alma, lo que se logra calculando los requerimientos de los estribos por cortante y torsión por separado y proporcionando acero en el alma para la cantidad total. Al final de esta sección se ilustra y estudia la aplicación de este principio.

Para asegurar que una falla a compresión de concreto diagonal bajo torsión y cortante combinadas esté precedida por la cedencia del refuerzo del alma, es esencial establecer un límite superior a la carga combinada. Para fines de simplicidad, se combinaron los requerimientos de esfuerzo nominal máximo por cortante (estudiados en la sección 7.4.2) y por torsión (ec. 8.27), para dar nuevamente una relación de interacción circular como sigue:

$$\left(\frac{v_{tu}}{12\sqrt{f'_c}}\right)^2 + \left(\frac{v_u}{10\sqrt{f'_c}}\right)^2 \leq 1 \qquad (8.30)$$

Como para la ec. 8.14, los términos de esta ecuación están en lb/plg^2. En unidades del SI (N/mm^2) se sustituyen los números 12 y 10 por 1.0 y 0.83. Las indicaciones son de que la ec. 8.30 es segura. Sin embargo, hay poca evidencia, en especial en los rangos inmediatos de torsión y cortante, que muestre la validez[8.25] de esta ecuación.

Por conveniencia, se puede cambiar la ec. 8.30 de la siguiente forma para satisfacer los procedimientos de diseño:

$$v_{tu} \leq \frac{12\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (1.2v_u/v_{tu})^2]}} \text{ lb/plg}^2 \qquad (8.31a)$$

o

$$v_u \leq \frac{10\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (v_{tu}/1.2v_u)^2}} \text{ lb/plg}^2 \qquad (8.31b)$$

Cuando los esfuerzos se expresan en unidades del SI, se deben sustituir los números 12 y 10 por 1.0 y 0.83. Sólo se necesita utilizar una de estas ecuaciones para satisfacer la ec. 8.30.

Ejemplo 8.1

Un pequeño puente en una planta industrial, que soporta una banda transportadora y que salva un claro central de 40 pies (12.2 m) de una viga continua, tiene una sola sección transversal T de 10 pies (3.05 m) de ancho (véase la fig. 8.14). Se desea que el puente transmita una carga viva de servicio de 100 lb/pie^2 (4.79 k N/m^2) en todo su ancho; cuando solamente está cargada la mitad del ancho del puente, se considerará una carga viva de servicio de 150 lb/pie^2 (7.19 kN/m^2) Los claros laterales del puente son de tales longitudes que se puede suponer que bajo una carga uniformemente distribuida, los momentos flexionantes negativos y positivos para este claro de 40 pies (12.2 m) son iguales. Diseñar el refuerzo en el alma en la sección de soporte de la viga utilizando las siguientes propiedades de materiales y dimensiones de secciones (véase también la fig. 8.14):

	Dimensiones:
$f'_c = 3600$ lb/plg^2(24.8 N/mm^2)	$x = b_w = 16.0$ plg(406 mm)
$f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 N/mm^2)	$d = 21.5$ plg(546 mm)
$(f'_c)^{1/2} = 60$ lb/plg^2 (0.414 N/mm^2)	$x_1 = 12.5$ plg(317 mm)
	$y_1 = 20.5$ plg(521 mm)

Peso del concreto: $1.04 \times 144 = 150$ lb/pie^3 (2400 kg/m^3)

$\varphi = 0.85$ para torsión y cortante

$\varphi = 0.90$ para flexión

Solución

1. *Carga*

Carga muerta de servicio: losa $120 \times 5 \times 1.04 = 624$ lb/pie

alma $(24 - 5) \times 16 \times 1.04 = 316$ lb/pie

total = 940 lb/pie

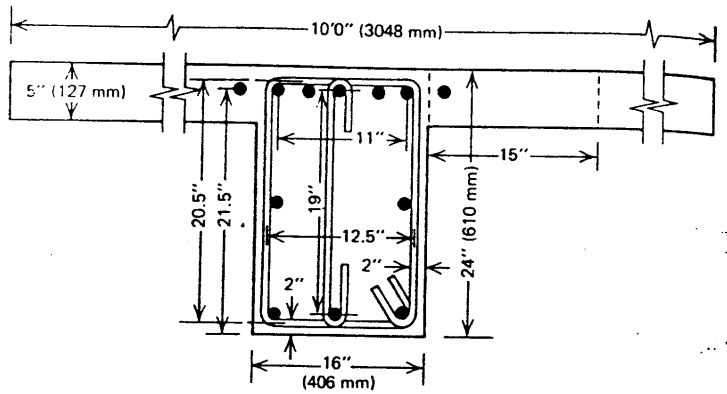


Figura 8.14. Refuerzo y dimensiones de la sección de viga sujeta a torsión, cortante y flexión para el ejemplo 8.1.

Carga viva de servicio en todo el ancho $10 \times 100 = 1000$ lb/pie
Carga viva de servicio en la mitad del ancho $5 \times 150 = 750$ lb/pie, introduciendo un par alrededor de la línea de centro de la viga de

$$0.750 \times 0.5 \times 5 \times 12 = 22.5 \text{ kip} \cdot \text{plg/pie}$$

Par de diseño y cortante en la sección del soporte del extremo:
Caso i. Carga total muerta y viva

$$V_u = (1.4 \times 0.94 + 1.7 \times 1.00) \times 20 = 60.3 \text{ kips}$$
$$T_u = 0$$

Caso ii. Carga muerta total y carga viva en la mitad del ancho

$$V_u = (1.4 \times 0.94 + 1.7 \times 0.75) \times 20 = 51.8 \text{ kips}$$
$$T_u = (1.7 \times 22.5) \times 20 = 765 \text{ kip} \cdot \text{plg}$$

Diseño para el caso ii y comprobación para el caso i.

2. *Estimación del refuerzo de flexión*

Caso i. Momento del soporte

$$M_u = \tfrac{1}{2} \times \frac{Wl}{8} = \frac{2 \times 60.3 \times 40 \times 12}{16} = 3620 \text{ kip} \cdot \text{plg}$$

Suponga el brazo de palanca interna de $0.9 \times 21.5 = 19.3$ plg y desprecie el acero a compresión. Entonces encuentre

$$A_s = \frac{M_u}{\varphi f_y jd} = \frac{3620}{0.9 \times 40 \times 19.3} = 5.21 \text{ plg}^2 \ (3361 \text{ mm}^2)$$

Comprobación: $a = 5.21 \times 40/(0.85 \times 3.6 \times 16) = 4.3$ plg (peralte del bloque de esfuerzos de compresión); en consecuencia, $21.5 - 4.3/2 = 19.4 \approx 19.3$ plg, una aproximación satisfactoria.

Caso ii. El acero de flexión requerido es aproximadamente por proporción

$$A_s = 5.21 \times \frac{51.8}{60.3} = 4.48 \text{ plg}^2 \ (2890 \text{ mm}^2)$$

Se requerirá acero adicional para la torsión. El acero total en la parte superior de la sección debe ser al menos de **5.21 plg²**, como lo requiere el caso i.

3. *Esfuerzos cortantes nominales*

Cortante: $v_u = \dfrac{V_u}{\varphi b_w d} = \dfrac{51{,}800}{0.85 \times 16 \times 21.5} = 177 \text{ lb/plg}^2$ para el caso ii, Ec. 7.5

Torsión: $\tfrac{1}{3}\Sigma x^2 y = \dfrac{(16^2 \times 24) + (2 \times 5^2 \times 15)}{3} = 2298 \text{ plg}^3$,

$$v_{tu} = \frac{T_u}{\varphi \tfrac{1}{3}\Sigma x^2 y} = \frac{765{,}000}{0.85 \times 2298} = 392 \text{ lb/plg}^2 \text{ Ec. 8.8a}$$

Verificando los máximos esfuerzos combinados nominales permisibles

$$\frac{v_{tu}}{1.2v_u} = \frac{392}{1.2 \times 177} = 1.85, \quad \text{Eq. 8.31b}$$

$$v_{u,\text{máx}} = \frac{10\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (v_{tu}/1.2v_u)^2]}} = \frac{10 \times 60}{\sqrt{(1 + 1.85^2)}} = 285 > 177 \text{ lb/plg}^2$$ Ec. 8.31b

En consecuencia, la sección no estará sobrerreforzada.
Asignando acciones a la resistencia del concreto

$$v_c = \frac{2.0\sqrt{f'_c}}{\sqrt{[1 + (v_{tu}/1.2v_u)^2]}} = \frac{2 \times 60}{\sqrt{(1 + 1.85^2)}} = 57 \text{ lb/plg}^2 \text{ Ec. 8.15b}$$

$$v_{tc} = \frac{v_{tu}}{v_u} v_c = \frac{392}{177} 57 = 126 \text{ lb/plg}^2 \text{ Ec. 8.15c}$$

4. *El refuerzo en el alma por cortante y torsión*

El área del estribo requerida para la resistencia a cortante:

$$A_v = \frac{b_w s}{f_y}(v_u - v_c) = \frac{16 \times 12}{40000}(177 - 57) = 0.576\,\text{plg}^2/\text{pie},$$

Ecs. 7.21 y 7.23a

Torsión que debe resistir el acero:

$$T_s = (v_{tu} - v_{tc})\sum \frac{x^2 y}{3} = (392 - 126)2298 = 611\,\text{kip-plg}$$

Ecs. 8.8 y 8.24

$$\alpha_t = 0.66 + 0.33\left(\frac{y_1}{x_1}\right) = 0.66 + 0.33 \times \frac{20.5}{12.5} = 1.20 < 1.50,$$

Ec. 8.23a

Estribos requeridos para la torsión

$$A_t = \frac{sT_s}{\alpha_t f_y x_1 y_1} = \frac{12 \times 611}{1.20 \times 40 \times 12.5 \times 20.5} = 0.596\,\text{plg}^2/\text{pie},$$

Ec. 8.23

Si se utilizan estribos de dos ramas, el área de una es

$$A_{v,\text{exter}} = \tfrac{1}{2}A_v + A_t = \frac{0.576}{2} + 0.596 = 0.884\,\text{plg}^2/\text{pie}\,(1870\,\text{mm}^2/\text{m})$$

Se utilizan varillas de núm. 5 con centros a 4 plg = 0.918 plg²/pie. Si se utilizan estribos de tres ramas, como se muestra en la fig. 8.14, el área de las ramas exteriores sería 0.576/3 + 0.596 = 0.788 plg²/pie, (v.gr., núm. 5 a centros a $4\frac{1}{2}$ plg = 0.816 plg²/pie). En consecuencia, el área requerida para la rama interna sería

$$0.576 - 2(0.816 - 0.596) = 0.136\,\text{plg}^2/\text{pie}$$

Se suministran núm. 4 con centros a $13\frac{1}{2}$ plg = 0.174 plg²/pie.

5. *Acero longitudinal para la torsión.*

$$A_l = 2A_t \frac{x_1 + y_1}{s} = 2 \times 0.596 \frac{12.5 + 20.5}{12} = 3.28\,\text{plg}^2\,(2116\,\text{mm}^2),$$

Ec. 8.25

Este acero se podría dividir en dos o tres partes iguales y distribuirlas a lo largo del peralte de la sección. Siguiendo el arreglo de la fig. 8.14, se proporciona el total:

(i) Acero superior = 3.28/3 + 4.48 = 5.57 > 5.21 plg²; se usan seis varillas núm. 8 y una varilla núm. 9 = 5.71 plg².

(ii) Acero a mitad del peralte = 3.28/3 = 1.09 plg², por ejemplo, dos varillas núm. 7 = 1.20 plg².

(iii) Al fondo de la sección, prevalece la compresión; en consecuencia, no se requeriría el acero a tensión longitudinal para la torsión. Sin embargo, de las consideraciones de flexión, se llevarían dos o tres de las varillas del refuerzo positivo en el centro del claro hasta los soportes.

6. *Refuerzo mínimo*

Se puede demostrar fácilmente que los requerimientos de las ecs. 8.29 y 8.25a se satisfacen cómodamente en esta sección crítica.

7. *Refuerzo en el alma por cortante*

Considerando el caso i de carga, se puede demostrar que el requerimiento de acero en el alma por cortante de 60.3 kip sólo es mucho menor que el calculado para el caso ii, $v_u = 60300/(0.85 \times 16 \times 215) = 206$ lb/plg².

8. *Un examen de la relación de interacción cortante - torsión*

El diseño de esta viga para todas las combinaciones de torsión y cortante se pudo obtener también con ayuda de una gráfica de interacción como la de la fig. 8.15, la cual se construyó para demostrar la interpretación del código del ACI [8.2] con mayor claridad. La gráfica indica las combinaciones de cortante y torsión últimas que se podrían tomar por una sección de viga para distintos contenidos de acero. Se pueden hacer las siguientes observaciones:

(i) El área sombreada muestra la relación de interacción circular para los mecanismos resistentes distintos al refuerzo en el alma. Los estribos necesitan resistir solamente las acciones adicionales.

(ii) La resistencia adicional que se obtiene de los estribos se aproxima a una relación de interacción lineal conforme aumenta el contenido del acero, lo que sugiere una situación anómala. El contenido máximo de acero transversal ρ_t es 1.2% si solamente se debe resistir el cortante, pero se podría emplear $\rho_{vt} = 1.8\%$ cuando la relación de los esfuerzos torsional y cortante nominal posible máximos es alrededor de 1.5, anomalía que se debe a la limitación de interacción circular arbitraria para el cortante y par máximo, mostrada por el círculo exterior sombreado.

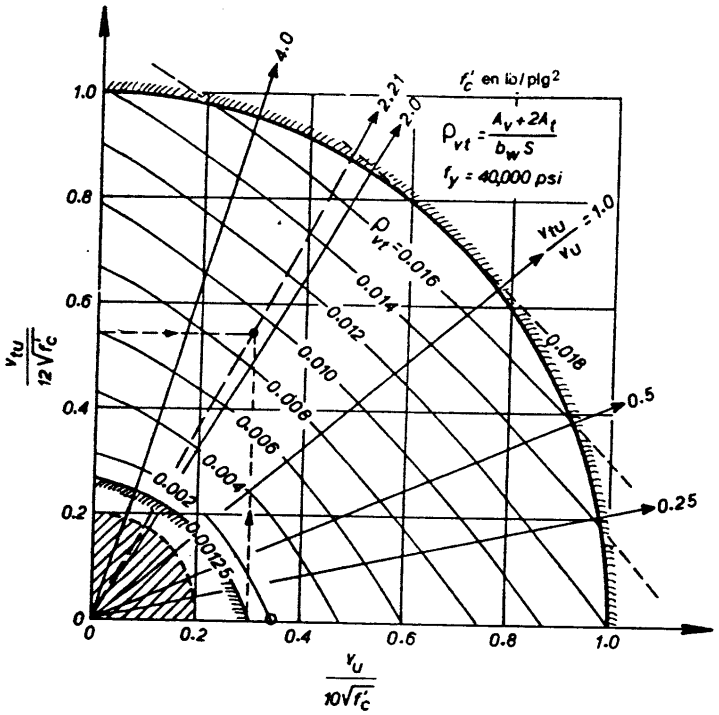


Figura 8.15. Un diagrama de interacción para cortante y torsión.

(iii) El refuerzo mínimo que se debe utilizar en el alma de esta viga (ec. 8.29) es $\rho_{min} = 50/f_y = 0.00125$, y la curva sombreada interna indica su contribución.

(iv) El acero requerido para la viga del ejemplo se pudo haber obtenido como sigue:

$$\frac{u_{tu}}{12\sqrt{f'_c}} = \frac{392}{12 \times 60} = 0.544$$

$$\frac{v_u}{10\sqrt{f'_c}} = \frac{177}{10 \times 60} = 0.295 \quad \text{o} \quad \frac{v_{tu}}{v_u} = \frac{392}{177} = 2.21$$

da una dirección radial.

El punto de intersección de los valores anteriores en la figura da $\rho_{vt} = 0.0092$. En consecuencia

$$A_{v,\,total} = 0.0092 \times 16 \times 12 = 1.766\,\text{plg}^2/\text{pie}$$

es decir, 0.883 plg²/pie para una rama de los estribos como se obtuviera antes.

(v) Con $v_u/10\sqrt{f'_c} = 206/(10 \times 60) = 0.343$, obviamente el cortante puro no es tan crítico como lo revela la fig. 8.15 ($\rho_{vt} = 0.002 < 0.0092$).

9. *Diseño del refuerzo en el alma de acuerdo con las recomendaciones*[8.18] *del CEB*

Aproximadamente de la fig. 8.14, las dimensiones relevantes del tubo equivalente (fig. 8.11*e*) son: $x_0 = 11$ plg (279 mm) y $y_0 = 19$ plg (483 mm). La ec. 8.22 se dedujo suponiendo que la armadura espacial equivalente debe resistir toda la torsión. El área de estribo requerida en esta base es

$$A_t = \frac{T_s s}{\varphi 2 f_y x_0 y_0} = \frac{765 \times 12}{0.85 \times 2 \times 40 \times 11 \times 19} = 0.646\,\text{plg}^2/\text{pie} \qquad \text{Ec. 8.22}$$

Ya que el acero en el alma por cortante solamente es como la que se dedujo en el párrafo 4 de este ejemplo, el área total de una rama para un estribo cerrado requerida para el cortante y torsión combinada es

$$A_v = \frac{0.576}{2} + 0.646 = 0.934\,\text{plg}^2/\text{pie}\ (1976\ \text{mm}^2/\text{m})$$

que es 5.7% más de la cantidad obtenida de los requerimientos del código ACI.

También se requeriría acero longitudinal en una cantidad correspondientemente mayor por torsión sola.

8.7 FLEXION Y TORSION COMBINADAS

Recientemente se ha desarrollado una extensa labor para evaluar la resistencia torsional última de los miembros de concreto reforzado sujetos a torsión y flexión combinadas. Las teorías expresadas difieren principalmente en la formulación de los mecanismos de falla y en la cantidad de componentes del sistema resistente que se consideran. Utilizando el mecanismo postulado de falla, se pueden establecer condiciones de equilibrio para las acciones últimas torsional y de flexión. Por lo general, se supone que las fuerzas internas de compresión están resistidas a lo largo de una articulación inclinada a compresión, en tanto que las varillas longitudinales y transversales en cedencia[8.8, 8.26] proporcionan las fuerzas reque-

ridas de tensión. En la URSS, Lessig, Yudin, Lialin[8.27] y otros han desarrollado mucho trabajo pionero con relación a este concepto.

En la fig. 8.16 se muestra una idealización típica de un modo de falla en vigas T. Utilizando este modelo, se pueden predecir satisfactoriamente[8.28] las capacidades observadas en flexión, torsión y cortante, aunque rara vez las ecuaciones se prestan fácilmente para el uso en las oficinas de diseño. Adicionalmente, dependiendo de la magnitud relativa de flexión,

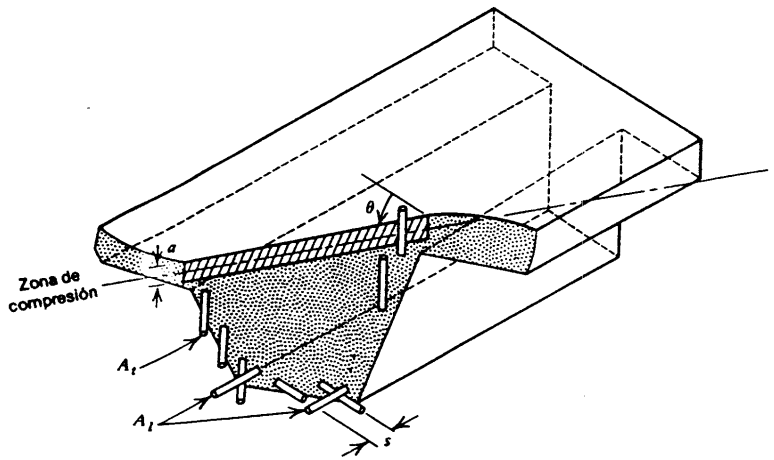


Figura 8.16. Modo idealizado de falla en viga T en flexión y torsión.

torsión y cortante, la articulación a compresión se puede formar a través del fondo o a un lado de la viga.[8.26]

Lampert y Collins[8.19] atacaron el problema utilizando tanto la analogía de la armadura espacial como una teoría de flexión inclinada. En la evaluación de la resistencia a flexión, se supone que el brazo de palanca interna (que en este caso es una dimensión de la armadura) es constante en todo el miembro prismático e independiente del contenido del refuerzo. La relación de interacción deducida se basa en la premisa de que las vigas en torsión y flexión combinadas fallan a lo largo de un plano inclinado en flexión. La capacidad de tal viga para cada plano inclinado se puede expresar en términos de la capacidad de momentos en las direcciones longitudinal y transversal. Tanto en el enfoque de la analogía de la armadura como de la teoría de flexión inclinada se encontró una interacción parabólica entre flexión y torsión. La primera predice la torsión con exactitud debido a que se emplean los brazos correctos de palanca de torsión x_0 y y_0. La segunda es exacta para flexión pura, cuando se utiliza el brazo

apropiado de momentos internos $(d - a/2)$. Como resultado de esta obra, Lampert y Collins[8.19] sugieren una relación de interacción parabólica interpolada para torsión pura y flexión pura en la forma siguiente:

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = r\left(1 - \frac{M_u}{M_{u0}}\right) \tag{8.32a}$$

cuando ocurre cedencia del acero longitudinal en la zona de tensión por flexión y

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = 1 + r\frac{M_u}{M_{u0}} \tag{8.32b}$$

cuando ocurre cedencia a tensión del acero longitudinal en la zona a compresión por flexión,

en que T_u = par último aplicado
M_u = momento flexionante último aplicado
T_{u0} = capacidad torsional última pura de la sección, ec. 8.21, si $r = 1$
M_{u0} = capacidad a flexión última pura de la sección, ec. 4.36
r = relación de las fuerzas a cedencia del refuerzo a tensión y compresión por flexión, dada como sigue

$$r = \frac{A_s f_y}{A'_s f'_y} \tag{8.33}$$

Estas relaciones concuerdan con los experimentos.[8.19]

En la fig. 8.17 se proporcionan los diagramas correspondientes de interacción. Es claro que el acero a compresión por flexión puede impulsar considerablemente la capacidad de torsión de una sección, cuando sólo hay una pequeña flexión. Antes de que este acero pueda ceder en tensión, se debe vencer la fuerza de compresión inducida por flexión en el concreto que lo rodea. Esto le proporciona una resistencia extra aparente al acero longitudinal ($A_l f_{ly}$ en la ec. 8.21). Conforme sea mayor la compresión por flexión en el concreto (es decir, a mayor contenido de acero a tensión por flexión de la viga A_s), mayor será el aumento en la resistencia aparente del acero longitudinal a compresión por torsión.

Anteriormente se estudió el papel del refuerzo longitudinal en la resistencia a la torsión. Si otras acciones, tales como flexión o tensión axial, reducen la capacidad del acero longitudinal, el refuerzo en el alma no puede contribuir completamente a la resistencia pretendida torsional del mecanismo de armadura (véase la ec. 8.21). Recíprocamente, si se utiliza parte del acero longitudinal en una viga para torsión, se reduce la contribución a flexión de esas varillas. En consecuencia, cada acción puede

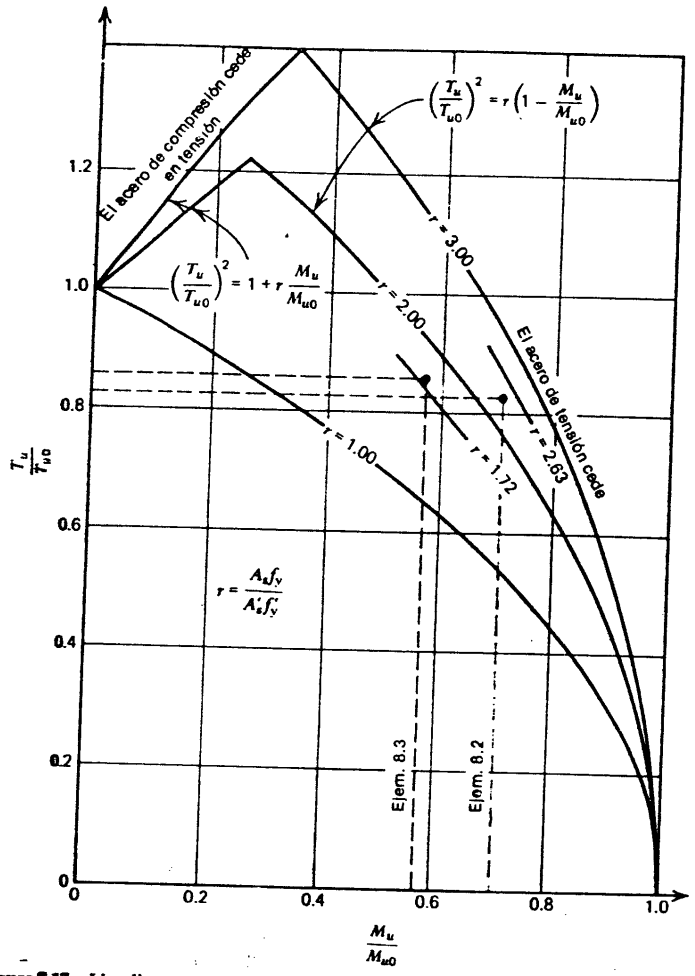


Figura 8.17. Un diagrama de interacción para flexión y torsión.[8.19]

reducir la capacidad de la otra. El diagrama de interacción de la fig. 8.17 muestra que en una viga reforzada simétricamente ($r = 1$) incluso un pequeño momento disminuye la resistencia a torsión, provocando cedencia prematura en el acero longitudinal. Por otra parte, en una viga reforzada asimétricamente, una pequeña cantidad de flexión aumenta la resistencia torsional, debido a que las varillas longitudinales en la zona de compresión a flexión ceden bastante después, como resultado de la tensión generada por torsión en el mecanismo de armadura espacial. El enfoque de diseño actual propuesto por el ACI y el CEB se basa en la premisa de que es

probable que una superposición simple del refuerzo longitudinal de flexión y torsional produzca una resistencia excesiva, lo que permite al diseñador omitir el examen de la interacción real de flexión y torsión. En el ejemplo 8.1 se mostró la aplicación de esta proposición. La simplicidad del enfoque[8.13] parece superar las desventajas de un análisis más complejo que pudiera ofrecer algunos beneficios económicos. Sin embargo, como se muestra en la fig. 8.17, la relación de interacción[8.19] es muy simple. En la siguiente sección se presentan su aplicación y una comparación con el procedimiento del ACI. Para el diseño, se pueden reajustar las ecs. 8.32*a* y 8.32*b* para que proporcionen el área requerida de acero de refuerzo para la torsión y flexión, con superposición simple de los requerimientos.

Estas consideraciones suponen que la cedencia del refuerzo será la causa primaria de la falla que, en consecuencia, será dúctil. Es esencial asegurar que no pueda ocurrir el aplastamiento prematuro del concreto limitando el contenido del acero de flexión (ec. 4.49) y de torsión (ec. 8.28).

Ejemplo 8.2

Verificar si es adecuada la sección de viga diseñada para torsión y cortante en el ejemplo 8.1 utilizando la relación de interacción de la fig. 8.17. Nótese que al establecer esta relación de interacción, Lampert y Collins consideraron solamente la contribución torsional de la armadura espacial (ec. 8.21);[8.19] y despreciaron la contribución del concreto T_c. En la fig. 8.14 se muestran las dimensiones de la sección.

Solución

1. *La capacidad aproximada a flexión*

El acero a tensión, $A_s = 5.71$ plg^2 en la parte superior de la viga.
El acero a compresión, $A'_s =$ suponiendo tres varillas núm. 7 = 1.80 plg^2 en el fondo de la viga.
El acero a mitad del peralte, $\frac{1}{3}A_l = 1.20$ plg^2. Para fines del cálculo de flexión y torsión, se puede asignar un medio de este acero para el refuerzo superior e inferior.
Estimar el brazo de palanca interna:

$$a_{máx} = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b_w} = \frac{(5.71 + 0.5 \times 1.20) \times 40}{0.85 \times 3.6 \times 16} = 5.16 \text{ plg}$$

$$a_{min} = \frac{A_s - A'_s}{A_s} a_{máx} = \frac{6.31 - 2.40}{6.31} \times 5.16 = 3.20 \text{ plg}$$

$$a \approx 0.5(5.16 + 3.20) = 4.2\,\text{plg}$$

$$\left(d - \frac{a}{2}\right) \approx 21.5 - 0.5 \times 4.2 = 19.4\,\text{plg}$$

$M_{u0} = 6.31 \times 40 \times 19.4 = 4897$ kip. plg, la capacidad a flexión pura de la sección. El momento flexionante, por cargas muerta y viva, es para el caso ii

$$M_u = \frac{Wl}{\varphi 16} = \frac{2 \times 51.8 \times 40 \times 12}{0.9 \times 16} = 3453\,\text{kip}\cdot\text{plg}$$

$$\therefore \quad \frac{M_u}{M_{u0}} = \frac{3453}{4897} = 0.705$$

2. *La capacidad a torsión*

Del ejemplo 8.1

Acero de estribos proporcionado: núm. 5 con centros a 4 plg $= 0.918$ plg^2/pie

Acero de estribo requerido por cortante: $0.576/2 = 0.288$ plg^2/pie

acero de estribo de disponible para la torsión$= 0.630$ plg^2/pie

Se proporciona acero longitudinal como en el párrafo 1. Por torsión pura, el más débil de los aceros superior o inferior determina el inicio de la cedencia, por lo cual se supone

$$A_l = 1.80 + 1.20 + 1.80 = 4.80\,\text{plg}^2$$

Nótese que esto es más de lo calculado en el ejemplo 8.1, (es decir, 3.28 plg^2).

Como elemento de interés, se calcula m_t:

$$m_t = \frac{sA_t}{2(x_0 + y_0)A_t} = \frac{12 \times 4.80}{2(11 + 19) \times 0.63} = 1.524 = \frac{1}{\tan^2 \alpha_c}, \qquad \text{Ec. 8.19}$$

en donde $x_0 \approx 16 - 4 - 1 = 11$ plg y $y_0 \approx 24 - 4 - 1 = 19$ plg. En consecuencia, $\alpha_c = 39°$; por tanto, una grieta diagonal encontraría más estribos que en el caso de grietas a 45°.

$$T_s = T_{u0} = 2x_0 y_0 f_y \sqrt{\frac{A_t A_l}{2s(x_0 + y_0)}}$$

$$= \frac{2 \times 11 \times 19 \times 40\sqrt{0.63 \times 4.8}}{\sqrt{2 \times 12(11 + 19)}}, \qquad \text{Ec. 8.21}$$

$$= 1084\,\text{k}\cdot\text{plg}$$

Torsión a resistirse $= T_u = 765/0.85 = 900$ kip·plg

$$\therefore \quad \frac{T_u}{T_{u0}} = \frac{900}{1084} = 0.830$$

3. *Interacción*

$$r = \frac{A_s}{A_s'} = \frac{5.71 + 0.60}{1.80 + 0.60} = 2.63, \qquad \text{Ec. 8.33}$$

Ya que $M_u/M_{u0} = 0.705$, de la fig. 8.17 es evidente que la ec. 8.32*a* es aplicable.

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = r\left(1 - \frac{M_u}{M_{u0}}\right) = 2.63(1 - 0.705) = 0.776, \qquad \text{Ec. 8.32a}$$

En consecuencia, el máximo par que se permite que actúe junto con el momento flexionante dado es $T_u = \sqrt{0.776}\,T_{u0} = 0.881 \times 1084 = 955 > 900$ Kip·plg. Esto indica que de acuerdo con el enfoque propuesto de interacción, la sección es satisfactoria, pero que casi se agota en flexión y torsión. Ya que se han redondeado las áreas del acero requeridas teóricamente en los ejemplos 8.1 para lograr una distribución práctica del refuerzo, no se puede establecer una comparación directa con el enfoque de "no interacción" del ACI. La relación también se ilustra en la fig. 8.17. Todo punto que esté dentro del área limitada por la curva apropiada de interacción indica un diseño seguro.

Ejemplo 8.3

Para ilustrar nuevamente la relación entre los enfoques de diseño de "interacción" y "no interacción", se considera la misma sección estudiada en los ejemplos 8.1 y 8.2 bajo momento flexionante reducido. Se supone que la viga considerada anteriormente (fig. 8.14) está sujeta a un momento de apoyo negativo de solamente $M_u = \frac{1}{2}Wl/16$.

Solución

$$\frac{M_u}{\varphi} = 0.5 \times 3453 = 1727\,\text{kip}\cdot\text{plg}$$

En consecuencia, el acero a flexión requerido es aproximadamente $1727/(40 \times 19.4) = 2.23$plg^2. Si se proporciona un medio del acero

longitudinal de torsión en la parte superior de la viga, entonces, de acuerdo con los cálculos anteriores $A_l/2 = 1.64$ plg^2. En consecuencia, el acero superior total es $A_s = 3.87$ plg^2.

El acero positivo a mitad del claro para esta viga sería aproximadamente de 9 plg^2, y al menos un cuarto de esto se llevaría hasta la sección de soporte. En consecuencia, supóngase que $A'_s = 2.25$ plg^2, por lo cual $r = 3.87/2.25 = 1.72$.

El acero horizontal que se considera que estaría disponible para la torsión pura sería $A_l = 2 \times 2.25 = 4.50$ plg^2, y sin alterar la distribución de los estribos, la capacidad torsional de la sección es

$$T_{u0} = 2 \times 11 \times 19 \times 40\sqrt{\left[\frac{0.63 \times 4.5}{2 \times 12(11 + 19)}\right]} = 1049 \text{ kip} \cdot \text{plg} \qquad \text{Ec. 8.21}$$

Por tanto, $T_u/T_{u0} = 900/1049 = 0.858$.

La mayor cantidad del acero superior aumentaría la capacidad a flexión última de la sección a aproximadamente $M_{u0} \approx 3.87 \times 40 \times 19.4 = 3003$ kip.plg.

Por tanto $M_u/M_{u0} = 1727/3003 = 0.575$, y de la relación de interacción, ec. 8.32*a*, se tiene

$$\left(\frac{T_u}{T_{u0}}\right)^2 = 1.72(1 - 0.575) = 0.731 \qquad \text{y}$$

$$T_u = \sqrt{0.731} \times 1049 = 897 \text{ kip} \cdot \text{plg} \approx 900 \text{ kip} \cdot \text{plg}$$

Para fines de diseño, esto proporciona concordancia satisfactoria entre los enfoques de "interacción" y "no interacción".

8.8 RIGIDEZ TORSIONAL

Las consideraciones de la teoría clásica de la elasticidad condujeron a la deducción de la rigidez torsional de vigas homogéneas con distintas secciones transversales (véanse las ecs. 8.3 y 8.4). Los experimentos en vigas de concreto reforzado o presforzado indican un grado satisfactorio de concordancia con la teoría.[8.22, 8.29] Sin embargo, la propiedad es poco interesante para el diseñador, a menos que tome en cuenta el agrietamiento diagonal, que se presenta en una etapa inicial de la carga.

Las relaciones típicas observadas de par-giro para vigas rectangulares[8.20] de 15 × 10 plg (381 × 254 mm) (fig. 8.18) revelan el repentino aumento de giro al inicio del agrietamiento diagonal. En esta etapa un nuevo mecanismo, tal como el de la estructura espacial, toma la carga. En vez de deformaciones cortantes, las deformaciones por compresión diagonal del concreto y las deformaciones por tensión del acero en las direc-

ciones longitudinal y transversal determinan el ángulo de torsión. Las deformaciones de la armadura espacial (fig. 8.11) o la sección hueca equivalente se pueden deducir de la misma manera que las deformaciones cortantes de la armadura equivalente en una viga ordinaria, descrita en el capítulo 7.

El núcleo de una sección sólida no contribuye apreciablemente a la resistencia torsional; en consecuencia, se puede remplazar la sección sólida en el estado agrietado por una sección hueca con fines de determinar su rigidez. Rahlwes, quien comparó la rigidez torsional teórica de las sec-

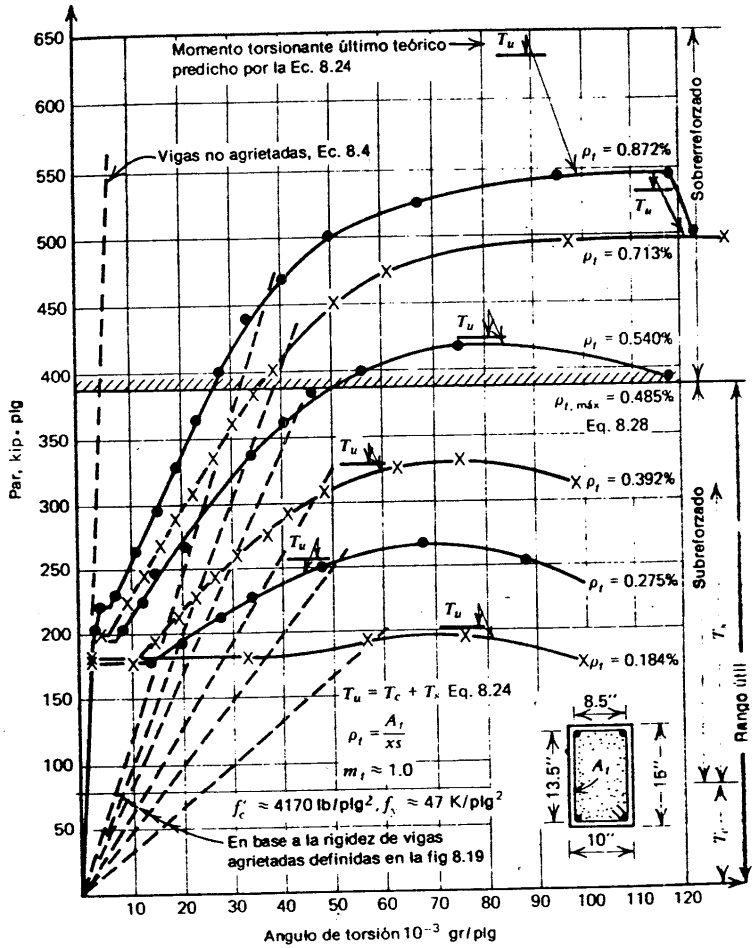


Figura 8.18. Relaciones típicas par vs. giro para vigas probadas por Hsu.[8.20]

ciones rectangulares en el estado agrietado y no agrietado,[8.30] encontró que la relación de forma y/x no es una variable importante para determinar la pérdida de rigidez provocada por el agrietamiento. Las vigas experimentales con la misma área de núcleo ($x_0 y_0$ = constante) y con relaciones de forma $1 \leq y/x \leq 6$, exhibieron aproximadamente la misma rigidez en todas las etapas del agrietamiento.[8.29] La rigidez de la armadura espacial depende en gran medida del contenido de acero torsional. Las suposiciones más importantes y los resultados del estudio analítico de Rahlwes,[8.30] para el caso común de contenido igual de acero transversal y longitudinal (v.gr., $m_t = 1$), se muestran en la fig. 8.19.

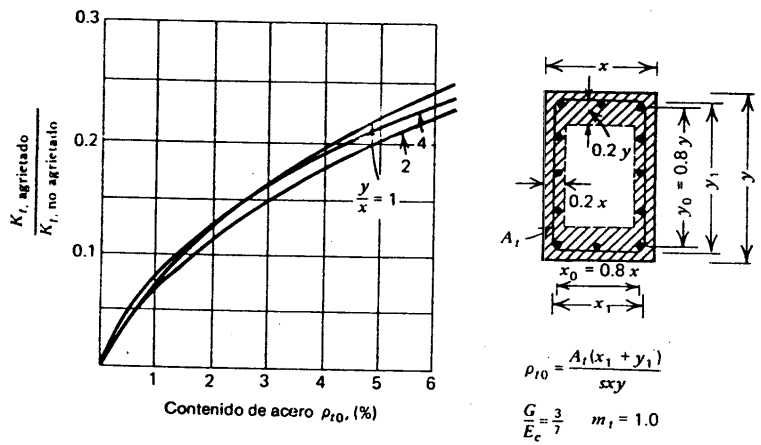


Figura 8.19. La rigidez torsional de vigas de concreto reforzada con secciones huecas y rectangular agrietadas diagonalmente.[8.30]

Lampert[8.31] también ha considerado el efecto del refuerzo transversal y longitudinal por torsión en la torsión. Para vigas de dimensiones prácticas, sus resultados concuerdan satisfactoriamente con los teóricos deducidos de la analogía del tubo de pared delgada. Es posible deducir las ecuaciones basadas en esta analogía, sugeridas por Collins.[8.31] Cuando se compara la ec. 8.21 que define el par soportado por la armadura espacial con la ec. 8.9*b* que proporciona el flujo de cortante en un tubo, fácilmente se reconoce la similitud en forma al igual que en comportamiento. Ello sugiere que para fines de predicciones de rigidez, se remplazara la armadura espacial mediante un tubo de dimensiones semejantes con un espesor de pared de

$$h = \sqrt{\left[\frac{A_t}{s}\,\frac{A_l}{2(x_0 + y_0)}\right]} \tag{8.34}$$

Esta es la raíz media cuadrada de los contenidos de acero torsional transversal y longitudinal. Utilizando la relación m_t definida en la ec. 8.19, este espesor hipotético se reduce a

$$h = \frac{A_t}{s}\sqrt{m_t} \tag{8.34a}$$

En consecuencia, se puede expresar el momento polar equivalente de inercia del tubo de la ec. 8.11*b* como

$$C_{0,\,\text{agrietado}} = \frac{4A_0{}^2 h}{p} = \frac{4(x_0 y_0)^2}{2(x_0 + y_0)}\,\frac{A_t\sqrt{m_t}}{s} \tag{8.35}$$

Aproximando $G = \frac{1}{2}E_s$, la rigidez torsional correspondiente de una viga de concreto reforzado agrietada diagonalmente queda como

$$K_{t,\,\text{agrietado}} = \frac{E_s(x_0 y_0)^2 A_t}{l(x_0 + y_0)s}\sqrt{m_t} \tag{8.36}$$

Las propiedades del concreto no entran en la ec. 8.36. En las vigas utilizables que necesitan estar subreforzadas por torsión, la deformación del concreto es insignificante y el giro esta gobernado principalmente por la elongación de las varillas de refuerzo.

Utilizando la información de rigidez de la fig. 8.19, se ha graficado el comportamiento teórico (mediante líneas punteadas) del par-giro de algunas vigas rectangulares probadas por Hsu[8.20] en la relación experimental de par-giro para las vigas de la fig. 8.18. Parece ser que existe una buena concordancia de rigidez para la mayoría de las vigas utilizables a un giro de 45×10^{-3} grado/plg, que ocurre a aproximadamente 93% del par último. Una vez que se ha agrietado una viga, cuando la carga se vuelve a aplicar desde cero, la relación par-giro esta próxima a ser lineal, dentro del rango elástico (es decir, semejante a la mostrada por las líneas punteadas de la fig. 8.18).

La relación entre la rigidez torsional y el contenido de acero, mostrada en la fig. 8.19 o dada por la ec. 8.36, también puede ser útil para comprobar el giro que se debe esperar bajo condiciones de carga total de servicio. Esto se ilustra en el ejemplo 8.4.

Un refinamiento adicional de los cálculos de rigidez en el estado agrietado no se justifica, ya que todavía no se pueden explicar adecuadamente otros factores (deslizamiento de anclaje de las varillas horizontales y estribos en especial, y los efectos del agrietamiento por flexión y fuerza cortante en la rigidez torsional).

Ejemplo 8.4

Determinar el máximo giro que se debe esperar bajo condiciones de carga total de servicio para la viga del ejemplo 8.1 (fig. 8.14).

Solución

$G = \frac{3}{7}E_c = 0.43 \times 57000\sqrt{f'_c} = 1470\ \text{kip}\cdot\text{plg}^2$, Eqs. 7.37 y 2.1

$C = \beta_t x^3 y = 0.195 \times 16^3 \times 24 = 19{,}170\ \text{plg}^4$,

de la Fig. 8.3 y Ec. 8.3

Incluir parte de los patines de la viga T, ec. 8.5, aumentaría la rigidez torsional en solamente 5%. En consecuencia, se desprecia la contribución de los patines. El giro es:

$$\theta_t = \frac{1}{GC}\int_0^z T(z)\,dz, \qquad \text{Ec. 8.2}$$

La viga está sujeta a un momento transversal distribuido uniformemente m_u, cuando un medio del ancho del patín está sujeto a carga viva; en consecuencia, la torsión máxima en los soportes de la viga es $T(0) = \frac{1}{2}m_u l$. Por tanto, el par en cualquier sección a distancia z del soporte es
de donde

$$T(z) = T(0) - m_u z = m_u\left(\frac{l}{2} - z\right)$$

donde

$$GC\theta_t = \int_0^z m_u\left(\frac{l}{2} - z\right)dz = \frac{m_u}{2}(lz - z^2)$$

El máximo giro ocurre a la mitad del claro, cuando $z = l/2$, por tanto

$$GC\theta_{t,\,\text{máx}} = \frac{m_u l^2}{8}$$

Para carga viva distribuida uniformemente de 150 lb/pie^2 a un lado de la viga de 10 pies de ancho y 40 pies de claro, el momento transversal por pulgada de longitud de la viga es

$$m_u = 5 \times 0.150 \times 2.5 \times \frac{12}{12} = 1.875\ \text{kip}\cdot\text{plg/plg}$$

En consecuencia, se escribe

$$\theta_{t,\,\text{máx}} = \frac{1.875 \times (40 \times 12)^2}{8 \times 1470 \times 19{,}170} = 1.916 \times 10^{-3}\ \text{rad}$$

suponiendo que la viga no se ha agrietado.
Al tomar en cuenta el agrietamiento, se obtiene el factor de reducción de la fig. 8.19 como sigue:
Se proporcionan estribos de núm. 5 a centros de 4 plg. Por lo tanto

$$\rho_{to}\,\% = \frac{2 \times 0.306 \times (12.5 + 20.5)}{4 \times 16 \times 24}100 = 1.31\,\%$$

De la fig. 8.19

$$\frac{K_{t,\,\text{agrietada}}}{K_{t,\,\text{no agrietada}}} = 0.09$$

$$\therefore\ \theta_{t,\,(\text{agrietada})\,\text{máx}} = \frac{0.001916}{0.09} = 0.022\ \text{rad}$$

$$= 1.22°$$

En otra forma, utilizando la ec. 8.36 y la información dada en el ejemplo 8.2, y haciendo $E_s = 29{,}000\ \text{kip/plg}^2$,

$$GC_{0,\,\text{agrietada}} = \frac{29{,}000(11 \times 19)^2 \times 0.63}{(11 + 19) \times 12}\sqrt{1.524}$$

$$= 2.737 \times 10^6\ \text{kip}\cdot\text{plg}^2$$

Consecuentemente, de las proporciones,

$$\theta_{t,\,(\text{agrietada})\,\text{máx}} = \frac{GC}{GC_{0,\,cr}}1.916 \times 10^{-3}$$

$$= \frac{1470 \times 19{,}170 \times 1.916 \times 10^{-3}}{2.737 \times 10^6}$$

$$= 0.0197\ \text{rad} = 1.13°$$

Esto es del mismo orden que el ángulo que se obtuvo de la fig. 8.19. La torsión aumenta linealmente desde la mitad del claro hacia los soportes, y no es probable que la viga tenga grietas diagonales en su porción media. En consecuencia, el resultado anterior sobrestima el orden máximo de inclinación que tendría que tomar en cuenta el diseñador. El giro calculado indica un gradiente transversal posible de 1 en 50 a través del claro medio del puente, un valor que probablemente no sea aceptable.

8.9 TORSION EN ESTRUCTURAS ESTATICAMENTE INDETERMINADAS

Las conclusiones de la sección anterior sobre la rigidez torsional son sumamente importantes para el análisis de las estructuras estáticamente indeterminadas. Cuando un miembro ofrece restricción mediante su rigidez torsional, la torsión resultante se afecta considerablemente por el valor de esa rigidez. Debido a que la reducción de rigidez, consecuencia del agrietamiento diagonal, es tanto más grande en la torsión que en la flexión, se debe tomar en cuenta el efecto del agrietamiento en la rigidez cuando se determinan los momentos flexionantes y torsionantes en una estructura estáticamente indeterminada.

Cuando se aseguran los mecanismos de falla dúctil, existe una gran latitud para adoptar un patrón estáticamente admisible de momentos. Las características par - giro de los miembros subreforzados por torsión son dúctiles (vea la fig. 8.18); en consecuencia, casi cualquier valor de rigidez entre el máximo teórico, que corresponde al estado no agrietado, y cero, conduciría a la misma carga última en la estructura. Sin embargo, las consideraciones del control del ancho de las grietas bajo cargas del servicio sugieren que un análisis basado en la rigidez en el estado agrietado, tanto para flexión como para torsión, según sea apropiado, conducirían al patrón de momentos más satisfactorio bajo las cargas de servicio.

Se ha observado[8.31] que en las vigas de fachada que soportan vigas secundarias de pisos en flexión y torsión (semejantes al arreglo de la fig. 8.2*c*) aproximadamente el mismo giro ocurre al nivel de la carga de servicio, sin importar la cantidad de acero por torsión proporcionada. Es evidente que éste giro genera elevados pares en las vigas de fachada con mayor refuerzo por torsión. Se observó [8.31] concordancia satisfactoria con los valores basados en las propiedades de los miembros agrietados.

Un procedimiento adecuado de diseño para estructuras estáticamente indeterminadas evitaría introducir pares elevados, que produjeran un mínimo de refuerzo por torsión. En todo caso, sólo se pueden soportar grandes pares a costa de grandes giros, las que pocas veces se pueden proporcionar bajo condiciones de servicio. Parece que se puede hacer la suposición de cero rigidez torsional [8.31] para la mayoría de las situaciones, lo cual simplifica considerablemente el análisis. Sin embargo, es importante dar al menos refuerzo mínimo longitudinal y transversal en el alma con un espaciado pequeño en los miembros sujetos a torsión, para asegurar que el miembro pueda girar de manera dúctil sin exhibir anchos excesivos de grietas bajo cargas de servicio.[8.31]

8.10 BIBLIOGRAFIA

8.1 *Torsion of Structural Concrete,* American Concrete Institute, Detroit, Publicación especial 18, 1968, pág. 505

8.2 "Building Code Requirements for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78

8.3 K. G. Tamberg, "Aspects of Torsion in Concrete Structure Design"; pág. 7-68 de la Ref. 8.1.

8.4 E. P. Popov, *Introduction to Mechanics of Solids,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1968 pág. 571

8.5 C. Bach, *Elastizität and Festigkeit,* Springer, Berlín, 1911.

8.6 D. J. Victor, "Effective Flange Width in Torsion," *Journal ACI,* Vol 68, No. 1, enero de 1971, págs. 42-46.

8.7 A. Nádai, *Plasticity,* McGraw-Hill, Nueva York, 1931, pág. 349

8.8 P. F. Walsh, M. P. Collins, F. E. Archer, y A. S. Hall, "Experiments on the Strength of Concrete Beams in Combined Flexure and Torsion," UNICIV Report No. R-15, febrero de 1966, University of New South Wales, Kensington, Australia, pág. 59

8.9 D. J. Victor, "Reinforced Concrete *T*-Beams Without Stirrups Under Combined Moment and Torsion," *Journal ACI,* Vol. 65, No. 1, enero de 1968.

8.10 U. Ersoy y P. M. Ferguson, "Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Shear—Experimental Trends"; págs. 441-460 de la Ref. 8.1.

8.11 M. S. Mirza y J. O. McCutcheon, "Ultimate Strength Design of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Loadings," *Transactions of the Engineering Institute of Canada* Vol. 12, No. A-3, marzo de 1969, págs. I-VIII.

8.12 T. T. C. Hsu, "Torsion of Structural Concrete—Plain Concrete Rectangular Sections", pág. 203-238 de la Ref. 8.1.

8.9 D. J. Victor, "Reinforced Concrete *T*-Beams Without Stirrups Under Combined Moment and Torsion," *Journal ACI,* Vol. 65, No. 1, enero de 1968, págs. 29-36.

8.13 A. H. Mattock, "How to Design for torsion"; pp. 469-495 de la Ref. 8.1.

8.14 L. E. Farmer y P. M. Ferguson, "*T*-Beams Under Combined Bending, Shear and Torsion," *Journal ACI,* Vol. 64, No. 11, noviembre de 1967, págs. 757-766.

8.15 U. Ersoy y P. M. Ferguson, "Behavior and Strength of Concrete *L*-Beams Under Combined Torsion and Shear," *Journal ACI,* Vol. 64, No. 12, diciembre de 1967, págs. 793-801.

8.16 E. Rausch, *Drillung (Torsion), Schub und Scheren im Stahlbetonbau,* Deutscher Ingenieur Verlag, Berlín, 1953, 168 págs.

8.17 P. Lampert, "Bruchwiderstand von Stahlbetonbalken unter Torsion und Biegung." Bericht No. 26, Institut für Baustatik, ETH Zurich, 1970, 189 págs.

8.18 CEB-FIP, *International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures,* Comité Européen du Béton, París, junio 1970. (Edición en ingles publicada por la Cement and Concrete Association, Londres, 80 págs.)

8.19 P. Lampert y M. P. Collins, "Torsion, Bending and Confusion—An Attempt to Establish the Facts," *Journal ACI,* Vol. 69, No. 8, agosto de 1972, págs. 500-504.

8.20 T. T. C. Hsu, "Torsion of Structural Concrete—Behaviour of Reinforced Concrete Rectangular Members"; págs. 261-306 de la Ref. 8.1.

8.21 D. Mitchell, P. Lampert, y M. P. Collins, "The Effects of Stirrup Spacing and Longitudinal Restraint of the Behaviour of Reinforced Concrete Beams Subjected to Pure Torsion," Publicación 71-22 Universidad de Toronto, Departamento de Ingeniería Civil, octubre de 1971, 75 págs.
8.22 P. Lampert y B. Thürlimann, "Torsionsversuche an Stahlbetonbalken," Bericht No. 6506-2, Institut für Baustatik, ETH Zürich, junio de 1968, 101 págs.
8.23 P. Zia, "Torsion Theories for Concrete Members"; págs. 103-132 de la Ref. 8.1.
8.24 H. M. Liao y P. M. Ferguson, "Combined Torsión in Reinforced *L*-Beams with Stirrups," *Journal ACI,* Vol. 66, No. 12, diciembre de 1969, págs. 986-993.
8.25 "Tentative Recommendations for the Design of Reinforced Concrete Members to Resist Torsion," Informado por el comite 438 del *ACI, Journal ACI,* Vol. 66, No. 1, enero de 1969). págs. 1-23: No. 7 julio de 1969, págs. 576-588.
8.26 M. P. Collins, P. F. Walsh, F. E. Archer, y A. S. Hall, "Reinforced Concrete in Torsion", UNICIV Report No. R-31, marzo de 1968, University of New South Wales, Kensington, Australia, 339 págs.
8.27 H. J. Cowan y I. M. Lyalin, *Reinforced and Prestressed Concrete in Torsion*, Edward Arnold, Londres, 1965, 138 págs.
8.28 D. W. Kirk y S. D. Lash, "*T*-Beams Subject to Combined Bending and Torsion", *Journal ACI,* Vol. 68, No. 2, febrero de 1971, págs. 150-159.
8.29 F. Leonhardt, "Shear and Torsion in Prestressed Concrete", *European Civil Engineering*, Vol. 4, 1970, págs. 157-181.
8.30 K. Rahlwes, "Zur Torsionssteiffigkeit von Stahlbetonrechteckquerschnitten", *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 65, No. 9, septiembre de 1970, págs. 226-228.
8.31 M. P. Collins y P. Lampert, "Redistribution of Moments at Cracking—The Key to Simpler Torsion Design?" Universidad de Toronto, Departamento de Ingeniería Civil, Publicación 71-21, febrero de 1971, 49 págs.

9

Adherencia y anclaje

9.1 INTRODUCCION

9.1.1 Consideraciones básicas

Ya que muy raramente se aplica la carga externa directamente al refuerzo, el acero puede recibir su participación de la carga sólo del concreto que lo rodea. "Esfuerzo de adherencia" es el nombre que se le asigna al esfuerzo cortante en la entrecara de la varilla y el concreto que, al transferir la carga entre la varilla y el concreto que la rodea, modifica los esfuerzos del acero. Cuando se desarrolla de manera eficaz esta adherencia, permite que los dos materiales formen una estructura compuesta. El logro de una buena adherencia es el objetivo más importante del detallado del refuerzo en las componentes estructurales.

Las fuerzas de adherencia se miden por la razón de cambio en la fuerza en las varillas de refuerzo. El esfuerzo de adherencia no existe, a menos que los esfuerzos del acero cambien entre dos cualesquiera secciones. El esfuerzo de adherencia u, que se acostumbra definir como una fuerza cortante por área unitaria de superficie de varilla, esta dado por

$$u = \frac{q}{\Sigma o} = \frac{\Delta f_s A_b}{\Sigma o} = \frac{d_b}{4}\Delta f_s \tag{9.1}$$

en donde q = cambio de la fuerza de la varilla en la longitud unitaria
Σo = área superficial nominal de una varilla de longitud unitaria
d_b = diámetro nominal de la varilla
Δf_s = cambio del esfuerzo del acero en la longitud unitaria
A_b = área de la varilla

La resistencia de adherencia constituía un problema más serio cuando sólo se utilizaban varillas comunes de refuerzo. Las varillas con superficie

corrugada proporcionan un elemento adicional de resistencia de adherencia y de seguridad. Por otra parte, el comportamiento de las varillas corrugadas, en especial la introducción de aceros de alta resistencia y varillas de diámetro grande, presentó algunos nuevos problemas. Esto ha originado la necesidad de volver a examinar las consideraciones convencionales de la adherencia.[9.1]

Ya que los requerimientos de los códigos son completamente empíricos, en este capítulo no se estudian a fondo muchas reglas de diseño. Sin embargo, el diseñador debe percatarse de los aspectos de adherencia y anclaje que pueden afectar críticamente el comportamiento estructural. En consecuencia, éstos se examinan en cierta extensión para permitir al diseñador detallar con eficiencia el refuerzo.

El comité 408 del ACI[9.2] ha informado de varios problemas de adherencia que requieren una aclaración. El informe incluye una buena bibliografía.

Los esfuerzos de adherencia en los miembros de concreto reforzado se originan en dos casos claramente distintos: del anclaje de las varillas y del cambio de la fuerza de la varilla a lo largo de su longitud, debido al cambio en el momento flexionante a lo largo del miembro.

9.1.2 Anclaje o longitud de desarrollo

Una varilla se debe extender a una distancia l_d más allá de cualquier sección a la que se requiera para desarrollar una fuerza dada, en donde se requiere la distancia l_d para trasmitir la fuerza de la varilla al concreto por adherencia. Si se especifica el esfuerzo u de adherencia promedio, que se supone que esta distribuido uniformemente en toda su longitud, entonces las consideraciones de equilibrio (fig. 9.1*a*) rinden la siguiente relación:

$$T = A_b f_s = u\Sigma o l_d \tag{9.2a}$$

En consecuencia, la longitud de desarrollo queda como

$$l_d = \frac{d_b}{4u} f_s \tag{9.2b}$$

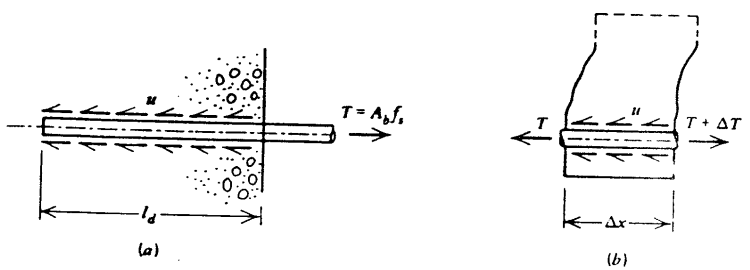


Figura 9.1. Generación de anclaje y adherencia por flexión.

Algunos códigos especifican valores de seguridad para el esfuerzo u de adherencia por anclaje, permitiendo que la longitud de desarrollo se calcule a partir de la ec. 9.2*b*. El código de ACI[9.3] prescribe la longitud l_d mínima de desarrollo para distintos casos de diseño. En la sección 9.4 se proporcionan las recomendaciones del ACI para l_d

9.1.3 Adherencia por flexión

En el capítulo 7 se demostró que las fuerzas de adherencia ΔT se desarrollan a lo largo del refuerzo de flexión en el claro a cortante de cualquier viga (véase las figs. 7.7 y 7.14). Si se supone que los esfuerzos de adherencia u están distribuidos uniformemente entre dos secciones cualesquiera próximas entre sí, el equilibrio de una longitud corta de varilla (fig. 9.1*b*) requiere que $\Delta T = u\Sigma o\Delta x$. Sin embargo, para que ocurra la acción de viga ideal como se estudió en la sección 7.3.3, la fuerza T de tensión interna debe variar en la misma proporción que el momento flexionante externo M. (Véase también la ec. 7.10) En consecuencia,

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{jd} = \frac{V}{jd}\Delta x$$

y por tanto

$$u = \frac{V}{jd\Sigma o} \tag{9.3}$$

Esta ecuación indica que cuando la razón de cambio del momento flexionante externo (por ejemplo, la fuerza cortante) es alta, el esfuerzo de adherencia por flexión también puede exhibir alta intensidad. Sin embargo, la ec. 9.3 simplifica grandemente la situación, y ni siquiera predice con aproximación la magnitud del esfuerzo real de adherencia, lo que se debe a que la presencia de grietas en el concreto, a intervalos discretos a lo largo de un miembro, produce esfuerzos adicionales de adherencia debidos a la tensión que trasmite el concreto entre las grietas (véase la fig. 6.22). Incluso cuando la fuerza cortante es cero (región de momento flexionante constante), se desarrolla un esfuerzo de adherencia. Sin embargo, se ha observado que si se dispone de longitud de anclaje suficiente para las varillas, no ocurre la falla originada en el esfuerzo de adherencia por flexión. Las consideraciones de adherencia por flexión requieren que se verifique la longitud de anclaje en las regiones de los miembros donde el momento flexionante es cero (en los soportes simples y en puntos de inflexión). En tales regiones, el área del acero a tensión puede ser pequeña y la fuerza cortante grande, lo cual produce elevados esfuerzos de adherencia por flexión. En la sección 9.5 se muestran las recomendaciones del código[9.3] del ACI para el anclaje que satisfacen las condiciones de adherencia por flexión.

9.2 LA NATURALEZA DE LA RESISTENCIA POR ADHERENCIA

9.2.1 Características básicas de la resistencia por adherencia

A menudo se considera que la resistencia por adherencia de las varillas comunes es por adhesión química entre la pasta del mortero y la superficie de la varilla. Sin embargo, incluso los esfuerzos bajos provocan suficiente deslizamiento para romper la adhesión entre el concreto y el acero. Una vez que ocurre el deslizamiento, la única manera de desarrollar adherencia adicional es mediante fricción y por la acción de cuña de pequeñas partículas de arena desalojadas entre la varilla y el concreto que la rodea. La resistencia por fricción depende de las condiciones superficiales del acero. La fig. 9.2, que se tomó de la obra de Rehm[9.4], muestra perfiles superficiales típicos para varillas redondas comunes bajo distintas condiciones de oxidación. La variación en la aspereza de la superficie es significativa, y no es de sorprender que la mayoría de los diseñadores prefieran utilizar acero en condiciones ligeramente oxidadas. Cuando se sujetan las varillas redondas comunes a prueba normal de carga, la falla ocurre cuando se vence la resistencia de adhesión y friccional, y generalmente las varillas se salen del concreto que las encierra.

Las varillas corrugadas tienen una capacidad muy grande de adherencia, debido a la trabazón que ocurre entre las costillas y el concreto que las rodea. La resistencia por adherencia que se desarrolla entre dos costillas de una varilla (véase la fig. 9.3) está asociada con los siguientes esfuerzos:

1. Esfuerzos cortantes v_a, desarrollados por medio de adhesión a lo largo de la superficie de la varilla.
2. Esfuerzos de apoyo f_b, contra la cara de la costilla.
3. Esfuerzos cortantes v_c, que actúan en la superficie cilíndrica de concreto entre las costillas adyacentes.

Se puede obtener la relación entre estos esfuerzos y la fuerza por transmitir al concreto por adherencia, en una longitud corta de varilla entre los centros de las costillas de un requerimiento simple de equilibrio, en la forma siguiente:

$$\Delta T = \pi d_b'(b + c)v_a + \pi \frac{d_b''^2 - d_b'^2}{4} f_b \approx \pi d_b'' c v_c \qquad (9.4)$$

en donde se puede identificar cada término en la fig. 9.3.

Al aumentar la carga, inevitablemente se pierde la adhesión a lo largo de la superficie de la varilla. La resistencia restante por cortante friccional es muy pequeña en comparación con la resistencia por apoyo desarrollada alrededor de las costillas; en consecuencia, se puede ignorar a v_a para fines prácticos. Es posible simplificar la relación entre las dos importantes com-

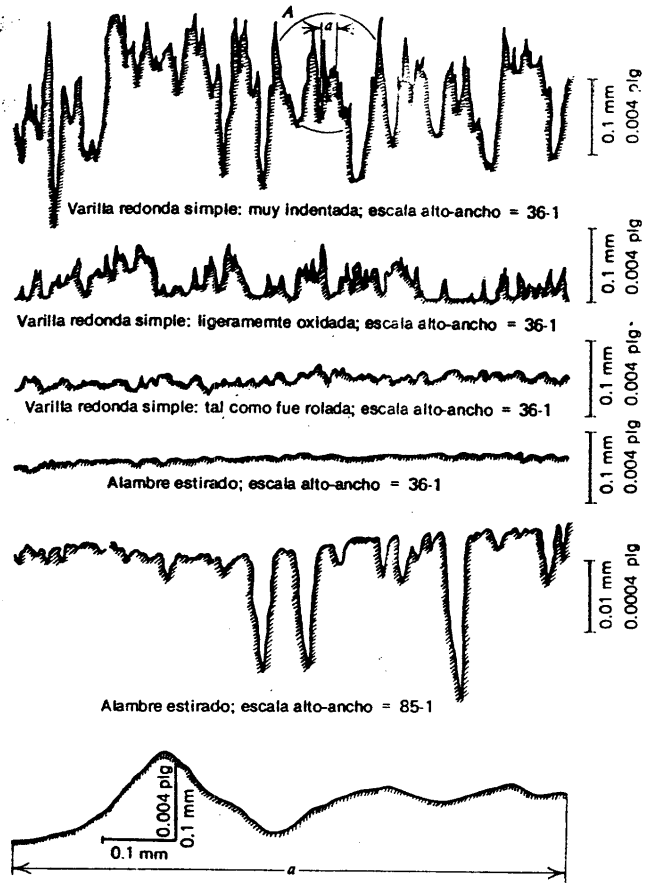


Figura 9.2. Superficie amplificada de varillas lisas de refuerzo.[9.4]

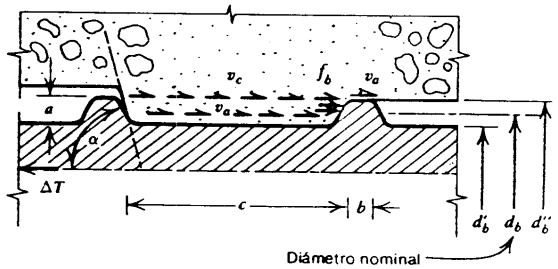


Figura 9.3. Esfuerzos entre dos costillas de una varilla corrugada.

ponentes restantes del desarrollo de la fuerza de adherencia, f_b y v_c, como sigue:

1. Ya que $b \approx 0.1c$, el espaciado de las costillas es aproximadamente c.
2. Ya que $a \approx 0.05d_b'$, el área de apoyo de una costilla es

$$\pi \frac{d_b''^2 - d_b'^2}{4} \approx \pi d_b a$$

en que d_b es el diámetro nominal de la varilla.
En consecuencia, de la ec. 9.4 se tiene $\Delta T = \pi d_b a f_b \approx \pi d_b c v_c$; por tanto,

$$v_c \approx \frac{a}{c} f_b \tag{9.5}$$

Rehm[9.4] tuvo éxito al tratar de relacionar distintos aspectos del problema de adherencia con el parámetro geométrico a/c. Encontró el rendimiento más satisfactorio de una varilla ahogada en concreto en una longitud corta c, cuando a/c estaba en la proximidad de 0.065.* Cuando las costillas son altas y están espaciadas estrechamente, el esfuerzo cortante v_c gobierna el comportamiento y la varilla se sale. Cuando el espaciado de las costillas es mayor que aproximadamente 10 veces la altura de estas, el concreto parcialmente aplastado puede formar una cuña frente a la costilla, y normalmente se presenta falla por la fisuración del concreto que la rodea. El concreto frente a la costilla puede soportar una presión de apoyo varias veces superior a la resistencia a aplastamiento del cilindro de concreto, debido a la condición confinada de éste. En la fig. 9.4 se ilustran los dos tipos de mecanismo de falla asociados con la costilla. Es claro que la geometría de las varillas corrugadas debe ser tal que no pueda ocurrir una falla por extracción cortante (fig. 9.4*a*). En las siguientes secciones se estudian los factores que pueden afectar la capacidad última y el comportamiento de servicio de las varillas corrugadas, que se ajustan a las condiciones de la fig. 9.4*b*.

Uno de los aspectos más importantes de la adherencia es su efecto en el desarrollo de grietas, que está estrechamente relacionado con las características de deslizamiento de adherencia de un tipo específico de varilla en distintas situaciones. Hablando en términos generales, conforme sea menor el deslizamiento asociado con una fuerza utilizable de adherencia, mejor será la calidad de la adherencia.

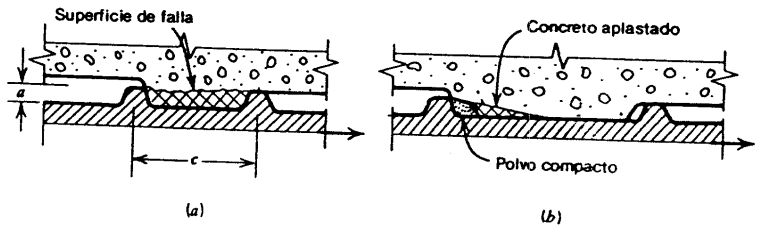


Figura 9.4. Mecanismos de falla en las costillas de varillas corrugadas. (*a*) $a/c > 0.15$ (*b*) $a/c < 0.10$.

*Los requerimientos de deformación del ASTM A 305 son tales[9.6] que $0.057 < a/c < 0.072$.

9.2.2 La posición de las varillas con respecto al colado del concreto que las rodea

La relación de carga-deslizamiento de adherencia, para las varillas corrugadas, está afectada primordialmente por el comportamiento del concreto que está inmediatamente frente a las costillas. La calidad del concreto en esta región depende de su posición relativa cuando se cuela. En el capítulo 7 se llamó la atención al efecto de la ganancia de agua y sedimentación bajo varillas de refuerzo y bajo partículas de agregado grueso con relación a la acción de dovela. Como resultado, se puede formar una capa suave y esponjosa de concreto bajo las costillas. Cuando se deben desarrollar esfuerzos de apoyo de elevada intensidad contra dicha zona suave, pueden ocurrir grandes deslizamientos. La fig. 9.5 muestra cómo se afectan tres varillas en distintas formas por una capa porosa de concreto, aunque todas tiendan al desarrollo de la misma carga última. En estas pruebas,[9.4] el esfuerzo calculado de apoyo frente a una costilla fue superior a 7 veces la resistencia de cubo a compresión del concreto.

El efecto de la posición de colado en la adherencia es todavía más severo para las varillas redondas comunes. La fig. 9.6 indica que la resistencia por adherencia máxima se reduce drásticamente en el caso de varillas horizontales en comparación con varillas verticales.[9.4] Las curvas superiores de cada par se obtuvieron para varillas fuertemente oxidadas y con indentaciones superficiales. La curva inferior de cada par corresponde a varillas de superficies lisas.

Se espera que las varillas superiores de una viga tengan cualidades más pobres de adherencia que las varillas inferiores, ya que la ganancia de agua y aire es mayor bajo las varillas superiores. Además el movimiento descendente relativo del concreto que las rodea, provocado por el asentamiento de la mezcla fresca, puede ser grande. La cantidad de asentamiento que ocurra depende del grado de sangrado del concreto fresco y de la razón a la que se permita escapar al agua de la forma. Welch y Patten estudiaron este efecto y compararon el rendimiento de la adherencia de las varillas rodeadas por concreto en formas de madera con fugas y en cimbras de acero bien selladas.[9.5] En éstas últimas también retardaron el colado del concreto durante 40 minutos. Sus resultados (fig. 9.7) demuestran el efecto profundo del asentamiento en la adherencia, especialmente para las varillas superiores. El código del ACI[9.3] reconoce este fenómeno y exige una longitud de desarrollo excedente en 40% para las varillas corrugadas coladas superiores.

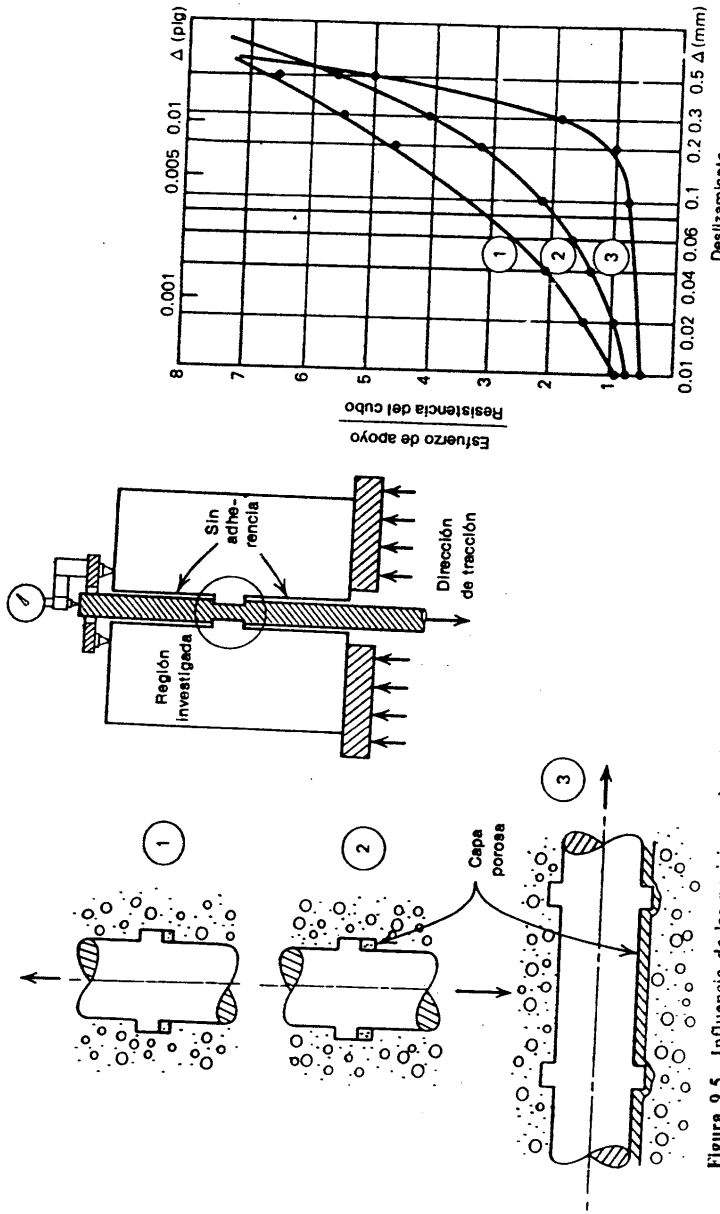


Figura 9.5. Influencia de las posiciones de colado en el comportamiento de la adherencia. [9.4]

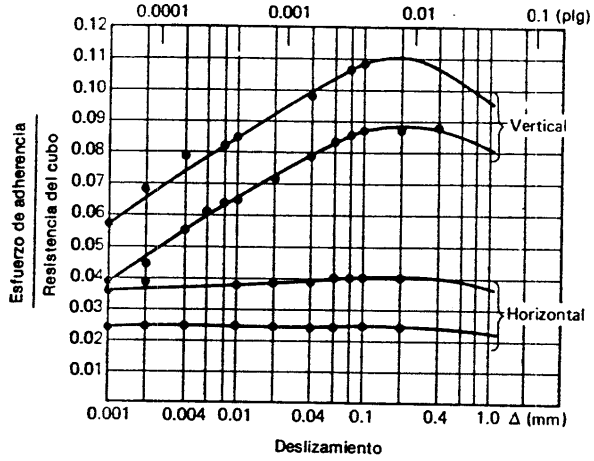


Figura 9.6. Relación de carga-deslizamiento para una varilla redonda lisa del núm. 5 (16 mm) en distintas posiciones de colado. [9.4]

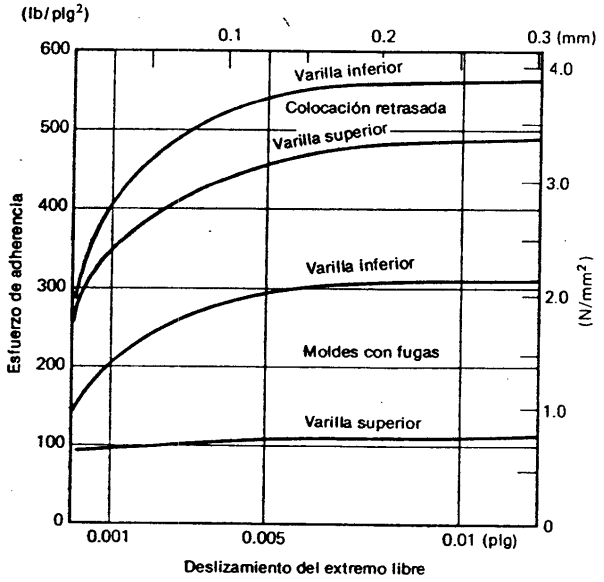


Figura 9.7. Relación de esfuerzo de adherencia-deslizamiento para varillas redondas lisas, afectada por el asentamiento del concreto fresco. [9.5]

9.2.3 Perfiles de varillas y condición de su superficie

La variación en el ángulo entre la cara de la costilla y el eje de la varilla (ángulo α en la fig. 9.3) no parece afectar la resistencia por adherencia, si este ángulo es mayor de 70°. Cuando el ángulo α esta entre 45° y 70°, las corrugaciones deben invertirse en dirección a cada lado o en los lados opuestos de la varilla.[9.6] Pruebas especiales de extracción, utilizando especímenes de varillas con una sola costilla, indicaron que si el ángulo α es mayor de 40°, la fricción entre la cara de la costilla y el concreto es suficiente para restringir el deslizamiento a lo largo de esta entrecara.[9.7] Entonces es probable que el deslizamiento de la varilla sea principalmente atribuible al aplastamiento del concreto frente a las costillas de las varillas (véase la fig. 9.4*b*). Por otra parte, si el ángulo α es pequeño y la superficie lisa, el deslizamiento puede ocurrir a lo largo de la cara de la costilla, y ésta tiende a empujar al concreto alejándolo de la varilla.[9.8] Esta acción de cuña puede ser una causa principal de fisuración longitudinal a lo largo de la varilla

No parece que los distintos grados de oxidación superficial o escamación ordinaria afecten adversamente las características de adherencia de las varillas corrugadas, si el paso unitario de un tramo limpio de varilla satisface los requerimientos mínimos de las especificaciones estándar. Kemp y colaboradores[9.9] determinaron que no es necesario limpiar la superficie de la varilla antes de utilizarla en la construcción de concreto. Para un medio ambiente dado que provoca oxidación, el espesor de ésta será aproximadamente el mismo para todos los tamaños de varillas, por lo cual las de mayores diámetros con costillas más altas son menos afectadas por la oxidación.

9.2.4 El estado de esfuerzos en el concreto circundante

En las secciones anteriores se examinaron las condiciones que prevalecen en la vecindad inmediata de una costilla de una varilla corrugada. Para permitir que se desarrolle la resistencia completa de una varilla, es necesario trasmitir fuerzas de adherencia a través de numerosas costillas adyacentes, por lo que las condiciones de esfuerzos en el concreto circundante fluctúan a lo largo de una varilla ahogada y afectan el rendimiento de la adherencia. No es posible obtener la resistencia por adherencia o anclaje de una varilla a partir de la suma simple de la resistencia por adherencia de un número dado de costillas individuales.

Como se ilustra en la fig. 9.8, los esfuerzos en el concreto que rodea a una varilla corrugada inducen grietas y deformaciones del concreto. Los esfuerzos de adherencia u, que se transmiten al concreto, sujetan al concreto de recubrimiento a tensión excéntrica. Las deformaciones del concreto, producto de los esfuerzos generados de esa manera, tienden a separar al concreto de éste acero en la proximidad de la grieta grande. En-

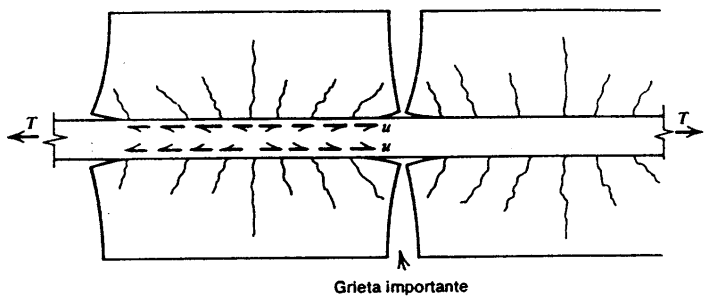


Figura 9.8. Concreto deformado entre grietas transversales de un miembro en tensión. [9.8]

tonces se alcanza la resistencia a tensión de la adherencia entre el acero y el mortero, y el concreto que rodea a la varilla se separa del acero. También se pueden formar numerosas grietas secundarias internas que pueden no propagarse a la superficie externa del concreto. En las varillas comunes se puede esperar que desaparezcan completamente los esfuerzos de adherencia donde haya ocurrido la separación entre el acero y el concreto. Con las varillas corrugadas, se deben transmitir las fuerzas de adherencia en esta área únicamente mediante apoyo de las costillas, como se indica en la fig. 9.9. Parte de la tensión del concreto se pierde cuando una grieta primaria se abre cerca de la superficie de la varilla. Inyectando tinta entre la varilla y el concreto que la rodeaba Goto[9.10] encontró grietas secundarias inclinadas que radiaban desde cada costilla (véase la fig. 9.9). También verificó experimentalmente la separación entre la varilla y el concreto en la proximidad de la grieta primaria.

Cuando el concreto se separa de alrededor de una varilla en una grieta primaria, aumenta la circunferencia de la superficie del concreto que anteriormente estaba en contacto con aquélla; en consecuencia, se inducen

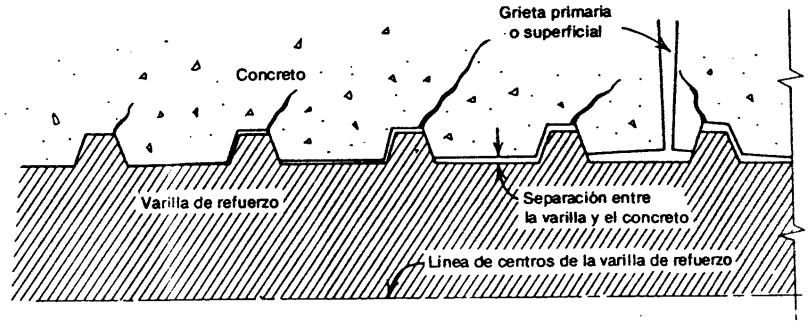


Figura 9.9. Sección a través de una varilla de refuerzo y concreto, que muestra la separación que ocurre cerca de una grieta primaria. [9.8]

esfuerzos perimetrales de tensión. Estos esfuerzos pueden conducir a grietas de fisuración longitudinal. Lutz y Gergely determinaron la magnitud probable de estos esfuerzos mediante estudios con elementos finitos de los modelos correspondientes.[9.8]

Cuando se esta alcanzando la capacidad última en la transferencia de adherencia, hay aplastamiento frente a las costillas. El polvo de concreto compactado, que se extiende frente a la costilla, a una distancia hasta de tres veces la altura de ella, forma una cuña plana (fig. 9.4*b*), que tiende a apartar al concreto todavía más de la varilla. En consecuencia, se generan esfuerzos adicionales a tensión perimetral que pueden producir una falla por fisuración.

El concreto que rodea a una varilla específica puede estar sujeto a esfuerzos distintos de los generados por adherencia, debido a que participa en otras acciones estructurales. En la intersección de las vigas en los marcos de construcción, la compresión o tensión se induce transversalmente a las varillas. Análogamente, se puede inducir tensión transversal en el concreto alrededor de las varillas superiores de vigas que soportan losas continuas. Dichos esfuerzos transversales de tensión pueden conducir a agrietamiento prematuro a lo largo de las varillas principales y afectar adversamente su rendimiento de adherencia. Recíprocamente, la compresión transversal puede proporcionar confinamiento benéfico a las varillas ahogadas.

9.2.5 La falla por fisuración

En los casos en que se suministra longitud adecuada de ahogamiento en una masa grande de concreto; no es posible producir una falla de adherencia (extracción) con varillas corrugadas estándar. Más bien, la varilla se fractura en su extremo cargado. Sin embargo, en la mayoría de las componentes estructurales, el área del concreto que rodea a una varilla o grupo de varillas es realtivamente pequeño. En tal caso, el modo común de falla es la fisuración, ya que el concreto que las rodea no puede soportar los esfuerzos de tensión perimetral.

Un caso especialmente severo se origina en el claro a cortante de vigas, en que se puede inducir la fisuración a lo largo del refuerzo de flexión por la combinación de los siguientes eventos:

1. Esfuerzos de tensión perimetral generados en la proximidad de cada grieta por flexión.
2. Esfuerzos de tensión perimetral o transversal inducidos por la acción de cuña de las deformaciones y por el concreto comprimido en las costillas (fig. 9.4*b*) cuando es necesario transferir grandes fuerzas de adherencia.
3. Esfuerzos de tensión transversal debidos a la acción de dovela del refuerzo de flexión. Este evento esta asociado con el desplazamiento a cortante a lo largo de las grietas diagonales. Gergely encontró que las fuerzas de dovela reducen la resistencia por adherencia, si no hay presión de confinación, lo que produce mayores deslizamientos para una carga dada.[9.7] En la fig. 7.8 se mostraron las vigas con grietas de fisuración provocadas por la acción de dovela.

Un grupo de varillas, especialmente cuando están espaciadas estrechamente, crea una situación más adversa que una sola varilla, como se ilustra en la fig. 9.10 que muestra grietas de fisuración[9.1] tipicas observadas.

9.2.6 Confinamiento

Se puede restringir el ensanchamiento de las grietas de fisuración, si se puede confinar el concreto que rodea una varilla. En determinadas áreas, tal como en los extremos apoyados simplemente de las vigas, normalmente se dispone de compresión transversal de la fuerza de reacción. La compresión transversal es benéfica al anclaje del refuerzo. En el capítulo 13 se extiende la atención a este tópico cuando se estudian distintos aspectos del detallado de los refuerzos.

Se ha encontrado que un mayor recubrimiento de concreto produce cierta resistencia aumentada contra la fisuración; sin embargo, el mejor rendimiento de adherencia no es proporcional al espesor del recubrimiento adicional. Para varillas de tamaño grande, el efecto benéfico no es el criterio para elegir un valor apropiado de los esfuerzos de adherencias promedio permisibles es muy significativo.[9.11] Como regla general, el efecto en la formación y anchos de las grietas, bajo la condición de carga de servicio para estas varillas. El recubrimiento adicional no proporciona protección contra un ancho[9.12] excesivo de las grietas superficiales (véase el capítulo 10). Como lo indica la fig. 9.11, las varillas superiores de tamaño mediano parecen beneficiarse más del recubrimiento adicional. La influencia del recubrimiento se elimina cuando la acción de dovela afecta la adherencia.

Los estribos, especialmente cuando se espacian estrechamente, impiden la apertura de grietas que se forman a lo largo de las varillas ahogadas y permiten que se trasmitan mayores fuerzas de adherencia. En muchos casos (fig. 9.10*c*) esto es posible solamente si se trasmiten esfuerzos cortantes mediante la trabazón del agregado a través de las grietas de fisu-

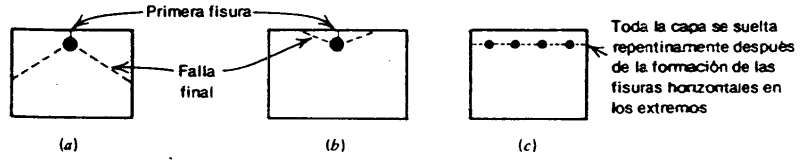


Figura 9.10. Grietas de rajadura en la falla.[9.1] (*a*) Caso típico. (*b*) En vigas muy anchas. (*C*) Con varillas espaciadas estrechamente.

	Tamaño de la varilla d_b	
	plg	mm
X	$\frac{3}{8}$	9.5
●	$\frac{11}{16}$	17.5
△	1	25.4

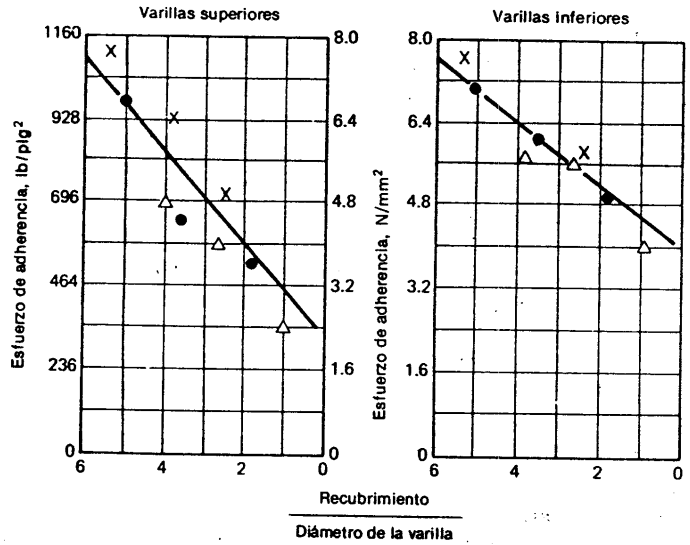


Figura 9.11. Efecto del zuncho en la resistencia de adherencia. [9.12]

ración. Los estribos no pueden impedir las grietas de fisuración, que siempre se forman cuando se utilizan varillas grandes (v. gr., núm. 11; diámetro de 35.8 mm); pero permiten que la fricción se transfiera a lo largo de las grietas, como se describió en el capítulo 7. Los estribos no parecen mejorar el control del ancho de las grietas, [9.11] pero aseguran que ocurra un tipo más dúctil de falla por adherencia.

Cuando se sitúan empalmes en las zonas críticas, se puede requerir refuerzo especial en la forma de espirales o aros. Se puede evaluar el rendimiento de ese refuerzo utilizando el concepto de transferencia de cortante de entrecara (véase la sección 7.8).

El objetivo del confinamiento mediante compresión transversal o refuerzo transversal es impedir una falla a lo largo de una grieta de fisuración potencial y obligar, de ser necesario, una falla por cortante (fig. 9.4*a*), que esta asociada con la máxima resistencia por adherencia posible. Las varillas más grandes se benefician más del confinamiento que las más pequeñas.

9.2.7 Cargas repetidas y cíclicas alternadas

Cuando se aumenta la fuerza a tensión en una varilla y se rompe la adherencia entre el acero y el concreto, ocurre cierto deslizamiento friccional antes de que se movilice la capacidad de apoyo total en una costilla. Después de retirar la carga de una varilla, se desarrolla resistencia friccional negativa, que explica parte de la tensión residual en la varilla y la compresión correspondiente en el concreto que la rodea. La deformación inelástica en la proximidad de las costillas, el microagrietamiento en el concreto y la liberación de las deformaciones de contracción produce cierto deslizamiento permanente, cuya magnitud depende primordialmente de la intensidad de la carga aplicada previamente. Por esta razón, las grietas formadas durante el tensado de una varilla no se cierran completamente después de que se elimina la carga. Bajo cargas repetidas, la resistencia friccional disminuye y produce un deterioro de la rigidez del mecanismo de adherencia. Bresler y Bertero [9.13] han utilizado experimentos instrumentados cuidadosamente para observar la pérdida de adherencia bajo cargas repetidas. La fig. 9.12 muestra gráficamente la distribución de deformaciones unitarias a lo largo de una longitud de 16 plg (406 mm) de una varilla corrugada del núm. 9 (28.6 mm de diámetro) ahogada en un cilindro de concreto de 6 plg (150 mm) de diámetro. Una ranura circular a la mitad de la distancia a lo largo del cilindro actuó como iniciador de la grieta. La distribución de la deformación a tensión a lo largo de esta probeta esta representada por las condiciones de adherencia alrededor de una varilla en la zona de momento constante de una viga, cuando las grietas están espaciadas a centros de 8 plg (203 mm). Las curvas muestran la existencia de esfuerzos elevados de adherencia a poca distancia de las grietas, al igual que la pérdida de adherencia entre grietas después de varios ciclos de cargas conforme el esfuerzo a tensión tiende a uniformarse en toda la longitud de la varilla. En una estructura de concreto reforzado esta pérdida de adherencia contribuiría a la pérdida global de rigidez.

Las consecuencias del deterioro de adherencia en un área de momento constante no son serias, ya que solamente afectan la rigidez y anchos de las grietas. El comportamiento de la zona de anclaje bajo carga repetida es mucho más importante, debido a que puede afectar la resistencia. Sujetando varillas del núm. 6 (19 mm de diámetro) a cargas repetidas estáticas y dinámicas en pruebas de extracción excéntrica, Perry y Jundi [9.14] encontraron que ocurría una redistribución gradual de los esfuerzos de adherencia de los extremos cargados a los descargados de las probetas. En sus pruebas, se alcanzó 80% de la resistencia estática última para varios cientos de ciclos de carga.

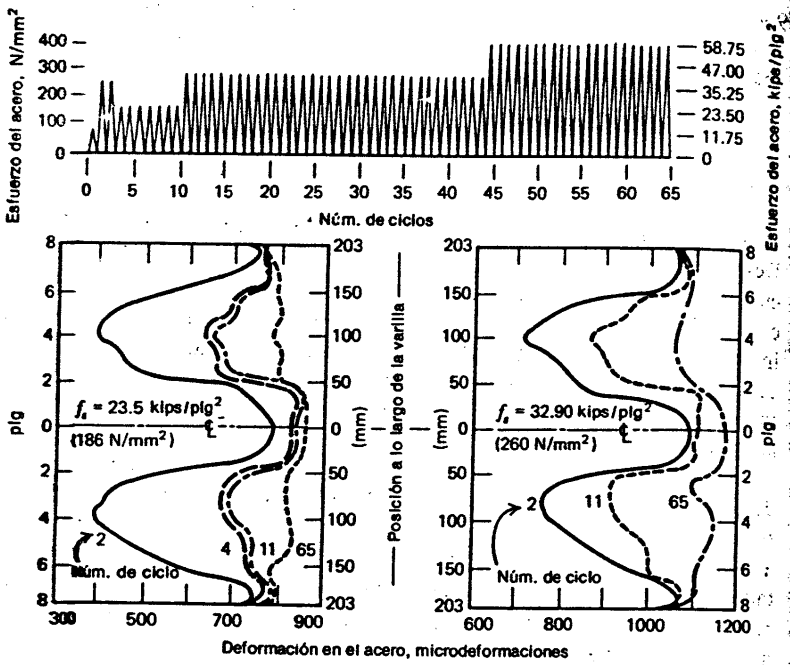


Figura 9.12. Deformaciones del acero a dos niveles de esfuerzo a lo largo de una varilla después de las cargas cíclicas. [9.13]

Durante los sismos pueden ocurrir cedencia alternada en tensión y compresión en una sección crítica, tal como en una entrecara de una junta columna-viga. La pérdida gradual de adherencia puede significar una penetración de la cedencia a la zona de anclaje, disminuyendo drásticamente la longitud de desarrollo efectivo, disponible para absorber la resistencia de cedencia de la varilla. Ismail y Jirsa [9.15] observaron la penetración de cedencia bajo sobrecarga cíclica hasta una distancia de 14 a 18 diámetros de varillas, cuando se sujetó el concreto en la zona de anclaje simultáneamente a una compresión transversal de 1000 lb/plg²(6.9 N/mm²). Se encontró que la penetración de cedencia en la zona de anclaje explicaba hasta 60% de la deflexión total en los voladizos de prueba. A menudo se encuentran en las estructuras condiciones menos favorables de esfuerzo transversal de las existentes en esta prueba. Este problema se examina con respecto a las juntas en el capítulo 13.

9.3 LA DETERMINACION DE LA RESISTENCIA UTILIZABLE POR ADHERENCIA

Tradicionalmente se ha determinado el rendimiento de adherencia de distintas varillas de refuerzo, empotradas en concreto de distintas resistencias, mediante pruebas de extracción. Generalmente, las varillas se extrajeron del concreto que las rodeaba, de tal manera que también se indujera compresión transversal contra ellas. Esta compresión transversal tenía un efecto benéfico en la resistencia por adherencia y, por tanto, no fue típica de los casos que se encuentran en las estructuras, razón por la cual se han propuestos distintas formas de probetas de pueba para eliminar la compresión transversal. En la fig. 9.13 se ilustran arreglos representativos de prueba. En estas pruebas, la resistencia por adherencia se expresa en términos del esfuerzo promedio de adherencia desarrollado por la fuerza de extracción alrededor de la superficie ahogada. Se sabe que los valores de esfuerzo de adherencia pico, que se ha determinado en algunos estudios, [9.17] exceden bastante el esfuerzo medio.

Las pruebas de extracción (figs. 9.13*a* a 9.13*e*) no son típicas de los casos que se encuentran en las vigas, ya que los principales parámetros que afectan la adherencia en las vigas de concreto reforzado son las fuerzas cortantes y las grietas diagonales consecuentes, el recubrimiento de concreto y las grietas de fisuración iniciadas por la acción de dovela. En consecuencia, se han propuesto otras formas de disposiciones de pruebas (véanse las figs. 9.13*f* y 9.13*g*). El comité 408 del ACI ha preparado una guía detallada para determinar la resistencia por adherencia en las probetas de viga. [9.18] Este documento permite mayor flexibilidad en la aplicación del estándar [9.19] relevante del ACI.

Pocas veces la resistencia por adherencia utilizable es una fracción dada de la resistencia por adherencia última, desarrollada en una prueba específica de extracción. Por lo general, el deslizamiento en el extremo cargado o descargado de la varilla gobierna la intensidad de adherencia "crítica" que se puede desarrollar bajo condiciones de carga de servicio, ya que este deslizamiento afecta los anchos de las grietas. En consecuencia, es importante que se determine la historia completa de la relación carga-deslizamiento cuando se realice una prueba de éste tipo. De acuerdo con Mathey y Watstein, [9.20] se puede definir el esfuerzo de adherencia "crítico" como el menor de los esfuerzos de adherencia asociado con un deslizamiento de extremo libre de 0.002 plg (0.05 mm) o con un deslizamiento del extremo cargado de 0.01 plg (0.25 mm) en pruebas de vigas como la de la fig. 9.13*k*. Este deslizamiento se puede afectar mucho por la posición de las varillas cuando se hace el colado. En las pruebas de extracción, [9.21] se ha observado cierto deslizamiento en el extremo libre de las varillas del colado superior, antes de que se desarrolle una resistencia significativa o un agrietamiento.

El deslizamiento en el extremo cargado de una varilla empotrada (v.gr., en la cara de una grieta) esta gobernado principalmente por la concentración de esfuerzos de adherencia en su proximidad inmediata. Un aumento en la longitud de empotramiento y una consecuente disminución del esfuerzo de adherencia promedio tiene poco efecto en el deslizamiento en el extremo cargado antes de que exceda 0.01 plg (0.25 mm). [9.21]

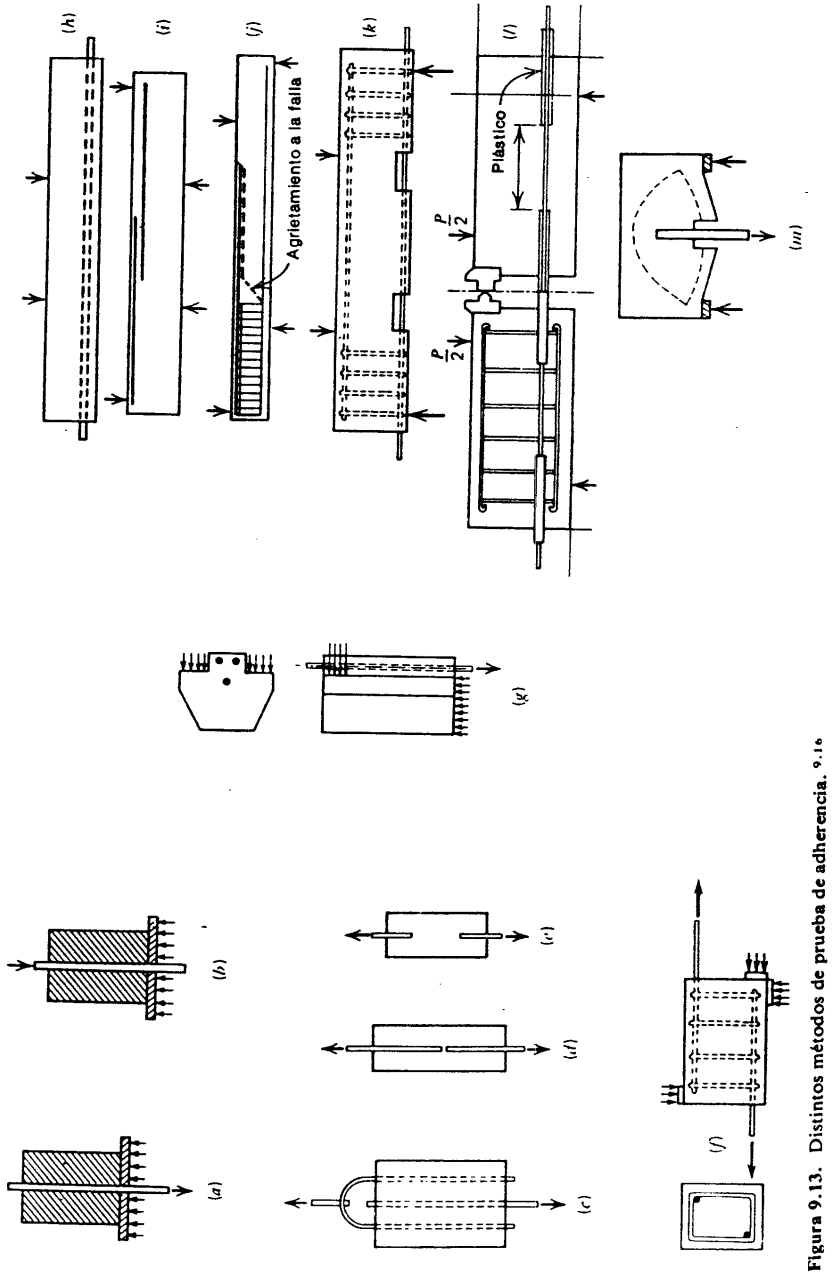


Figura 9.13. Distintos métodos de prueba de adherencia. [9.16]

La limitación del deslizamiento en el extremo cargado, tomada como un medio de un ancho aceptable de grieta de 0.02 plg (0.5 mm), puede fijar un límite superior a la resistencia utilizable de las varillas grandes. La fig. 9.14 presenta los resultados de Ferguson y colaboradores [9.21] de sus pruebas de extracción. La banda inferior indica los esfuerzos de tensión desarrollados en las varillas del colado superior e inferior de distintos tamaños a un deslizamiento de extremo cargado de 0.01 plg (0.25 mm). Si se supone que la carga última en la estructura produce esfuerzos en el acero 1.65 veces los inducidos a deslizamiento de 0.01 plg (0.25 mm), se obtiene la franja sombreada superior de la fig. 9.14. Estas observaciones no necesariamente son representativas de lo que se encuentra en las vigas, aunque la gráfica indica que el desarrollo de una resistencia de cedencia de 60 kip plg^2 (414 N/mm^2) o 40 kip plg^2 (276 N/mm^2) en las varillas del colado superior, mayores que el núm. 8 (25.4 mm de diámetro) ó núm. 14

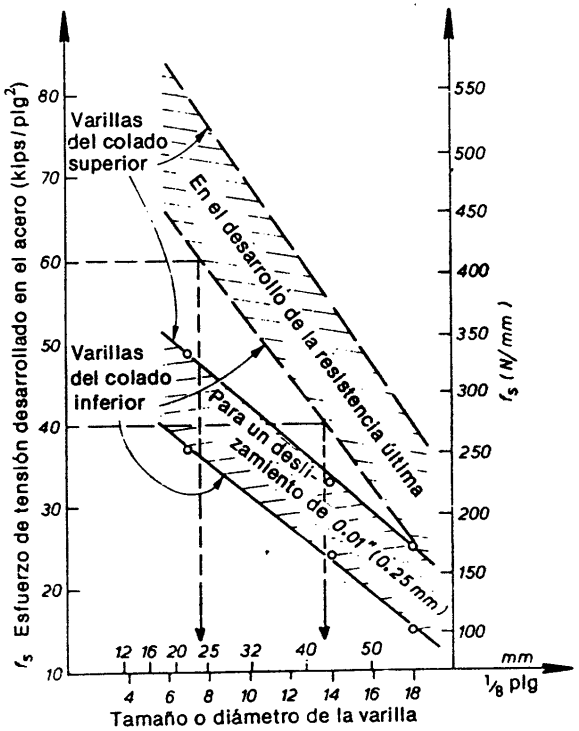


Figura 9.14. Esfuerzos desarrollados en probetas de extracción a deslizamiento de 0.01 plg (0.25 mm). [9.21]

(46 mm de diámetro) respectivamente, es probable que produzca anchos excesivos de grietas bajo la carga de servicio.

9.4 EL ANCLAJE DE LAS VARILLAS

9.4.1 Anclajes rectos para varillas con tensión

Por lo general es posible desarrollar toda la resistencia a tensión de una varilla corrugada en una sección, supuesto que la varilla se extienda en el concreto a distancia suficiente más allá de la misma sección. A la longitud de la varilla más allá de la sección requerida para desarrollar la resistencia de la varilla se le conoce como la longitud de anclaje o longitud de desarrollo. La longitud de desarrollo es una consideración en las secciones de momento máximo a lo largo de una viga y donde se corta una varilla vecina. No siempre se puede determinar con gran precisión el punto más allá del cual se requiere una longitud de desarrollo recta. Por esta razón, se debe dar una tolerancia liberal, además del corrimiento de momento mencionado en la sección 7.5.1, para establecer los puntos de referencia desde los cuales se deba de medir la longitud de desarrollo. La longitud l_d de desarrollo es directamente proporcional a la fuerza que se debe desarrollar e inversamente proporcional a la resistencia a tensión del concreto, ya que estos dos factores controlan la fisuración del concreto. Para varillas corrugadas del núm. 5 (16 mm de diámetro) al núm. 11 (35.8 mm de diámetro) en tensión, el código [9.3] del ACI indica que

$$l_d = (m_f)\frac{0.04 A_b f_y}{\sqrt{f'_c}} \quad \text{(plg)} \tag{9.6}$$

en donde todas las unidades están en libras y pulgadas.

El factor de modificación o de juicio m_f toma en cuenta: (1) el efecto adverso en las varillas en posición superior [l_d se aumenta en 40% en el caso de varillas con más de 12 plg. (305 mm) de concreto colado por debajo de las varillas], (2) la resistencia de cedencia del acero superior de 60,000 lb/plg^2 (414 N/mm^2), (3) la resistencia reducida del concreto con agregado ligero, (4) el efecto del recubrimiento y la separación lateral entre las varillas, (5) el uso de refuerzo de flexión excesivo en una sección y (6) el efecto de refuerzo helicoidal (l_d se reduce en 25% si la varilla está encerrada en una hélice apropiada de acero).

Se hacen provisiones análogas para varillas muy grandes y varillas más pequeñas que el núm. 6 (18 mm de diámetro). Se pudo obtener la misma longitud de desarrollo (ec. 9.6) utilizando la ec. 9.2*b* y especificando que $u = 8\sqrt{f'_c}/m_f d_b$ (lb/plg^2).

El ejemplo 7.1, ilustrado en la fig. 7.38, demuestra el corte de varilla en posición superior con un margen para la longitud l_d, de desarrollo, de acuerdo con los requerimientos [9.3] del ACI.

9.4.2 Anclajes de gancho para varillas con tensión

Cuando la longitud recta de una varilla disponible para el anclaje es insuficiente, se puede doblar el refuerzo o formar un gancho para ayudar al anclaje. Los pioneros del concreto estructural reconocieron que los anclajes de ganchos para las varillas redondas lisas tienen ventajas claras.

En las pruebas de extracción diseñadas específicamente para obtener la resistencia de anclajes de ganchos, se eliminó la adherencia a lo largo de la porción recta de la varilla frente al gancho (vea la fig. 9.15). Las relaciones de carga-deslizamiento obtenidas de esas pruebas indican las cargas utilizables de anclaje disponibles de distintos tipos de ganchos. El deslizamiento se mide en el punto en que la varilla entra al concreto. Para varillas corrugadas, la distribución de deformaciones en el acero, medida a lo largo del gancho en semejantes pruebas, revela que la fuerza de la varilla se transfiere rápidamente al concreto y que generalmente la porción recta que sigue al gancho es inefectiva[9.22] (véase la figura 9.15). Para varillas lisas, los esfuerzos de tensión se reducen más lentamente a lo largo del gancho; en consecuencia, se puede obtener resistencia adicional de anclaje extendiendo la porción recta de la varilla que sigue al gancho.

La resistencia útil de un gancho también esta relacionada con un deslizamiento aceptable en el extremo cargado. Si no ocurre falla de fi-

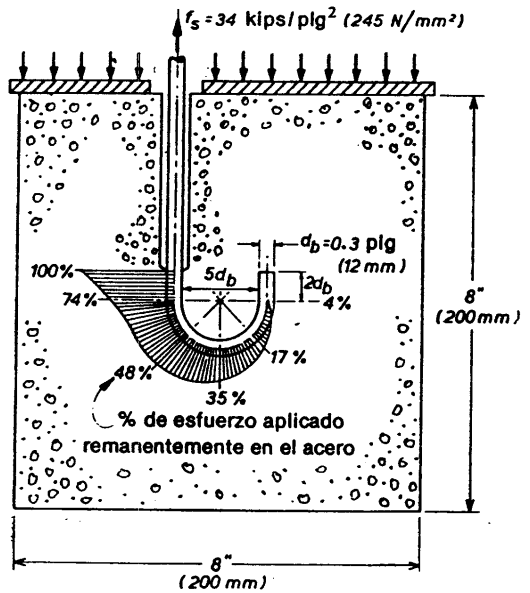


Figura 9.15. Prueba de extracción para varillas corrugadas con gancho.[9.22]

suración en el plano del gancho, el deslizamiento parece ser la norma. Para deslizamientos hasta de 0.001 plg (0.025 mm) se puede esperar una relación lineal entre la carga y el deslizamiento.[9.23] A un deslizamiento de 0.01 plg (0.25 mm) se puede hacer una comparación adecuada de la capacidad de carga de distintos tipos de anclaje con ganchos.

Los mayores esfuerzos de apoyo en el concreto se desarrollan a lo largo de la parte interior del gancho, cerca de la parte cargada de la varilla. En consecuencia, en éstas áreas, las propiedades del concreto que rodea a las varillas, tales como la porosidad y resistencia, pueden afectar apreciablemente el deslizamiento para cualquiera carga dada. La figura 9.16 muestra curvas típicas de carga-deslizamiento para ganchos a 180°, en distintas posiciones respecto al colado. La carga esta expresada en términos de la razón f_s/f'_{cu} en que f_s es el esfuerzo de tensión aplicado a la varilla frente al gancho y f'_{cu} es la resistencia de cubo del concreto que la rodea. Cada curva representa la media de 6 a 35 pruebas. Debido a la variación aleatoria de la calidad del concreto (por ejemplo, el grado de ganancia de agua) bajo el área de apoyo crítica, se ha observado una dispersión considerable en esas pruebas. Sin embargo, es evidente el rendimiento inferior de las varillas en posición superior, tales como los tipos 2 y 4 de la figura 9.16. En la figura 9.17 se compara la capacidad promedio de anclaje de los ganchos, en términos de f_s/f'_{cu} para tres distintos tamaños de varillas a distintos deslizamientos.[9.24] Para las pruebas ilustradas en las figuras 9.16 y 9.17 se utilizaron varillas corrugadas.

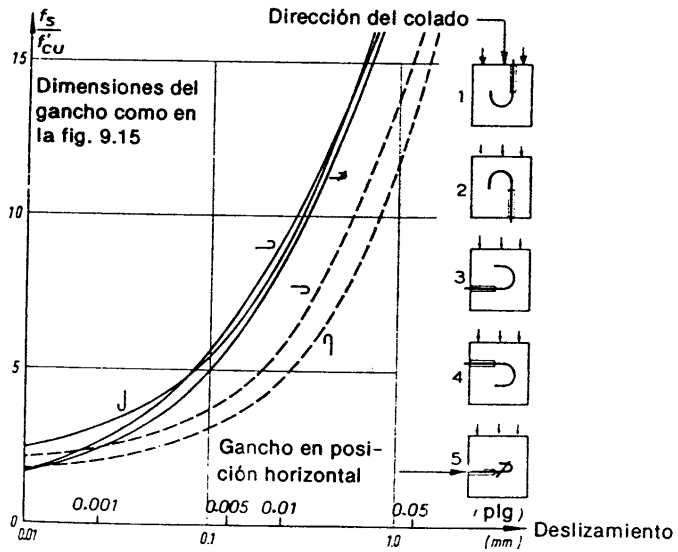


Figura 9.16. Relación de carga-deslizamiento para anclajes de gancho de varillas corrugadas.[9.24]

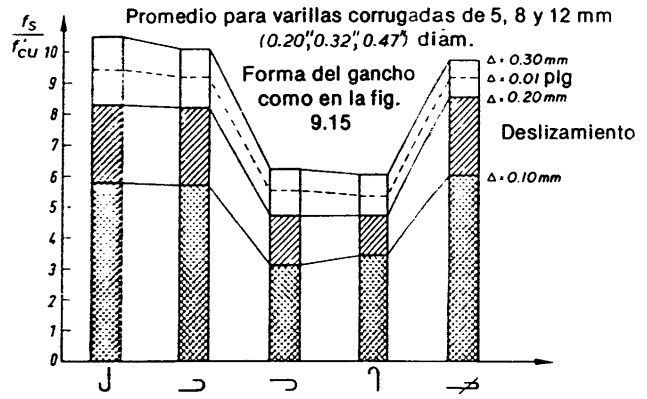


Figura 9.17. Influencia en la resistencia de adherencia para un deslizamiento dado de la posición del gancho durante el colado del concreto.[9.24]

Las pruebas de extracción de Rehm de anclajes enganchados también demostraron que un doblez con una vuelta de menos de 180° no proporciona necesariamente un anclaje superior con respecto a una varilla recta de la misma longitud.[9.24] Cuando se aprecia que un doblez introduce concentraciones de esfuerzos y consecuentemente grandes deformaciones locales en el concreto, que a su vez conducen a mayor deslizamiento en el extremo cargado de una varilla doblada empotrada, no es de sorprender que la varilla vertical recta proporcione el mejor rendimiento para la misma longitud de varilla empotrada. La figura 9.18*a*, en la que se comparan varillas con distintos ángulos de doblez, pero con longitudes idénticas empotradas (es decir, 10 diámetros de varillas), ilustra esta observación. Las diferencias en el rendimiento entre distintos ángulos de doblez se hacen menos significativas cuando el jalón en la varilla es contra la dirección del colado del concreto (véase la figura 9.18*b*), ya que en este caso las varillas ancladas se apoyan contra el concreto que no está afectado por la ganancia de agua y la sedimentación.

Una menor curvatura de la varilla en un doblez o gancho significa menor concentración de cargas, y en consecuencia, un menor deslizamiento en el extremo cargado del anclaje. Por lo tanto, un gancho de diámetro grande transmite una carga mayor para un deslizamiento aceptable dado. En la figura 9.19 se muestran datos típicos relativos a esta observación.

Cuando se dobla una varilla alrededor de una varilla transversal, como sucede en los anclajes de estribo, se pueden desarrollar esfuerzos de tensión de 10 a 30% mayores para la misma cantidad de deslizamiento.[9.22] Sin embargo, este beneficio sólo se puede obtener si existe contacto directo entre el gancho y la varilla transversal. Bajo condiciones locales normales, no se puede asegurar el contacto entre los estribos y el refuerzo principal

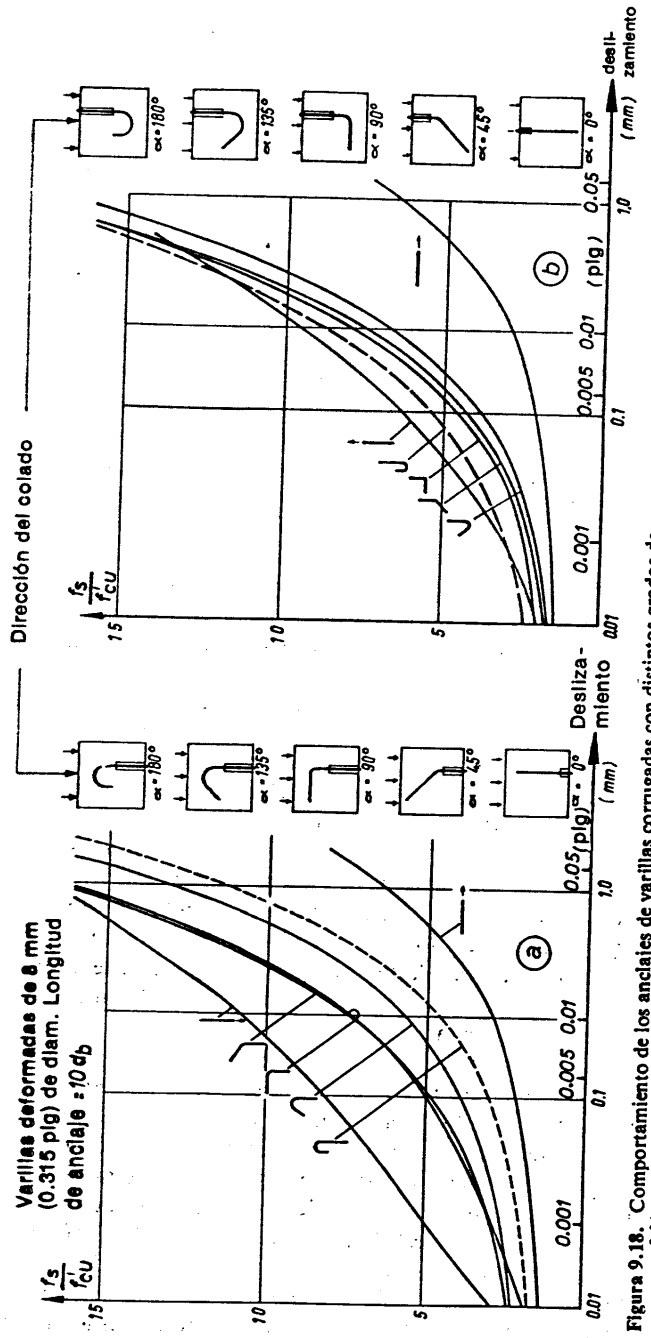


Figura 9.18. Comportamiento de los anclajes de varillas corrugadas con distintos grados de dobleces.[9.24] (*a*) Varillas de la colada superior. (*B*) Varillas de la colada inferior.

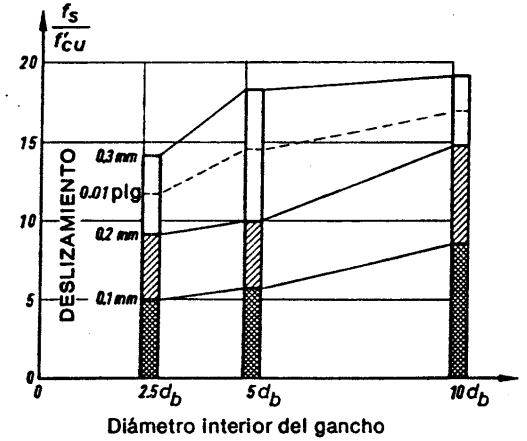


Figura 9.19. Efecto de la curvatura del gancho en el comportamiento del anclaje.[9.24]

de la viga (véase la figura 9.20). Además en la proximidad del punto de contacto entre un estribo y una varilla longitudinal, se puede esperar cierto deterioro en la calidad del concreto. Es probable que estos dos factores conduzcan a mayores deslizamientos a esfuerzos relativamente bajos en el estribo. El efecto de este deslizamiento en el ancho de las grietas diagonales y en la participación de los estribos en la resistencia a cortante, especialmente en las vigas poco peraltadas, puede ser significativo.

Para un gancho del tipo mostrado en la figura 9.15, el diámetro de la varilla parece no influir en la relación esfuerzo-deslizamiento del acero[9.22] hasta que se alcanza un deslizamiento de 0.02 plg (0.5 mm). Para un deslizamiento dado en los tipos usuales de concreto, la capacidad del gancho es proporcional a la resistencia del concreto. Los experimentos en la

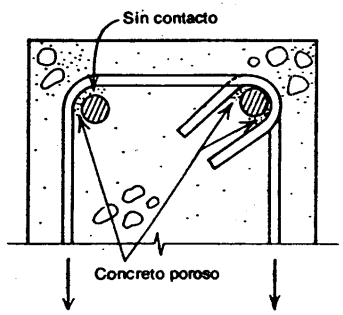


Figura 9.20. Anclaje de estribos.

Universidad Técnica de Munich[9.22] determinaron la siguiente relación

$$f_s^* = k_h f'_{cu} \tag{9.7}$$

en que f_s^* = esfuerzo del acero en el extremo cargado del gancho a un deslizamiento de 0.004 plg (0.01 mm)
f'_{cu} = resistencia de cubo a compresión del concreto
k_h = constante experimental dada en la tabla 9.1

Tabla 9.1 Valor de k_h

Posición de los ganchos	Tipo [a]	Varillas lisas	Varillas corrugadas
Ganchos de la colada inferior	1, 3	1.70	3.75
Ganchos de la colada superior	2, 4	1.20	2.00

[a] para la identificación del tipo de gancho, véase la fig. 9.16.

La resistencia a tensión del concreto puede limitar la capacidad de un gancho en la carga máxima, a menos que una compresión transversal o un refuerzo de confinamiento apropiado impida una falla de fisuración en el plano del gancho. Esta es la razón de que el código [9.3] del ACI indique que la capacidad del gancho depende de la resistencia a tensión del concreto que lo rodea y considera que los ganchos estándar pueden anclar una varilla con un esfuerzo de tensión igual a $f_h = K\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2, en que f'_c está en lb/plg^2 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2) y K está dada en la tabla 9.2. Se puede aumentar en 30% el valor de K cuando se proporciona un recubrimiento perpendicular al plano del gancho. El código [9.3] también especifica los perfiles y dimensiones de los ganchos estándar.

9.4.3 Anclaje para varillas con compresión

Los mecanismos por los cuales se anclan las fuerzas en varillas a tensión y compresión difieren significativamente. A lo largo de una varilla en compresión hay menos tendencia a que ocurra la fisuración, y se puede transmitir parte de la fuerza de compresión hacia el concreto mediante apoyo de extremo.[9.25] Sin embargo, la única manera como se puedan desarrollar esfuerzos significativos de apoyo en el extremo de una varilla cortada a escuadra es si hay una masa suficiente de concreto detrás del extremo de la varilla. Los códigos reconocen las mejores condiciones de desarrollo para las varillas en compresión, y de acuerdo con ello, especifican longitudes [9.3] mucho más cortas de desarrollo. En la sección 9.6.3, que estudia los empalmes a compresión, se estudian determinados problemas que pueden plantearse con relación al apoyo de extremo.

Tabla 9.2 Valores[a] de K

Tamaño de la varilla (mm)	Varillas superiores: f_y = 60 kips/plg^2 (414 N/mm^2)	Varillas superiores: f_y = 40 kips/plg^2 (276 N/mm^2)	Otras varillas: f_y = 60 kips/plg^2 (414 N/mm^2)	Otras varillas: f_y = 40 kips/plg^2 (276 N/mm^2)
No. 18 (57)	220 (18.3)	220 (18.3)	220 (18.3)	220 (18.3)
No. 14 (43)	330 (27.4)	330 (27.4)	330 (27.4)	330 (27.4)
No. 11 (36)	360 (29.9)	360 (29.9)	420 (34.9)	360 (29.9)
No. 10 (32)	360 (29.9)	360 (29.9)	480 (39.9)	360 (29.9)
No. 9 (29)	360 (29.9)	360 (29.9)	540 (44.8)	360 (29.9)
No. 8 (25)	360 (29.9)	360 (29.9)	540 (44.8)	360 (29.9)
No. 7 (22)	360 (29.9)	360 (29.9)	540 (44.8)	360 (29.9)
No. 6 (19)	450 (37.4)	360 (29.9)	540 (44.8)	360 (29.9)
Nums 3 a 5 (9.5 a 16)	540 (44.8)	360 (29.9)	540 (44.8)	360 (29.9)

[a] Los valores entre paréntesis se aplican cuando se utilizan unidades SI.

9.5 REQUERIMIENTOS DE ANCLAJE PARA ADHERENCIA POR FLEXION

En las regiones de los miembros en que el momento flexionante externo es próximo a cero (v. gr., cerca de los apoyos de vigas soportadas simplemente y cerca de los puntos de inflexión), la fuerza cortante externa puede ser grande y el área de refuerzo a flexión puede ser pequeña, lo que posiblemente haga críticos los requerimientos de resistencia de adherencia por flexión (vease la sección 9.1.3). Igualando los esfuerzos de adherencia dados por las ecs. 9.2*a* y 9.3, se encuentra

$$u = \frac{V_u}{jd\Sigma o} = \frac{A_s f_y}{l_d \Sigma o}$$

en que Σo es la suma de los parímetros de las varillas

$$\therefore \quad l_d = \frac{A_s f_y jd}{V_u} = \frac{M_t}{V_u} \tag{9.8a}$$

en que M_t es la capacidad teórica a flexión de la sección en el apoyo o punto de inflexión proporcionado por las varillas en la cara a tensión. Para que no se exceda la resistencia u de adherencia, la relación M_t/V_u debe ser igual, o mayor, que la longitud l_d requerida de desarrollo. De acuerdo con el código [9.3] del ACI, el que se exceda localmente la resistencia u de adherencia no conduce a falla, si se proporciona una longitud

adicional l_a de anclaje. En un soporte simple, l_a es la longitud de empotramiento más allá del centro de un soporte, más cualquier longitud equivalente de empotramiento de un gancho proporcionado o un anclaje mecánico. La longitud l_a, de empotramiento a considerar en un punto de inflexión debe limitarse al peralte efectivo del miembro ó a $12d_b$, rigiendo el que sea mayor. De acuerdo con ello, se modifica la ec. 9.8*a* de manera que

$$l_d \leq \frac{M_t}{V_u} + l_a \qquad (9.8b)$$

Cuando se introduce la reacción en los soportes de los miembros para que el miembro se comprima transversalmente, lo que produce confinamiento de los extremos de las varillas, el código [9.3] del ACI permite que el valor de M_t/V_u, utilizado en la ec. 9.8*b* se aumente en 30% para dar margen a las mejores condiciones de anclaje. Cuando no se satisface la ecuación 9.8*b*, el diseñador necesita seguir uno de los siguientes pasos:

1. Aumentar el área A_s total del acero en la sección llevando más varillas a la misma. Así se aumenta la capacidad del momento último teórico M_t.
2. Aumentar la longitud l_a de anclaje más allá de la sección, doblando varillas si es necesario, o por otros medios (véase el apoyo *A* en la fig. 7.19).
3. Reducir la longitud l_d, de desarrollo requerida dada por la ec. 9.6 utilizando un mayor número de varillas de menor tamaño.

9.6 EMPALMES

9.6.1 Introducción

Un empalme transfiere la fuerza de una varilla a otra a través del concreto que rodea a ambas varillas. En cualquier punto a lo largo de un empalme se transfieren las fuerzas desde una varilla por adherencia al concreto que la rodea y simultáneamente también por adherencia a la otra varilla que forma el par del empalme. Dentro del concreto, estas fuerzas pueden generar esfuerzos cortantes elevados, al igual que fuerzas de fisuración. La integridad de un empalme depende del desarrollo de adherencia adecuada, a lo largo de las superficies de las varillas, y de la habilidad del concreto alrededor de las dos varillas de transmitir cortante sin desintegración o deformación excesiva. En las secciones anteriores se estudió la naturaleza de la adherencia. El comportamiento del concreto en la proximidad de un empalme merece un estudio mas extenso.

9.6.2 Empalmes a tensión

El peligro de que el concreto se fisure es mayor en la proximidad de los empalmes a tensión. Dos varillas empalmadas generan compresión diagonal en el espacio entre ellas, de manera que se requiere una fuerza de agarre para impedir una separación posible. El efecto de cuña de cada una de las dos varillas empalmadas puede conducir a una grieta de división a lo largo de una línea que pasa a través de los centros de las varillas. Ese tipo de grieta horizontal se muestra en la figura 9.21, que ilustra el empalme de cuatro varillas en una viga. Es evidente que sólo las ramas exteriores del estribo ofrecen resistencia contra la separación del estrecho bloque de concreto por debajo del refuerzo. La rama horizontal de un estribo es efectiva para controlar la abertura de las grietas longitudinales (grietas verticales en la figura 9.21) originadas por la combinación de efectos cortantes, de tensión diagonal y de cuña. El papel de ese refuerzo transversal es semejante al que se encuentra cuando se transmite cortante de entrecara, como en la figura 7.26.

Ya que los extremos libres de las varillas empalmadas son fuentes de discontinuidad, actúan como iniciadores de grietas a través de una zona a tensión. Esta grieta transversal a su vez inicia las grietas de rajadura. Durante las pruebas se puede medir el aumento de las dimensiones seccionales de un miembro, tal como la distancia *A–B* de la figura 9.21, con instrumentos adecuados mientras procede la carga. Un aumento repentino en las dimensiones de la sección indica el inicio de la rajadura a lo largo de las varillas empalmadas. Stöckl observó [9.26] que esa dilatación transversal era mucho mayor en los extremos libres que en cualquier otra parte a lo largo de la longitud empalmada de las varillas. Cuando se terminan varias varillas altamente esforzadas en la misma sección, los efectos de rajadura en sus extremos libres son cumulativos, a menos que la dimensión lateral entre los empalmes sea grande. En consecuencia, es benéfico escalonar los empalmes, de manera que no haya extremos libres alineados en la misma sección, a menos que las varillas estén separadas a más de $12d_b$. Se debe preferir un escalonamiento de media longitud, o de más de 1.3 de longitudes de empalme, (figura 9.22). Esta figura presenta grietas transversales observadas [9.26] y expansión transversal para tres distintas distribuciones de empalmes.

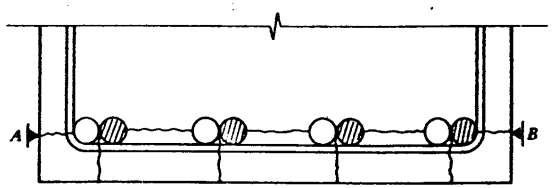


Figura 9.21. Grieta posibles en un empalme.

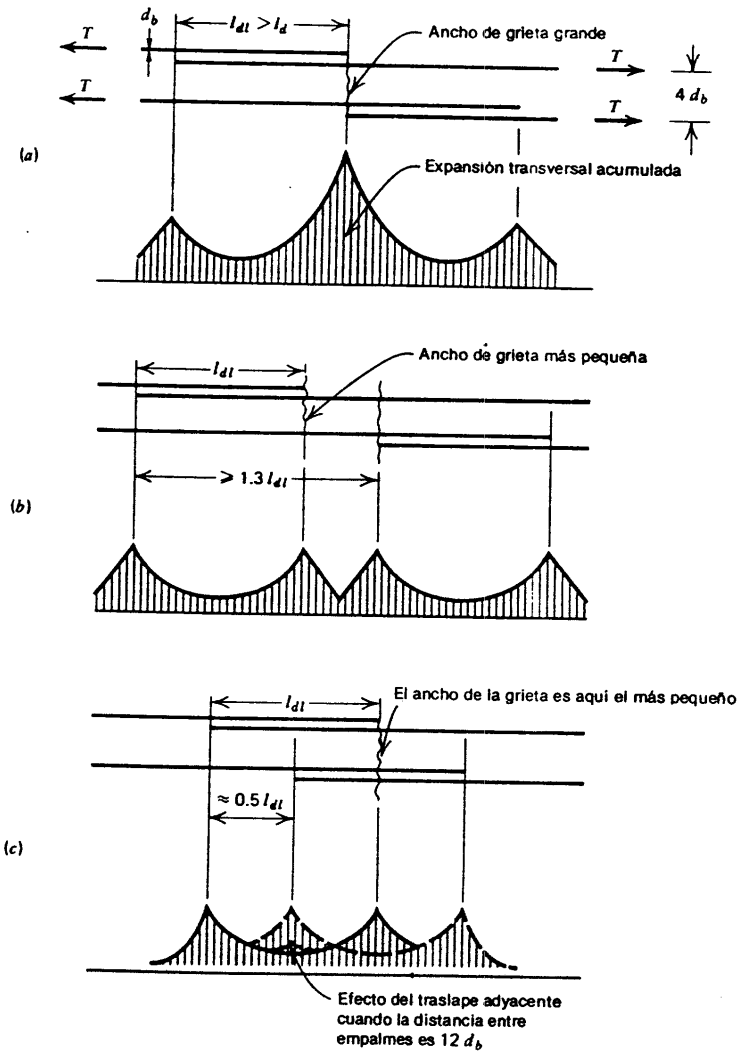


Figura 9.22. Expansión transversal y anchos de grietas en empalmes escalonados. [9.26] (*a*) Expansión transversal traslapada. (*b*) La expansión transversal no se traslapa. (*c*) El traslape de la expansión transversal no es crítico.

Debido a las condiciones adversas que prevalecen en un empalme, la longitud l_{dl} requerida debe ser mayor que la longitud de desarrollo para una sola varilla l_d (figura 9.22). Los códigos imponen determinadas restricciones para desalentar a los diseñadores de colocar empalmes en las zonas críticas. Además, cuando las varillas están en contacto, se encuentran espaciadas transversalmente dentro de una distancia limitada o soldadas entre sí, el empalme debe poder desarrollar al menos 125% de la resistencia de cedencia de las varillas, para que se pueda lograr una conexión positiva.

En un estribo a tensión o en la sección de esfuerzo de tensión máximos en un miembro a flexión existen las condiciones más severas. Para un miembro de estribo a tensión, el código [9.3] ACI requiere una longitud de empalme igual al doble de la longitud de desarrollo y refuerzo espiral alrededor del empalme. También requiere ganchos para varillas mayores que las del núm. 4 (13 mm de diámetro). En las regiones de máximo momento flexionante en los miembros a flexión, el código requiere una longitud de empalme de 1.7, 1.3 o 1.0 veces la longitud de desarrollo, dependiendo del arreglo llano. El código [9.3] prefiere implícitamente diseños de empalmes escalonados, localizados lejos de las secciones de tensión máxima.

En la sección 9.2.6 se describió el papel del refuerzo transversal (v. gr., estribos o espirales) para proporcionar resistencia de adherencia. La falla de un empalme a tensión es violenta y completa si el miembro no contiene estribos o refuerzo transversal de algún otro tipo. Incluso un contenido mínimo de estribos ($\rho_v = 0.15\%$) aumenta la resistencia del empalme, restringe el crecimiento de las grietas de rajadura y asegura una falla dúctil.[9.27]

9.6.3 Empalmes a compresión

La transmisión de fuerzas a compresión mediante el empalme de varillas de refuerzo ha recibido menos atención que el caso a tensión. La longitud del empalme a compresión se puede especificar en términos de un esfuerzo u aceptable de adherencia (ecuación 9.2*b*) o en términos de la longitud l_d de desarrollo. [9.3] Debido a las mejores condiciones de adherencia para las varillas en compresión, los códigos permiten mayores esfuerzos de adherencia y longitudes correspondientemente menores de desarrollo para éstas varillas que para las sujetas a tensión. En las columnas cargadas axialmente, el refuerzo transversal que consiste en estribos, aros o espirales, proporciona protección extra contra la rajadura a lo largo de un empalme, propiedad que reconocen los códigos. Debido a que el agrietamiento transversal no ocurre en las zonas a compresión, también está ausente el efecto dañino de esas grietas para iniciar la rajadura. La principal diferencia entre un empalme a tensión y otro a compresión proviene de la habilidad de las varillas en un empalme a compresión de transferir la carga directamente al concreto mediante apoyo de extremo. En las pruebas realizadas

por Pfister y Mattock,[9.25] se lograron esfuerzos de apoyo iguales a 5 veces la resistencia de cilindro de concreto en los extremos a escuadra de las varillas en los empalmes a compresión.

Los siguientes factores se han revelado, en experimentos recientes realizados en el Instituto Otto-Graf de la Universidad de Stuttgart,[9.28] que afectan al comportamiento de los empalmes a compresión.

1. Se encontró que el apoyo de extremo es causa de la mayoría de las fallas de los empalmes, sin importar la longitud de empalme probada. Las longitudes de los empalmes en las pruebas variaron entre 9 y 38 veces el diámetro de las varillas. Cuando se aumenta el tamaño de las varillas, el aplastamiento del concreto en los extremos de las varillas se torna especialmente severo. En la figura 9.23 se muestra un ejemplo típico de falla de apoyo de extremo.

2. La presencia de refuerzo de confinamiento aumenta la capacidad de apoyo del concreto en los extremos cortados de las varillas de las columnas, impidiéndose, con ello, la dilatación lateral del concreto en esas áreas. En tales condiciones, se midieron esfuerzos de apoyo del concreto del orden de 17,000 lb/plg^2 (120 N/mm^2)

3. Un aumento en el espesor del recubrimiento de concreto sobre un empalme a compresión produjo una mejora insignificante.

4. Cuando se empalman varillas de columnas de diámetro menor a 0.55 plg (14 mm), no es probable que el apoyo de extremo influya en el comportamiento, y es probable que el refuerzo transversal estándar utilizado fuera del área de empalme también sea adecuado en el mismo.

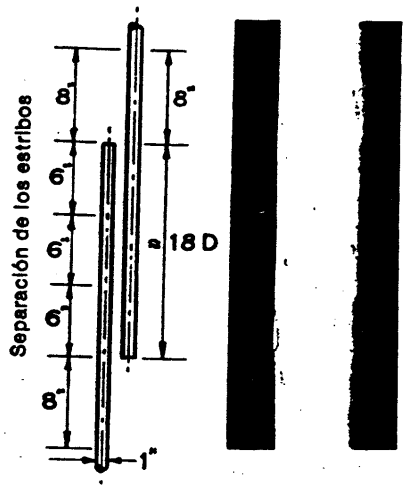


Figura 9.23. Falla de un empalme a compresión provocada por apoyo de extremo. [9.28]

5 Bajo cargas a largo plazo, la presión de apoyo bajo los extremos de la varilla disminuye debido al flujo plástico; en consecuencia, mejora el comportamiento del empalme.

Es posible transmitir directamente las fuerzas de compresión en las varillas de acero de varilla a varilla, mediante apoyo de extremo. La única manera de utilizar la transferencia de fuerzas mediante apoyo del extremo es cuando el diseñador tiene la seguridad de que bajo la combinación más adversa de cargas, jamás se requiere que las varillas transmitan tensión. En tales casos es necesario obtener extremos cortados a escuadra o aserrados, de manera que las varillas en contacto puedan apoyarse uniformemente entre sí. Sin embargo, los experimentos indican que las pequeñas inexactitudes en las caras de apoyo no son perjudiciales. El código [9.3] del ACI permite una desviación máxima de 1.5° con respecto a un ángulo recto en las superficies de los extremos de las varillas, lo que quiere decir que en vez de un apoyo perfectamente uniforme, todavía es aceptable un ángulo de 3° entre las superficies en contacto de los extremos de las varillas. Sin embargo, se debe mantener firmemente en su posición a las varillas en relación mutua, mediante una manga adecuada u otro dispositivo. [9.3] En las pruebas realizadas en la Universidad de Stuttgart,[9.28] se encontró que la transmisión de fuerza de compresión mediante apoyo de extremos en contacto era superior a los empalmes a compresión en todo caso, incluso sin utilizar estribos adicionales en el empalme.

9.6.4 Empalmes mecánicos o de contacto

Es evidente que el eslabón más débil en un empalme es el concreto entre las varillas. Cuando se requiere que se transfiera toda la resistencia de las varillas, la longitud de empalme (que es igual a o mayor que la longitud l_d) de desarrollo) puede ser grande. Cuando se requiere una cantidad apreciable de refuerzo en un miembro, y se utilizan varillas de tamaño grande, se puede necesitar una cantidad apreciable de acero para satisfacer los requerimientos de acero de los empalmes. Por ejemplo, los empalmes pueden extenderse más de un tercio de la altura de una columna en un marco de plantas múltiples de concreto reforzado. Todavía más, los empalmes pueden producir congestión, e incluso pueden interferir con la compactación adecuada del concreto.

Para superar estas dificultades, se han empleado métodos que permiten la transferencia de las fuerzas de tensión o compresión, directamente de varilla a varilla sin la ayuda del concreto. Se ha utilizado mucho la soldadura a tope de dos varillas, de extremo a extremo, mediante soldadura eléctrica. En fechas más recientes, se ha desarrollado un proceso de soldadura bajo presión de gas, en que se oprimen entre sí los extremos de las varillas calentados a la temperatura correcta; así se logra la fusión mientras se forma un bulbo en la sección de contacto. Para las varillas co-

rrugadas, se dispone de una técnica de empalme mecánico que comprende una manga anular que se presiona en frío contra las varillas, con lo cual se obliga a las costillas de la varilla corrugada a ahogarse en el espesor de la pared de la manga. Con corrugación adecuada de la varilla, puede bastar una longitud de ahogamiento de manga de apenas $2d_b$ para cada una de las dos varillas para transmitir la carga de ruptura de la varilla en tensión.[9.27] Otro dispositivo de empalme consiste en una manga anular algo mayor que las varillas, colocadas alrededor de ambas. Se emplea un proceso térmico para llenar el espacio entre la manga y las varillas corrugadas con un compuesto métalico. Las técnicas en que se utiliza una manga de acero son especialmente útiles cuando se debe empalmar un refuerzo de alta resistencia, debido a que la soldadura de las varillas puede producir fragilidad.

Los dispositivos de empalme mecánico deben estar sujetos a rigurosos procedimientos de pruebas antes de que se adopten para utilizarse en la estructura.

BIBLIOGRAFIA

9.1 "Bond Stresses—The State of the Art," *Journal ACI*, Vol. 63. No. 11, noviembre de 1966, págs. 1161-1190.

9.2 "Opportunities in Bond Rescarch," Reportado en el comité 408 del ACI, *Journal ACI*. Vol. 67, No. 11, noviembre de 1970, págs. 857-867.

9.3 "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, págs. 78.

9.4 G. Rehm, "The Basic Principles of the Bond Between Steel and Concrete," Traduc. No. 134, Cement and Concrete Association, Londres, 1968, 66 págs.

9.5 G. B. Welch y B. J. F. Patten, "Reduction in Concrete-Steel Bond with Horizontally Embedded Reinforcement," UNCIV Report No. R-8-8, febrero de 1967, University of New South Wales, págs. 26.

9.6 "Standard Specification for Deformed and Plain Billet-Steel Bars for Concrete Reinforcement," ASTM: A 615-72, American Society for Testing and Materials, 1972

9.7 P. Gergely, "Splitting Cracks Along the Main Reinforcement in Concrete Members," Report to Bureau of Public Roads U.S. Department of Transportation, Cornell University, Ithaca, N. Y., abril de 1969 págs. 90.

9.8 L. A. Lutz y P. Gergely, "Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete," *Journal ACI*, Vol. 64, No. 11, noviembre de 1967, págs. 711-721.

9.9 E. L. Kemp, F. S. Brezny, y J. A. Unterspan, "Effect of Rust and Scale on the Bond Characteristics of Deformed Reinforcing Bars," *Journal ACI*, Vol. 65, No. 9, septiembre de 1968, págs. 743-756.

9.10 Y. Goto, "Cracks Formed in Concrete Around Deformed Tension Bars," *Journal ACI*, Vol. 68, No. 4, abril 1971, págs. 244-251.

9.11 P. M. Ferguson y J. N. Thompson, "Development Length for Large High Strength Reinforcing Bars," *Journal ACI*, Vol. 62, No. 1, enero 1965, págs. 71-93.

9.12 "An Investigation of the Bond of Deformed Steel Bars with Concrete," Translation No. 112, Cement and Concrete Association, Londres, 1964, págs. 28.

9.13 B. Bresler y V. Bertero, "Behaviour of Reinforced Concrete Under Repeated Load," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 94, ST6, junio 1968, págs, 1567-1589.

9.14 E. S. Perry y N. Jundi, "Pullout Bond Stress Distribution Under Static and Dynamic Repeated Loadings," *Journal ACI*, Vol. 66, No. 5, Mayo 1969, págs. 377-380.

9.15 H. A. F. Ismail y J. O. Jirsa, "Behaviour of Anchored Bars Under Low Cycle Overloads Producing Inelastic Strains," *Journal ACI*, Vol. 69, No. 7, julio 1972, págs. 433-438.

9.16 R. Baus y M. G. Claude, "État des Connaissances sur le Mecanisme de l'Adhérence et des Ancrages," *Essai de Synthèse Bibliographique,* octubre 1966, CEB Bulletin No. 66, Abril 1968, págs. 185-213.

9.17 R. M. Mains, "Measurement of the Distribution of Tensile and Bond Stresses Along Reinforcing Bars," *Journal ACI*, Vol. 23, No. 3, noviembre 1951, págs. 225-252.

9.18 "A Guide for the Determination of Bond Strength in Beam Specimens," Reportado por ACI Committee 408, *Journal ACI*, Vol. 61, No. 2, febrero 1964, págs. 129-135.

9.19 "Test Procedure to Determine Relative Bond Value of Reinforcing Bars" (ACI 208-58). *Journal ACI*, Vol. 55, No. 1, julio 1958, págs. 1-6.

9.20 R. G. Mathey y D. Watstein, "Investigation of Bond in Beam Pull-Out Specimens with High-Yield-Strength Deformed Bars," *Journal ACI*, Vol. 57, No. 9, marzo 1961, págs. 1071-1090.

9.21 P. M. Ferguson, J. E. Breen, y J. N. Thompson, "Pullout Test on High Strength Reinforceing Bars," Part I. *Journal ACI*, Vol. 62, No. 8, agosto 1965, págs. 933-950.

9.22 H. H. Müller, "Ausziehversuche mit Betonstahlhaken," Aus unseren Forschungsarbeiten. Bericht No. 80, December 1968, Materialsprüfungsamt für das Bauwesen der Technischen Hochschule München, págs. 70-75.

9.23 J. A. Hribar and R. C. Vasko, "End Anchorage of High Strenth Steel Reinforcing Bars," *Journal ACI*, Vol. 66, No. 11 noviembre 1969, págs. 875-883.

9.24 G. Rehm, "Kriterien zur Beurteilung von Bewehrungsstäben mit hochwertigen Verbund," *Stahlbetonbau, Berichte aus Forschung und Praxis, Festschrift Rüsch.* Wilhelm Ernst & Sohn, Berlin, 1969, págs. 79-96.

9.25 J. F. Pfister and A. H. Mattock, "High Strength Bars as Concrete Reinforcement, Part 5. Lapped Splices in Concentrically Loaded Columns," *Journal of the PCA Research and Development Laboratories*, Vol. 67, No. 5, No. 2, mayo 1963, págs. 27-40.

9.26 S. Stöckl, "Übergreifungsstösse vón zugbeanspruchten Bewehrungsstäben," *Beton und Stahlbetonbau*, Vol. 67, No. 10, octubre 1972, págs. 229-234.

9.27 P. M. Ferguson and J. E. Breen, "Lapped Splices for High Strength Reinforcing Bars," *Journal ACI*, Vol. 62, No. 9, septiembre 1965, págs. 1063-1078.

9.28 F. Leonhardt y K-T. Teichen, "Druck-Stösse von Bewehrungsstäben," Deutscher Ausschuss für Stahlbeton Bulletin No. 222, W. Ernst and Sohn, Berlin 1972, 1-53.

10

Comportamiento bajo carga de servicio

10.1 RENDIMIENTO BAJO CARGA DE SERVICIO

El comportamiento de las estructuras bajo las cargas de servicio es una consideración importante de diseño. Si las secciones solamente se proporcionan por los requerimientos de resistencia, existe el peligro de que, aunque sea adecuado el grado de seguridad contra el desplome, el funcionamiento de la estructura bajo las cargas de servicio sea insatisfactorio. Por ejemplo, bajo cargas de servicio, las deflexiones de los miembros pueden ser excesivamente grandes, o el agrietamiento del concreto puede ser inaceptable.

En la terminología europea, se debe diseñar la estructura con referencia a varios estados límites, en que los más importantes son la resistencia a la carga máxima, la deflexión bajo las cargas de servicio y el ancho de las grietas bajo cargas de servicio. Otros estados límite posibles son las vibraciones y fatiga bajo cargas de servicio. El objetivo en el diseño debe ser asegurar un margen adecuado de seguridad contra el desplome y contra la posibilidad de que la estructura sea inadecuada para utilizarse bajo cargas de servicio.

En consecuencia, para producir un diseño satisfactorio, se debe comprobar que la magnitud de las deflexiones y el grado de agrietamiento bajo cargas de servicio estén comprendidos dentro de valores límites razonables, comprobación que requiere utilizar la teoría elástica. El código[10.1] del ACI de 1971 enfatiza el diseño basado en la resistencia con comprobaciones por servicio; pero el mismo código también permite otro método de diseño basado en la teoría elástica, con esfuerzos permisibles especificados bajo cargas de servicio para miembros a flexión sin carga axial.

Este capítulo considera el comportamiento de las cargas de servicio. La teoría elástica se desarrolla para determinar esfuerzos en los miembros debidos a flexión bajo cargas de servicio y para su utilización en el método alterno de diseño; igualmente se describe el método de cálculo de las deflexiones y anchos de grietas bajo cargas de servicio.

10.2 TEORIA ELASTICA PARA ESFUERZOS EN MIEMBROS DEBIDOS A FLEXION

10.2.1 Módulo efectivo de elasticidad

Una importante dificultad en la aplicación de la teoría elástica al concreto reforzado es la inelasticidad del concreto. El módulo de elasticidad del concreto depende tanto del nivel del esfuerzo como del tiempo de la carga. El módulo de elasticidad dado por la Ec. 2.1, determinado a partir de pruebas con cargas a corto plazo, da el módulo secante a aproximadamente $0.5f'_c$. Para velocidades lentas de carga se reduce el módulo, debido a las deformaciones por flujo plástico, como lo indica la Fig. 2.5.

En la Fig. 2.20 se ilustra la deformación por flujo plástico del concreto bajo un esfuerzo constante de compresión axial. Para un esfuerzo aplicado, que no sea mayor de aproximadamente $0.5f'_c$, la deformación por flujo plástico que ocurre en un periodo dado casi es proporcional al esfuerzo aplicado, por lo cual la deformación por flujo plástico bajo un esfuerzo f_c de compresión constante del concreto se puede escribir cómo

$$\varepsilon_{\text{flujo plástico}} = C_t \frac{f_c}{E_c} \qquad (10.1)$$

en donde E_c = módulo secante de elasticidad del concreto al instante de la carga y C_t = coeficiente de flujo plástico del concreto, que es un factor empírico que depende de la edad del concreto al tiempo de la carga, de la duración de ésta, de las proporciones en la mezcla del concreto, del espesor del miembro y de la humedad, como se describió en la sección 2.1.4. Nótese que debido a la suposición de linealidad, C_t es independiente del nivel del esfuerzo. La deformación unitaria total está dada por

$$\varepsilon_{\text{total}} = \frac{f_c}{E_c} + C_t \frac{f_c}{E_c} = \frac{f_c}{E_c}(1 + C_t) \qquad (10.2)$$

El módulo secante efectivo de elasticidad del concreto, incluyendo el flujo plástico, es $f_c/\varepsilon_{\text{total}}$, que de la Ec. 10.2 se puede escribir como

$$E_{\text{eff}} = \frac{f_c}{\varepsilon_{\text{total}}} = \frac{E_c}{1 + C_t} \qquad (10.3)$$

Se puede utilizar el módulo efectivo de elasticidad para relacionar el esfuerzo y la deformación unitaria cuando se conoce el coeficiente de flujo plástico, normalmente bajo condiciones de esfuerzo que se suponen constantes.

Los valores promedio para el coeficiente C_t de flujo plástico en condiciones típicas de diseño, después de una carga a plazo muy largo, son de 1.5 a 2.0, aunque pueden ocurrir grandes variaciones. La sección 2.1.4 proporciona un método para calcular el coeficiente de flujo plástico en función de las muchas variables que lo afectan.

Como lo ilustra la fig. 2.20, si se retira la carga, se recupera de inmediato la deformación elástica unitaria, y con el tiempo ocurre cierta recuperación de flujo plástico.

10.2.2 Suposiciones de la teoría elástica

Se efectúan tres suposiciones en la teoría elástica, para los miembros sujetos a flexión:

1. Las secciones planas, antes de la flexión, permanecen planas después de la flexión.
2. Se puede ignorar la resistencia a tensión del concreto, si el agrietamiento comienza en la fibra a tensión externa.
3. Las relaciones esfuerzo - deformación para el concreto y el acero son linealmente elásticas.

En la sección 3.1 se estudió la primera suposición, que se hizo en la teoría de la resistencia.

La segunda suposición implica que cuando el esfuerzo en la fibra a tensión extrema excede el módulo de ruptura del concreto, éste se agrieta hasta el eje neutro. Esta suposición es razonable debido a que una vez que comienza el agrietamiento, los esfuerzos en el acero a tensión y el concreto comprimido aumentan mucho debido a la redistribución de los esfuerzos, y solamente un poco de concreto, en caso de haberlo, queda para transmitir la tensión entre la concentración del esfuerzo en la punta de la grieta y el eje neutro.

La tercera suposición, que es verdadera para el acero a esfuerzos menores que la resistencia de cedencia, es razonable para el concreto a esfuerzos de carga de servicio. Se puede tomar en cuenta el flujo plástico utilizando un módulo efectivo de elasticidad para el concreto. Sin embargo, la proporcionalidad directa entre la deformación unitaria de flujo plástico y el esfuerzo aplicado, que se supuso al determinar el módulo efectivo de elasticidad, se aplica estrictamente sólo cuando el esfuerzo de compresión del concreto no es mayor que aproximadamente un medio de la resistencia de cilindro. Sin embargo, la desviación de la proporcionalidad sólo es grande bajo esfuerzos considerablemente mayores.

En el análisis de secciones, cuando cambia la profundidad del eje neutro debido a una redistribución de esfuerzos por efecto del flujo plástico del concreto, utilizar el módulo efectivo de elasticidad para el concreto con un factor de flujo plástico constante sólo proporciona una aproximación para los esfuerzos, ya que el módulo efectivo de elasticidad

se aplica a condiciones de esfuerzo constante, en tanto que la magnitud y distribución de los esfuerzos cambia en la sección transversal con el tiempo. Sin embargo, usar el módulo efectivo de elasticidad proporciona una aproximación razonable para los esfuerzos.

Si se requiere un enfoque más exacto que considere el efecto de la historia del esfuerzo variable, se puede utilizar el método[10.2] de la velocidad de flujo plástico o el de la superposición[10.3] cuando se dispone de datos de flujo plástico en función del tiempo y de información relativa a la historia de las cargas.

10.2.3 Análisis de vigas utilizando el enfoque del par interno

Secciones rectangulares

La fig. 10.1 muestra una sección de viga rectangular de concreto doblemente reforzada en el intervalo de la carga de servicio después del agrietamiento. Se considera que las dimensiones de la sección del concreto y las áreas del acero y sus posiciones son cantidades conocidas. Se puede analizar la sección utilizando el concepto del par interno y los requerimientos de compatibilidad de deformaciones y equilibrio de fuerzas.

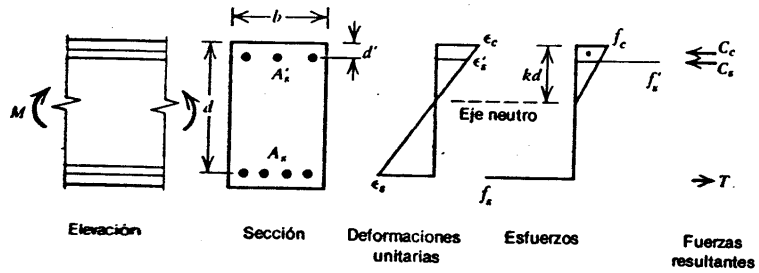


Figura 10.1 Sección de viga rectangular de concreto doblemente reforzado en el intervalo de carga de servicio después del agrietamiento.

Las deformaciones ε_c, ε'_s, y ε_s se pueden escribir en términos de los esfuerzos como sigue:

$$\varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c}(1 + C_t), \qquad \varepsilon'_s = \frac{f'_s}{E_s}, \qquad \varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

en que E_c = módulo de elasticidad del concreto (al instante de la carga), E_s = módulo de elasticidad del acero C_t = coeficiente de flujo plástico del concreto. De los triángulos semejantes del diagrama de deformación, se tiene

$$\frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon'_s}{kd - d'} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd} \tag{10.4}$$

Sustituyendo ε_c, ε'_s, y ε_s en la ec. 10.4, se obtienen las siguientes ecuaciones para el esfuerzo en el acero:

$$f'_s = \frac{kd - d'}{kd} nf_c \tag{10.5}$$

$$f_s = \frac{1 - k}{k} nf_c \tag{10.6}$$

en donde

$$n = \frac{E_s}{E_c}(1 + C_t) \tag{10.7}$$

A la razón n se le conoce como la razón modular.

Ignorando el área pequeña de concreto desplazado por el acero a compresión, la fuerza de compresión resultante en el concreto es $0.5f_c bkd$. Se puede escribir la ecuación de equilibrio de las fuerzas internas como

$$C_c + C_s = T \qquad \text{ó} \qquad 0.5f_c bkd + f'_s A'_s = f_s A_s \tag{10.8}$$

Sustituyendo los esfuerzos en el acero de las ecs. 10.5 y 10.6 en la ec. 10.8 se obtiene

$$0.5f_c bkd + \frac{kd - d'}{kd} nf_c A'_s = \frac{1 - k}{k} nf_c A_s$$

$$\therefore \quad 0 = k^2 + 2k(\rho + \rho')n - 2\left(\rho + \rho' \frac{d'}{d}\right)n$$

en donde

$$\rho = \frac{A_s}{bd} \qquad \text{y} \qquad \rho' = \frac{A'_s}{bd}$$

La solución de la ecuación cuadrática en k da

$$k = \left[(\rho + \rho')^2 n^2 + 2\left(\rho + \rho' \frac{d'}{d}\right)n\right]^{1/2} - (\rho + \rho')n \tag{10.9}$$

El centroide del bloque triangular de esfuerzos del concreto está a $kd/3$ de la fibra a compresión extrema; en consecuencia, el brazo de palanca de la fuerza resultante del concreto respecto del acero a tensión es $d(1 - k/3)$, en que la ec. 10.9 da k.

El momento de resistencia de la sección se puede obtener tomando momentos de las fuerzas de compresión interna respecto del acero a tensión.

$$M = 0.5f_c bkd\left(d - \frac{kd}{3}\right) + f'_s A'_s(d - d') \qquad (10.10)$$

Se pueden utilizar las ecs. 10.5 a 10.10 para determinar los esfuerzos en el concreto y el acero para un momento dado, o el momento para un esfuerzo dado, cuando se conocen las dimensiones de la sección de concreto, las áreas del acero y las posiciones de las varillas. Nótese que se pueden utilizar las ecuaciones para analizar secciones reforzadas simplemente haciendo $A'_s = 0$.

Ejemplo 10.1

Una viga de concreto doblemente reforzada tiene una sección transversal rectangular de 16 plg (406 mm) de ancho; el peralte efectivo al centroide del acero a tensión es de 28.37 plg (721 mm), una profundidad al centroide del acero a compresión de 2.82 plg (71.6 mm), un área de 4.71 plg^2 (3039 mm^2), del acero a tensión y un área de 2.40 plg^2 (1548 mm^2) del acero a compresión. El módulo de elasticidad del concreto al principio de la carga es de 3.86×10^6 lb/plg (26,600 N/mm^2) y el del acero es de 29×10^6 lb/plg (200,000 N/mm^2). Calcular los esfuerzos en el acero y el concreto debidos a un momento flexionante de 2.28×10^6 lb/plg (257 kN · m) (1) al principio de la carga y (2) después de una carga a largo plazo, si el coeficiente de flujo plástico es de 1.0.

Solución

$$\rho = \frac{4.71}{16 \times 28.37} = 0.0104 \qquad \rho' = \frac{2.40}{16 \times 28.37} = 0.00529$$

1. *Al principio de la carga*

El flujo plástico es cero, $C_t = 0$.
De la ec. 10.7, se tiene

$$n = \frac{29 \times 10^6}{3.86 \times 10^6} = 7.51$$

De la ec. 10.9 se tiene

$$k = \left[(0.0104 + 0.00529)^2 7.51^2 + 2\left(0.0104 + 0.00529 \times \frac{2.82}{28.37}\right)7.51\right]^{1.2} - 7.51(0.0104 + 0.00529) = 0.304$$

$$\therefore \quad kd = 0.304 \times 28.37 = 8.62 \text{ plg}$$

De las ecs. 10.5 y 10.6 se puede escribir

$$f'_s = \frac{8.62 - 2.82}{8.62} \times 7.51 f_c = 5.05 f_c$$

$$f_s = \frac{1 - 0.304}{0.304} \times 7.51 f_c = 17.19 f_c$$

Por tanto, la ec. 10.10 da

$$2.28 \times 10^6 = 0.5 f_c \times 16 \times 8.62\left(28.37 - \frac{8.62}{3}\right) + 5.05 f_c \times 2.40(28.37 - 2.82)$$

de donde $f_c = 1100$ lb/plg^2 (7.59 N/mm^2).

$\therefore$ $f'_s = 5.05 \times 1100 = 5560$ lb/plg^2 (38.3 N/mm^2) y
$f_s = 17.19 \times 1100 = 18{,}910$ lb/plg^2 (130.4 N/mm^2)

2. *Después de la carga a largo plazo cuando* $C_t = 1$

De la ec. 10.7, $n = 7.51\ (1 + 1) = 15.02$.
De la ec. 10.9, $k = 0.383$.
De las ecs. 10.5, 10.6 y 10.10,

$f_c = 810$ lb/plg^2 (5.59 N/mm^2)
$f'_s = 8950$ lb/plg^2 (61.7 N/mm^2)
$f_s = 19{,}480$ lb/plg^2 (134.3 N/mm^2)

En este ejemplo se indica el efecto del flujo plástico en los esfuerzos. El flujo plástico del concreto bajo momento flexionante constante produce un aumento en la profundidad del eje neutro, lo que conduce a una disminución en el esfuerzo de compresión máximo del concreto, a un aumento en el esfuerzo de compresión del acero y a un ligero aumento en el esfuerzo de tensión del acero. De todos ésos, el más significativo es el aumento en el esfuerzo de compresión del acero. En el ejemplo 10.1, duplicar la razón modular produjo aumento de 61% en el esfuerzo de compresión del acero, disminución de 26% en el esfuerzo de compresión del concreto y aumento de 3% en el esfuerzo de tensión del acero. Nótese que el flujo plástico del concreto provocó que parte de la fuerza interna de compresión se transfiriera del concreto al acero.

Secciones T

La Fig. 10.2 muestra una sección de viga T de concreto simplemente reforzada en el intervalo de la carga de servicio después del agrietamiento. Se considera que las dimensiones de la sección de concreto y las áreas y

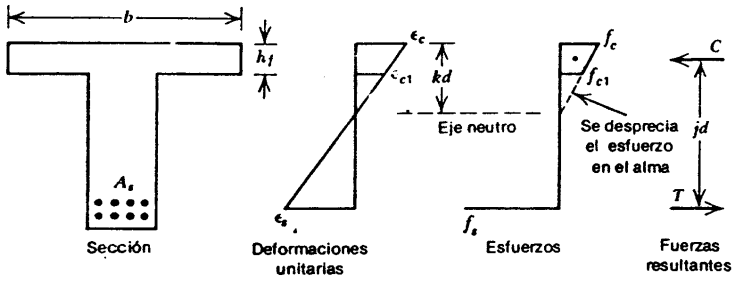


Figura 10.2. Sección de viga T de concreto reforzado en el intervalo de carga de servicio después del agrietamiento.

posiciones del acero son cantidades conocidas. En el caso ilustrado, el eje neutro está en el alma. Cuando el eje neutro está en el patín, se puede analizar el caso utilizando las ecuaciones para una sección rectangular de ancho b.

Se puede analizar la sección de la fig. 10.2 con eje neutro en el alma utilizando los requerimientos de compatibilidad de deformaciones y equilibrio de las fuerzas.

Las deformaciones unitarias se pueden escribir en términos de los esfuerzos como sigue:

$$\varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c}(1 + C_t), \qquad \varepsilon_{c1} = \frac{f_{c1}}{E_c}(1 + C_t), \qquad \varepsilon_s = \frac{f_s}{E_s}$$

en que E_c = módulo de elasticidad del concreto (al instante de la carga), E_s = módulo de elasticidad del acero y C_t = coeficiente de flujo plástico del concreto.

De los triángulos semejantes del diagrama de deformaciones se tiene:

$$\frac{\varepsilon_c}{kd} = \frac{\varepsilon_{c1}}{kd - h_f} = \frac{\varepsilon_s}{d - kd} \tag{10.11}$$

Sustituyendo estas deformaciones en la ec. 10.11, se obtienen las siguientes ecuaciones para los esfuerzos en el concreto y en el acero:

$$f_{c1} = \frac{kd - h_f}{kd} f_c \tag{10.12}$$

$$f_s = \frac{1 - k}{k} n f_c \tag{10.13}$$

en que

$$n = \frac{E_s}{E_c} = (1 + C_t)$$

Se ignora la fuerza de compresión en el concreto en el alma, ya que es relativamente pequeña debido al pequeño esfuerzo y ancho de la sección allí. Entonces, la fuerza resultante de compresión en el concreto es de $0.5(f_c + f_{c1})bh_f$. Sustituyendo la ec. 10.12, la fuerza de compresión resultante queda como:

$$C = 0.5\left(f_c + \frac{kd - h_f}{kd} f_c\right) bh_f$$

$$= bh_f f_c\left(1 - \frac{h_f}{2kd}\right) \tag{10.14}$$

Se puede escribir la ecuación para el equilibrio de las fuerzas internas $C = T$ como

$$bh_f f_c\left(1 - \frac{h_f}{2kd}\right) = A_s f_s \tag{10.15}$$

Sustituyendo f_s de la ec. 10.13 en la ec. 10.15 se obtiene

$$bh_f f_c\left(1 - \frac{h_f}{2kd}\right) = A_s \frac{1 - k}{k} n f_c$$

de donde se escribe

$$k = \frac{\rho n + \frac{1}{2}(h_f/d)^2}{\rho n + h_f/d} \tag{10.16}$$

en que $\rho = A_s/bd$.

El valor de k que se encuentra de la ec. 10.16 se aplica siempre que el eje neutro esté en el alma (o sea que, $k \geq h_f/d$). Si k de la ec. 10.16 es menor que h_f/d, el eje neutro está en el patín y entonces se debe utilizar la sección rectangular, ecs. 10.4 a 10.10.

El brazo de palanca depende de la posición del centroide del bloque trapezoidal de esfuerzos (véase la fig. 10.3). Considerando el bloque como si estuviera compuesto de dos triángulos y tomando los momentos de las

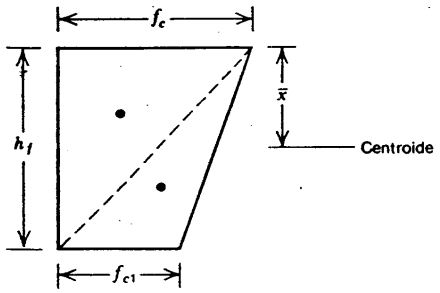


Figura 10.3. Centroide del bloque de esfuerzos de compresión.

áreas de los triángulos alrededor de la parte superior del bloque se encuentra

$$\tfrac{1}{2}(f_c + f_{c1})h_f b\bar{x} = \frac{f_{c1}h_f b}{2}\tfrac{2}{3}h_f + \frac{f_c h_f b}{2}\frac{h_f}{3}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{h_f}{3}\left(\frac{2f_{c1} + f_c}{f_{c1} + f_c}\right)$$

Sustituyendo f_{c1} de la ec. 10.12

$$\bar{x} = \frac{h_f}{3}\frac{\left\{2\left(\dfrac{kd - h_f}{kd}\right) + 1\right\}f_c}{\left(\dfrac{kd - h_f}{kd} + 1\right)f_c} = \frac{h_f}{3}\left(\frac{3kd - 2h_f}{2kd - h_f}\right) \qquad (10.17)$$

$$\therefore \quad jd = d - \bar{x} = d - \frac{h_f}{3}\left(\frac{3kd - 2h_f}{2kd - h_f}\right) \qquad (10.18)$$

Entonces, el momento de resistencia de la sección es

$$M = A_s f_s jd \qquad (10.19)$$

ó

$$M = bh_f f_c\left(1 - \frac{h_f}{2kd}\right)jd \qquad (10.20)$$

con jd de la ec. 10.18.

Se pueden utilizar las ecs. 10.12 a 10.20 para determinar los esfuerzos en el concreto y acero para un momento dado, o el momento para un esfuerzo dado, cuando se conocen las dimensiones de la sección y el área del acero.

Ejemplo 10.2

Una viga T de concreto reforzado tiene un ancho de patín de 50 plg (1270 mm), espesor de patín de 5 plg (127 mm), profundidad efectiva al acero de 20 plg (508 mm) y área de sección transversal del acero a tensión de 6 plg^2 (3871 mm^2). La razón modular es de 9. Determinar 1) los esfuerzos en el acero y concreto cuando la sección toma un momento flexionante de 2×10^6 lb plg (226 KN m), y 2) el momento flexionante máximo que puede tomar la sección para que el esfuerzo máximo del concreto no exceda 1350 lb/plg^2 (9.31 N/mm^2) y el esfuerzo del acero no exceda 24,000 lb/plg^2 (165.5 N/mm^2).

Solución

Se supone que el eje neutro está en el alma.

$$\rho n = \frac{6}{50 \times 20} \times 9 = 0.054 \qquad \frac{h_f}{d} = \frac{5}{20} = 0.25$$

De la ec. 10.16 se tiene

$$k = \frac{0.054 + \frac{1}{2}(0.25)^2}{0.054 + 0.25} = 0.280$$

$$\therefore \quad kd = 0.28 \times 20 = 5.60 \text{ plg} > h_f$$

Por tanto, el eje neutro está en el alma, como se supuso.
De la ec. 10.18 se tiene

$$jd = 20 - \frac{5}{3}\left(\frac{3 \times 5.6 - 2 \times 5}{2 \times 5.6 - 5}\right) = 18.17 \text{ plg}$$

1. *Esfuerzos para* $M = 2 \times 10^6$ lb plg

De la ec. 10.19 se escribe

$$f_s = \frac{2 \times 10^6}{6 \times 18.17} = 18{,}350 \text{ lb/plg}^2 \ (126.6 \text{ N/mm}^2)$$

De la ec. 10.20 se puede escribir

$$f_c = \frac{2 \times 10^6}{50 \times 5[1 - 5/(2 \times 5.6)]18.17} = 795 \text{ lb/plg}^2 \ (5.52 \text{ N/mm}^2)$$

o, de la ec. 10.13,

$$f_c = \frac{0.280}{1 - 0.280}\frac{18{,}350}{9} = 795 \text{ lb/plg}^2 \ (5.52 \text{ N/mm}^2)$$

2. *Máximo momento flexionante si* $f_s \leq 24{,}000$ lb/plg^2 *y* $f_c \leq 1{,}350$ lb/plg^2

Si $f_s = 24{,}000$ lb/plg^2, la ec. 10.19 da

$$M = 6 \times 24{,}000 \times 18.17$$
$$= 2.62 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}^2$$

Si $f_c = 1{,}350$ lb/plg^2, la ec. 10.20 da

$$M = 50 \times 5 \times 1350\left(1 - \frac{5}{2 \times 5.6}\right)18.17$$
$$= 3.39 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}.$$

En consecuencia, rige el esfuerzo en el acero. El máximo momento flexionante permisible es $M = 2.62 \times 10^6$ lb plg (296 kN · m), con $f_s = 24{,}000$ lb/plg^2 (165.5 N/mm^2) y $f_c = 1350 \times 2.62/3.39 = 1040^2$ (7.17 N/mm^2).

10.2.4 Análisis de vigas por el método de la sección transformada

Otro enfoque a la teoría elástica emplea la teoría de la sección transformada, en que se transforma el acero a un área equivalente de concreto y se analiza la sección "toda de concreto" mediante la teoría elástica convencional.

Considérese un elemento de área de concreto con una varilla de acero en su centroide, como en la fig. 10.4. Si se aplica una carga P axial externa, la deformación unitaria resultante del concreto y del acero será igual, $\varepsilon_s = \varepsilon_c$, lo que da

$$\frac{f_s}{E_s} = \frac{f_c}{E_c}(1 + C_t)$$

$$\therefore \quad f_s = nf_c \tag{10.21}$$

en que

$$n = \frac{E_s}{E_c}(1 + C_t)$$

Consecuentemente, la carga tomada por el elemento es

$$P = A_c f_c + A_s f_s$$

$$= f_c(A_c + nA_s) \tag{10.22}$$

en que A_c = área del concreto y A_s = área del acero. Es evidente que el área A_s del acero actúa idénticamente como un área nA_s, de concreto, por lo que se puede sustituir por un área nA_s del concreto. A esta área nA_s equivalente de concreto se le denomina el área transformada del acero. En consecuencia, el área total del elemento transformado es $A_c + nA_s = xy + (n - 1)A_s$. El área agregada efectiva es $(n - 1)A_s$ debido a que el acero

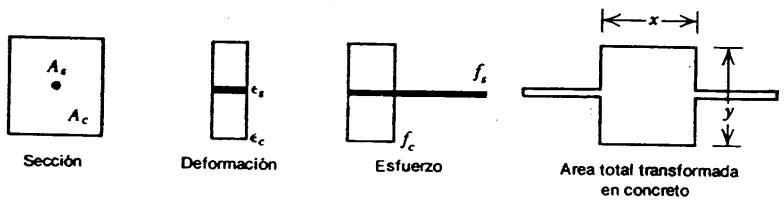


Figura 10.4. Area transformada de elemento de concreto reforzado.

desplaza un área de concreto A_s. En la fig. 10.4 se muestra la sección transformada, que se puede ver en cualquier forma que haga que el área transformada del acero tenga el mismo nivel de deformación que el acero que reemplaza. El área transformada del acero también se ubica simétricamente alrededor del acero que reemplaza. El reemplazo del acero por su área transformada es ventajoso, ya que se puede utilizar la teoría elástica convencional de un material homogéneo para analizar el elemento. De nf_c, se puede determinar el esfuerzo en el acero, en que f_c es el esfuerzo en el concreto en ese punto.

Si el elemento del área es parte de una sección sujeta a flexión, se debe colocar al área de concreto que reemplaza al acero en forma simétrica paralela al eje neutro, para tener el mismo nivel de deformación que el acero (véanse las figs. 10.5 y 10.6). Las áreas A'_s y A_s se reemplazan por las áreas transformadas $(n - 1)A'_s$ y $(n - 1)A_s$, para la sección no agrietada.

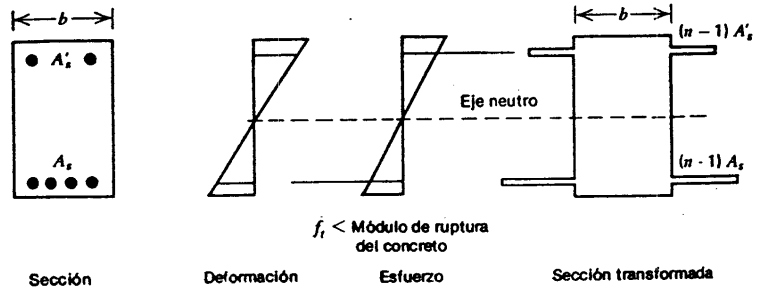


Figura 10.5. Sección transformada para flexión antes del agrietamiento.

Para la sección agrietada, el área A'_s del acero a compresión se remplaza por $(n - 1)A'_s$, pero el área del acero a tensión A_s se remplaza por nA_s debido a que la sección real de concreto bajo el eje neutro no puede trasmitir tensión, por lo que el acero a tensión no desplaza concreto efectivo.

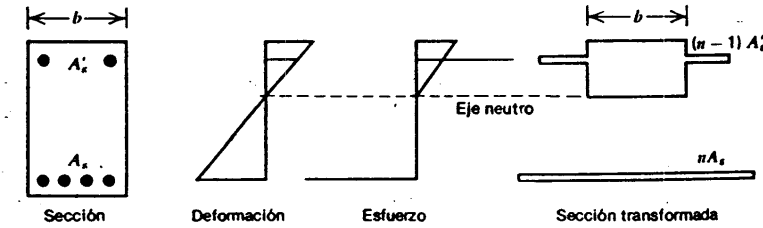


Figura 10.6. Sección transformada para flexión después del agrietamiento.

Se puede utilizar la teoría elástica convencional de una sección de material homogéneo para analizar la sección transformada. El esfuerzo f y el momento flexionante M para una viga están relacionados por la ecuación (consúltese cualquier texto sobre resistencia de materiales)

Antes del agrietamiento (fig. 10.7*a*)

$$(n-1)A_s = (8-1) \times 5 = 35 \text{ plg}^2$$

$$\therefore \quad A = (12 \times 24) + 35 = 288 + 35 = 323 \text{ plg}^2$$

Tomando momentos alrededor del borde superior para encontrar y:

$$323\bar{y} = (288 \times 12) + (35 \times 20) \qquad \therefore \quad \bar{y} = 12.87 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad I = \frac{12 \times 24^3}{12} + (288 \times 0.87^2) + (35 \times 7.13^2)$$

$$= 15{,}820 \text{ plg}^4$$

Después del agrietamiento (fig. 10.7*b*)

$$nA_s = 8 \times 5 = 40 \text{ plg}^2$$

$$\therefore \quad A = 12\bar{y} + 40$$

Solución

Propiedades de la sección transformada.

$$f = \frac{My}{I} \tag{10.23}$$

en que y = distancia desde el eje neutro a la fibra en cuestión e I = momento de inercia (segundo momento del área) de la sección transformada alrededor del eje neutro. Ya que el eje neutro está localizado en el centroide de la sección transformada, se puede encontrar la posición de aquél tomando momentos de las áreas alrededor de cualquier eje conveniente. La expresión $\int y^2\, dA$, da el momento de inercia, en que y = distancia desde el eje neutro a un elemento de área y dA = área del elemento.

Ejemplo 10.3

Una viga de concreto simplemente reforzado con la sección transversal indicada en la fig. 10.7 tiene concreto con un módulo de ruptura de 450 lb/plg^2 (3.1 N/mm^2). La razón modular es $n = 8$. Calcular los esfuerzos en el acero y el concreto, cuando el momento flexionante es (1) 300,000 lb·plg (33.9kN·m), y (2) 900,000 lb·plg (101.6 kN·m).

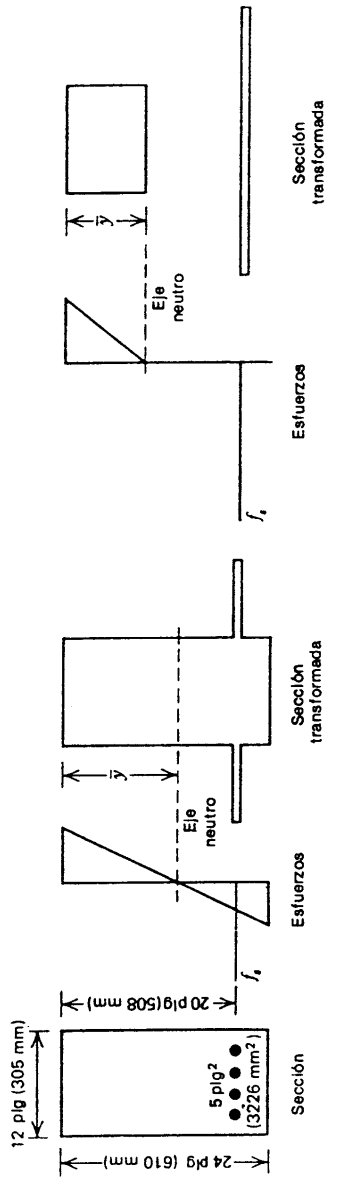


Figura 10.7. Ejemplo 10.3. *a*) Antes del agrietamiento. *b*) Después del agrietamiento.

Tomando momentos alrededor del eje neutro para encontrar y:

$$12\bar{y}\frac{\bar{y}}{2} = 40(20 - \bar{y})$$

$$\therefore \quad \bar{y}^2 + 6.67\bar{y} - 133.3 = 0 \qquad \therefore \quad \bar{y} = 8.68 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad I = \frac{12 \times 8.68^3}{12} + (12 \times 8.68 \times 4.34^2) + (40 \times 11.32^2)$$

$$= 7740 \text{ plg}^4$$

Nótese que se supone que el área transformada del acero tiene espesor de poca consideración; en consecuencia, se puede ignorar el momento de inercia alrededor de su propio centroide. Además, para la sección de este ejemplo, el efecto del agrietamiento es de reducir el valor I en 51%.

Momento para provocar el agrietamiento

$$M_{agrietamiento} = \frac{f_r I_{agrietado}}{y_{fondo}}$$

en que f_r = módulo de ruptura del concreto

$$\therefore \quad M_{agrietamiento} = \frac{450 \times 15{,}820}{11.13}$$

$$= 639{,}600 \text{ lb} \cdot \text{plg}$$

1. $M = 300{,}000$ lb·plg; en consecuencia, la sección no está agrietada.

$$f = \frac{My}{I}$$

superior $f_c = 300{,}000 \times 12.87/15{,}820 = 244$ lb/plg^2 (1.68 N/mm^2)

inferior $f_c = 300{,}000 \times 11.13/15{,}820 = 211$ lb/plg^2 (1.46 N/mm^2)

$$f_s = nf_c = 8 \times 300{,}000 \times 7.13/15{,}820$$

$$= 1080 \text{ lb/plg}^2 \text{ (7.45 N/mm}^2\text{)}$$

2. $M = 900{,}000$ lb · plg; en consecuencia, la sección está agrietada.

superior $f_c = 900{,}000 \times 8.68/7740 = 1010$ lb/plg^2 (6.96 N/mm^2)

$$f_s = 8 \times 900{,}000 \times 11.32/7740 = 10{,}530 \text{ plg (72.6 N/mm}^2\text{)}$$

Nótese el aumento significativo en el esfuerzo del acero después del agrietamiento. Cuando el agrietamiento ocurre a un momento flexionante de 639,600 lb·plg (72.2 kN.m) el esfuerzo máximo del concreto aumenta de 520 a 720 lb/plg (3.6 a 5.0 N/mm^2) y el esfuerzo en el acero aumenta de 2300 a 7480 lb/plg^2 (15.9 a 51.6 N/mm^2).

10.2.5 Diseño de vigas utilizando el método alterno (teoría elástica)

El código[10.1] del ACI de 1971 pemite diseñar miembros a flexión sin carga axial mediante la teoría elástica (teoría de la línea recta). Este método proporciona los miembros de manera que no se excedan los esfuerzos permisibles especificados bajo las cargas de servicio. El esfuerzo de compresión permisible en el concreto es de $0.45f'_c$. El esfuerzo de tensión permisible en el acero es de 20,000 lb/plg^2(138 N/mm^2) para acero de grado 40 ó de grado 50 (f_y = 276 o 345 N/mm^2), ó 24,000 lb/plg^2(166 N/mm^2) para el acero de grado 60(f_y = 414 N/mm^2) o grado superior. La razón modular n que estipula el código es E_s/E_c, excepto que en los miembros doblemente reforzados se utiliza una razón modular efectiva de $2E_s/E_c$ cuando se considera el acero a compresión. El valor que se toma para E_s es de 29×10^6 lb/plg^2(200,000 N/mm^2), y E_c para el concreto de peso normal y el ligero es de $57{,}000\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 ($4730\sqrt{f'_c}$ N/mm^2). Se puede tomar la razón modular n como el número entero más próximo.

El valor recomendado para la razón modular ignora el efecto del flujo plástico del concreto, excepto en lo que afecta al acero a compresión; en donde se toma el coeficiente del flujo plástico como $C_t = 1$. En el ejemplo 10.1 se revela el motivo. Una comparación de los esfuerzos después del flujo plástico con los esfuerzos antes del flujo plástico indica un aumento muy significativo en el esfuerzo del acero a compresión, y un aumento muy pequeño en el esfuerzo del acero a tensión, y una disminución en el esfuerzo de compresión del concreto; enfoque que significa que cuando se carga por primera vez una sección doblemente reforzada, el concreto estará esforzado más fuertemente de lo calculado, pero que el esfuerzo de compresion en el concreto disminuye con el tiempo debido al flujo plástico; y el esfuerzo en el acero a compresión gradualmente aumenta y se aproxima al valor de diseño.

Diseño de secciones rectangulares simplemente reforzadas para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles del acero y el concreto

Un enfoque conveniente, que utiliza adecuadamente los materiales, es hacer el diseño para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles del acero y el concreto para el momento flexionante de la carga de servicio.

La ec. 10.6 muestra que

$$\frac{f_s}{nf_c} = \frac{1 - k}{k}$$

en que

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

ó

$$k = \frac{nf_c}{nf_c + f_s} \tag{10.24}$$

En consecuencia, de la ec. 10.24 se puede encontrar k para esfuerzos permisibles dados. Entonces, las ecuaciones de diseño son

$$M = 0.5f_c bkd\left(d - \frac{kd}{3}\right) \tag{10.25}$$

y

$$M = A_s f_s\left(d - \frac{kd}{3}\right) \tag{10.26}$$

Se puede escribir la ec. 10.25 como

$$bd^2 = \frac{2M}{f_c k(1 - k/3)} \tag{10.25a}$$

que permite elegir dimensiones de secciones para un momento dado y el desarrollo simultáneo de esfuerzos permisibles. La ec. 10.26 también se puede reescribir como

$$A_s = \frac{M}{f_s d(1 - k/3)} \tag{10.26a}$$

que permite encontrar el área del acero requerido.

Antiguamente a un diseño en que se desarrollaban a la vez los esfuerzos permisibles del acero y el concreto se le llamaba un "diseño balanceado." Aquí no se utiliza esa terminología debido a la confusión posible con una "falla balanceada" del método de diseño por resistencia. El desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles del concreto y el acero bajo carga de servicio no significa que esa sección deba sufrir una falla balanceada si se carga a su resistencia a flexión. Esa sección invariablemente sufriría una falla a tensión debido a que la forma curva del bloque de esfuerzos de compresión del concreto a altos esfuerzos significa que el concreto puede desarrollar una fuerza grande de compresión. Además las relaciones elegidas de esfuerzo permisible a esfuerzo de cedencia o a resistencia última afectan el balance de la resistencia del acero y el concreto.

Ejemplo 10.4

Diseñar una sección rectangular simplemente reforzada con un ancho de 10 plg (254 mm) para que tome un momento flexionante de carga de servicio de 1.2×10^6 lb plg (135 kN · m). Se deben desarrollar simultáneamente los esfuerzos permisibles del acero y el concreto, $f_s = 0.5f_y$ y $f_c = 0.45f'_c$. Las resistencias de los materiales son $f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 N/mm^2) y $f'_c = 3000$ lb/plg^2 (20.7 N/mm^2).

Solución

Los esfuerzos permisibles son $f_s = 20.000$ lb/plg^2 $f_c = 0.45 \times 3000 = 1350$ lb/plg^2. Adicionalmente, $E_c = 57{,}000\sqrt{3000} = 3.12 \times 10^6$ lb/plg^2.
Por tanto $n = E_s/E_c = 29 \times 10^6/(3.12 \times 10^6) = 9.29$. En consecuencia, se utiliza $n = 9$.
De la ec. 10.24 se tiene

$$k = \frac{9 \times 1350}{9 \times 1350 + 20{,}000} = 0.378$$

De las ecs. 10.25 ó 10.25*a*

$$1.2 \times 10^6 = 0.5 \times 1350 \times 10 \times 0.378\left(1 - \frac{0.378}{3}\right)d^2$$

$$\therefore \quad d = 23.2 \text{ plg (589 mm)}$$

De las ecs. 10.26 ó 10.26*a* se hace

$$1.2 \times 10^6 = A_s\, 20{,}000 \times 23.2\left(1 - \frac{0.378}{3}\right)$$

$$\therefore \quad A_s = 2.96 \text{ plg}^2 \text{ (1910 mm}^2\text{)}$$

Diseño de secciones rectangulares simplemente reforzadas sin desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles

Una sección en que se desarrollan simultáneamente los esfuerzos permisibles del acero y el concreto no necesariamente es la más económica. Los costos relativos del acero y concreto, la necesidad de estandarizar los tamaños en toda una estructura y otras razones hacen que resulte más conveniente tener una sección de proporciones tales que no se desarrollen simultáneamente los esfuerzos permisibles. Entonces, el esfuerzo en el acero o en el concreto gobierna el diseño. El esfuerzo crítico depende de los esfuerzos permisibles y de la cuantía de acero $\rho = A_s/bd$.

Para una ρ dada, la ec. 10.9 da la profundidad del eje neutro de una sección simplemente reforzada como

$$k = \sqrt{\rho^2 n^2 + 2\rho n} - \rho n \tag{10.27}$$

El valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles del acero y el concreto está dado por la ec. 10.24, sustituyendo los esfuerzos permisibles para f_c y f_s.

Si se encuentra que el valor real de k para la sección es menor que el valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles, entonces en el momento flexionante permisible, f_s es igual al esfuerzo permisible del acero pero f_c es menor que el esfuerzo permisible del concreto (véase la fig. 10.8). La ec. 10.26 da el momento flexionante permisible como

$$M = A_s f_s \left(d - \frac{kd}{3}\right)$$

con f_s en el valor permisible.

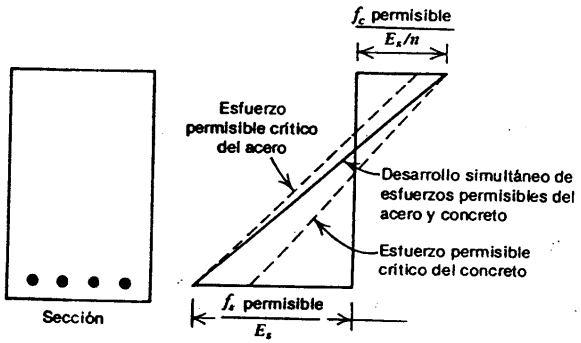


Figura 10.8. Diagramas de deformaciones para sección con esfuerzos críticos permisibles de acero y concreto.

En otra forma, si k excede el valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles, la fig. 10.8 muestra que en el momento flexionante permisible, f_c es igual al esfuerzo permisible del concreto, pero f_s es menor que el esfuerzo permisible del acero. La ec. 10.25 da el momento flexionante permisible como

$$M = 0.5 f_c bkd\left(d - \frac{kd}{3}\right)$$

con f_c en el valor permisible.

De la ec. 10.25 es evidente que

$$\frac{M}{bd^2} = 0.5 f_c k\left(1 - \frac{k}{3}\right) \qquad (10.28)$$

En el diseño, si se conocen las dimensiones de la sección de concreto, la mejor manera de verificar si el esfuerzo del acero o del concreto será el crítico es calcular el valor de $0.5 f_c k(1 - k/3)$ para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles y compararlo con el valor de M/bd^2 para la sección, en que M es el momento flexionante de la carga de servicio. Si $M/bd^2 < 0.5 f_c k(1 - k/3)$ para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles, el esfuerzo en el acero es crítico; y si $M/bd^2 > 0.5 f_c k(1 - k/3)$ para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles, el esfuerzo en el concreto es crítico.

Ejemplo 10.5

Se desea que una sección rectangular de concreto reforzado con ancho de 18 plg (457 mm) y profundidad efectiva de 32 plg (813 mm) al acero a tensión tome un momento flexionante de carga de servicio de 2.8×10^6 lb/plg (316 kN m) La razón modular es $n = 9$, y los esfuerzos permisibles son 1350 lb/plg^2(9.31 N/mm^2) para el concreto y 24,000 lb/plg^2 (166 N/mm^2) para el acero. Calcular el área requerida de acero.

Solución

El valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles es, de la ec. 10.24:

$$k = \frac{9 \times 1350}{9 \times 1350 + 24{,}000} = 0.336$$

$$\therefore \quad 0.5 f_c k\left(1 - \frac{k}{3}\right) = 0.5 \times 1350 \times 0.336\,(1 - 0.112) = 201$$

Luego

$$\frac{M}{bd^2} = \frac{2.8 \times 10^6}{18 \times 32^2} = 152 < 201$$

En consecuencia, el esfuerzo en el acero es crítico (es decir, f_s = esfuerzo permisible en el acero y $f_c <$ esfuerzo permisible en el concreto.

El valor real de k será más pequeño que $k = 0.336$. Sin embargo, usar $k = 0.336$ para encontrar el brazo de palanca proporciona una muy buena aproximación, ligeramente del lado de la seguridad (el brazo real de palancas será un poco mayor).

$$\therefore \quad jd = 32\left(1 - \frac{0.336}{3}\right) = 28.42 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad A_s = \frac{M}{jdf_s}$$

$$= \frac{2.8 \times 10^6}{28.42 \times 24{,}000} = 4.11 \text{ plg}^2 \text{ (2648 mm}^2\text{)}$$

Diseño de secciones rectangulares doblemente reforzadas

El esfuerzo del concreto es crítico en el diseño de secciones en que M/bd^2 excede el valor de $0.5f_c k(1 - k/3)$ para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles. Es mejor utilizar tanto acero a compresión como a tensión en este caso, ya que el acero a tensión sólo, requeriría una gran área de acero trabajando a un esfuerzo inferior al permisible.

Para diseñar una sección doblemente reforzada (véase la fig. 10.9) el primer paso más conveniente es calcular el momento flexionante que transmitiría una viga reforzada simplemente con las dimensiones dadas, si se

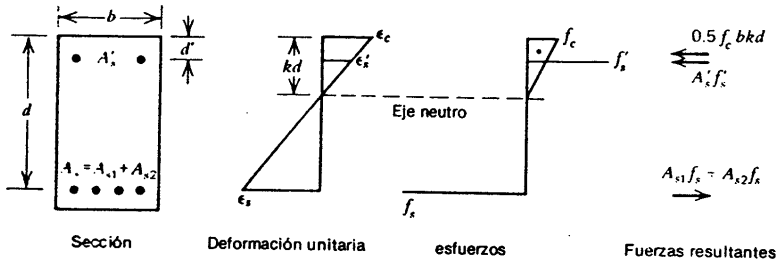


Figura 10.9. Diseño de una sección de concreto doblemente reforzado.

desarrollan simultáneamente los esfuerzos permisibles del acero y el concreto.

$$M_1 = 0.5f_c bkd\left(d - \frac{kd}{3}\right) \tag{10.29}$$

en que f_c es el valor permisible y k se encuentra utilizando los esfuerzos permisibles. Entonces se puede calcular el área del acero a tensión A_{s1} requerido para M_1

$$A_{s1} = \frac{M_1}{f_s(d - kd/3)} \tag{10.30}$$

en que f_s es el valor permisible. Un par interno formado por el área A'_s del acero a compresión y un área A_{s2} adicional de acero a tensión con un

brazo de palanca de $d - d'$. debe resistir el resto del momento flexionante, $M - M_1$,

$$\therefore \quad A_{s2} = \frac{M - M_1}{f_s(d - d')} \tag{10.31}$$

en que f_s es el valor permisible y

$$A'_s = \frac{M - M_1}{f'_s(d - d')} \tag{10.32}$$

en que f'_s está gobernado por la deformación en el concreto adyacente. Del diagrama de deformaciones de la fig. 10.9, se puede escribir

$$\frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_c} = \frac{kd - d'}{kd}$$

$$\therefore \quad f'_s = \varepsilon'_s E_s = \varepsilon_c\left(\frac{kd - d'}{kd}\right)E_s$$

Pero

$$\varepsilon_c = \frac{f_c}{E_c}(1 + C_t)$$

$$\therefore \quad f'_s = nf_c\left(\frac{kd - d'}{kd}\right) \tag{10.33}$$

en que

$$n = \frac{E_s}{E_c}(1 + C_t)$$

Ejemplo 10.6

Una sección de concreto rectangular tiene $b = 15$ plg (381 mm), $d' = 3.6$ plg (91 mm), y $d = 35.6$ plg (904 mm), los esfuerzos permisibles son 1125 lb/plg^2 (7.76 N/mm^2) para el concreto y 20,000 lb/plg^2(138 N/mm^2) para el acero. La razón E_s/E_c es 10. Calcular las áreas del acero que se requieren para un momento de cargas de servicio de 5×10^6 lb/plg (565 kN m).

Solución

De acuerdo con el ACI 318-71,[10.1] $n = E_s/E_c = 10$; excepto cuando se determina el área del acero a compresión, en cuyo caso, $n = 2E_s/E_c = 20$.

De la ec. 10.24, el valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles es

$$k = \frac{10 \times 1125}{10 \times 1125 + 20{,}000} = 0.360 \qquad 1 - \frac{k}{3} = 1 - 0.12 = 0.88$$

De las ecs. 10.29 y 10.30 se tiene

$$M_1 = 0.5 \times 1125 \times 15 \times 0.36 \times 35.6 \times 35.6 \times 0.88$$
$$= 3.39 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}$$
$$A_{s1} = \frac{3.39 \times 10^6}{20{,}000 \times 35.6 \times 0.88} = 5.41 \text{ plg}^2$$

De las ecs. 10.31 a 10.33 se tiene

$$A_{s2} = \frac{(5 - 3.39) \times 10^6}{20{,}000(35.6 - 3.6)} = 2.52 \text{ plg}^2$$

$$f'_s = 20 \times 1125 \times \left(\frac{0.36 \times 35.6 - 3.6}{0.36 \times 35.6}\right) = 16{,}180 \text{ lb/plg}^2 < 20{,}000 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad A'_s = \frac{(5 - 3.39) \times 10^6}{16{,}180(35.6 - 3.6)} = 3.11 \text{ plg}^2 \ (2006 \text{ mm}^2)$$

$$\therefore \quad A_s = A_{s1} + A_{s2} = 5.41 + 2.52 = 7.93 \text{ plg}^2 \ (5116 \text{ mm}^2)$$

Nótese que el esfuerzo en el acero a compresión no debe ser mayor que el esfuerzo permisible del acero. Si el valor calculado de f'_s vá más allá del esfuerzo permisible, éste se debe utilizar en vez del calculado.

Diseño de secciones de vigas T

Una sección de viga T en que se desarrollan simultáneamente los esfuerzos permisibles del acero y el concreto tendrá una k como la dada por la ec. 10.24, sustituyendo los esfuerzos permisibles. De las ecs. 10.18 y 10.20 se tiene

$$M = bh_f f_c\left(1 - \frac{h_f}{2kd}\right)\left[d - \frac{h_f}{3}\left(\frac{3kd - 2h_f}{2kd - h_f}\right)\right]$$

$$\therefore \quad \frac{M}{bh_f f_c} = \left(\frac{2kd - h_f}{2kd}\right)\left[\frac{6kd^2 - 3h_f d - 3kdh_f + 2h_f{}^2}{3(2kd - h_f)}\right]$$

$$= d - \frac{1}{2}\frac{h_f}{k} - \frac{h_f}{2} + \frac{1}{3}\frac{h_f{}^2}{kd}$$

$$\therefore \quad 0 = d^2 - d\left[\frac{M}{bh_f f_c} + \frac{h_f}{2k}(1 + k)\right] + \frac{h_f{}^2}{3k} \qquad (10.34)$$

La ec. 10.34 permite determinar el peralte efectivo de una sección de viga T en que los esfuerzos permisibles se desarrollan simultáneamente. Entonces se puede encontrar el área de acero, utilizando las ecs. 10.18 y 10.19.

Ejemplo 10.7

Una sección de viga T tiene un ancho de patín de 48 plg (1220 m m) y un espesor de patín de 5 plg (127 mm). El momento flexionante de la carga de servicio es 6×10^6 lb · (677 kN · m). Calcular la profundidad efectivo del área del acero, si $n = 9$ y los esfuerzos permisibles de 1350 lb/plg (9.31 N/mm^2) para el concreto y 20,000 lb/plg (138 N/mm^2) para el acero se desarrollan simultáneamente.

Solución

De la ec. 10.24, el valor de k para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles es

$$k = \frac{9 \times 1350}{9 \times 1350 + 20{,}000} = 0.378$$

De la ec. 10.34 se tiene

$$0 = d^2 - d\left(\frac{6 \times 10^6}{48 \times 5 \times 1350} + \frac{5 \times 1.378}{2 \times 0.378}\right) + \frac{5^2}{3 \times 0.378}$$

$$= d^2 - 27.63d + 22.05$$

$$\therefore \quad d = 28.4 \text{ plg } (721 \text{ mm})$$

De las ecs. 10.18 y 10.19,

$$jd = 28.4 - \frac{5}{3}\left(\frac{3 \times 0.378 \times 28.4 - 2 \times 5}{2 \times 0.378 \times 28.4 - 5}\right) = 26.15 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad A_s = \frac{6 \times 10^6}{20{,}000 \times 26.15}$$

$$= 11.47 \text{ plg}^2 \ (7400 \text{ mm}^2)$$

Por lo general, un diseño para vigas T basado en el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles produce una sección relativamente poco peraltada con un área grande de acero a colocar en el alma. Puede ser deseable en mayor medida una sección más peraltada. Una sección de viga T más peraltada que la correspondiente para el desarrollo simultáneo de los esfuerzos permisibles tendrá f_s = esfuerzo permisible del acero y $f_c <$ esfuerzo permisible del concreto. Para esa sección, de $A_s = M/f_s jd$. se puede encontrar el área del acero. Una aproximación razonable para jd es $d - 0.5h_f$.

10.2.6 Análisis de columnas cortas

Columnas cortas cargadas axialmente

Si se aplica una carga axial P al centroide de la sección de una columna corta de concreto reforzado con área A_c del concreto y área A_s, del acero, la carga se distribuye entre el concreto y el acero

$$P = A_c f_c + A_s f_s$$

El acero y el concreto tendrán la misma deformación unitaria en toda la sección, y de la ec. 10.21, $f_s = nf_c$, en que $n = (E_s/E_c)(1 + C_t)$.

$$\therefore \quad P = f_c(A_c + A_s n) \tag{10.35}$$

ó

$$P = f_s\left(\frac{A_c}{n} + A_s\right) \tag{10.36}$$

En una columna bajo carga sostenida, n aumenta con el tiempo debido al aumento en el coeficiente C_t, de flujo plástico, y se obtiene como resultado una gran redistribución del esfuerzo entre el concreto y el acero.

Ejemplo 10.8

Una columna cuadrada de concreto reforzado de 10 plg (254 mm) está reforzada simétricamente por 1.76 plg^2 (1135 mm^2) de acero; $E_s/E_c = 10$. Se quiere que la columna trasmita una carga axial de 200 kip (890 kN). Calcular los esfuerzos (1) en la primera aplicación de la carga, (2) después de un largo periodo de carga, si el coeficiente de flujo plástico es $C_t = 2$,' y (3) cuando se quita la carga después del periodo largo de carga.

Solución

$$A_s = 1.76 \text{ plg}^2 \qquad A_c = 100 - 1.76 = 98.24 \text{ plg}^2$$

1. *En la primera aplicación de la carga,* $C_t = 0$

$$\therefore \quad n = 10$$

De las ecs. 10.35 y 10.36 se escribe

$$f_c = \frac{200{,}000}{98.24 + 1.76 \times 10} = 1727 \text{ lb/plg}^2 \ (11.9 \text{ N/mm}^2)$$

$$f_s = \frac{200{,}000}{98.24/10 + 1.76} = 17{,}270 \text{ lb/plg}^2 \ (119 \text{ N/mm}^2)$$

2. *Después de un largo periodo de carga,* $C_t = 2$.

$$\therefore \quad n = 10(1 + 2) = 30$$

De las ecs. 10.35 y 10.36 se tiene

$$f_c = \frac{200{,}000}{98.24 + 1.76 \times 30} = 1324 \text{ lb/plg}^2 \ (9.12 \text{ N/mm}^2)$$

$$f_s = \frac{200{,}000}{98.24/30 + 1.76} = 39{,}720 \text{ lb/plg}^2 \ (274 \text{ N/mm}^2)$$

3. *Al quitar la carga después del largo periodo de aplicación*

El cambio en el esfuerzo al quitar la carga se deberá al comportamiento elástico con $n = 10$. En consecuencia, los esfuerzos residuales cuando se quita la carga se encuentran del caso 2 menos el caso 1

$f_c = 1320 - 1730 = -410 \text{ lb/plg}^2 (2.83 \text{ N/mm}^2)$, tensión

$f_s = 39{,}760 - 17{,}270 = 22{,}490 \text{ lb/plg}^2 \ (155 \text{ N/mm}^2)$, compresión

Se debe notar que la recuperación por flujo plástico del concreto hace que estos esfuerzos residuales se reduzcan con el tiempo.
La fig. 10.10 ilustra los cambios de los esfuerzos en la columna con el tiempo.

El ejemplo anterior ilustra que el flujo plástico del concreto con carga sostenida produce una disminución en el esfuerzo de compresión del concreto y un aumento considerable en el esfuerzo de compresión en el acero. El aumento en el esfuerzo del acero puede incluso ser suficiente para que

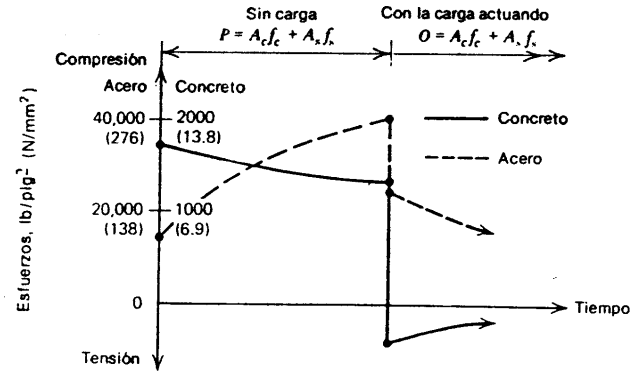


Figura 10.10. Esfuerzos del ejemplo 10.8.

el acero alcance la resistencia de cedencia bajo la carga de servicio. Sin embargo, el flujo plástico del concreto bajo una carga sostenida de servicio no afecta la seguridad de la columna. La carga última de una columna corta no se alcanza sino hasta en tanto el acero como el concreto hayan alcanzado sus resistencias máximas, o sea que debe aplicarse suficiente carga para provocar que el acero alcance su resistencia de cedencia y que el concreto alcance su resistencia al aplastamiento antes de lograr la carga máxima (véase la sección 5.2). Debido al efecto de la carga sostenida se puede presentar cierta pérdida en la resistencia del concreto (ver la sección 2.1.1), pero como el nivel de esfuerzo del concreto bajo las cargas de servicio es relativamente bajo, este efecto sería despreciable.

El ejemplo 10.8 también ilustra que si se quita la carga, el concreto puede quedar con una tensión residual, y el acero con una considerable compresión residual, la que se reduce con el tiempo por efecto del flujo plástico.

Es obvio que es muy difícil evaluar en forma realista la seguridad de las columnas de concreto reforzado utilizando la teoría elástica. El ACI 318-71[10.1] no permite usar la teoría elástica para el diseño de columnas. Sin embargo, es necesario utilizar un análisis elástico incluyendo un margen para el probable efecto del flujo plástico, cuando se desea evaluar la deformación bajo condiciones de carga de servicio.

Columnas cortas cargadas excéntricamente

Dependiendo de la magnitud de la excentricidad de la carga, puede o no existir tensión en el concreto.

Compresión en toda la sección

El método de la sección transformada es el mejor para el caso de compresión en toda la sección. Los esfuerzos del concreto para una columna corta con flexión alrededor de un eje principal, debido a que actúa una carga P con excentricidad e medida desde el centroide de la sección transformada, están dados por

$$f = \frac{P}{A} \pm \frac{Pey}{I} \tag{10.37}$$

en que y = distancia del centroide de la sección transformada a la fibra en cuestión, A = área de la sección transformada e I = momento de inercia (segundo momento del área) de la sección transformada alrededor del eje centroidal. El esfuerzo en el acero está dado por n multiplicada por el esfuerzo en el concreto adyacente.

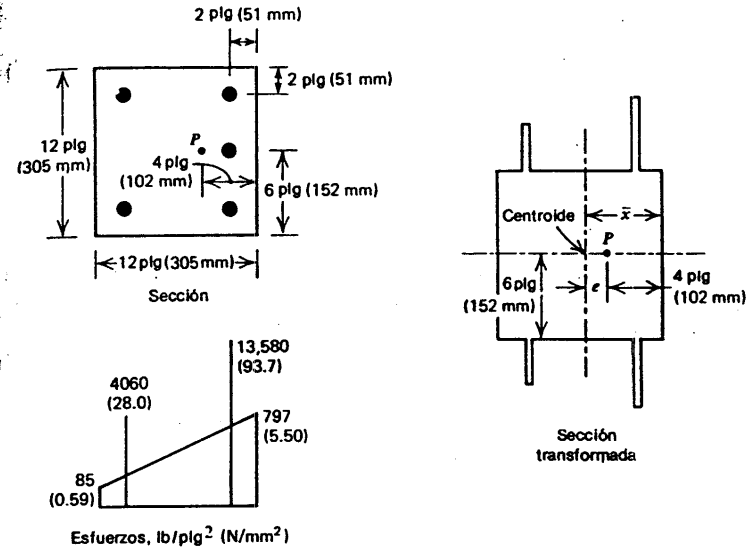


Figura 10.11. Ejemplo 10.9.

Ejemplo 10.9

La sección de columna de concreto de la fig. 10.11 está reforzada no simétricamente por cinco varillas núm. 8 (25.4 mm de diámetro), cada una colocada con su centroide a 2 plg (51 mm) de las caras adyacentes de la columna. Encontrar los esfuerzos debidos a una carga de 100 kip (445 kN) colocada como se muestra, si la razón modular es $n = 20$.

Solución

El área de cada varilla es 0.79 plg^2.
El área transformada de la sección es

$$A = 12 \times 12 + (20 - 1)3 \times 0.79 + (20 - 1)2 \times 0.79$$
$$= 144 + 45.0 + 30.0 = 219 \text{ plg}^2$$

La posición del centroide $\bar{x}$ se puede encontrar tomando momentos alrededor del borde del lado derecho.

$$219\,\bar{x} = (144 \times 6) + (45 \times 2) + (30 \times 10)$$

$$\therefore \quad \bar{x} = 5.73 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad \text{excentricidad de la carga } e = 5.73 - 4 = 1.73 \text{ plg}$$

El momento de inercia es

$$I = (\tfrac{1}{12} \times 12 \times 12^3 + 144 \times 0.27^2) + (45 \times 3.73^2) + (30 \times 4.27^2)$$
$$= 2912 \text{ plg}^4$$

Por tanto, de la ec. 10.37 se tiene

$$f = \frac{100{,}000}{219} \pm \frac{100{,}000 \times 1.73x}{2912} = 457 \pm 59.4x$$

En el borde izquierdo, $f_c = 457 - 59.4 \times 6.27 = 85$ lb/plg^2 (0.59 N/mm^2)
En el borde derecho, $f_c = 457 + 59.4 \times 5.73 = 797$ lb/plg^2 (5.50 N/mm^2)
en el acero izquierdo, $f_s = 20(457 - 59.4 \times 4.27)$
$= 4060$ lb/plg^2 (28.0 N/mm^2)
En el acero derecho, $f_s = 20(457 + 59.4 \times 3.73)$
$= 13{,}580$ lb/plg^2 (93.7 N/mm^2)

Hay compresión en toda la sección.

Tensión en parte de la sección

Si es grande la excentricidad de la carga, se induce un esfuerzo apreciable de tensión en el concreto y éste se agrieta. Se puede analizar este caso utilizando el método de la sección transformada, ignorando el concreto en tensión. De otra manera, se puede utilizar el enfoque del par interno.

En la fig. 10.12 se muestran los diagramas de esfuerzo y deformación unitaria para una sección agrietada, reforzada simétricamente por varillas en dos caras opuestas. Los esfuerzos se pueden relacionar mediante el diagrama de deformaciones y la razón modular en la misma manera empleada para una viga doblemente reforzada (véase las ecs. 10.4 a 10.7). Los esfuerzos están dados por

$$f'_s = \left(\frac{kd - d'}{kd}\right) nf_c \qquad \text{y} \qquad f_s = \frac{1 - k}{k} nf_c$$

en que

$$n = \frac{E_s}{E_c}(1 + C_t)$$

Las ecuaciones de equilibrio para la sección son

$$P = 0.5f_c bkd + f'_s 0.5A_{st} - f_s 0.5A_{st} \tag{10.38}$$

$$Pe = 0.5f_c bkd\left(\frac{h}{2} - \frac{kd}{3}\right) + f'_s 0.5A_{st}\left(\frac{h}{2} - d'\right) + f_s 0.5A_{st}\left(\frac{h}{2} - d'\right) \tag{10.39}$$

Sustituyendo f'_s y f_s de las ecs. 10.5 y 10.6, se escribe

$$P = 0.5f_c bkd + \frac{kd - d'}{kd} nf_c 0.5A_{st} - \frac{1 - k}{k} nf_c 0.5A_{st}$$

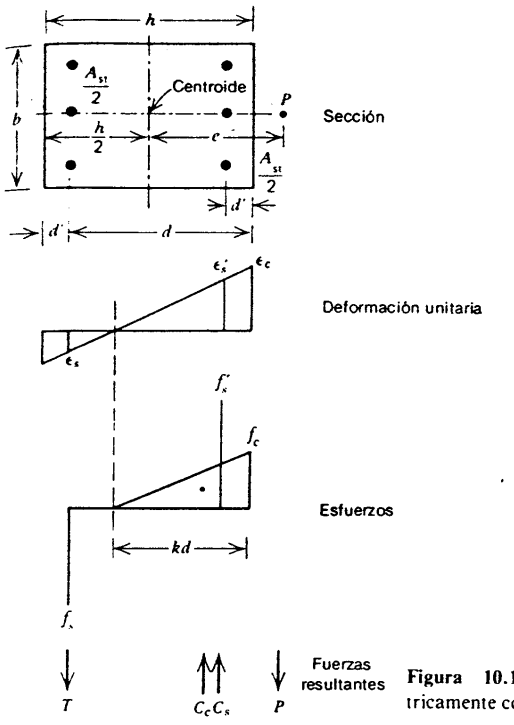


Figura 10.12. Columna reforzada simétricamente con carga excéntrica.

$$= 0.5f_c bkd + 0.5\left(\frac{2kd - d' - d}{kd}\right) nf_c A_{st} \tag{10.40}$$

$$Pe = 0.5f_c bkd\left(\frac{h}{2} - \frac{kd}{3}\right) + \frac{kd - d'}{kd} nf_c 0.5A_{st}\left(\frac{h}{2} - d'\right)$$
$$+ \frac{1 - k}{k} nf_c 0.5A_{st}\left(\frac{h}{2} - d'\right)$$
$$= 0.5f_c bkd\left(\frac{h}{2} - \frac{kd}{3}\right) + 0.5\left(\frac{d - d'}{kd}\right) nf_c A_{st}\left(\frac{h}{2} - d'\right) \tag{10.41}$$

Es difícil utilizar las ecs. 10.40 y 10.41 para resolver una sección de columna dada, que requiere la solución de una ecuación cúbica para la profundidad del eje neutro. La mejor manera de llegar a la solución es utilizando gráficas de diseño.

Ejemplo 10.10

Una sección de columna cuadrada de 12 plg (305 mm) está reforzada simétricamente por cuatro varillas núm. 6 (19.1 mm de

diámetro), con una varilla en cada esquina de la sección. El centroide de cada varilla está a 2 plg (51 mm) de los lados adyacentes de la columna. La columna transmite una carga de 50 kips (222 kN) a una excentricidad de 4 plg (102 mm) con respecto a un eje principal de la sección. La razón modular n es 15. Calcular los esfuerzos en el acero y el concreto.

Solución

$$A_{st} = 4 \times 0.44 = 1.76 \text{ plg}^2$$

De la ec. 10.40 se tiene

$$50{,}000 = 0.5 \times 12 \times 10 f_c k + 0.5\left(\frac{2 \times 10k - 2 - 10}{10k}\right)15 \times 1.76 f_c$$

$$\therefore \quad f_c = \frac{50{,}000}{60k + 5.28(5k - 2)/k}$$

De la ec. 10.41,

$$50{,}000 \times 4 = 0.5 \times 12 \times 10 f_c k\left(6 - \frac{10k}{3}\right) + 0.5\left(\frac{10 - 2}{10k}\right)15 \times 1.7 f_c(6 - 2)$$

$$200{,}000 = 60 f_c k(6 - 3.333k) + 42.24 \frac{f_c}{k}$$

$$\therefore \quad f_c = \frac{200{,}000}{60k(6 - 3.333k) + 42.24/k}$$

Igualando las dos ecuaciones para f_c

$$k^3 - 0.600k^2 + 0.528k - 0.422 = 0$$

que resuelta por aproximaciones da $k = 0.715$.

$$\therefore \quad f_c = \frac{50{,}000}{60 \times 0.715 + 5.28(5 \times 0.715 - 2)/0.715}$$

$$= 920 \quad \text{plg}^2 \,(6.34 \text{ N/mm}^2), \quad \text{compresión}$$

$$f'_s = \left(\frac{10 \times 0.715 - 2}{10 \times 0.715}\right)15 \times 920 = 9940 \text{ lb/plg}^2 (68.6 \text{ N/mm}^2), \quad \text{compresión}$$

$$f_s = \left(\frac{1 - 0.715}{0.715}\right)15 \times 920 = 5500 \text{ lb/plg}^2 \ (37.9 \text{ N/mm}^2), \text{ tensión}$$

Nuevamente los esfuerzos, especialmente en el acero a compresión, dependen mucho del valor utilizado para la razón modular. El ACI 318-71[10.1] requiere que las columnas se diseñen por el método de las resistencias.

10.2.7 Esfuerzos de contracción

La contracción del concreto induce esfuerzos, si no pueden ocurrir sin restricción de formaciones debidas a la contracción. Las varillas de refuerzo restringen la contracción del concreto y pueden provocar que se desarrollen esfuerzos apreciables en el concreto. En la sección 2.1.5 se estudió la magnitud de la deformación de contracción que sufre el concreto, si tiene libertad de contraerse sin restricción.

El propósito principal de evaluar los esfuerzos de contracción es obtener la intensidad del esfuerzo inducido a tensión del concreto, valor que puede exceder la resistencia a tensión del concreto, expecialmente en las primeras etapas de endurecimiento. Si se excede la resistencia a tensión, se producen grietas. En seguida se determinan los esfuerzos debidos a la contracción para casos simétricos y no simétricos, suponiendo que la sección permanece no agrietada.

Refuerzo y sección simétricos

Considérese el elemento de longitud del miembro de concreto reforzado simétricamente de la fig. 10.13. Sea ε_{sh} la deformación de contración que sufriría el concreto si no estuviera confinado. Debido a la restricción del

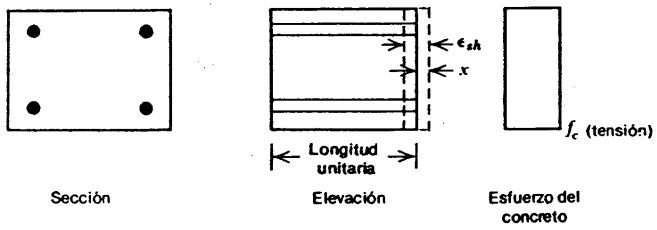


Figura 10.13. Contracción de un miembro reforzado simétricamente.

acero, la deformación real de contracción será solamente de x. En consecuencia, el refuerzo sufre una deformación x a compresión, que provoca un esfuerzo de compresión f_s, y el concreto sufre una deformación a tensión $\varepsilon_{sh} - x$ que provoca un esfuerzo f_c de tensión.

$$\therefore \quad f_s = xE_s \qquad \text{y} \qquad f_c = (\varepsilon_{sh} - x)\frac{E_c}{1 + C_t}$$

$$\therefore \quad x = \frac{f_s}{E_s} \qquad \text{y} \qquad f_c = \left(\varepsilon_{sh} - \frac{f_s}{E_s}\right)\frac{E_c}{1 + C_t}$$

Las fuerzas internas deben estar en equilibrio,

$$\therefore \quad f_s A_s = f_c A_c$$

en que A_s = área del acero y A_c = área del concreto.

$$\therefore \quad f_s = f_c \frac{A_c}{A_s} \tag{10.42}$$

y

$$f_c = \left(\varepsilon_{sh} - \frac{f_c A_c}{E_s A_s}\right)\frac{E_c}{1 + C_t} = \frac{\varepsilon_{sh} E_c}{1 + C_t} - \frac{f_c A_c}{A_s}\frac{E_c}{E_s(1 + C_t)}$$

$$\therefore \quad f_c = \frac{\varepsilon_{sh}}{\dfrac{1 + C_t}{E_c} + \dfrac{A_c}{A_s E_s}} \tag{10.43}$$

Es evidente que el esfuerzo de tensión del concreto inducido por contracción es proporcional a la deformación de contracción no restringida ε_{sh} y que el esfuerzo de tensión aumenta con la cuantía de acero. El acero colocado en el concreto para controlar las grietas de contracción aumentará realmente el esfuerzo de tensión del concreto.

Ejemplo 10.11

Una sección de losa de concreto reforzado está reforzada simétricamente. La razón del área de refuerzo al área de concreto es de 0.03. El módulo de elasticidad del acero es de 29×10^6 lb/plg^2 (200.000 N/mm^2), el módulo de elasticidad del concreto es de 2.9×10^6 lb/plg^2 ($20,000$ N/mm^2), el coeficiente de flujo plástico es 2, y la deformación por contracción no restringida del concreto es de 0.0005. Estimar los esfuerzos en el acero y el concreto debidos a la contracción.

Solución

De la ec. 10.43, se escribe

$$f_c = \frac{0.0005}{\dfrac{1 + 2}{2.9 \times 10^6} + \dfrac{1}{0.03 \times 29 \times 10^6}}$$

$$= 228 \text{ lb/plg} \quad (1.57 \text{ N/mm}^2), \text{ tensión}$$

De la ec. 10.42, se escribe

$$f_s = \frac{228}{0.03}$$

$$= 7600 \text{ lb/plg}^2 \ (52.4 \text{ N/mm}^2), \text{ compresión}$$

Refuerzo y sección no simétricos

Cuando el refuerzo o la sección son no simétricos, la contracción restringida no es uniforme en toda la sección (véase la fig. 10.14). Se supone que las secciones planas antes de la contracción permanecen planas después de la contracción.

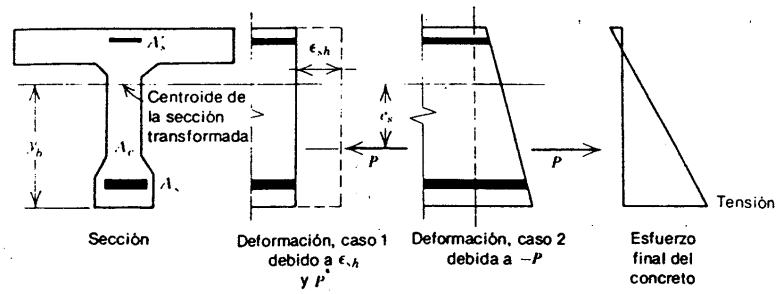


Figura 10.14. Contracción de un miembro reforzado asimétricamente.

El efecto de la contracción en este caso general se puede evaluar mediante un enfoque general basado en las propiedades de las áreas transformadas (véase la sección 10.2.4) y el principio de superposición. La sección de la fig. 10.14 tiene una sección transformada con área A, momento de inercia alrededor del centroide I y una distancia y_b desde la fibra del fondo al centroide. La deformación por contracción completa no restringida del concreto ε_{sh} ocurre como en el caso 1 de deformación de la fig. 10.14. Es evidente que esto solamente es posible si se aplica una fuerza externa P al refuerzo para reducirla en la misma cantidad. Esta fuerza es

$$P = A_{st} E_s \varepsilon_{sh}$$

en que A_{st} = área total del refuerzo = $A'_s + A_s$. La fuerza P actúa en el centroide del área total del acero, situado a la distancia e_s del centroide de la sección transformada, como en la fig. 10.14. Los esfuerzos en esta etapa de carga hipotética son cero en el concreto y

$$f_{s1} = \frac{P}{A_{st}} = \varepsilon_{sh} E_s \tag{10.44}$$

de compresión en el acero. Para anular la carga P externa artificial, se puede aplicar una fuerza externa igual y opuesta a la sección, como en el caso 2 de deformación de la fig. 10.14, lo que representa una tensión excéntrica y los esfuerzos resultantes del concreto (tensión positiva) se pueden obtener de

$$f_{c2} = \frac{P}{A} \pm \frac{Pe_s y}{I} \tag{10.45}$$

en que y = distancia de la fibra considerada desde el eje neutro; los esfuerzos resultantes del acero se pueden obtener de

$$f_{s2} = nf_{c2} \tag{10.46}$$

en que f_{c2} = esfuerzo del concreto en la fibra donde se desea determinar el esfuerzo del acero. Los esfuerzos finales inducidos por la contracción se obtienen de la suma de estos dos sistemas de esfuerzo, $f_s = f_{s1} + f_{s2}$ y $f_c = f_{c2}$.

Ejemplo 10.12

Una sección de losa de concreto simplemente reforzado tiene un peralte total de 10 plg (254 mm), un peralte efectivo de 8 plg (203 mm) y está reforzada por 1.92 plg² (1239 mm²) de acero en un ancho de 12 plg (305 mm). El módulo de elasticidad del acero es de 29×10^6 lb/plg² (200,000 N/mm²), el módulo de elasticidad del concreto es de 2.9×10^6 lb/plg² (20,000 N/mm²), el coeficiente de flujo plástico es 2 y la deformación de contracción no restringida del concreto es de 0.0005. Estimar los esfuerzos en el acero y el concreto que se deben a la contracción.

Solución

La razón modular, incluyendo el flujo plástico, es

$$n = \frac{E_s}{E_c}(1 + C_t) = \frac{29}{2.9}(1 + 2) = 30$$

El área transformada es

$$A = (12 \times 10) + (30 - 1)1.92 = 175.7 \text{ plg}^2 \text{ por pie de ancho}$$

La posición del eje centroidal de la sección transformada por sobre el nivel del refuerzo es

$$\bar{y} = 12 \times 10\frac{5 - 2}{175.7} = 2.05 \text{ plg } (= e_s)$$

En consecuencia, el momento de inercia alrededor del centroide es

$$I = \left(12 \times \frac{10^3}{12}\right) + (30 - 1)1.92 \times 2.05^2 + 12 \times 10(5 - 2 - 2.05)^2$$

$$= 1342 \text{ plg}^2 \text{ por pie de ancho}$$

El esfuerzo de compresión y la fuerza que se desarrollaría en el acero por una deformación unitaria ε_{sh} de 0.0005 se encuentran de la ec. 10.44 como sigue

$$f_{s1} = 0.0005 \times 29 \times 10^6 = 14{,}500 \text{ lb/plg}^2, \quad \text{compresión}$$

y

$$P = 14{,}500 \times 1.92 = 27{,}840 \text{ lb por pie de ancho}$$

Para eliminarla, se aplica una fuerza P de tensión y un momento Pe_s a la sección transformada. Entonces se encuentran los esfuerzos inducidos en el concreto de las ecs. 10.45 y 10.46 en la fibra superior

$$f_{c2} = \frac{27{,}840}{175.7} - \frac{27{,}840 \times 2.05 \times 5.95}{1342}$$

$$= 158 - 253 = -95 \text{ lb/plg}^2, \quad \text{compresión}$$

en la fibra inferior

$$f_{c2} = 158 + 253 \times \frac{4.05}{5.95} = 330 \text{ lb/plg}^2, \quad \text{tensión}$$

y en el acero

$$f_{s2} = 30\left(158 + 253 \times \frac{2.05}{5.95}\right) = 7360 \text{ lb/plg}^2, \quad \text{tensión}$$

Por tanto, los esfuerzos finales son, sumando

$f_s = 14{,}500 - 7360 = 7140$ lb/plg² (49.2 N/mm²), compresión

fibra superior $f_c = -95$ lb/plg² (−0.66 N/mm²), compresión

fibra inferior $f_c = 330$ lb/plg² (2.28 N/mm²), tensión

Se ha utilizado el módulo efectivo de elasticidad $E_c/(1 + C_t)$ en el cálculo de los esfuerzos debidos a la contracción del concreto, porque están involucrados esfuerzos sostenidos. Sin embargo, usar valores para el coeficiente C_t de flujo plástico obtenidos para el concreto bajo un esfuerzo de compresión constante es solamente una aproximación, debido a que los esfuerzos de contracción en el concreto aumentan con el tiempo y son primordialmente de tensión. En consecuencia, se puede esperar que estos

cálculos solamente proporcionen una aproximación a los esfuerzos de contracción real.

10.3 CONTROL DE DEFLEXIONES

10.3.1 La necesidad del control de las deflexiones

El usar concreto y acero de más altas resistencias junto con la introducción del diseño por resistencias máximas, ha permitido diseñar elementos estructurales más esbeltos. Además las estructuras de edificios modernos a menudo no tienen muros y particiones sustanciales, de manera que los elementos no estructurales pueden estar propensos al daño debido a las deformaciones de los miembros estructurales. En consecuencia, está adquiriendo mayor importancia el control de las deflexiones de los miembros a flexión bajo la carga de servicio.

Un informe del comité 435[10.4] del ACI sobre las deflexiones permisibles clasifica los efectos de las deflexiones bajo cuatro encabezados generales como sigue.

Aceptabilidad por los sentidos

La aceptabilidad por los sentidos tiende a ser cuestión de juicio personal y depende en gran medida de la cultura social de los usuarios y del tipo de la estructura. Bajo este encabezado se incluyen los efectos visuales, tales como las vigas colgadas o los voladizos inclinados, efectos táctiles tales como las vibraciones debidas a los efectos dinámicos de la carga viva o viento y efectos de audición, tales como el ruido de las vibraciones. Es difícil determinar los límites de las deflexiones en base a la aceptabilidad por los sentidos, debido a la variabilidad de la opinión personal.

Servicio de la estructura

Los límites de servicio se relacionan con el uso a que se destina la estructura. Algunos ejemplos en esta categoría son las superficies de techos que deben drenar agua, pisos que deben mantenerse planos (v.gr., para gimnasios) y miembros que soporten equipos sensibles. Es más fácil definir los límites de las deflexiones por servicio.

Efecto de los elementos no estructurales

Se deben limitar las deflexiones para impedir el agrietamiento, aplastamiento, formación de bolsas u otros daños a elementos no estructurales, tales como muros, particiones y cielos rasos. Las deflexiones no deben impedir que los elementos móviles, tales como puertas y ventanas, dejen de operar adecuadamente. Los efectos térmicos y de contracción pueden ser

importantes, al igual que las deflexiones debidos a las cargas de gravedad y laterales. Los límites a las deflexiones que se deben aplicar dependen del tipo de elemento no estructural y del método de la instalación.

Efecto en los elementos estructurales

Puede necesitarse limitar las deflexiones para impedir que el comportamiento estructural sea distinto al supuesto en el diseño. Ejemplos en esta categoría son las deflexiones que provocan inestabilidad, tales como en los arcos y cascarones o columnas largas; las deflexiones que provocan un cambio en el estado de esfuerzos, tales como un cambio en el área de apoyo debido a la rotación del extremo de una viga y las deflexiones que provocan efectos dinámicos que aumentan los esfuerzos, tales como las vibraciones resonantes debidas a las cargas móviles. Cuando es posible, se deben incluir los efectos de las deflexiones en el comportamiento estructural al diseñar el elemento.

10.3.2 Método de control de las deflexiones

Es posible controlar las deflexiones asegurando que los miembros tengan suficiente rigidez para limitar las deformaciones bajo las cargas de servicio. Normalmente se consideran las deflexiones estructurales como desplazamientos verticales u horizontales de los miembros.

El ACI 318-71[10.1] tiene dos métodos de controlar las deflexiones:

Uso de razones límites de claro a espesor

Para las vigas y losas armadas en un sentido que no soportan o no están fijas a particiones, u otras partes de la construcción que puedan ser dañadas por deflexiones grandes, se puede considerar que se satisfacen los requerimientos de deflexión, si el espesor global mínimo no es menor que los especificados en la tabla 10.1.

Uso de deflexiones límites calculadas

Para las vigas y losas que soportan o están unidas a particiones u otra construcción que pueda dañarse por deflexiones grandes, o que no satisfacen los requerimientos mínimos de espesor de la tabla 10.1, se deben calcular las deflexiones y están limitadas a los valores listados en la tabla 10.2.

Nótese que la tabla 10.1 es para miembros construidos utilizando concreto de peso normal y reforzado por acero con resistencia de cedencia de $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2). Las notas que acompañan la tabla in-

Tabla 10.1 Mínimo espesor de vigas y losas en un sentido, a menos que se calculen las deflexiones [a,b]

	Espesor mínimo, h			
Miembro	Soportada simplemente	Un extremo continuo	Ambos extremos continuos	Voladizo
	Miembros que no estén soportando o estén conectados a particiones o a otra construcción que puedan dañarse por grandes deflexiones [c]			
Losas sólidas en un sentido	$l/20$	$l/24$	$l/28$	$l/10$
Vigas o losas con trabes en un sentido	$l/16$	$l/18.5$	$l/21$	$l/8$

[a] De la referencia 10.1.

[b] Estos valores de espesor mínimo son para miembros hechos con concreto de peso normal ($w = 145$ lb/pie^3 = 2320 kg/m^3) y refuerzo de grado 60 (f_y = 60,000 lb/plg^2 = 414 N/mm^2). Para otros miembros, se deben modificar los valores como sigue:

1. Para concreto ligero estructural, donde w = 90 a 120 lb/pie^3 (1440 a 1920 kg/m^3), es necesario multiplicar los valores por $(1.65 - 0.005w)$, pero no menos que 1.09, donde w está en libras por pie cúbico.
2. Para refuerzos con una resistencia de cedencia f_y distinta a 60.000 lb/plg^2 (414 N/mm^2), se deben multiplicar los valores por $(0.4 + f_y/100{,}000)$, donde f_y está en lb/plg^2.

[c] l = longitud del claro del miembro.

dican las modificaciones para el concreto ligero estructural y para otros grados de acero. La modificación para el concreto ligero se basa en un informe del comité 213 del ACI y los estudios correspondientes.[10.5] Para concreto con w entre 120 y 145 lb/pie^3 (1920 y 2320 kg/m^3) no es necesaria ninguna corrección, ya que el término de corrección está proximo a la unidad. La modificación por resistencia de cedencia del acero se basa en el juicio, experiencia y estudios y debe proporcionar resultados conservadores para miembros típicos con f_y en el intervalo de 40,000 a 80,000 lb/plg^2 (276 a 552 N/mm^2), de acuerdo con el comentario al ACI 318-71.[10.6] El diseñador puede utilizar un espesor más pequeño que el especificado en la tabla 10.1, si los cálculos demuestran que la deflexión bajo la carga de servicio será inferior al especificado en la tabla 10.2.

La tabla 10.2 es una simplificación de la variedad de limitaciones que serían necesarias para abarcar todos los tipos de construcción y condiciones de cargas (véase la sección 10.3.1). Se supone que se han tomado en cuenta las deflexiones que puedan afectar las resistencia de los elementos

estructurales, en el diseño de las estructuras. El diseñador debe tener cuidado de asegurar la consideración de cualesquier aspectos no usuales de la estructura (v.gr., requerimientos especiales de servicio o respuesta a vibraciones) no cubiertos por la tabla.

10.3.3 Cálculo de deflexiones

Es difícil predecir con exactitud las deflexiones de los miembros de concreto reforzado bajo cargas de trabajo. El refuerzo no simétrico en las vigas ($A_s > A'_s$) conduce a deflexiones debidas a la contracción del concreto, lo que se acumula a las deflexiones por la carga de gravedad. El

Tabla 10.2. Deflexiones máximas calculadas permisibles[a]

Tipo de deflexión	Deflexión a considerar	Deflexión límite
Techos planos que no soportan conectados a elementos o no estructurales sujetos a daños probables por deflexiones grandes	Deflexión inmediata debido a la carga viva, L	$l/180$[b]
Pisos que no soportan o conectados a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	Deflexión inmediata debida a carga viva, L	$l/360$
Construcción de techo o piso que soporte o esté conectado a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes	La parte de la deflexión total que ocurre después de conectar elementos no estructurales, la suma de la deflexión a largo plazo debido a todas las cargas sostenidas, y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional	$l/480$[c]
Construcción de techo o piso que apoye o esté conectada a elementos no estructurales que no tengan probabilidad de dañarse por deflexiones grandes		$l/240$[d]

[a] De la referencia 10.1.

[b] No se pretende que este límite sea una protección contra encharcamiento. Este debe verificarse mediante cálculos adecuados de la deflexión.

[c] Se puede exceder este límite si se toman medidas adecuadas para prevenir el daño a elementos soportados o conectados.

[d] Pero no mayor que la tolerancia dada para los elementos no estructurales. Se puede exceder este límite si se da contraflecha de manera que la deflexión total menos la contraflecha no exceda la limitación.

flujo plástico del concreto conduce a un aumento gradual en la deflexión de los miembros bajo cargas de servicio sostenidas. La contracción y flujo plástico que ocurren están influidos por la temperatura y humedad, condiciones de curado, edad del concreto al tiempo de la carga, y otros factores como se describió en las secciones 2.1.4 y 2.1.5. La disminución en la rigidez a flexión provocada por el agrietamiento del concreto también tiene un efecto apreciable en las deflexiones, y la incertidumbre del grado de agrietamiento hace difícil estimar el momento efectivo de inercia de los miembros. Sin embargo, es posible estimar las deflexiones con un margen de error de $\pm 20\%$, lo que es suficientemente exacto para la mayoría de los casos prácticos. Las deflexiones se pueden estimar en dos pasos: 1) la inmediata que ocurre al principio de la carga y 2) la adicional que ocurre con el tiempo, debido al flujo plástico y la contracción del concreto. Los siguientes comentarios explican el método del cálculo de las deflexiones dado en el ACI 318-71.[10.1]

Deflexión inmediata

La deflexión inmediata provocada por las cargas de servicio se puede calcular utilizando las ecuaciones acostumbradas para la teoría elástica de las deflexiones. Por ejemplo, la deflexión central de una viga soportada simplemente con claro l y rigidez EI a flexión, que trasmite una carga uniforme w por longitud unitaria, es $5wl^4/384EI$. Esta deflexión para una viga soportada simplemente es 5 veces mayor que el de la misma viga con la misma carga, pero completamente restringida contra rotación en ambos extremos. En consecuencia, si los extremos de una viga son continuos, como sucede en casi toda la construcción con concreto reforzado, es esencial considerar la reducción en la deflexión debida a la restricción de los extremos. Para tomar en cuenta la restricción de los extremos, generalmente es bastante exacto calcular la deflexión central del miembro, como si estuviera soportado simplemente, y restarle la deflexión opuesta provocada por el promedio de los momentos negativos en los dos extremos. De esa manera, si estos momentos de los extremos son M_1 y M_2, de manera que $M_{av} = (M_1 + M_2)/2$, la cantidad a restar de la deflexión de la viga simple es $M_{av}l^2/8EI$.

Para obtener la rigidez a flexión EI de la sección, se puede tomar E como el valor para el concreto dado por la ec. 2.1, o sea $E_c = w^{1.5}33\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2, con f'_c en lb/plg^2, para valores de w entre 90 y 155 lb/pie^3 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2, 1 lb/pie^3 = 16.02 kg/m^3). Para el concreto de peso normal, se puede tomar a E_c como $57{,}000\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 ($4730\sqrt{f'_c}$ N/mm^2).

El momento de inercia I depende de la cantidad de agrietamiento que haya ocurrido en el miembro. Si bajo la carga de servicio el esfuerzo de tensión máximo en el concreto, calculado en base a la sección no agrietada, es menor que el módulo de ruptura del concreto, se puede suponer que no se han formado grietas a tensión, en cuyo caso se puede tomar a I como I_g, en que I_g es el momento de inercia de la sección bruta no agrietada alrededor del eje centroidal, ignorando el área transformada del refuerzo. Con mayor exactitud, se puede usar el momento de inercia de la sección no agrietada tomando en cuenta el área transformada del refuerzo, ya que el acero puede aumentar el momento de inercia de la sección no agrietada hasta en 30%. En la sección 10.2.4 se describió el método para calcular el momento de inercia de la sección transformada. En las regiones del miembro donde el momento flexionante es tan grande que el esfuerzo de tensión excede al módulo de ruptura del concreto, se forman grietas a intervalos discretos a lo largo del miembro. El momento de inercia de una sección se reduce por el agrietamiento, y la reducción es mayor para secciones ligeramente reforzadas que para las fuertemente reforzadas. El momento de inercia en una sección agrietada es I_{cr}, basado en la sección agrietada transformada a área de concreto. Entre las grietas, el concreto trasmite cierta tensión, debido a que ésta se transfiere del acero al concreto por adherencia, y se requiere suficiente longitud para que el esfuerzo de tensión en el concreto alcance el módulo de ruptura antes de que el concreto se agriete nuevamente (véase la sección 6.6.2). La tensión transmitida por el concreto entre las grietas tiende a dar rigidez al miembro. También, en las regiones del miembro donde el momento flexionante es bajo, el concreto no se habrá agrietado, por lo que en un miembro agrietado, es deseable tomar un momento efectivo I_e de inercia cuyo valor esté comprendido entre los deducidos para las secciones agrietadas y no agrietadas. El ACI 318-71[10.1] recomienda utilizar la siguiente expresión para el momento efectivo de inercia

$$I_e = \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{cr}}{M_a}\right)^3\right] I_{cr} \qquad (10.47)$$

en que I_g = momento de inercia de la sección bruta no agrietada, I_{cr} = momento de inercia de la sección agrietada transformada a concreto, M_a = momento máximo en el miembro en la etapa en que se está calculando la deflexión y M_{cr} = momento en el primer agrietamiento, dado por

$$M_{cr} = \frac{f_r I_g}{y_t} \qquad (10.48)$$

en que y_t = distancia desde el eje centroidal de la sección bruta a la fibra extrema a tensión y f_r = módulo de ruptura del concreto. En términos de resistencia de cilindro, se puede considerar que f_r es $7.5\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 para el concreto de peso normal, $6.38\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 para el concreto de agregado "peso ligero de arena" ó $5.63\sqrt{f'_c}$ lb/plg^2 para concreto agregado "ligero completo", en que f'_c está en lb/plg^2 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2). La ec.

10.47 para I_e tiene dos límites de I_g e I_{cr}, por lo que da una expresión de transición que depende del grado de agrietamiento. Conforme se hace grande M_a/M_{cr} el valor de I_e tiende rápidamente a I_{cr}. La ec. 10.47 es una expresión empírica que desarrolló Branson, [10.7] que se ha mostrado ser exacta. Se puede considerar que el valor de I_e es proporcional a la pendiente de la línea secante al punto apropiado en la curva de carga - deflexión sobre la carga al principio del agrietamiento. Para vigas continuas, se puede tomar el momento de inercia como el promedio de los valores de I_e obtenidos para las regiones de momentos positivos y negativos.

Las deflexiones inmediatas calculadas por el método anterior del código de ACI para vigas continuas y soportadas simplemente, se muestran en la fig. 10.15 comparadas con datos de prueba; la figura se tomó de un informe [10.8] del comité 435 del ACI.

El cálculo del momento de inercia de secciones puede ser tedioso, especialmente en el caso de secciones transformadas agrietadas. El Manual *de Diseño del ACI*, volumen 1, [10.9] contiene una cantidad de útiles tablas de diseño que permiten encontrar I_{cr} para secciones rectangulares y T. De la relación de momento - curvatura se pueden preparar tablas y gráficas para I_{cr}

$$\frac{M}{E_c I_{cr}} = \varphi = \frac{\varepsilon_c}{kd}$$

$$\therefore \quad I_{cr} = \frac{Mkd}{E_c \varepsilon_c} = \frac{Mkd}{f_c} \tag{10.49}$$

en que M = momento flexionante, kd = profundidad del eje neutro, E_c = módulo de elasticidad del concreto, ε_c = deformación unitaria en la fibra a compresión extrema del concreto y f_c = esfuerzo en la fibra a compresión extrema del concreto. Si se sustituye M en términos de los esfuerzos, áreas y brazos de palanca del concreto y el acero en esta ecuación, se puede determinar una expresión para I_{cr} y expresarla en forma de gráficas. Las vigas T se pueden tratar como vigas doblemente reforzadas, sustituyendo los patines sobresalientes de la sección por un área equivalente de acero a compresión.

El manual [10.9] del ACI también proporciona tablas que permiten hacer una determinación relativamente rápida de la deflexión para distintos tipos de carga.

Deflexión a largo plazo

La deflexión de las vigas de concreto reforzado aumenta con el tiempo. Las deflexiones adicionales se deben al flujo plástico y contracción del concreto. La velocidad de deflexión adicional decrece conforme transcurre el tiempo. En las secciones 2.1.4 y 2.1.5 se estudió la magnitud del flujo plástico y las deformaciones unitarias de contracción del concreto. Con el

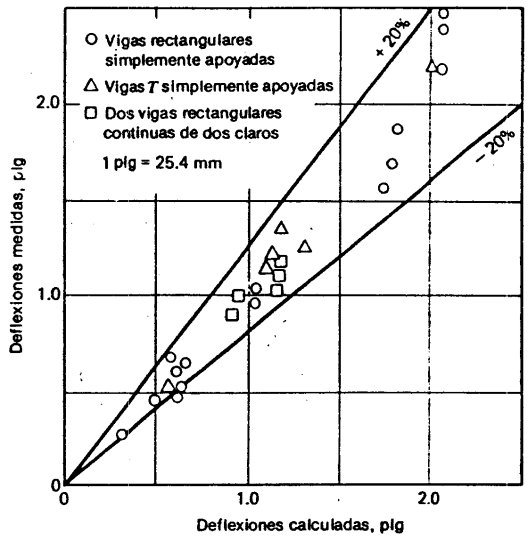


Figura 10.15. Deflexiones inmediatas calculadas por el método del ACI 318-71 comparadas con las deflexiones experimentales.[10.8]

tiempo se pueden alcanzar deflexiones adicionales dos o tres veces mayores que la deflexión inmediata.

La contracción del concreto en miembros reforzados no simétricamente, provoca una distribución no uniforme de deformaciones en la sección (véase la fig. 10.14), por lo que produce una curvatura de contracción. La curvatura es mayor en los miembros reforzados simplemente, debido a que la contracción del concreto no está restringida en la zona a compresión. En los miembros a flexión, el refuerzo está principalmente en la zona a tensión de las secciones, por lo que las curvaturas de contracción tendrán el mismo signo que las curvaturas debidas a las cargas transversales; en consecuencia, aumentan las deflexiones debidas a la carga transversal. Además los esfuerzos de tensión del concreto inducidos por la contracción se combinan con los esfuerzos de tensión debidos a las cargas transversales para producir agrietamiento adicional.

El flujo plástico del concreto produce una reducción de longitud de la parte comprimida de la sección transversal del concreto, por lo que también produce una curvatura adicional.

Es evidente que se pueden reducir sustancialmente las deflexiones adicionales debidas a la contracción y al flujo plástico con la presencia de refuerzo a compresión. Dicho refuerzo reduce la curvatura de contracción, proporcionando restricción a la contracción en la zona a compresión de la sección. En el límite, si un miembro con sección transversal simétrica está

igualmente reforzado arriba y abajo, la curvatura de contracción será cero. En el caso general de una sección no simétrica, la curvatura de contracción será cero, si coinciden los centroides del refuerzo y la sección transformada. Una inspección de la fig. 10.14 confirma esta observación. El refuerzo a compresión también reduce la influencia del flujo plástico del concreto, debido a que, conforme aumentan las deformaciones unitarias a compresión del concreto con el tiempo, gradualmente se transfiere parte del esfuerzo de compresión al acero, lo que produce un menor esfuerzo de compresión del concreto y menores deformaciones de flujo plástico.

Además del contenido de acero a compresión, la magnitud de la deflexión a largo plazo depende de la humedad, temperatura, condiciones de curado, edad del concreto al tiempo de la carga, razón de esfuerzo a resistencia y otros factores; como se describió en las secciones 2.1.4 y 2.1.5. Por este motivo, sólo pueden hacerse estimaciones de las deflexiones a largo plazo, ya que no se puede garantizar mayor exactitud, a menos que se conozcan muy bien las condiciones de carga de servicio y las propiedades del concreto. Una publicación de Yu y Winter [10.10] constituye la base del método recomendado de estimación. Las deflexiones adicionales a largo plazo para miembros a flexión de concreto de peso normal y ligero se pueden obtener multiplicando la deflexión inmediata provocado por la carga sostenida por el factor

$$2 - 1.2\frac{A'_s}{A_s} \geq 0.6 \qquad (10.50)$$

en que A'_s = área del acero a compresión y A_s = área del acero a tensión. Para periodos más breves de carga se pueden utilizar los multiplicadores de la fig. 10.16, que se preparó a partir de los resultados [10.10] de Yu y Winter y que está publicada en el comentario [10.6] al código del ACI. De acuerdo con Yu y Winter se pueden predecir las deflexiones a largo plazo con una exactitud de ±20%, utilizando los multiplicadores dados. Los multiplicadores deben aplicarse solamente a la parte de la deflexión inmediata que se debe a la carga sostenida. En consecuencia, la carga muerta total cae dentro de esta categoría, pero el tipo de ocupancia determina la porción de la carga viva que deba considerarse que permanece sostenida durante largos periodos. Por ejemplo, quizás sólo 20% de la carga viva de servicio de un edificio de departamentos caiga en esta categoría, pero en un almacén puede necesitarse suponer que se sostiene aproximadamente 80% o más de la carga viva durante periodos largos. Por ejemplo, si se diseña una viga cargada uniformemente y soportada simplemente con $A'_s = 0.25A_s$ para una carga D muerta de servicio y una carga viva L de servicio, ambas por longitud unitaria y se considera que soporta 50% de la carga viva, el multiplicador de la ec. 10.50 es $2 - 1.2 \times 0.25 = 1.7$, y la deflexión máxima total sería igual a la suma de la deflexión inmediata más

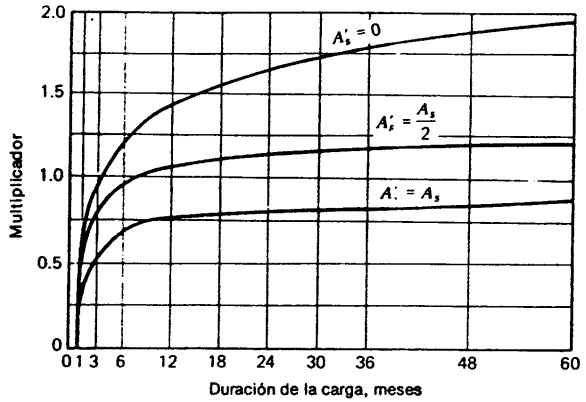


Figura 10.16. Multiplicadores para las deflexiones a largo plazo. [10.6]

la adicional debido a $D + 0.5L$ y la deflexión inmediata debido a $0.5L$. En consecuencia, la deflexión máxima total sería

$$\frac{5}{384}\frac{l^4}{E_c I_{e1}}(D + 0.5L)(1 + 1.7) + \frac{5}{384}\frac{l^4}{E_c I_{e2}}0.5L$$

en que $I_{e1} = I_e$ de la ec. 10.47 con M_a de $D + 0.5L$, e $I_{e2} = I_e$ con M_a de $D + L$. La fig. 10.16 es útil para estimar las deflexiones durante los distintos periodos. Por ejemplo, se obtendría la deflexión de la misma viga a la edad de tres meses cambiando el multiplicador en la fórmula de 1.7 a 0.85. La diferencia en las deflexiones sería la cantidad de deflexión futura que sufriría la viga.

10.3.4 Métodos más exactos para calcular deflexiones

El informe [10.8] del comité 435 del ACI proporciona un resumen de los métodos disponibles para calcular las deflexiones y compara su exactitud. Normalmente, el método del código del ACI debe producir suficiente exactitud para fines de diseño; sin embargo, si se requiere una exactitud mayor que ±20% se debe realizar un análisis más exhaustivo. Ese análisis sólo se puede justificar si se dispone de datos experimentales del módulo de ruptura y del módulo de elasticidad del concreto, y para las características de contracción y flujo plástico del concreto, en el medio ambiente en que el miembro está en servicio. En seguida se describen algunas sugerencias del Subcomité 1 del comité 435 [10.4] del ACI sobre la manera de lograr cálculos más exactos de la deflexión inmediata, y métodos debidos a Branson [10.7, 10.8] para calcular las deflexiones adicionales a largo plazo debidos al flujo plástico y a la contracción.

Deflexiones inmediatas

Casi todas las vigas diseñadas como claros apoyados simplemente tienen cierta restricción contra la rotación en los extremos. Un pequeño momento de extremo reduce significativamente la deflexión central, por lo que se podría hacer cierta evaluación del grado de restricción del extremo disponible de elementos tales como muros de mampostería y cubiertas de concreto e incluirla en los cálculos de deflexiones. Se puede obtener el módulo de ruptura y el módulo de elasticidad para los cálculos de la deflexión del concreto utilizado para la estructura. Por ejemplo, se podría calcular el módulo de elasticidad de la resistencia promedio medida del cilindro en vez de la resistencia especificada mínima de cilindro utilizada en el diseño. El módulo de ruptura puede superar al valor recomendado por el código para utilizarse en la ec. 10.48, y podría utilizarse el valor medido promedio.

También es posible una evaluación más realista de la manera como los elementos no estructurales, específicamente los muros, afectan el comportamiento estructural. Por ejemplo, los muros de partición pueden "colgarse" de extremo a extremo cuando el miembro estructural se deflexiona las vigas pueden descansar en muros inferiores y los muros de relleno pueden atiesar considerablemente los marcos.

Se deben incluir los patines de las vigas T cuando éstas estas en la zona de tensión en los cálculos de los momentos inercia. Adicionalmente, el área transformada del acero de refuerzo en las secciones no agrietadas no debe ignorarse, especialmente en el caso de miembros fuertemente reforzados, debido a que puede aumentar apreciablemente el momento de inercia.

En los miembros continuos, se puede hacer una evaluación más realista de la rigidez a flexión a lo largo del miembro, en vez de promediar simplemente los momentos positivos y negativos de las rigideces a flexión.

Las deflexiones por cortante deben tomarse en cuenta cuando se utilizan miembros con almas delgadas o cuando una gran proporción de los esfuerzos cortantes está resistida por refuerzo del alma que produce grietas a tensión diagonal bajo condiciones de carga de servicio.

Deflexiones a largo plazo debidas a la contracción del concreto

La contracción del concreto provoca una reducción en la longitud del miembro que es resistida por el acero de refuerzo, induciendo esfuerzos de compresión en el acero y principalmente esfuerzos de tensión en el concreto. Las secciones simétricas con refuerzo simétrico sufren deformación uniforme, por lo que no ocurre curvatura de contracción. Generalmente, cuando la sección o el refuerzo no es simétrico, la contracción produce

una distribución no uniforme de deformaciones, que a su vez produce la curvatura del miembro. Utilizando la teoría elástica, se pueden desarrollar las ecuaciones para las curvaturas debidas a la contracción para secciones no agrietadas y agrietadas. Por ejemplo, en la sección 10.2.7 se determinaron los esfuerzos en las secciones reforzadas no agrietadas debidos a la contracción. Las deformaciones se pueden determinar de los esfuerzos, y la curvatura de contracción está dada por $\varphi_{sh} = (\varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cb})/h$, en que ε_{ct} y ε_{cb} son las deformaciones unitarias en el concreto en las fibras extremas superior e inferior (sumadas si una está a tensión y la otra a compresión; restadas si ambas están a tensión o a compresión), y h es el peralte total de la sección. Sin embargo, dichas soluciones no son exactas debido a la dificultad de manejar con exactitud los efectos del flujo plástico del concreto. Por otra parte, las deflexiones por contracción normalmente son del orden de 30% o menos de las deflexiones totales. En consecuencia, la simplificación se aproxima a la suficiencia.

Branson [10.7, 10.8] ha sugerido las siguientes expresiones empíricas para la curvatura φ_{sh} por contracción de miembros de concreto rectangular doblemente reforzado. Para $\rho - \rho' < 0.03$

$$\varphi_{sh} = 0.7\frac{\varepsilon_{sh}}{h}[100(\rho - \rho')]^{1/3}\left(\frac{\rho - \rho'}{\rho}\right)^{1/2} \tag{10.51}$$

y para $\rho - \rho' > 0.03$

$$\varphi_{sh} = \frac{\varepsilon_{sh}}{h} \tag{10.52}$$

en que ε_{sh} = deformación unitaria de contracción no restringida, h = peralte total del miembro, $\rho = A_s/bd$, $\rho' = A'_s/bd$, A_s = área del acero a tensión, A_s = área del acero a compresión, b = ancho del miembro y d = profundidad efectiva del acero a tensión. Se ha encontrado que las ecs. 10.51 y 10.52 dan concordancia razonable con los resultados experimentales. [10.8]

Cuando la curvatura φ_{sh} por contracción es constante a lo largo de un claro l soportado simplemente, o es igual en las regiones de momento positivo y negativo de una viga continua de claro l, la deflexión máxima de contracción está dada como:

para vigas de voladizo

$$\Delta_{sh} = 0.5\varphi_{sh}l^2 \tag{10.53a}$$

para vigas soportadas simplemente

$$\Delta_{sh} = 0.125\varphi_{sh}l^2 \tag{10.53b}$$

para vigas completamente restringidas contra la rotación en ambos extremos

$$\Delta_{sh} = 0.063\varphi_{sh}l^2 \tag{10.53c}$$

Cuando la curvatura por contracción varía a lo largo del claro, se pueden calcular las deflexiones a partir de principios fundamentales o se pueden aproximar utilizando un promedio pesado φ_{sh} en las ecs. 10.53.

La deformación unitaria de contracción ε_{sh} a utilizar, se puede evaluar utilizando datos existentes,[10.8,10.11,10.12] como se describió en la sección 2.1.5.

Ejemplo 10.13

Una losa de concreto simplemente reforzado tiene peralte total de 10 plg (254 mm), peralte efectivo de 8 plg (203 mm), y está reforzada con 1.92 plg^2 (1239 mm^2) de acero por ancho de 12 plg (305 mm) El módulo de elasticidad del acero es de 29×10^6 lb/plg^2 (200,000 N/mm^2), el módulo de elasticidad del concreto es de 2.9×10^6 lb/plg^2 (20,000 N/mm^2), el coeficiente de flujo plástico es 2, y la deformación unitaria de contracción no restringida del concreto es 0.0005. La losa está soportada simplemente sobre un claro de 15 pies (4.57 m). Estimar la deflexión máxima debido a la contracción.

Solución basada en principios fundamentales

En el ejemplo 10.12, se calculó que los esfuerzos del concreto para esta losa son de 95 lb/plg^2 de compresión en la fibra superior y 330 lb/plg^2 de tensión en la fibra del fondo, debida a la contracción. El módulo efectivo de elasticidad del concreto es $E_c/(1 + C_t) = 2.9 \times 10^6/(1 + 2) = 0.976 \times 10^6$ lb/plg^2. En consecuencia, las deformaciones en las fibras superior e inferior del concreto son

$$\varepsilon_{ct} = \frac{95}{0.976 \times 10^6} = 97 \times 10^{-6} \qquad \varepsilon_{cb} = \frac{330}{0.976 \times 10^6} = 338 \times 10^{-6}$$

$$\therefore \text{ curvatura de contracción } \varphi_{sh} = \frac{\varepsilon_{ct} + \varepsilon_{cb}}{h} = \frac{97 + 338}{10} \times 10^{-6}$$

$$= 43.5 \times 10^{-6} \text{ rad/plg}$$

De la ec. 10.53*b*, la deflexión máxima es

$$\Delta_{sh} = 0.125 \varphi_{sh} l^2$$
$$= 0.125 \times 43.5 \times 10^{-6} \times (15 \times 12)^2$$
$$= 0.176 \text{ plg } (4.47 \text{ mm})$$

Solución aproximada de Branson

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{1.92}{12 \times 8} = 0.02, \qquad \rho' = 0$$

$$\therefore \quad \rho - \rho' = 0.02 < 0.03$$

Consecuentemente, la ec. 10.51 da

$$\varphi_{sh} = 0.7 \times \frac{0.0005}{10} \times (100 \times 0.02)^{1/3}$$
$$= 44.1 \times 10^{-6} \text{ rad/plg}$$

$$\therefore \quad \text{deflexión máxima } \Delta_{sh} = 0.125 \times 44.1 \times 10^{-6} \times (15 \times 12)^2$$
$$= 0.178 \text{ plg } (4.53 \text{ mm})$$

Nótese que la ecuación aproximada de Branson ha dado excelente concordancia con la solución exacta en este ejemplo.

Deflexiones a largo plazo debidas al flujo plástico del concreto

A menudo las deflexiones a largo plazo debidas al flujo plástico del concreto son mayores que la suma de las deflexiones por otros efectos y, por tanto, son de interés primario. Es muy difícil hacer un análisis exacto que incluya el efecto de las cargas variables, debido a la necesidad de tener datos sobre la relación deformación de flujo plástico —el tiempo del concreto, y la historia de las cargas. El método[10.2] de la velocidad del flujo plástico o el método de la superposición[10.3] se pueden utilizar si se dispone de esos datos. Por lo general, no se puede justificar el análisis, de manera que se elige una enfoque más aproximado.

Un método aproximado utiliza el módulo efectivo de elasticidad del concreto para calcular las deflexiones inmediatas más la del flujo plástico. El módulo efectivo está dado por $E_c/(1 + C_t)$, en que E_c es el módulo de elasticidad al instante de la carga y C_t es el coeficiente de flujo plástico del concreto (véase la sección 10.2.1). Ya que el coeficiente C_t de flujo plástico es la razón de la deformación unitaria de flujo plástico a la deformación inicial (elástica), es evidente que en este enfoque la deflexión debida al flujo plástico es igual a la deflexión inmediata multiplicada por el coeficiente de flujo plástico. Sin embargo, este enfoque es muy aproximado. La fig. 10.17 identifica las distribuciones de deformación y esfuerzo para una sección de viga de concreto reforzado inmediatamente después de la aplicación de la carga de servicio y después de una carga a largo plazo. En el ejemplo 10.1 de la sección 10.2.3 se hicieron notar los cambios en la deformación y esfuerzo con el tiempo. El flujo plástico del concreto bajo momento flexionante constante produce un aumento significativo en la deformación unitaria a compresión de la fibra extrema, un aumento en la profundidad del eje neutro, un aumento en el esfuerzo de compresión del acero y una disminución en el esfuerzo de compresión del concreto. El esfuerzo de tensión en el acero aumenta ligeramente, debido a

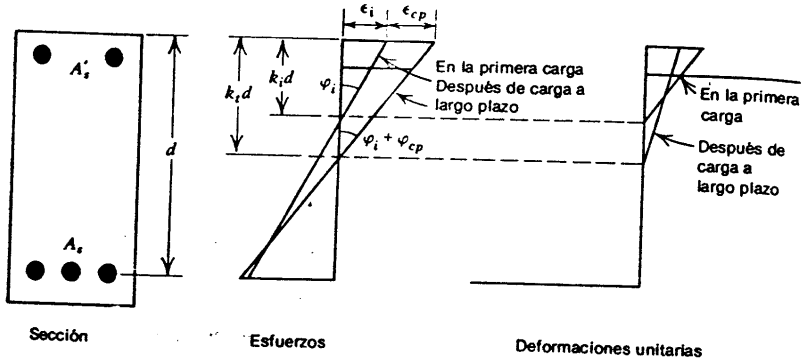


Figura 10.17. Distribuciones de esfuerzo y deformación a la primera carga y después de una carga a largo plazo, en un miembro a flexión sujeto al flujo plástico del concreto.

que se reduce el brazo de palanca. La razón de curvatura debida al flujo plástico a la curvatura inmediata (véase la fig. 10.17 puede escribirse como

$$\frac{\varphi_{cp}}{\varphi_i} = \frac{\dfrac{\varepsilon_i + \varepsilon_{cp}}{k_t d} - \dfrac{\varepsilon_i}{k_i d}}{\dfrac{\varepsilon_i}{k_i d}}$$

$$= \frac{\varepsilon_{cp}}{\varepsilon_i}\frac{k_i}{k_t} - \left(1 - \frac{k_i}{k_t}\right)$$

$$= k_r C_t \qquad (10.54)$$

en que ε_i y ε_{cp} son las deformaciones unitarias inmediata y de flujo plástico del concreto en la fibra a compresión extrema, $k_i d$ y $k_t d$ son las profundidades inmediata y eventual del eje neutro, C_t es el coeficiente de flujo plástico y k_r es un factor. El factor k_r es menor que la unidad, debido a que el análisis de la sección muestra que $k_i/k_t < 1$ y $\varepsilon_{cp}/\varepsilon_i < C_t$, debido a la redistribución del esfuerzo de compresión resultante del flujo plástico. Por tanto, la curvatura causada por el flujo plástico será menor que la curvatura inmediata multiplicada por el coeficiente de flujo plástico. Dadas las influencias recién mencionadas, Branson [10.7, 10.8] ha sugerido que se determine la deflexión debido al flujo plástico de

$$\Delta_{cp} = k_r C_t \Delta_i \qquad (10.55)$$

en que Δ_i = deflexión que ocurre inmediatamente al cargar y k_r es la misma clase de factor que en la ec. 10.54, que toma en cuenta el efecto de la

redistribución del esfuerzo de compresión resultante del flujo plástico y el agrietamiento progresivo adicional, debido a la carga del flujo plástico. Los valores sugeridos para k_r fueron $k_r = 0.85$ cuando $A'_s = 0$, $k_r = 0.6$ cuando $A'_s = 0.5A_s$, y $k_r = 0.4$ cuando $A'_s = A_s$.

Usando datos existentes se puede evaluar el coeficiente C_t de flujo plástico a utilizar,[10.8, 10.11, 10.12] como se describió en la sección 2.1.4.

10.4 CONTROL DE GRIETAS

10.4.1 La necesidad de controlar las grietas

La aparición de grietas en las estructuras de concreto reforzado es inevitable debido a la baja resistencia a tensión del concreto. En el diseño, normalmente se desprecia la resistencia a tensión del concreto. Las estructuras diseñadas con bajos esfuerzos en el acero bajo la carga de servicio cubren su función propuesta con muy limitado agrietamiento. En muchos casos no hay agrietamiento visible debido a que muchos miembros no están sujetos a su carga de servicio completa y el concreto tiene cierta resistencia a tensión. Sin embargo, con elevados esfuerzos en el acero por cargas de servicio, especialmente como resultado del uso de acero de alta resistencia, se debe esperar cierto agrietamiento bajo la carga de servicio. El agrietamiento de una estructura de concreto reforzado bajo cargas de servicio no debe ser tal que deteriore el aspecto de la estructura ni que permita la corrosión del refuerzo. En seguida se consideran estos dos requerimientos.

Consideraciones estéticas

El máximo tamaño de una grieta que se pueda considerar no perjudicial a la apariencia de un miembro o que no cause alarma depende de la posición, longitud, altura, iluminación y textura superficial de la grieta, También ejercen influencia el transfondo social de los usuarios y el tipo de la estructura. Es difícil determinar los límites de la aceptabilidad estética debido a que las opiniones personales son variables. El máximo ancho de grieta que no daña la apariencia de la estructura ni crea alarma pública probablemente esté dentro del intervalo de 0.010 a 0.015 plg (0.25 a 0.38 mm), aunque pueden tolerarse anchos mayores de grietas.

Protección contra la corrosión

El concreto de cemento portland generalmente protege contra la corrosión al acero de refuerzo ahogado. El valor protector del concreto se debe principalmente a su elevada alcalinidad. Si hay agentes químicos como el bióxido de carbono (que produce el ácido carbónico) que penetran al concreto que rodea al acero, se neutraliza la alcalinidad y se reducen las propiedades inhibidoras de la corrosión. Los cloruros de las sales descon-

gelantes, del rocío marino y demás, también son agentes corrosivos sumamente activos. El concreto de baja permeabilidad resiste la penetración de los agentes corrosivos. Los principales factores que afectan a la razón de difusión de los agentes de corrosión al acero son la permeabilidad del concreto, el espesor del recubrimiento, el ancho, forma y longitud de las grietas y el periodo que duren abiertas las grietas.

La permeabilidad del concreto es un factor importante que afecta la corrosión del acero de refuerzo. Es extremadamente importante evitar la presencia de concreto inferior alrededor del acero. El espesor del recubrimiento de concreto también afecta la razón de penetración de los agentes de corrosión. En muchas publicaciones, el agrietamiento sólo se evalúa en términos de ancho de las grietas de la superficie del concreto. Sin embargo, es evidente que la forma de la grieta (es decir, la variación en el ancho de la grieta entre la superficie del concreto y la de la varilla) y la longitud de la grieta son tan importantes como el ancho de la superficie de la grieta al evaluar la reducción en la efectividad del concreto de recubrimiento debido al agrietamiento. En consecuencia, muchas publicaciones han sobreenfatizado la importancia del ancho de las grietas superficiales. Idealmente, se debe evaluar la durabilidad de un miembro de concreto reforzado estimando la razón de corrosión en términos del espesor y la permeabilidad del recubrimiento de concreto, el ancho, forma y longitud de las grietas, el tiempo que duren abiertas las grietas y en términos de la naturaleza corrosiva del medio ambiente. El diámetro de las varillas también es una consideración, ya que para determinada profundidad de corrosión en la varilla, la pérdida como porcentaje en el área de la varilla será mayor para varillas de diámetro pequeño, Sin embargo, en la actualidad parece todavía impráctica toda la evaluación, debido especialmente a la dificultad de determinar los parámetros importantes. La influencia del agrietamiento en la corrosión del refuerzo todavía está sujeta a investigación, al grado que se han presentado informes con datos conflictivos. Es posible que no se haya apreciado en muchos casos el efecto de la forma de la grieta, debido a que invariablemente los resultados se han presentado en términos del ancho de la grieta en la superficie del concreto. Algunos estudios han indicado que anchos de grietas superficiales de hasta 0.016 plg (0.41 mm) han producido poca o ninguna corrosión, incluso en los medios agresivos, en tanto que otros informes no han sido tan optimistas.

En la actualidad, el agrietamiento se controla especificando los anchos máximos permisibles de grietas en la superficie del concreto para tipos dados de medio ambiente.

10.4.2 Causas del agrietamiento

Las causas del agrietamiento en el concreto son numerosas, aunque la mayoría de las grietas ocurre como resultado de una o más de las siguientes acciones.

Agrietamiento debido al asentamiento del concreto plástico

Durante el endurecimiento del concreto, éste tiende a asentarse ligeramente en el molde cuando está en estado plástico, lo que hace que el concreto se separe ligeramente de las varillas cercanas de la superficie superior del concreto, debido a que las varillas normalmente están en posición fija. Se pueden producir líneas de agrietamiento que siguen al refuerzo. A veces pueden observarse esas grietas en las vigas sobre los estribos y en otros aceros superiores. Se puede evitar tal agrietamiento mediante un buen diseño de la mezcla y mediante la revibración y escantillado del concreto plástico.

Agrietamiento debido al cambio volumétrico

Los esfuerzos térmicos y de contracción por secado provocan cambios volumétricos que introducen esfuerzos a tensión en el concreto si se restringen, por lo que pueden conducir al agrietamiento. La restricción puede aparecer en una diversidad de maneras. Por ejemplo, el concreto cerca de la superficie de los miembros se encoge más que el concreto más adentro del miembro; en consecuencia, el concreto interior restringe al exterior, provocando que se desarrollen esfuerzos de tensión cerca de la superficie, que pueden provocar el agrietamiento de la superficie. También, se puede restringir la contracción de los miembros mediante otros miembros, cimientos o refuerzos, introduciendo con ello tensión. En forma análoga, el cambio en la temperatura provoca tensión si no pueden ocurrir los movimientos sin restricción. Se puede controlar el agrietamiento debido a la contracción reduciendo la contracción del concreto mediante un buen diseño de la mezcla (v.gr., manteniendo lo más bajo posible el contenido de agua) y mediante refuerzo colocado adecuadamente. El refuerzo no impide el agrietamiento. En efecto, la restricción del refuerzo tiende a estimular el agrietamiento, pero las deformaciones de contracción están distribuidas a lo largo de las varillas por adherencia, de manera que debe ocurrir una cantidad de grietas pequeñas (en vez de unas cuantas grietas anchas). El ACI 318-71[10.1] proporciona la cantidad mínima y espaciado de refuerzo que se puede utilizar en las losas y muros. Se pretende que este refuerzo sea adecuado para controlar los anchos de grietas debidos a la contracción y a los esfuerzos de temperatura. Un método efectivo de impedir la formación de feas grietas de contracción en largos tramos de concreto es mediante juntas de control en muros y losas. Normalmente, esas juntas consisten en ranuras en el concreto a lo largo de las cuales se estimulan las grietas. Este agrietamiento controlado alivia los esfuerzos en otras partes del concreto. Comúnmente se utilizan juntas aserradas en los pavimentos para ese propósito.

AGRIETAMIENTO DEBIDO A ESFUERZOS NORMALES Y DE FLEXIÓN COMO RESULTADO DE CARGAS APLICADAS O REACCIONES

El agrietamiento puede ocurrir en la zona a tensión de los miembros sujetos a flexión o a tensión axial. Esa tensión puede ocurrir de cargas externas o reacciones. Las grietas se pueden formar perpendiculares al eje del miembro, como en el caso de tensión axial o flexión sin fuerza cortante significativa; o cuando la fuerza cortante es significativa, se pueden formar inclinadas con respecto al eje del miembro. Esas grietas inclinadas, que se conocen como grietas por tensión diagonal, generalmente se considera que están controladas adecuadamente mediante refuerzo de cortante. Se dispone de poco trabajo analítico en el control de grietas por tensión diagonal, aunque hay evidencia de que el mecanismo de control para el agrietamiento por tensión diagonal es semejante al del agrietamiento por flexión. Las secciones 10.4.3 y 10.4.4 tratan el mecanismo de la formación de grietas por flexión y el control de grietas por flexión.

10.4.3 Mecanismo del agrietamiento por flexión

Muchas variables influyen en el ancho y espaciados de las grietas en los miembros de concreto reforzado. Debido a la complejidad del problema, ahora se tiene una diversidad de enfoques aproximados, semiteóricos y empíricos para determinar el ancho de las grietas, y cada enfoque contiene una selección de las variables. Se estudian algunos de los métodos para indicar sus antecedentes.

Teoría clásica

En el mecanismo de agrietamiento de miembros de concreto reforzado cargados axialmente, que se proponía en casi todos los primeros estudios del agrietamiento, se creía que el control de las grietas dependía principalmente de la calidad de la adherencia entre el concreto y el acero. Considérese el miembro a tensión cargado axialmente de la fig. 10.18. Las grietas de tensión inicial se forman cuando se excede la resistencia a tensión del concreto en las secciones débiles que están distribuidas al azar. El deslizamiento ocurre entre el concreto y el acero en las grietas. En éstas, el concreto está libre de esfuerzo y el refuerzo sólo transmite la carga externa. Sin embargo, hay esfuerzo de tensión en el concreto entre las grietas, debido a que la tensión se transfiere del acero al concreto por adherencia. La magnitud y distribución de esfuerzo de adherencia entre las grietas determina la distribución de esfuerzo de tensión en el concreto y el acero entre las grietas. Se pueden formar otras grietas entre las iniciales, con cargas mayores, cuando se excede la resistencia a tensión del concreto.

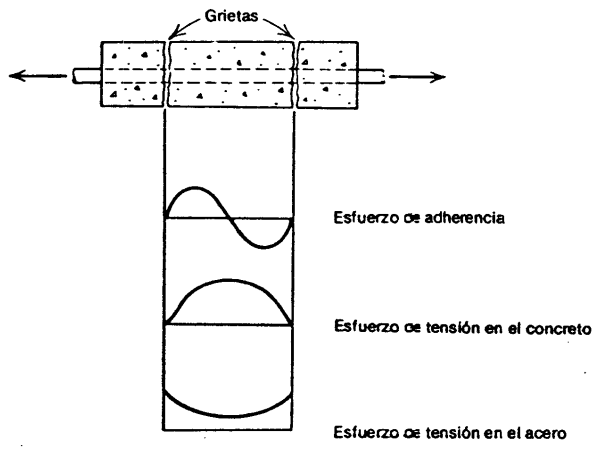


Figura 10.18. Agrietamiento de un miembro con tensión axial.

Watstein y Parsons,[10.13] formalizaron en 1943 la hipótesis anterior y posteriormente aparecieron otras teorías. Hognestad [10.14] ha descrito la deducción de las ecuaciones teóricas como sigue. Para un miembro de concreto reforzado cargado en tensión axial (véase la fig. 10.19*a*), se forman grietas a tensión inicial en un espaciado irregular cuando la resistencia a tensión del concreto se excede en las secciones débiles. Entre las grietas iniciales, a cargas mayores se forman grietas adicionales, pero el espaciado entre las grietas sólo puede reducirse a un espaciado determinado mínimo $a_{mín}$. Este límite se alcanza cuando ya no se puede transferir por adherencia del acero al concreto una fuerza de tensión suficientemente grande para formar una grieta adicional entre otras dos existentes. Por ejemplo, en la fig. 10.19*a* se forman dos grietas inicialmente en las secciones A y C, que están a una distancia a entre sí. Si se debe formar una grieta adicional en B a la mínima distancia de A, la adherencia entre el acero y el concreto a lo largo de la longitud AB debe transmitir suficiente tensión desde el acero al concreto para agrietar el concreto en B. La fuerza de tensión requerida para agrietar el concreto es $A_e f'_t$, donde A_e es el área efectiva del concreto en tensión y f'_t es la resistencia a tensión del concreto. La tensión transferida al concreto es $a_{mín} u \Sigma o$, donde $a_{mín}$ es el espaciado mínimo entre grietas, u el esfuerzo promedio de adherencia y Σo la suma de los perímetros de las varillas. Igualando los dos valores de la tensión se tiene

$$a_{mín} = \frac{A_e f'_t}{u \Sigma o} \tag{10.56}$$

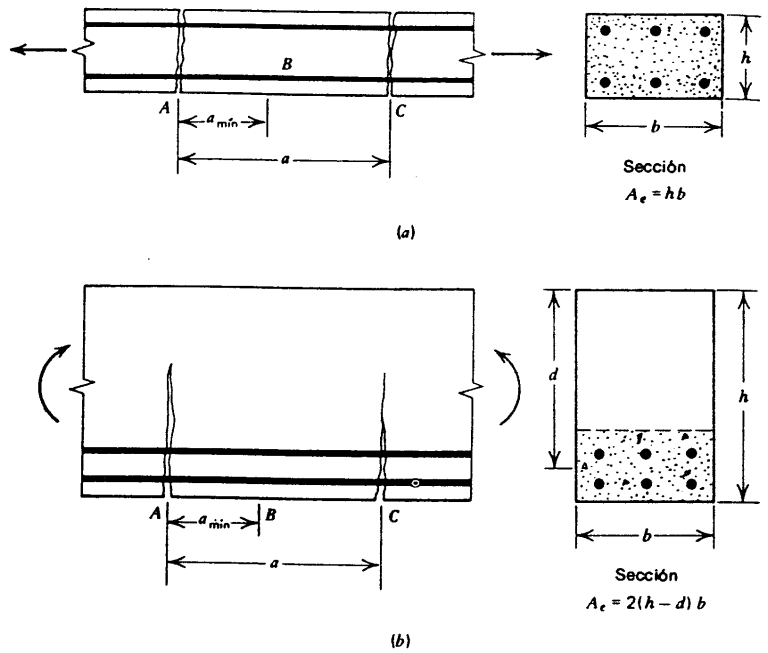


Figura 10.19. Miembros con agrietamiento. (a) Miembro con tensión axial. (b) Miembro con flexión.

El espaciado entre las grietas iniciales A y C es a. En consecuencia, si $a \geq 2a_{mín}$, se puede formar una nueva grieta en B; y si $a < 2a_{mín}$, no se puede formar una nueva grieta en B, lo que significa que se puede esperar que el espaciado entre las grietas varíe entre $a_{mín}$ y $2a_{mín}$, con un espaciado promedio de aproximadamente $1.5a_{mín}$. Este razonamiento indica que en la práctica habrá una gran dispersión en el espaciado entre las grietas; teóricamente son posibles los espacios entre grietas que varían entre 0.67 y 1.33 del espaciado promedio.

Para varillas del mismo diámetro, $\Sigma o = 4A_s/d_b$, donde A_s es el área del acero y d_b es el diámetro de las varillas. También, sustituyendo $\rho_e = A_s/A_e$ en la ec. 10.56 se tiene

$$a_{máx} = 2a_{mín} = \frac{f_t' d_b}{2u\rho_e} \tag{10.57}$$

La elongación del acero entre dos grietas, menos la elongación del concreto, proporciona el ancho de la grieta. Ignorando la elongación del concreto por pequeña, $a_{máx} f_s/E_s$, da el máximo ancho de la grieta, en que f_s es el esfuerzo en el acero y E_s el módulo de elasticidad del acero. Sustituyendo $a_{máx}$ de la ec. 10.57 se obtiene el ancho máximo de la grieta,

$$w_{máx} = \frac{d_b f_s}{\rho_e K_1} \tag{10.58}$$

en que $K_1 = 2uE_s/f_t'$.

Muchos autores han modificado esta ecuación básica para el máximo ancho de la grieta. La deducción anterior comprende la suposición de que el esfuerzo de tensión en el concreto en la sección B de la fig. 10.19*a* es uniforme y que consecuentemente el área efectiva del concreto en tensión A_e es toda la sección transversal del miembro. Esta suposición es discutible, ya que la distribución real del esfuerzo de tensión puede ser altamente no uniforme. También se supone que la abertura de las grietas se debe a deslizamiento del concreto con relación al refuerzo, que el espaciado de las grietas está determinado por la fuerza que se puede transmitir desde el acero al concreto por adherencia, y que la grieta tiene lados paralelos (es decir, un ancho constante) en todo el espesor del miembro.

La aplicación de la ec. 10.58 a la flexión de una viga, como en la fig. 10.19*b*, comprende suposiciones adicionales. El área efectiva del concreto en tensión A_e debe quedar definida apropiadamente. Por lo general se considera que A_e es el área del concreto que tiene el ancho total de la viga y el mismo centroide que el refuerzo principal, como en la fig. 10.19*b*. Los intentos de aplicar la ec. 10.58 a vigas han demostrado la necesidad de reducir el efecto de d_b y ρ_e. En base a la comparación contra resultados de pruebas se han sugerido formas modificadas de la ec. 10.58. Por ejemplo, una antigua ecuación del CEB[10.15] para el ancho máximo de grieta al nivel del refuerzo en la superficie de concreto es

$$w_{máx} = \left(4.5 + \frac{0.4}{\rho_e}\right) d_b \frac{f_s}{K_2} \tag{10.59}$$

en que $K_2 = 47.5 \times 10^6$ lb/plg^2 (328,000 N/mm^2) para varillas corrugadas. Kaar y Mattock [10.16] de la Asociación de Cemento Portland modificó aun más la ec. 10.59 para expresar el máximo ancho de grieta al nivel del refuerzo de varilla corrugada en la superficie del concreto como

$$w_{máx} = 0.115\sqrt[4]{A}\, f_s \times 10^{-6} \text{ plg} \tag{10.60}$$

donde A = área del concreto que rodea a cada varilla ($A = A_e/n$, donde n es el número de varillas) en pulgadas cuadradas, y el esfuerzo f_s del acero está en libras por pulgada cuadrada (1 plg = 25.4 mm; 1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2). Los anchos máximos de grieta medidos, de los que se dedujo la ec. 10.60, mostraron una dispersión de hasta $\pm 40\%$ de la ecuación. Para obtener el máximo ancho de grieta en la fibra extrema a tensión para vigas reforzadas con varillas corrugadas, Kaar y Hognestad[10.17] modificaron la ec. 10.60 a

$$w_{máx} = 0.115\sqrt[4]{A}\, f_s \frac{h_2}{h_1} \times 10^{-6} \text{ plg} \tag{10.61}$$

en que h_1 = distancia del centroide del acero a tensión al eje neutro y h_2 = distancia de la fibra extrema a tensión al eje neutro.

Teoría del no deslizamiento

Base y colaboradores,[10.18] de la asociación de cemento y concreto, propusieron un enfoque fundamentalmente distinto en que supusieron que para el intervalo de anchos de grietas normalmente permitido en el concreto reforzado, no hay deslizamiento del acero con relación al concreto. En consecuencia, se supone que la grieta tiene anchura cero en la superficie de la varilla de refuerzo y que aumenta de ancho conforme se aproxima a la superficie del miembro, lo que quiere decir que el ancho de la grieta depende de las deformaciones del concreto que lo rodea. Se puede utilizar la teoría de la elasticidad para determinar la distribución del esfuerzo y deformación en el concreto entre las grietas. Los esfuerzos así calculados indican cuándo es probable un agrietamiento adicional; las deformaciones indican el perfil deformado de la superficie del concreto, y en consecuencia el ancho probable del agrietamiento. En base a los resultados realizados en la asociación de cemento y concreto, Base y colaboradores propusieron la siguiente fórmula para predecir el máximo ancho de grieta en la superficie de las vigas de concreto reforzadas mediante varillas corrugadas:

$$w_{máx} = 3.3c\frac{f_s}{E_s}\frac{h_2}{h_1} \tag{10.62}$$

en que c = distancia desde el punto en que se debe determinar el ancho de la grieta a la superficie de la varilla más próxima de refuerzo, f_s = esfuerzo en el acero, E_s = módulo de elasticidad del acero, h_2 = distancia desde el punto en que se debe determinar el ancho de la grieta al eje neutro y h_1 = distancia desde el centroide del acero a tensión al eje neutro. En la figura 10.20*a* se muestran algunas de las notaciones.

Las pruebas de la Asociación de Cemento y Concreto también revelaron que el tipo del acero de refuerzo tenía una influencia mucho menor en el ancho de la grieta de lo que se pensaba anteriormente. Se encontró que para vigas reforzadas con varillas lisas, los anchos de las grietas de superficie pueden ser solamente 20% mayores que aquellas en vigas reforzadas con varillas corrugadas, para el mismo esfuerzo en el acero y dimensiones de la viga.

Un enfoque estadístico

Gergely y Lutz[10.19] han sometido los datos de investigaciones anteriores a análisis estadístico para determinar la importancia de las variables in-

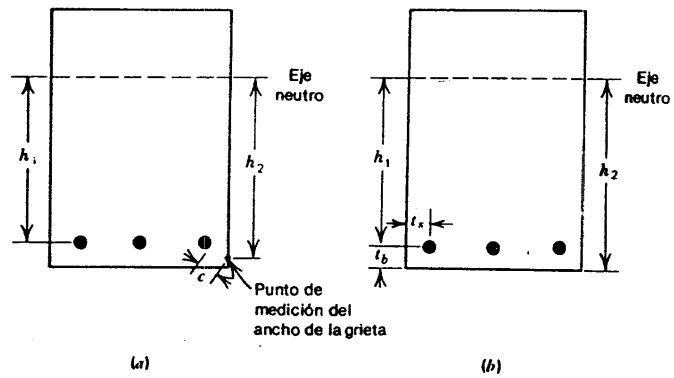


Figura 10.20. Notación para las ecuaciones del ancho de grieta. (a) Enfoque de Base y colaboradores. (b) Enfoque de Gergely-Lutz.

volucradas. Se probaron muchas combinaciones de variables y fue muy difícil obtener una ecuación que se ajustara a todos los conjuntos de datos en forma adecuada. Se encontró que las variables importantes son el área efectiva del concreto en tensión A_e, el número de varillas, el recubrimiento lateral o del fondo, el gradiente de deformación desde el nivel del acero a la cara en tensión y el esfuerzo en el acero. De éstas, la más importante fue la última. Se desarrollaron las siguientes ecuaciones para predecir los máximos anchos de grieta en la superficie de miembros reforzados mediante varillas corrugadas. En la fibra extrema a tensión se tiene

$$w_{máx} = 0.076\sqrt[3]{t_b A}\frac{h_2}{h_1} f_s \times 10^{-6}\ \text{plg} \tag{10.63}$$

En el nivel del refuerzo se tiene

$$w_{máx} = \frac{0.076\sqrt[3]{t_s A}}{1 + \frac{2}{3}\frac{t_s}{h_1}} f_s \times 10^{-6}\ \text{plg} \tag{10.64}$$

donde t_b = distancia desde la fibra extrema a tensión al centro de la varilla adyacente (pulgada), t_s = distancia desde el lado de la viga al centro de la varilla adyacente (plg). A = área efectiva promedio del concreto en tensión alrededor de cada varilla de refuerzo ($=A_e/n$, donde n es el número de varillas) (plg^2), f_s = esfuerzo en el acero (lb/plg^2), h_1 = distancia desde el centroide del acero a tensión al eje neutro (plg) y h_2 = distancia desde la fibra extrema a tensión al eje neutro (plg): 1 plg = 25.4 mm, 1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2. En la fig. 10.20*b* se proporciona parte de la notación.

Nawy[10.20] ha comparado la exactitud de una forma de la ecuación 10.64 con los datos del ancho de grietas máximos experimentales de las

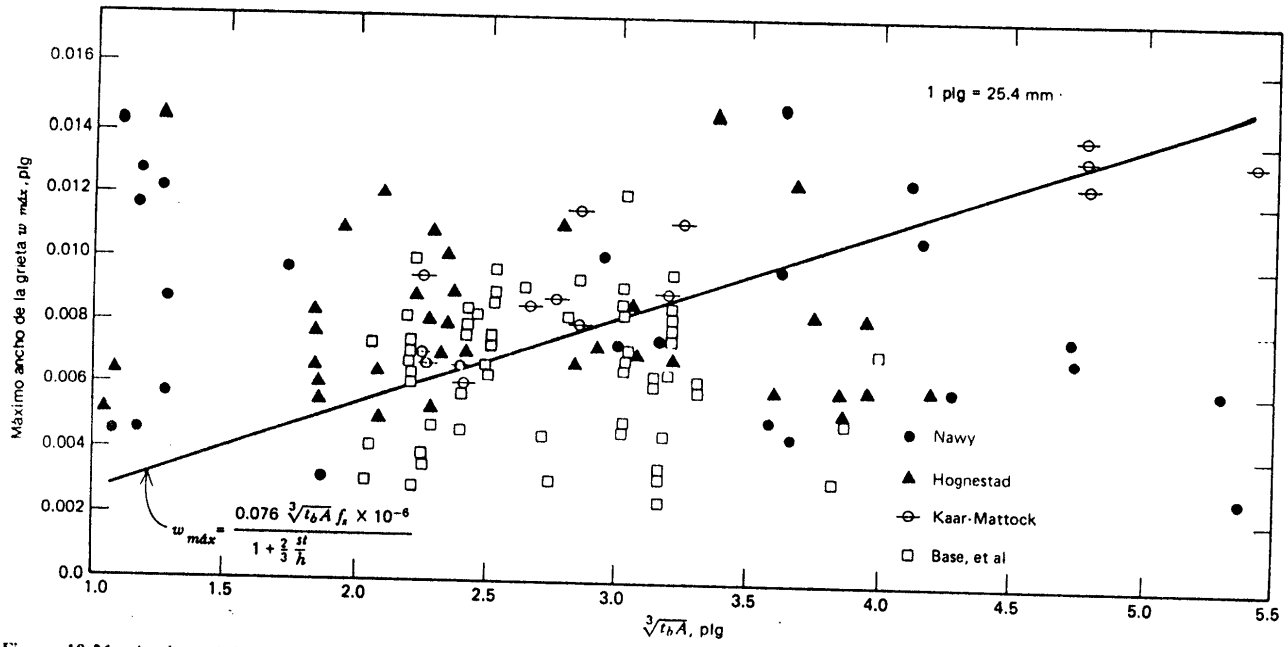


Figura 10.21. Ancho máximo de grietas en vigas al nivel del refuerzo a 40 lb/plg^2 (276 N/mm^2) en comparación con una forma de la ecuación de Gergely-Lutz.[10.20]

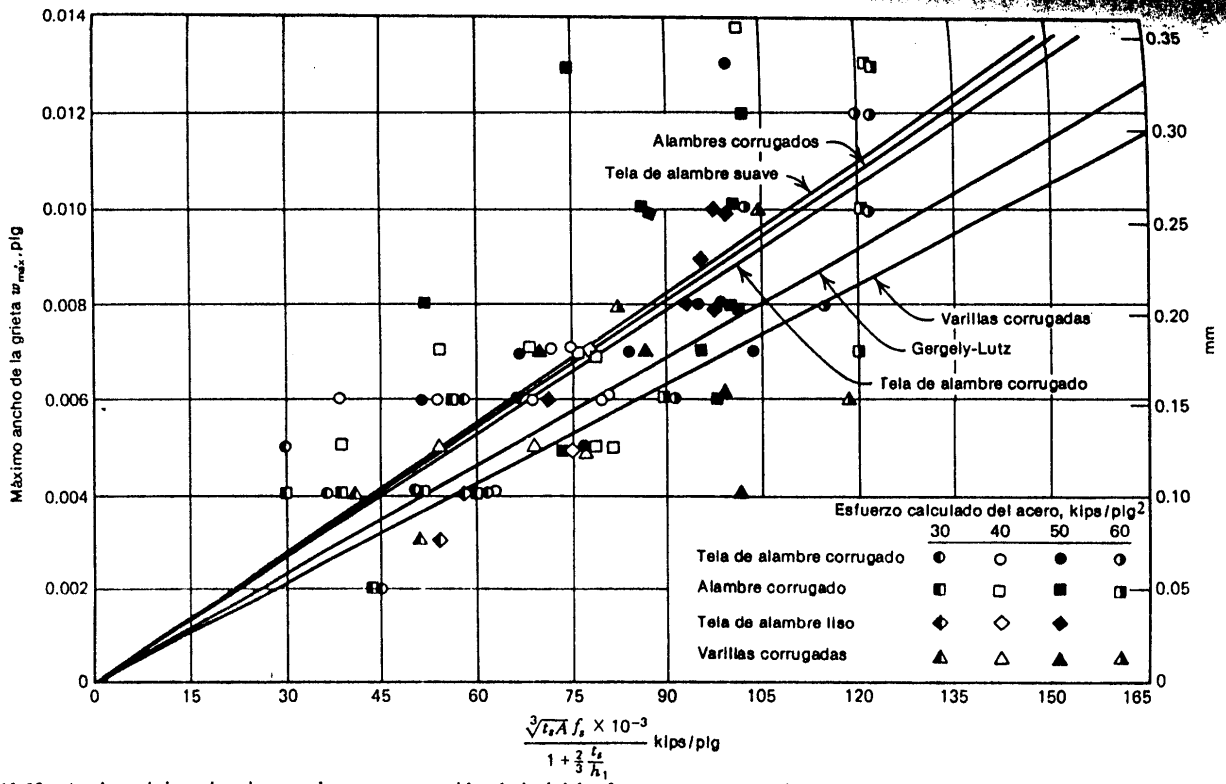


Figura 10.22. Ancho máximo de grietas en losas en un sentido al nivel del refuerzo, en comparación con la ecuación de Gergely-Lutz. (1 lb/plg^2 = 6.89 N/mm^2, 1 kip/plg^2 = 175 kN/m).

pruebas que realizó él mismo, la Asociación de Cemento Portland, [10.14,10.16] y la Asociación de Cemento y Concreto. [10.18] La dispersión de los datos respecto de los anchos máximos predichos de las grietas fue muy apreciable, como lo indica la figura 10.21. Nawy [10.20] también comparó los anchos máximos de grietas predichos por la ecuación (10.60) de la Asociación de Cemento Portland y la ecuación (10.62) de la Asociación de Cemento y Concreto con los datos experimentales y encontró una dispersión extensa. Lloyd y colaboradores [10.21] han medido los máximos anchos de grietas en losas reforzadas en un sentido con varillas corrugadas, alambres corrugados, malla corrugada de alambre y malla de alambre lisa, llegando a la conclusión de que las ecuaciones de Gergely Lutz (10.63 y 10.64) predicen satisfactoriamente el ancho máximo de las grietas. La comparación de sus datos experimentales con la ecuación 10.64 (figura 10.22) revela una desviación considerable de la ecuación en ocasiones.

Enfoque más general

El breve estudio anterior muestra que no existe ninguna teoría satisfactoria que permita hacer una predicción exacta del agrietamiento de los miembros de concreto reforzado. Sin embargo, trabajos recientes de Beeby[10.22] en la Asociación de Cemento y Concreto han producido una comprensión más clara del mecanismo del agrietamiento. Beeby midió los anchos y espaciados de grietas en distintos puntos a través del fondo de losas de concreto reforzado en un sentido, es decir, para distintos valores de c como en la fig. 10.23*a*. Se encontró que el espaciado y ancho de las grietas aumentaba con la distancia desde la varilla y que a cierta distancia desde la

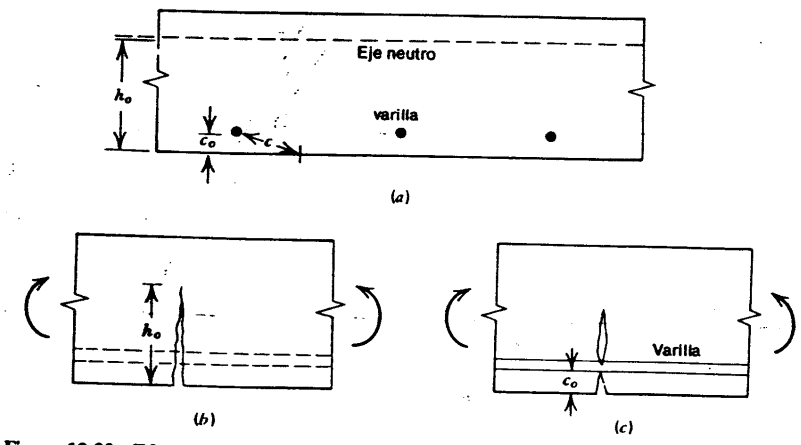


Figura 10.23. Efecto de la proximidad de las varillas en el agrietamiento. [10.22] (*a*) Sección (*b*) Grieta a una cierta distancia de una varilla, controlada por h_o (*c*) Grieta en una varilla, controlada por c_o

varilla se aproximaba a valores constantes, que dependían de la altura de la grieta en vez de la distancia desde la varilla. En consecuencia, Beeby llegó a la conclusión de que el patrón de las grietas en cualquier punto era el resultado de interacción entre dos patrones básicos de grietas.

Agrietado en un punto distante de una varilla de refuerzo

El patrón de grietas ilustrado en la fig. 10.23*b* está controlado por la altura h_o de la grieta. La grieta penetra casi hasta el eje neutro y se puede calcular su altura mediante la teoría elástica, utilizando la cuantía de acero y la razón modular. Del principio de St. Venant es evidente que los esfuerzos de tensión del concreto entre las grietas permanecen sustancialmente no afectados por la grieta a distancias mayores que h_o de la misma. En consecuencia, la siguiente grieta se forma a una distancia de la grieta igual o mayor que h_o. Por tanto, el espaciado mínimo de las grietas es h_o y el máximo es $2h_o$, lo que da un espaciado medio de grietas de $1.5h_o$. Beeby midió físicamente un valor medio de $1.33h_o$ en las pruebas. Se encontró que el ancho y espaciado de las grietas es directamente proporcional a la altura inicial h_o de las grietas. En consecuencia, este tipo de agrietamiento está controlado por la altura inicial h_o de las grietas.

Agrietamiento directamente sobre una varilla de refuerzo (Fig. 10.23*c*)

La teoría del "no deslizamiento" estudiada antes, predice grietas en forma de cuña con anchura cero en la varilla; es decir que se predice una relación lineal entre el ancho de la grieta y la distancia desde la varilla. En consecuencia, la altura efectiva de la grieta directamente sobre la varilla es c_o; utilizando el mismo razonamiento que antes, el espaciado de las grietas varía entre c_o y $2c_o$, con un espaciado medio de $1.5c_o$. El deslizamiento o deformaciones en la superficie de la varilla, que ocurran antes de que se haya desarrollado completamente el patrón de las grietas, hacen que éstas tengan cierta anchura en la superficie de la varilla, y que aumenten la altura efectiva de la grieta, provocando mayores espaciados y anchos de las grietas. Si no hubiera adherencia entre el concreto y el acero, la altura h_o. inicial de la grieta controlaría el patrón de las grietas. En consecuencia, el efecto del deslizamiento y las deformaciones internas es modificar el patrón de grietas controladas por c_o hacia el patrón de grietas controladas por h_o. En este caso general los anchos de las grietas serán función de c_o, para tomar en cuenta la forma de la cuña y de c_o/h_o, para tomar en cuenta el deslizamiento y la fractura interna en la superficie de la varilla.

Beeby encontró que las siguientes ecuaciones daban el mejor ajuste a sus datos experimentales.

máximo ancho de grieta directamente sobre una varilla

$$\frac{w_{máx\,o}}{\varepsilon_m} = K_1 c_o + K_2 \frac{A}{d_b} e^{-K_3(c_o/h_o)} \tag{10.65}$$

máximo ancho de grieta a cierta distancia de una varilla

$$\frac{w_{máx\,l}}{\varepsilon_m} = K_1 h_o \tag{10.66}$$

máximo ancho de grieta para posiciones intermedias

$$w_{máx} = \frac{c w_{máx\,l} w_{máx\,o}}{c_o w_{máx\,l} + (c - c_o) w_{máx\,o}} \tag{10.67}$$

donde c = distancia desde el punto de medición de la grieta a la superficie de la varilla más próxima, c_o = mínimo recubrimiento al acero, d_b = diámetro de la varilla, A = área efectiva del concreto en tensión que rodea a una varilla, h_o = altura inicial de la grieta, ε_m = deformación longitudinal promedio al nivel donde se está considerando el agrietamiento, e = base de los logaritmos naturales y K_1, K_2, y K_3 son constantes que dependen de la probabilidad de que se exceda el ancho de la grieta.

Las ecs. 10.65 a 10.67 son demasiado complejas para su uso práctico. Como lo ha hecho Beeby, [10.23] es posible simplificar las ecuaciones, dando el ancho de grieta que se excede en aproximadamente 20% de los resultados como

$$w_{máx} = \frac{3c\varepsilon_m}{1 + 2(c - c_o)/(h - kd)} \tag{10.68}$$

en que h = peralte total de la sección, kd = profundidad del eje neutro y

$$\varepsilon_m = \left(\varepsilon_s - \frac{2.5bh}{A_s} \times 10^{-6}\right)\frac{h - kd}{d - kd} \tag{10.69}$$

en que ε_s = deformación en el acero en una grieta, b = ancho de la sección, h = peralte total de la sección, A_s = área del acero a tensión, d = peralte efectivo y kd = profundidad del eje neutro. La ec. 10.69 para ε_m es la deformación del acero en una grieta, menos un término empírico debido al efecto endurecedor de la tensión del concreto entre las grietas, y modificado por el término del gradiente de deformación para obtener la deformación promedio en la fibra extrema a tensión del miembro.

La ec. 10.65 tiene similitudes con la siguiente ecuación que desarrolló Ferry Borges [10.24] para el máximo ancho de grieta en vigas reforzadas con varillas corrugadas

$$w_{máx} = \frac{1}{E_s}\left(2.5c + 0.066\frac{d_b}{\rho_w}\right)\left(f_s - \frac{107}{\rho_w}\right) \text{plg} \tag{10.70}$$

en que E_s = módulo de elasticidad del acero (lb/plg^2) c = espesor del zuncho de concreto sobre la varilla (plg), d_b = diámetro de la varilla (plg), $\rho_w = A_s/b_w d$; A_s = área del acero (plg^2), b_w = ancho del alma (plg), d = peralte efectivo de la viga (plg) y f_s = esfuerzo del acero en la grieta (lb/plg^2); 1 plg = 25.4 mm, 1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2. El término $2.5c$ de la ec. 10.70 toma en cuenta la forma de cuña de la grieta, el término $0.066d_b/\rho_w$ toma en cuenta el efecto del deslizamiento de adherencia en las varillas (término semejante a la teoría clásica) y el término $107/\rho_w$ reduce el esfuerzo del acero en una grieta para proporcionar el esfuerzo promedio en el acero para tomar en cuenta la tensión transmitida por el concreto entre las grietas.

Agrietamiento a largo plazo

Todas las ecuaciones descritas antes se obtuvieron de pruebas de cargas a plazo relativamente corto. Se dispone de muy poca información sobre el efecto de la carga a largo plazo en los anchos de las grietas. Illston y Stevens [10.25] encontraron que el espaciado de las grietas no cambia con el tiempo bajo cargas sostenidas, pero que el ancho promedio de las grietas sí aumenta con el tiempo. El aumento en el ancho ocurrió a un ritmo decreciente con el tiempo, y en las pruebas, los anchos de las grietas se duplicaron en dos años. El aumento en los anchos se debe a la contracción del concreto y al cambio de la curvatura dependiente del tiempo. También se encontró que hay una ruptura de la adherencia con las cargas sostenidas, y que las grietas tienden a ser de lados más paralelos. En términos del trabajo de Beeby, ésta significa probablemente que la carga sostenida tiende a modificar las grietas controladas por c_o a grietas controladas por h_o

10.4.4 Control de grietas por flexión en el diseño

Los valores permisibles del ancho de las grietas por flexión, en la práctica dependen principalmente del medio en que tiene que servir la estructura, especialmente desde el punto de vista de la posibilidad de corrosión del refuerzo. En la tabla 10.3 se señalan los valores permisibles recomendados por el Comité 224 del ACI.[10.26] En comparación con estos valores, el ACI 3.8-71[10.1] recomienda solamente dos anchos máximos permisibles de grietas, 0.016 plg (0.41 mm) para la exposición interior y 0.013 plg (0.33 mm) para la exposición exterior. El método del ACI 318-71 para vigas y losas en un sentido se basa en la ec. 10.63 de Gergely-Lutz, en que se fija a h_2/h_1 en 1.2. El requerimiento se puede escribir como el ancho máximo permisible de grieta $\geq 0.076\sqrt[3]{t_b A} \times 1.2 f_s \times 10^{-6}$ plg, con t_b en plgs, A en pulgadas cuadradas y f_s en lb/plg^2 (1 plg = 25.4 mm, 1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2). Sustituyendo los valores permisibles de los anchos de grietas en la ecuación se tiene

Tabla 10.3 Anchos permisibles de grieta en concreto reforzado[a]

Condición de exposición	Ancho máximo permisible de la grieta, plg (mm)
Aire seco o membrana protectora	0.016 (0.41)
Humedad, aire húmedo, tierra	0.012 (0.30)
Químicos descongelantes	0.007 (0.18)
Agua salada y rocío marino, mojado y secado	0.006 (0.15)
Estructuras que retengan agua	0.004 (0.10)

[a] De la referencia 10.26

$$f_s\sqrt[3]{t_b A} \leq 175{,}000 \text{ lb/plg para exposición interior} \qquad (10.71a)$$

y

$$f_s\sqrt[3]{t_b A} \leq 145{,}000 \text{ lb/plg para exposición exterior} \qquad (10.71b)$$

en que nuevamente las unidades están en pulgadas y libras. El ACI 318-71 requiere que se proporcione la sección de manera que se satisfagan las ecs. 10.71*a* ó 10.71*b*. Sólo es necesario realizar esta verificación cuando la resistencia de cedencia de diseño para el refuerzo excede 40,000 lb/plg^2 (276 N/mm^2). En las estructuras sujetas a un medio ambiente muy agresivo o diseñadas para ser impermeables, no se aplica la ec. 10.71*b*, ya que es necesario adoptar un ancho de grieta permisible máximo más pequeño (véase la tabla 10.3).

Para utilizar la ec. 10.71*a* o 10.71*b* se requiere el esfuerzo f_s del acero bajo la carga de servicio, que se puede encontrar de $f_s = M/(jdA_s)$, en que M = momento flexionante de la carga de servicio, jd = brazo de palanca del momento interno y A_s = área el acero. De otra manera, se puede considerar a f_s como 60% de la resistencia de cedencia especificada del acero.

Por comparación, el código británico de práctica CP 110:1972[10.27] requiere en general que los anchos de las grietas superficiales bajo la carga de servicio no excedan 0.3 mm (0.012 plg). El código proporciona reglas para las distancias libres entre varillas para el control de grietas y describe una fórmula semejante a la ecuación 10.68 para utilizarla cuando es necesario estimar los anchos de las grietas. Las recomendaciones del Comité Europeo de Concreto-Federación Internacional del Presforzado[10.12] requieren que los anchos de las grietas superficiales bajo la carga de servicio no excedan 0.1 mm (0.004 plg) en un medio muy expuesto (especialmente agresivo), 0.2 mm (0.008 plg) en un medio no protegido (miembro externo en malas condiciones climatológicas o miembro interno en un medio húmedo o agresivo), o 0.3 mm (0.012 plg) en un medio protegido

(miembro interno en medio ambiente normal). Los máximos anchos de grietas se calculan utilizando una fórmula basada en la ec. 10.70 de Ferry Borges.

Ejemplo 10.14

El alma de la viga T de la fig. 10.24 contiene seis varillas de acero corrugadas del núm. 9 (28.7 mm de diámetro) como refuerzo longitudinal a tensión. En la figura están indicados el recubrimiento y el espaciado vertical entre las varillas. El peralte total de la sección es de 27 plg (686 mm), y el eje neutro está a 5.25 plg (133 mm) de la fibra extrema a compresión. El acero tiene un esfuerzo de 30,000 lb/plg^2 (207 N/mm^2) en la carga de servicio y un módulo de elasticidad de 29 × 10^6 lb/plg^2 (200,000 N/mm^2). 1) Verificar que el arreglo del refuerzo es adecuado para exposición exterior utilizando el enfoque del ACI 318-71, y 2) calcular el ancho máximo probable de grieta utilizando las distintas fórmulas del ancho de grieta.

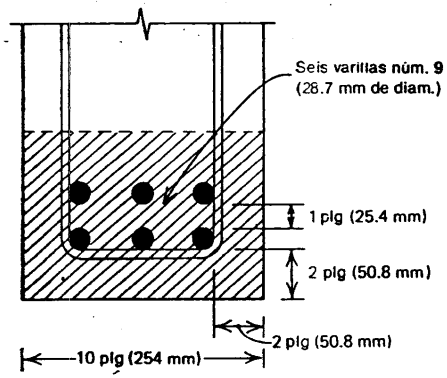


Figura 10.24. Ejemplo 10.14.

Solución

1. *Enfoque del* ACI 318-71. *Se aplica la ecuación* 10.71*b*

El área efectiva del concreto en tensión A_e está sombreada en la fig. 10.24 (véase también la fig. 10.19*b*).

$$A_e = 10(2 + 1.13 + 1 + 1.13 + 2) = 72.6 \text{ plg}^2$$

$$\therefore \quad A = \frac{72.6}{6} = 12.10 \text{ plg}^2\text{/varilla}$$

También $t_b = 2 + 0.56 = 2.56$ plg y $f_s = 30{,}000$ lb/plg^2

$$\therefore \quad f_s\sqrt[3]{t_b A} = 30{,}000\sqrt[3]{2.56 \times 12.1} = 94{,}200 \text{ lb/plg}$$

que es menor que 145,000 lb/plg. En consecuencia, el arreglo del refuerzo es satisfactorio.

Si el arreglo no hubiera sido satisfactorio, se hubiera tenido que utilizar un mayor número de varillas de diámetro más pequeño para constituir el área de acero que redujera A.

2. *Ancho máximo probable de grietas de acuerdo con las distintas fórmulas*

Para la sección de viga, $h_2 = 27 - 5.25 = 21.75$ plg, y $h_1 = 21.75 - (2 + 1.13 + 0.5) = 18.12$ plg

Ecuación 10.61 de Kaar-Hognestad; en la fibra extrema a tensión

$$w_{máx} = 0.115\sqrt[4]{12.1} \times 30{,}000 \times \frac{21.75}{18.12} \times 10^{-6}$$

$$= 0.0077 \text{ plg } (0.20 \text{ mm})$$

Ecuación 10.62 de Base y colaboradores: en la fibra extrema a tensión en una esquina de la sección, donde c es un máximo, se tiene

$$c = \sqrt{2}(2 + 0.56) - 0.56 = 3.06 \text{ plg}$$

$$w_{máx} = 3.3 \times 3.06 \frac{30{,}000}{29 \times 10^6} \times \frac{21.75}{18.12}$$

$$= 0.0125 \text{ plg } (0.32 \text{ mm})$$

(Nota: directamente bajo la varilla, $c = 2$ plg y $w_{máx} = 0.0082$ plg).

Ecuación 10.63 de Gergely-Lutz: en la fibra extrema a tensión

$$w_{máx} = 0.076\sqrt[3]{2.56 \times 12.1} \times \frac{21.75}{18.12} \times 30{,}000 \times 10^{-6}$$

$$= 0.0086 \text{ plg } (0.22 \text{ mm})$$

Ecuaciones 10.68 y 10.69 de Beeby: en la fibra extrema a tensión en una esquina de la sección, donde c es un máximo, $c = 3.06$ plg y $c_0 = 2$ plg,

$$w_{máx} = \frac{3 \times 3.06}{1 + 2(3.06 - 2)/21.75} \times \left(\frac{30{,}000}{29 \times 10^6} - \frac{2.5 \times 10 \times 27}{6} \times 10^{-6}\right) \frac{21.75}{18.12}$$

$$= 0.0092 \text{ plg } (0.23 \text{ mm})$$

(Nota: directamente bajo la varilla, $c = 2$ plg y $w_{máx} = 0.0066$ plg)

Ecuación 10.70 de Ferry Borges: en la fibra extrema a tensión en una esquina de la sección, donde c es un máximo, $c = 3.06$ plg y

$$w_{máx} = \frac{1}{29 \times 10^6}\left[2.5 \times 3.06 + 0.066 \frac{1.13}{6/(10 \times 23.37)}\right] \times \left[30{,}000 - \frac{107}{6/(10 \times 23.37)}\right] = 0.0094 \text{ plg } (0.23 \text{ mm})$$

(Nota: directamente bajo la varilla, $c = 2$ plg y $w_{máx} = 0.0070$ plg).

La ecuación de Base y colaboradores proporciona un ancho relativamente más alto máximo de grieta que las otras ecuaciones, pero se puede considerar que la ec. 10.62 queda sustituida por las de Beeby. También se debe notar que las ecuaciones de Beeby, Ferry Borges y Kaar-Hognestad producen resultados que están dentro de 11% de la ecuación de Gergely-Lutz en el ejemplo 10.14.

Es evidente que los anchos de grietas no serán un problema en el diseño, a menos que los esfuerzos del acero bajo la carga de servicio sean muy altos o que se deban mantener muy pequeños los anchos de las grietas. En vista de la extensa dispersión de anchos de grietas medidos en los elementos estructurales, no es posible justificar gran exactitud en los cálculos para el control de grietas. El mejor control de grietas se obtiene cuando las varillas de refuerzo están bien distribuidas en toda la zona de tensión del concreto. El objetivo es asegurar que se formen grietas finas espaciadas próximamente, en vez de pocas grietas anchas. Para vigas relativamente peraltadas, también debe agregarse refuerzo próximo a las caras verticales en la zona a tensión para controlar el agrietamiento en el alma.[10.1] Sin dicho acero de cara, unas cuantas grietas anchas pueden extenderse hasta el alma, aunque la zona de máxima tensión pueda contener sólo grietas finas. Para lograr el control de grietas en los patines de las vigas T con momento negativo, se debe distribuir bien el refuerzo en todo el patín. Si el refuerzo sólo se coloca sobre el alma, unas cuantas grietas anchas pueden extenderse a la losa, aunque sobre el alma existan sólo grietas finas y bien distribuidas.[10.17]

También debe enfatizarse que la protección contra la corrosión no es sólo cuestión de limitar el ancho de la grieta en la superficie del concreto. Para obtener estructuras durables también es esencial tener un espesor razonable de concreto bien compactado de buena calidad.

El control del agrietamiento mediante prácticas correctas de construcción, así como los efectos de la contracción de secado, se discuten por el Comité 224 del ACI.[10.26]

10.5 BIBLIOGRAFIA

10.1 ACI Committee 318, "Building Code Requeriments for Reinforced Concrete. (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 págs.

10.2 A. D. Ross, "Creep of Concrete Under Variable Stress", Journal ACI, Vol. 54, No. 9, marzo de 1958, págs. 739-758.

10.3 D. McHenry, "A New Aspect of Creep in Concrete and its Applications to Design", *Proceedings American Society for Testing and Materials,* Vol. 43, 1943, págs. 1969-1984.

10.4 Subcommittee 1, ACI Committee 435, "Allowable Deflections", *Journal ACI,* Vol. 65, No. 6, junio de 1968, págs. 433-444.

10.5 ACI Committee 213, "Guide for Structural Lightweight Aggregate Concrete", *Journal ACI,* Vol. 64, No. 8, agosto de 1967, págs. 433-464, También estudio de R. N. McManus y Committee Closure, *Journal ACI,* Vol. 65, No. 2, febrero de 1968, págs. 151-155.

10.6 ACI Committee 318, "Commentary on Building Code Requeriments for Reinforced Concrete, (ACI 318-71)", American Concrete Institute, Detroit, 1971, 96 págs.

10.7 D. E. Branson, "Instantaneous and Time - Dependent Deflections of Simple and Continuous Reinforced Concrete Beams", HPR Report No. 7, Parte 1, Alabama Highway Department, Bureau of Public Roads, agosto de 1963 (1965), págs. 1-78.

10.8 ACI Committee 435, "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members", *Journal ACI,* Vol. 63, No. 6, junio de 1966, págs. 637-674.

10.9 ACI Committee 340, *Design Handbook in Accordance with the Strength Design Method of ACI 318-71,* Vol. 1. Publicación SP-17 (73), American Concrete Institute, Detroit, 1973, 403 págs.

10.10 W. W. Yu y G. Winter, "Instantaneous and Long - Time Deflections of Reinforced Concrete Beams Under Working Loads", *Journal ACI,* Vol. 57, No. 1, julio de 1960, págs. 29-50.

10.11 ACI Committee 209, "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures", *Designing for the Effects of Creep, Shrinkage, and Temperature in Concrete Structures,* SP-27, American Concrete Institute, Detroit, 1971, págs. 51-93.

10.12 CEB-FIP, "International Recommendations for the Design and Costruction of Concrete Structures", Comité Européen du Béton/Fédération International de la Précontrainte, París, (edición en inglés publicada por la Cement and Concrete Association, Londres) 1970, 80 págs.

10.13 D. Watstein y D. E. Parsons, "Width and Spacing of Tensile Cracks in Axially Reinforced Concrete Cylinders", *Journal of Research of the National Bureau of Standards,* Vol. 31, No. RP 545, julio de 1943, págs. 1-24.

10.14 E. Hognestad, "High Strength Bars as Concrete Reinforcement, Parte 2. Control of Flexural Cracking", *Journal,* Portland Cement Association Research and Development Laboratories, Vol. 4, No. 1, enero de 1962, págs. 46-63.

10.15 CEB, "Compute - Rendu de la 5ème Session de Travail", Comité Européen du Béton, Bulletin d'Information No. 24, París, 1960.

10.16 P. H. Kaar, y A. H. Mattock, "High Stregth Bars as Concrete Reinforcement, Parte 4, Control of Cracking", *Journal,* Portland Cement Association Research and Development Laboratories, Vol. 5, No. 1, enero de 1963, págs. 15-38.

10.17 P. H. Kaar y E. Hognestad, "High Strength Bars as Concrete Reinforcement, Parte 7, Control of Cracking in *T*-Beam Flanges", *Journal,* Portland Cement Association Research and Development Laboratories, Vol. 7, No. 1, enero de 1965, págs. 42-53.

10.18 G. D. Base, J. B. Read, A. W. Beeby, y H. P. J. Taylor, "An Investigation of the Crack Control Characteristics of Various Types of Bar in Reinforced Concrete Beams". Research Report No. 18, Parte 1, Cement and Concrete Association, Londres, diciembre de 1966, 44 págs.

10.19 P. Gergely, y L. A. Lutz, "Maximun Crack Width in Reinforced Flexural Members", *Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete,* SP-20, American Concrete Institute, Detroit, 1968, págs. 87-117.

10.20 E. G. Nawy, "Crack Control in Reinforced Concrete Structures", *Journal ACI,* Vol. 65, No. 10, octubre de 1968, págs. 825-836.

10.21 J. P. Lloyd, M. R. Hassan, y C. E. Kesler, "Crack Control in One-Way Slabs Reinforced with Deformed Welded Wire Fabric", *Journal ACI,* Vol. 66, No. 5, mayo de 1969, págs. 366-376.

10.22 A. W. Beeby, "An Investigation of Cracking in Slabs Spanning One Way", Technical Report TRA 433, Cement and Concrete Association, Londres, abril de 1970, 33 págs.

10.23 A. W. Beeby, "Prediction and Control of Flexural Cracking in Reinforced Concrete Members", *Cracking, Deflection and Ultimate Load of Concrete Slab Systems,* SP-20, American Concrete Institute, Detroit, 1971, págs. 55-75.

10.24 J. Ferry Borges, "Cracking and Deformability of Reinforced Concrete Beams", *Publications,* Vol. 26, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, 1966, págs. 75-95.

10.25 J. M. Illston y R. F. Stevens, "Long - Term Cracking in Reinforced Concrete Beams", *Proceedings of the Istitution of Civil Engineers,* Parte 2, *Research and Theory,* Vol. 53, diciembre de 1972, págs. 445-459.

10.26 ACI Committee 224, "Control of Cracking in Concrete Structures", Journal ACI, Vol. 69, No. 12, diciembre de 1972, págs. 717-753.

10.27 BSI, "Code of Practice for the Structural Use of Concrete", CP110: Parte 1: 1972", British Standards Institution, Londres, 1972, 154 págs.

II

Resistencia y ductilidad de los marcos

11.1 INTRODUCCION

Es necesario considerar el comportamiento de los marcos de concreto reforzado en la carga máxima y cerca de ella para determinar las distribuciones posibles del momento flexionante, la fuerza cortante y la fuerza axial que se podría utilizar en el diseño. Es posible utilizar una distribución de momentos y fuerzas distinta a la dada por el análisis estructural elástico lineal, si las secciones críticas tienen suficiente ductilidad para permitir que ocurra la redistribución de las acciones conforme se acerca la carga máxima. Adicionalmente, en países que sufren terremotos, otro aspecto importante del diseño es la ductilidad de la estructura cuando se la sujeta a cargas de tipo sísmico, ya que los criterios actuales de diseño sísmico se basan en la disipación de la energía por deformaciones inelásticas en caso de sismos importantes.

Estos dos aspectos del comportamiento en la carga máxima dependen de las características de deformación de los miembros, que para los marcos dependen principalmente de la relación entre el momento y la curvatura. Las relaciones momento - curvatura en y próximas a la carga última de los miembros se estudiaron en el capítulo 6. La fig. 11.1 proporciona una curva típica momento - curvatura para una sección en que el acero a tensión está en la resistencia de cedencia en el momento máximo. La curva está marcada para indicar los puntos en que el concreto comienza a agrietarse, el acero a tensión comienza a ceder y comienza el deslajamiento y aplastamiento del concreto. Una sección dúctil puede mantener la capacidad de momento próxima al valor máximo para curvaturas grandes, más allá de la curvatura en la primera cedencia.

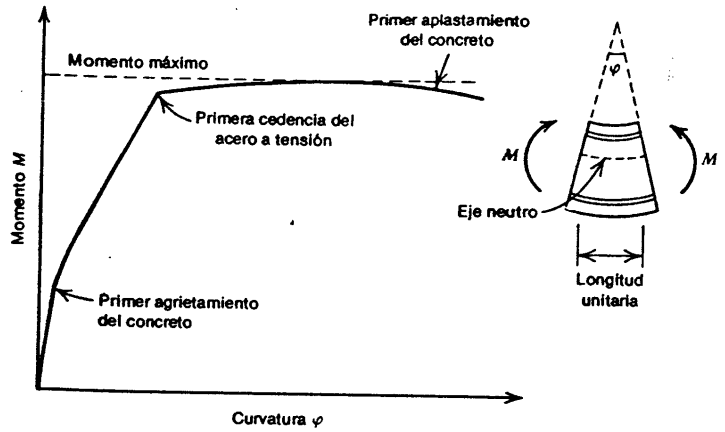


Fig. 11.1. Relación típica de momento vs. curvatura para miembro a flexión de concreto reforzado.

11.2 REDISTRIBUCION DE MOMENTOS Y ROTACION DE ARTICULACION PLASTICA

Es evidente que la naturaleza no lineal de la relación del momento - curvatura, para las secciones de concreto reforzado, provocará cierto ajuste a los valores relativos de los momentos flexionantes, si la estructura se carga más allá del intervalo de carga de servicio. En especial, debido a las rotaciones plásticas en algunas secciones, es posible que los momentos flexionantes asuman un patrón distinto al deducido del análisis estructural elástico lineal, y que todas las secciones de momentos positivos y negativos críticos alcancen sus momentos últimos de resistencia en la carga última. De esta manera, la redistribución de momentos puede tener una influencia marcada en la carga máxima de una estructura estáticamente indeterminada.

Por ejemplo, considérese una viga continua de dos claros, con una sección transversal uniforme (figura 11.2*a*). Sea M'_u el momento máximo de resistencia de las secciones de momento flexionante negativo y M_u el momento máximo de resistencia de las secciones de momento flexionante positivo. Se supone que las secciones están reforzadas adecuadamente por cortante, lo que permite alcanzar los momentos últimos sin falla por cortante. También se supone que la relación momento - curvatura para las secciones es la relación bilineal idealizada para una sección dúctil, como la que aparece en la figura 11.2*b*, en que todas las secciones tienen la misma rigidez constante a flexión hasta el momento máximo y el momento permanece constante en el valor último a curvaturas mayores. A cargas bajas, la distribución del momento flexionante debido a las dos cargas concentradas estará de acuerdo con la distribución de la teoría elástica (véase la figura 11.2*c*). Se ha despreciado la carga muerta de la viga. Al aumentar más las cargas aplicadas, se alcanza el momento máximo de resistencia en una sección crítica, por ejemplo, sobre el soporte central, antes de que se alcance en las otras secciones. Entonces el momento en el apoyo central será M'_u, como en la figura 11.2*d*. El grado al que la viga pueda tomar carga adicional depende de la capacidad de rotación plástica en el apoyo central. Si la sección es frágil, el momento decrece rápidamente después de alcanzar el máximo (véase la figura 11.2*b*), y la viga falla repentinamente sin tomar carga adicional. Si la sección es dúctil, se puede transmitir carga adicional debido a que la articulación plástica en el apoyo central gira mientras mantiene constante su momento de resistencia en M'_u, y ocurre una redistribución de momentos hasta que el momento positivo máximo en los claros aumente hasta M_u. Entonces se forma el mecanismo de desplome en la figura 11.2*e*. La figura 11.2*f* sigue la variación del momento flexionante en las secciones críticas con la carga en la viga, suponiendo

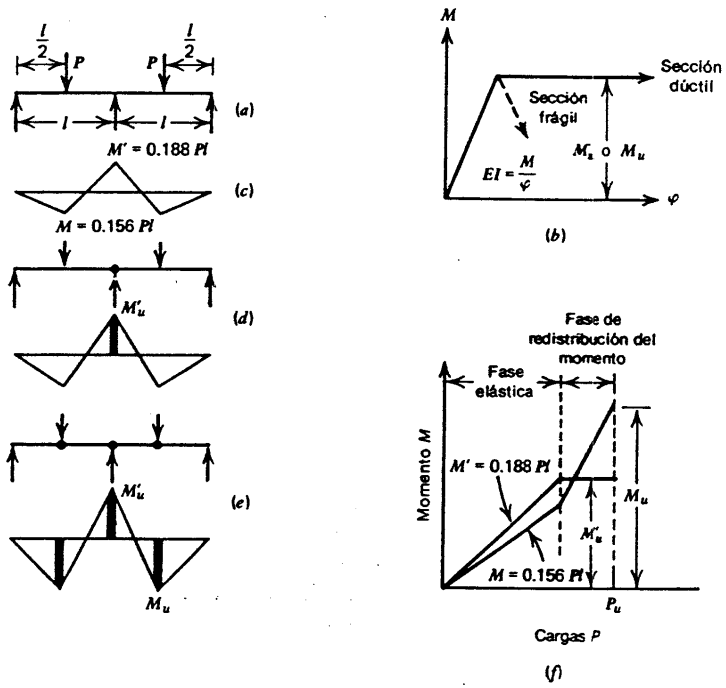


Fig. 11.2. Redistribución de momentos y formación de un mecanismo de desplome para una viga continua. (a) Viga. (b) Relación idealizada de momento vs. curvatura para las secciones. (c) Diagrama de momento flexionante de la teoría elástica. (d) En la formación de la primera articulación plástica. (e) En la formación del mecanismo de desplome. (f) Cambio de momento flexionante con la carga.

que la articulación plástica se forma primero en el apoyo central (lo que requiere $M'_u/M_u < M'/M = 1.2$). Nótese que en todas las etapas del equilibrio se requiere que:

$$M + \frac{M'}{2} = \frac{Pl}{4}$$

$$\therefore \quad P = \frac{4}{l}\left(M + \frac{M'}{2}\right) \tag{11.1}$$

Y si el momento en el apoyo central permanece en M'_u hasta que se desarrolle M_u en las secciones a mitad de los claros, se tiene:

$$P_u = \frac{4}{l}\left(M_u + \frac{M'_u}{2}\right) \tag{11.2}$$

En consecuencia, si se dispone de suficiente capacidad de rotación de las articulaciones plásticas, la distribución de momentos flexionantes en la carga máxima puede ser bastante distinta a la calculada utilizando la teoría elástica, y depende de los momentos máximos de resistencia de las secciones. En las estructuras de concreto reforzado, la ductilidad en las primeras articulaciones plásticas que se formen puede ser insuficiente para permitir la redistribución completa de los momentos con el momento máximo en cada sección crítica. Por tanto, si se debe confiar en la redistribución de momentos, se debe asegurar la disponibilidad de suficiente ductilidad en las articulaciones plásticas.

Como ejemplo, se calcula la rotación plástica requerida para la viga continua de dos claros, de la figura 11.2, para el caso de que la articulación plástica se forme primero en el apoyo central. La viga y los diagramas de curvatura de las figuras 11.3*a* y 11.3*b* muestran la etapa en que ha ocurrido suficiente rotación plástica en el apoyo central B para permitir que se desarrolle el momento máximo M_u a mitad del claro. En consecuencia, las figuras 11.3*a* y 11.3*b* indican la etapa cuando se alcanza justamente P_u. Se considera que la curvatura plástica ocurre en la longitud l_p de la articulación plástica equivalente a cada lado de la sección crítica (véase la sección 6.6.3). La curvatura elástica, a lo largo de la longitud del miembro, se puede calcular de la distribución de momentos flexionantes y la rigidez a flexión EI supuesta constante. La rotación plástica θ_p en el apoyo central B es la discontinuidad de la pendiente entre los extremos de los miembros adyacentes, y $\theta_p = 2\theta_B$ como lo indica la figura 11.3*a*. Para encontrar θ_p, se deben considerar las deformaciones elásticas de los miembros que soportan las cargas P_u. En primer lugar, se reemplaza la articulación plástica en B por una articulación sin fricción, como en la figura 11.3*c*. Luego del teorema del área de momentos, la rotación en B debido solamente a la carga P_u en un claro es

$$\theta'_B = \frac{(M_u + 0.5M'_u)l}{4EI} \tag{11.3}$$

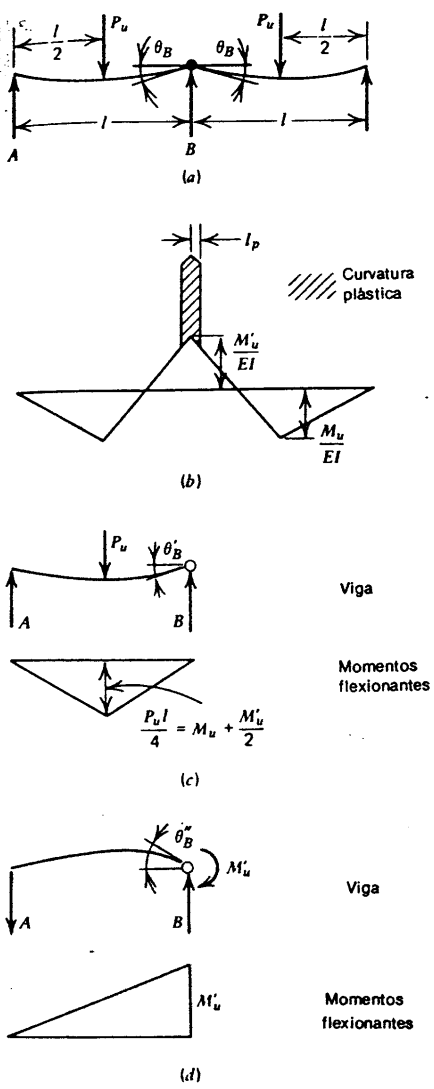


Fig. 11.3. Cálculo de rotación de artículación plástica para la viga de la fig. 11.2. (a) Perfil flameado cuando se alcanza la carga última. (b) Distribución de curvatura idealizada cuando se alcanza la carga última. (c) P_u que actúa sin M'_u. (d) M'_u que actúa sin P_u.

Ahora considérese el efecto del momento máximo de apoyo M'_u que actúa en la articulación sin fricción como en la figura 11.3*d*. La rotación en B debido sóla M'_u es

$$\theta''_B = \frac{M'_u l}{3EI} \tag{11.4}$$

$$\therefore \quad \theta_B = \theta'_B - \theta''_B = \frac{l}{4EI}(M_u - \tfrac{5}{6}M'_u)$$

$$\therefore \quad \theta_p = 2\theta_B = \frac{l}{2EI}(M_u - \tfrac{5}{6}M'_u) \tag{11.5}$$

La ecuación 11.5 proporciona la rotación requerida en la articulación plástica en el apoyo central B para el caso cuando $M_u > \frac{5}{6}M'_u$. Si $M_u = \frac{5}{6}M'_u$ (es decir, si $M'_u/M_u = 1.2$), la θ_p requerida es cero, ya que esta es la razón de los momentos dada por la teoría elástica, y no se requiere redistribución de los momentos flexionantes. Además, si $M_u < \frac{5}{6}M'_u$ el valor dado para θ_p es negativo, y el cálculo anterior no se aplica debido a que la primera articulación plástica se forma en los puntos de carga a mitad del claro y tendría que calcularse la rotación plástica requerida en esas secciones. De la sección 6.6.4 y la fig. 11.3*b*, se puede ver que la rotación de articulación plástica disponible en la articulación plástica es $(\varepsilon_c/c - \varepsilon_{ce}/kd)2l_p$, en que ε_c = deformacion unitaria del concreto en la fibra extrema a compresión en la curvatura máxima ε_{ce} = deformación del concreto en la fibra extrema a compresión, cuando se alcanza la curvatura de cedencia, c = profundidad del eje neutro en el momento máximo, kd = profundidad del eje neutro cuando se alcanza la curvatura de cedencia y l_p = longitud de la articulación plástica equivalente, a cada lado de la sección crítica. Por tanto, en el ejemplo, cuando $M_u > \frac{5}{6}M'_u$, puede ocurrir una redistribución de momentos flexionantes hasta que el momento máximo se desarrolle en cada sección crítica, si

$$\frac{l}{2EI}(M_u - \tfrac{5}{6}M'_u) \leqslant \left(\frac{\varepsilon_c}{c} - \frac{\varepsilon_{ce}}{kd}\right)2l_p \tag{11.6}$$

Si puede ocurrir una redistribución total de momentos, se puede determinar por las propiedades de la sección utilizando la ecuación 11.6.

Los cálculos para el ejemplo anterior involucraron varias suposiciones que se estudiarán más adelante.

Se supuso que todas las secciones tienen la misma rigidez constante a flexión EI hasta el momento máximo, lo que es exacto sólo a bajas cargas antes que el agrietamiento del concreto comience. Cuando se agrieta la viga, la rigidez a flexión se reduce en las regiones agrietadas y la variación de la rigidez a flexión, a lo largo del miembro, provoca que la distribución de momentos flexionantes cambie de la calculada por la teoría elástica

utilizando una rigidez constante a flexión. Con mayor carga aumenta el grado de agrietamiento y nuevamente se modifica la distribución de la rigidez a flexión, y por tanto de momento flexionante. Este efecto es especialmente notable cuando los miembros contienen cantidades distintas de momento de acero positivo y negativo; es todavía más notable en vigas T debido a que el agrietamiento del patín en la región del momento negativo, reduce la rigidez a flexión allí, mucho más que el agrietamiento del alma en la región del momento positivo. Esta variación de la rigidez a flexión a lo largo de la viga afecta la cantidad de rotación plástica requerida para la redistribución completa de momentos en la carga máxima. Hablando estrictamente, es necesario tomar en cuenta el efecto del agrietamiento en la rigidez a flexión EI de las secciones, al determinar la rotación de articulación plástica en la carga máxima.

Se supuso que la rotación momento - curvatura elegida tenía una rama horizontal más allá de la cedencia, y que el momento permanecía constante en el valor máximo. Esta suposición sólo aproxima la relación real momento - curvatura después de la primera cedencia (véase la figura 11.1), ya que esta curvatura tiene una porción ascendente al momento máximo después de la primera cedencia del acero a tensión. En consecuencia, no se pueden desarrollar simultáneamente, tanto en la sección crítica de momento negativo como en la de positivo el momento último, debido a que las curvaturas en esas secciones estarán en distintos puntos de las curvas de momento - curvatura. Es evidente que la suposición de que existe el momento máximo en todas las secciones críticas simultáneamente, proporcionará un valor no conservador para la carga máxima. Por ejemplo, si la capacidad del momento en la primera cedencia es $M_y = 0.9M_u$, en que M_u es el momento máximo, el error en la carga máxima calculada (suponiendo que todas las secciones críticas están en el momento máximo) puede ser de aproximadamente 5%. Es claro que si se considera que el logro de la cedencia (M_y) en la última articulación que se forma es el momento máximo, y que si M_y es apreciablemente menor que el momento máximo M_u, puede ser significativo el error en el cálculo de la carga máxima (suponiendo los momentos máximos en todas las articulaciones).

Como ya se ha visto, es difícil calcular con exactitud la rotación de articulación plástica requerida en los marcos de concreto reforzado para la redistribución completa de momentos y la carga máxima. Sin embargo, si es necesario confiar en una redistribución de momentos en el diseño, es necesario tener seguridad de que la ductilidad disponible en las secciones críticas sea mayor que la ductilidad exigida calculada de las consideraciones teóricas, tales como las recién estudiadas.

Durante muchos años se ha sabido que puede ocurrir cierta redistribución de momentos en las estructuras de concreto reforzado a cargas elevadas. Glanville y Thomas [11.1] realizaron, en 1935, la primera amplia investigación sobre este problema, en los países de habla inglesa, en la Estación de Investigación de Edificios, Inglaterra.

11.3 ANALISIS COMPLETO DE MARCOS

Es posible determinar analíticamente los momentos flexionantes, fuerzas cortantes y axiales y deflexiones de los marcos de concreto reforzado, en cualquier etapa de carga desde cero hasta la carga máxima utilizando las condiciones de equilibrio estático y compatibilidad geométrica, si se conocen las relaciones momento - curvatura de las secciones. Sin embargo, la no linealidad de las relaciones momento - curvatura provoca dificultades, al grado que generalmente se necesita un procedimiento de paso a paso, incrementando la carga de incremento en incremento. Además, la relación momento - curvatura de las secciones que trasmiten momento y fuerza axial depende no sólo de la geometría de la sección y de las propiedades de los materiales, sino también del nivel de la fuerza axial. Esta interdependencia significa que la relación momento - curvatura para cada sección debe calcularse nuevamente en cada incremento de la carga. Se puede utilizar un método de aproximación lineal sucesiva basado en el método de análisis de la rigidez para seguir el comportamiento del marco desde cero hasta la carga máxima. En este método los miembros del marco se dividen, a lo largo de su longitud, en elementos pequeños. En cada nivel de carga se obtiene la rigidez a flexión ($EI = M/\varphi$), que corresponde al momento flexionante y fuerza axial específicos en cada elemento, a partir del punto correspondiente en la curva momento - curvatura. Se supone que los miembros no están agrietados para los incrementos iniciales de carga, y las deformaciones se determinan utilizando la rigidez a flexión de la sección no agrietada. En cada incremento de carga se investigan los elementos para asegurar si se ha alcanzado el momento de agrietamiento. Cuando se encuentra que se ha alcanzado el momento de agrietamiento, se vuelve a calcular la rigidez a flexión del momento en base a la sección agrietada y se calculan de nuevo las acciones en el marco. Este procedimiento se repite en el nivel de carga hasta que todas las rigideces a flexión estén correctas. A cargas mayores, cuando los esfuerzos en los elementos entran al intervalo inelástico, se ajusta la rigidez a flexión de cada elemento con la correspondiente al punto de la curva momento - curvatura calculada para ese momento y nivel de fuerza axial. Eventualmente, con incrementos adicionales, las articulaciones plásticas se extienden a través de todo el marco y se alcanza la carga última cuando se forma un mecanismo y no se puede transmitir carga adicional.

Un ejemplo del tipo anterior de enfoque analítico es la obra de Lázaro y Richards.[11.2] Una de sus comparaciones de resultados del análisis con los resultados experimentales aparece en la figura 11.4. Los resultados experimentales se obtuvieron de pruebas que realizó Cranston[11.3] en un marco de portal rectangular de base articulada con un claro libre de 104 plg (2.64 m) y altura al fondo de la viga de 73 plg (1.85 m). Los resultados analíticos y experimentales de carga - deflexión y momento - deflexión, comparados en la figura, muestran buena concordancia. La carga máxima

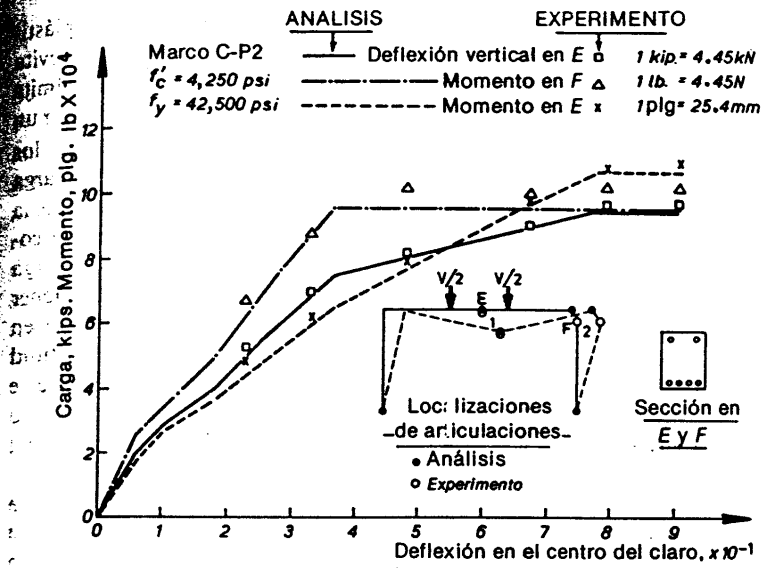


Fig. 11.4. Comparación de resultados experimentales y analíticos de Lázaro y Richars.[11.2]

analítica fue de 0.97 de la carga máxima experimental. En este marco el análisis predijo una carga a la falla 29% mayor que la carga en la formación de la primera articulación plástica, lo que indica el grado de redistribución necesaria de momentos para alcanzar la carga máxima en este caso. El análisis predijo un comportamiento exageradamente flexible en la región entre el primer agrietamiento a tensión y la primera cedencia debido a que se supuso que cuando se alcanzaba el momento al primer agrietamiento en un elemento, se agrietaba todo el concreto en tensión en todo el elemento. Sin embargo, realmente parte del concreto no agrietado trasmite tensión entre las grietas, lo que aumenta la rigidez a flexión. Se puede tomar en cuenta el afecto de atiesamiento por tensión, utilizando una rigidez a flexión efectiva, cuyo valor esté entre el de una sección no agrietada y el de una totalmente agrietada (véase, por ejemplo, la sección 6.6.2).

Es evidente que el enfoque analítico total al comportamiento de los marcos de concreto reforzado, en todas las etapas de cargas, es dilatado y que sólo se puede emprender con éxito con ayuda de una computadora con memoria central grande. Para un programa de computadora general de ese tipo, la entrada necesaria incluye la geometría del marco, las propiedades de la sección transversal, propiedades de los materiales y tipo de carga. La salida podría ser el momento flexionante, las distribuciones de la fuerza cortante y la fuerza axial y las deflexiones en cualquier nivel

de carga, y la carga máxima y la localización de las articulaciones plásticas. Este enfoque analítico para la determinación de la carga máxima evita el procedimiento de pruebas, necesario en el análisis plástico del límite superior normal, para determinar el mecanismo apropiado de falla. En un análisis plástico del límite superior normal se deben examinar todos los mecanismos posibles de falla para determinar cuál proporciona la carga máxima más pequeña. Además se obtiene una predicción más exacta de la carga máxima mediante el enfoque analítico total, debido a que se conocen los momentos de resistencia en las secciones críticas en la carga máxima. Por tanto, el enfoque evita los errores que se originan al suponer que los momentos máximos de resistencia existen simultáneamente en todas las secciones críticas. Por otra parte, se puede incluir con exactitud el efecto de la fuerza axial en la capacidad de momento, puesto que se conoce la magnitud de la fuerza axial, en tanto que en el análisis plástico del límite superior normal, se tendría que estimar el nivel de la fuerza axial en primera instancia.

Ya que el enfoque completo es un procedimiento analítico, requeriría una solución de pruebas empíricas si se utilizara en el diseño, por lo que apenas podría considerarse como adecuado para el diseño ese enfoque. Sin embargo, cuando se dispone fácilmente de más programas de computadora, el enfoque se transforma en una herramienta analítica poderosa para evaluar o verificar el comportamiento estructural en todo el intervalo de carga, incluyendo el comportamiento bajo las cargas de servicio y bajo carga última. También es posible incluir los cambios geométricos en el marco bajo la carga, para tomar en cuenta el efecto de las deflexiones en las acciones internas, lo que explicaría la amplificación de momentos debida a las deflexiones de columnas, indicando al mismo tiempo cualquier efecto de inestabilidad.

En muchas partes del mundo se están desarrollando programas de computadora para el análisis completo de los marcos de concreto reforzado. Algunos ejemplos de análisis corresponden a Cranston,[11.4] Becker,[11.5] Blaauwendraad,[11.6] Menegotto y Pinto,[11.7] y Lázaro y Richards,[11.2] Todavía no existen programas adecuados a aplicaciones generales.

11.4 METODOS PARA DETERMINAR LAS DISTRIBUCIONES DE MOMENTOS FLEXIONANTES; FUERZAS CORTANTES Y FUERZAS AXIALES BAJO CARGA MAXIMA PARA UTILIZAR EN EL DISEÑO

Ahora se consideran los métodos para determinar las distribuciones de momentos flexionantes, fuerzas cortantes y axiales en la carga máxima, que se podrían utilizar en el diseño por resistencia de marcos de concreto reforzado. Estos métodos son el de diagramas de momentos flexionantes elásticos, con o sin algo de redistribución de momentos, y los varios métodos de diseño al límite.

11.4.1 El diagrama de momento flexionante elástico

Se pueden calcular los momentos flexionantes y las fuerzas en la estructura en la carga máxima, para las distintas combinaciones de cargas, utilizando análisis estructural elástico lineal. Las secciones se diseñan para que tengan capacidades máximas que por lo menos igualen los momentos flexionantes y fuerzas que se obtengan de ese análisis. Este es el método recomendado por el ACI 318-71[11.8] y por la mayoría de los demás códigos de construcción. El código del ACI da margen a cualesquiera de las suposiciones razonables en el cálculo de la rigidez relativa a flexión y torsión de los miembros, con tal que las suposiciones sean consistentes en todo el análisis.

Pudiera parecer incongruente que, aunque las secciones se diseñen por el método de las resistencias, tomando en cuenta el comportamiento inelástico del concreto y el acero, los momentos flexionantes y fuerzas en la carga máxima se calculen suponiendo comportamiento elástico lineal de los miembros. Sin embargo, este enfoque es válido, ya que la distribución de los momentos flexionantes y fuerzas encontradas de esa manera, satisface las condiciones de equilibrio estático y las de frontera. Es decir, que la distribución de momentos flexionantes es estáticamente admisible. Dicho diseño podría, en realidad, considerarse como una solución válida de límites inferior (diseño en el límite).

Suponer un comportamiento estructural elástico lineal tiene la siguiente ventaja: asegura que ocurra sólo una pequeña cantidad de redistribución de momentos flexionantes antes de alcanzar la carga última, debido a que las secciones críticas tienden a alcanzar juntas sus capacidades máximas. En consecuencia, será pequeña la rotación plástica requerida en las secciones críticas, y no es necesario varificar la capacidad de la rotación plástica de las secciones. Sin embargo, es evidente que siempre será necesaria cierta redistribución de momentos, porque una vez que empieza el agrietamiento y las deformaciones inelásticas, cambia la rigidez a flexión de los miembros; y a menos que los momentos flexionantes calculados por el análisis estructural elástico lineal se basen en la distribución compleja final de las rigideces a flexión, será necesaria cierta redistribución de momentos, antes de que todas las secciones críticas puedan alcanzar su resistencia a flexión.

Hay al menos dos ventajas más en suponer el comportamiento elástico lineal de los miembros: una es que asegura que los esfuerzos del acero y el concreto en la carga de servicio se mantengan lo más bajos posibles, reduciendo con ello los anchos de las grietas en el concreto; la otra es que se pueden encontrar los momentos y fuerzas de diseño utilizando teoría estructural relativamente simple y bien establecida.

Por lo común, los valores de rigidez a flexión utilizados en el análisis estructural se basan en la sección bruta del concreto: no hay margen para el agrietamiento del concreto y se ignora el acero. Puede parecer que esta

sea una aproximación burda, ya que cambian las rigideces a flexión cuando los miembros se agrietan. Por ejemplo, para una sección rectangular con una razón modular de 10, la reducción en la rigidez a flexión del valor de la sección bruta en el agrietamiento, puede ser de 30 a 60%, para secciones con $\rho = \rho' = 0.01$, y 40 a 60% para secciones con $\rho = 0.01$ y $\rho' = 0$, según las posiciones del acero en la sección. (En las secciones 10.24 y 10.3.3 se estudió el cálculo de la rigidez a flexión de las secciones, y puede referirse al *ACI Design Handbook*, Vol. 1,[10.9] para las tablas que permiten una rápida determinación de los valores de rigidez a flexión.) Sin embargo, se debe recordar que la distribución de los momentos flexionantes depende de las relaciones de las rigideces a flexión de los miembros. A veces, después del agrietamiento de los miembros, las razones de las rigideces a flexión todavía son, aproximadamente, como se supusiera al principio, ya que pueden ocurrir cambios semejantes en la rigidez a flexión en todas las secciones; entonces se necesita una redistribución de momentos relativamente pequeña en las cargas altas para desarrollar el patrón de momentos flexionantes supuesto. Sin embargo, el cambio en las relaciones de las rigideces a flexión debido al agrietamiento puede ser significativo en algunos casos. Por ejemplo, en vigas T continuas, el agrietamiento provoca una mayor reducción en la rigidez a flexión de las regiones de momento negativo que en las regiones de momento positivo; por tanto, después del agrietamiento, la razón de los momentos máximos negativos a positivos será más baja que la razón que se obtenga suponiendo una rigidez uniforme a flexión. Por otra parte, en los marcos, los cambios de rigidez a flexión de las columnas pueden no ser tan grandes como para las vigas, debido a que generalmente las columnas están reforzadas más fuertemente que las vigas y normalmente transmiten cargas axiales a compresión. En consecuencia, para las columnas no será tan grande el cambio en la rigidez a flexión del valor de la sección bruta al valor de la sección agrietada. En muchos marcos serán las vigas las agrietadas y las columnas permanecerán sin agrietar en el intervalo de cargas de servicio. La rigidez a flexión reducida de las vigas agrietadas puede conducir en las columnas a un momento flexionante, más grande que el calculado en base a la rigidez de la sección bruta. Cerca de la carga máxima, se reducirá la rigidez a flexión de las columnas y el momento se redistribuye de vuelta a las vigas. Para evitar una redistribución apreciable de momentos, puede ser mejor basar el momento de inercia de las vigas en un valor aproximado de la sección agrietada transformada (v.gr., $0.5I_g$) y el momento de inercia de las columnas en el valor I_g de la sección bruta. Okamura y colaboradores[11.9] recomiendan usar la sección agrietada transformada para la viga, y la sección no agrietada transformada para la columna, con las razones modulares modificadas (aumentadas) para reflejar el comportamiento inelástico. Probablemente las mayores variaciones en la rigidez a flexión con respecto a los valores de la sección bruta ocurran en marcos en que se consideran tanto la rigidez torsional como la rigidez a flexión de los

miembros, ya que el agrietamiento produce una reducción mucho mayor en la rigidez a torsión que en la rigidez a flexión. Por ejemplo, el agrietamiento puede reducir la rigidez a torsión de un miembro en más de 90%. Por tanto, con mucha frecuencia se puede ignorar la rigidez a torsión (véase la sección 8.9).

El estudio anterior insiste en que, a menos que se utilice la distribución compleja final de las rigideces en el diseño, siempre será necesaria cierta redistribución de momentos, y el grado de dicha redistribución dependerá de las suposiciones del diseñador con relación a las rigideces a flexión. Por tanto, aunque el análisis estructural elástico lineal proporciona un enfoque conveniente para determinar la distribución de momentos y fuerzas en el diseño de resistencia, se debe tener presente que las secciones críticas requerirán cierta ductilidad para lograr la carga máxima de diseño. Por tanto, se deben utilizar aproximaciones realistas razonables para las rigideces del miembro.

11.4.2 El diagrama de momento flexionante elástico modificado por la redistribución de los momentos

Algunos códigos permiten modificar los patrones de momentos flexionantes obtenidos del análisis estructural elástico lineal, cuando las secciones son suficientemente dúctiles para dar margen a la redistribución de momentos. El ACI 318-71[11.8] permite que los momentos negativos en los apoyos de los miembros continuos a flexión, para cualquier combinación de cargas, se aumenten o disminuyan en no más de

$$20\left(1 - \frac{\rho - \rho'}{\rho_b}\right)\% \tag{11.7}$$

en que $\rho = A_s/bd$, $\rho' = A'_s/bd$, y de la ec. 4.14

$$\rho_b = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y}$$

Los momentos negativos modificados se utilizan para calcular los momentos dentro de los claros; es decir, que se debe mantener el equilibrio estático entre las fuerzas internas y las cargas externas. La única forma como puede hacerse el ajuste es que se diseñe la sección en que se reduce el momento, de manera que

$$\rho - \rho' \leqslant 0.5\rho_b \tag{11.8}$$

De las ecs. 11.7 y 11.8 es evidente que el código del ACI permite que los momentos de los soportes se cambien hasta en 20%, según la ductilidad de la sección en que se reduce el momento, siempre y cuando se mantenga el equilibrio estático entre las fuerzas internas y las cargas externas.

Una referencia a la sección 6.3.2 y a las figs. 6.9 y 6.10 indica que para el intervalo $f'_c = 3000$ a 5000 lb/plg^2 (20.7 a 34.5 N/mm^2) y $f_y = 40{,}000$ a 60,000 lb/plg^2 (276 a 414 N/mm^2), la ec. 11.8 asegura que $\varphi_u/\varphi_y > 3$ para $\varepsilon_c = 0.003$ y $\varphi_u/\varphi_y > 4$ para $\varepsilon_c = 0.004$.

El término $(\rho - \rho')/\rho_b$ de las ecs. 11.7 y 11.8 está relacionado con la ductilidad de curvatura a través de su efecto en la profundidad del eje neutro en el momento último. Si cede el acero a compresión, la ecuación de equilibrio $C = T$ para la sección muestra que

$$(\rho - \rho')bdf_y = 0.85f'_c ab \qquad \text{ó} \qquad \rho - \rho' = \frac{0.85f'_c}{f_y d}a$$

$$\rho_b bdf_y = 0.85f'_c a_b d \qquad \text{ó} \qquad \rho_b = \frac{0.85f'_c}{f_y d}a_b$$

$$\therefore \quad \frac{\rho - \rho'}{\rho_b} = \frac{a}{a_b} \tag{11.9}$$

en que a y a_b = profundidad del bloque de esfuerzos de compresión rectangular equivalente de concreto para $\rho - \rho'$ y ρ_b, respectivamente.

Por tanto, si cede el acero a compresión, se puede considerar que el límite de $\rho - \rho' \leqslant 0.5\rho_b$ dado por la ec. 11.8 requiere que $a \leqslant 0.5a_b$. Para los intervalos $f'_c = 3000$ a 5000 lb/plg^2 (20.7 a 34.5 N/mm^2) y $f_y = 40{,}000$ a 60,000 lb/plg (276 a 414 N/mm^2), por la ec. 4.12 se puede demostrar que a_b/d está en el intervalo de 0.583 a 0.473. En consecuencia, una referencia a la ec. 11.8 muestra que para los intervalos de f'_c y f_y recién dados se permite una redistribución de momentos de 10% cuando $a/d = 0.29$ a 0.24, y se permite una mayor redistribución de momentos en porciento a valores más bajos de a/d.

El ajuste al diagrama de momentos flexionantes elásticos, permitido gracias a la redistribución de momentos, conduce a una reducción en los picos de los momentos flexionantes de diseño, cuando se consideran combinaciones de cargas. En la fig. 11.5 se ilustra el ajuste para una viga continua de dos claros cargada uniformemente. En la figura se supone el ajuste máximo de 20%. Las curvas 1, 2 y 3 de los momentos flexionantes son para los casos de carga con carga viva en ambos claros, en el claro del lado derecho solamente y en el claro del lado izquierdo solamente, respectivamente. La línea gruesa representa la envolvente del momento flexionante permisible en el diseño. Se obtiene moviendo hacia abajo la curva del momento flexionante con el pico de momento negativo, y moviendo hacia arriba las curvas del momento flexionante con los picos de momentos positivos, en tanto que se mantiene el equilibrio estático. En la fig. 11.5 se ha reducido en 20% el pico del momento flexionante negativo en el apoyo central, debido al caso de carga 1, para dar el pico del momento negativo de la envolvente de diseño. Los momentos negativos en el apoyo central para los casos 2 y 3 de carga se han aumentado en 20% o hasta la envolvente de diseño, lo que sea menor, para dar las otras partes de la envolvente de diseño del momento negativo. Para satisfacer el equilibrio estático, el momento positivo a mitad del claro, más el promedio de los momentos negativos en los dos apoyos adyacentes del claro, debe ser igual a $Wl/8$, en que W es la carga total distribuida uniformemente en el claro l. Por tanto, se aumentan los momentos positivos para el caso 1 de carga (en 0.5 de $0.2M_B = 0.1M_B$ a mitad del claro), y se disminuyen los momentos positivos para los casos 2 y 3 de carga. La envolvente de diseño del momento positivo está dada por la mayor de estas ordenadas de momentos ajustados, como se indica en las definiciones de a y b en la fig. 11.5. Nótese que la redistribución permisible de momentos significa una reducción, tanto en los momentos máximos negativos como positivos, obtenidos del análisis elástico, y que por ello conduce a un diseño más económico.

El porcentaje de redistribución de momentos del diagrama de momentos elásticos que permite el ACI 318-71 [11.8] en el diseño se ha limitado para asegurar que las secciones tengan suficiente refuerzo para impedir

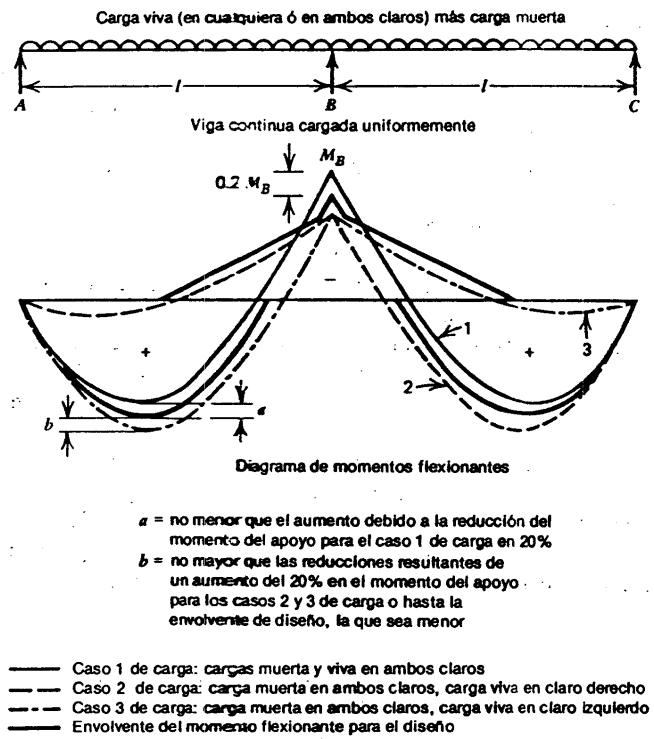


Fig. 11.5. Ajuste del diagrama flexionante de la teoría elástica para la redistribución del momento permisible.

anchos excesivos de grietas bajo la carga de servicio, debido a elevados esfuerzos del acero, y para asegurar que las secciones tengan ductilidad adecuada en las articulaciones plásticas en la carga última para permitir que se alcance la distribución de momentos de diseño. De acuerdo con el comentario al ACI 318-71,[11.10] la redistribución permisible de momentos se basa en el conocimiento del comportamiento bajo cargas de servicio y máxima, que se obtiene de pruebas y de estudios analíticos. La fig. 11.6, que se tomó del comentario, describe el cambio en porcentaje disponible calculado en el momento contra el índice de refuerzo $(\rho - \rho')/\rho_b$. De acuerdo con el comentario, las curvas se calcularon utilizando valores conservadores de deformación máxima del concreto, y longitudes equivalentes de articulación plástica. En la figura también aparece el porcentaje del cambio de momento permisible del ACI 318-71, de las ecs. 11.7 y 11.8, y se ve que es conservador. El comentario también expresa que los estudios de Cohn[11.11] y Mattock[11.12] indican que se dispone de capacidad adecuada de rotación plástica para la redistribución que permite el ACI 318-71. Estos dos estudios también aseguran que el agrietamiento, y las deflexiones de las vigas diseñadas de acuerdo con la redistribución de momentos permisible, no son más severos de lo que son para vigas diseñadas con los patrones de momentos de la teoría elástica.

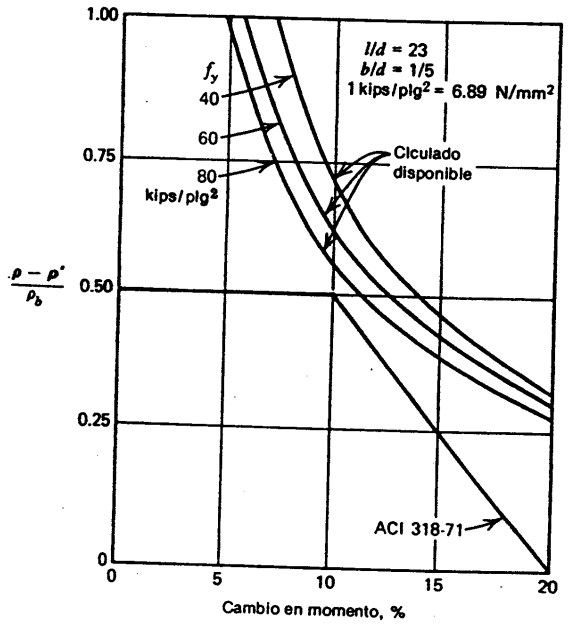


Fig. 11.6. Redistribución de momento permisible para la capacidad de rotación plástica mínima.[11.10]

Es interesante notar que el patrón de momentos de la teoría elástica, en el que se basa la redistribución de momentos, no está claramente definida por el ACI 318-71. Haciendo distintas suposiciones con relación a la rigidez a flexión de las secciones, es posible tener una variedad de "patrones de momentos flexionantes elásticos." Las variaciones entre estos diagramas pueden ser mayores que las redistribuciones que permiten las ecs. 11.7 y 11.8. Sin embargo, la naturaleza conservadora de las ecs. 11.7 y 11.8 debe significar que la redistribución permitida es segura cuando se aplica en cualquier patrón de momentos flexionantes elásticos, si se hacen suposiciones razonables y consistentes para las rigideces a flexión de los miembros.

La mayoría de los códigos permiten utilizar el diagrama de momentos flexionantes deducido del análisis estructural elástico lineal, en base a rigideces aproximadas a flexión y modificado para una pequeña redistribución de momentos. Sin embargo, algunos códigos permiten que se tome en cuenta una redistribución extensa de momentos. Por ejemplo, el código británico de práctica CP110:1972[11.13] permite reducir los picos de los momentos elásticos hasta en $(0.6 - c/d)100\%$, pero no en más de 30% (c = profundidad del eje neutro en la sección del momento reducido, d = profundidad efectivo del acero a tensión), siempre que se mantenga el equilibrio estático entre las fuerzas internas y las cargas externas y que no se reduzca el momento elástico en la sección en más del 30% del momento elástico numéricamente mayor en ninguna parte del miembro. En consecuencia, el código británico permite una reducción hasta del 30% en el momento para profundidad del eje neutro iguales o menores que $0.3d$. Para profundidades del eje neutro mayores que $0.3d$, la redistribución permitida se reduce linealmente hasta 10%, a una profundidad del eje neutro de $0.5d$. Para estructuras mayores de cuatro pisos, en las que el marco proporciona la estabilidad lateral, la reducción en el momento se limita a 10%. Aparentemente, los reglamentos rusos han permitido[11.14] que los claros intermedios de vigas continuas de claros iguales cargadas uniformemente se diseñen para momentos positivos y negativos iguales ($Wl/16$, en que W = carga total en el claro l), y han permitido 30% de redistribución de momentos del diagrama de momentos flexionantes elásticos en los otros casos, con la condición de que la profundidad del eje neutro sea menor que 0.3 del peralte efectivo.

En comparación con las recomendaciones británica y rusa, las ecs. 11.7 y 11.8 del ACI 318-71 son conservadoras. Las curvas para el porcentaje del cambio en el momento disponible calculado de la fig. 11.6 indican que se dispone hasta de 30% a valores bajos de $(\rho - \rho')/\rho_b$. El código es bastante estricto, ya que no permite una redistribución de momentos de este orden. Las variaciones posibles en los patrones de momentos flexionantes elásticos, debido a las rigideces aproximadas utilizadas en el diseño, pueden producir cuidado, pero dichas variaciones del lado no conservador pueden quedar compensadas por los valores conservadores

utilizados para la deformación última del concreto y la longitud de articulación plástica equivalente en las curvas calculadas de la fig. 11.6. Con frecuencia se considera que utilizar grandes cantidades de redistribución de momentos significa elevados esfuerzos del acero en algunas secciones en la carga de servicio, lo que puede conducir a agrietamiento y deflexiones excesivos. Sin embargo, muchos investigadores han demostrado que ello no es cierto. Por ejemplo, en las pruebas de Mattock,[11.12] el agrietamiento en la carga de servicio en vigas *T* continuas, diseñadas en la base de redistribución de 25% de los momentos flexionantes del diagrama de momentos flexionantes elásticos, no fue más severo que en las vigas *T* diseñadas para la distribución elástica. En consecuencia, es evidente que se podría permitir razonablemente en general una redistribución de momentos semejantes a la que permiten los reglamentos rusos y el código británico.

Hay dos ventajas principales asociadas con el uso de redistribución de momentos: el diseñador puede elegir patrones de momento flexionante para evitar la congestión de refuerzo en los apoyos de las vigas, y se obtienen economías de la reducción de los picos del momento flexionante en la envolvente del momento flexionante dibujada para distintas posiciones de la carga viva. La cuestión relativa a economía se puede ilustrar con referencia a la fig. 11.5. Si se pueden hacer grandes ajustes a los picos del momento flexionante, se obtienen ahorros significativos, especialmente si es elevada la razón de carga viva a carga muerta.

11.4.3 Diseño al límite

El enfoque del diseño al límite permite utilizar cualquier distribución de momentos flexionantes en la carga máxima, siempre y cuando se satisfagan las siguientes condiciones:

1. La distribución de momentos flexionantes es estáticamente admisible, es decir que el patrón de momentos flexionantes elegido no viola las leyes del equilibrio para la estructura como un todo o para ningún miembro de la misma. Por ejemplo, se puede obtener esa distribución de momentos flexionantes, suponiendo las posiciones de suficientes puntos de contraflexión para hacer a la estructura estáticamente determinada y encontrar los momentos flexionantes y fuerzas resultantes de las ecuaciones de equilibrio estático.
2. La capacidad de rotación de las regiones de articulación plástica es suficiente para permitir que se desarrolle la distribución supuesta de momentos en la carga máxima.
3. El agrietamiento y deflexiones bajo carga de servicio no son excesivos.

Se pueden expresar los requerimientos de los puntos 1 al 3 anteriores como equilibrio al límite, compatibilidad de rotación y grado de servicio.

Este método lleva al método del patrón de momentos elásticos una etapa más adelante y permite una extensa redistribución de momentos; sin embargo, se debe demostrar que es posible y no debe obstaculizar el servicio de la estructura.

La fig. 11.7 es un diagrama de momento flexionante límite posible, para una viga continua con carga máxima distribuida uniformemente w_u por longitud unitaria. En el diagrama límite de momento flexionante, los momentos flexionantes libres (estáticos) en cada claro, debidos a las cargas externas que actúan con los extremos de cada claro libre de restricción rotacional, tienen una ordenada máxima de $w_u l^2/8$. Se puede escoger la línea base, debida a los momentos de restricción en los extremos en los apoyos, para que esté en cualquier parte dentro de los diagramas de momentos libres. Las magnitudes requeridas de los momentos máximos de resistencia de las secciones se pueden calcular de las ordenadas de momentos flexionantes en las articulaciones plásticas. Por ejemplo, si se escoge la posición de la línea base, de manera que los momentos de apoyo sean todos $w_u l^2/16$, los momentos positivos máximos requeridos para los claros interiores y los claros de los extremos son $w_u l^2/16$ y $0.0958 w_u l^2$, respectivamente. De esta manera se tiene una cantidad infinita de posiciones utilizables para la línea base, debido a que se puede reforzar una sección para que dé un momento resistente máximo como se requiere. Se puede comparar este caso con el diseño plástico de vigas continuas de acero: a menos que se utilicen placas de cubierta, una sección de acero tiene el mismo momento plástico de resistencia, tanto para momentos positivos como negativos, por lo que la línea base sólo puede tener una posición en el

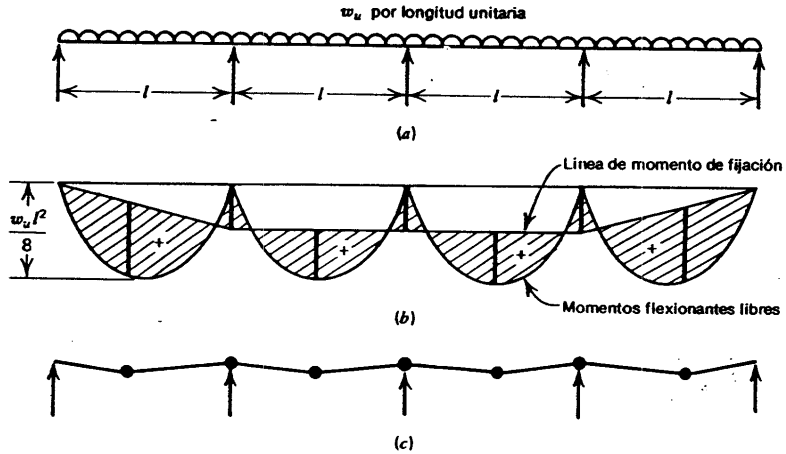


Fig. 11.7. Viga continua en la carga última. (a) Viga. (b) Diagrama de momento flexionante al límite. (c) Mecanismo de desplome.

diagrama de momento de colapso. En el caso general, el diagrama de momentos elásticos es uno de los diagramas de momentos posibles que podría utilizarse para miembros de concreto reforzado.

Ya que la carga viva colocada en todos los claros produce los mayores momentos flexionantes libres, da el peor caso para la magnitud de los momentos positivos y negativos. Sin embargo, para calcular la cantidad de acero de momento negativo requerido en un claro, se debe quitar la carga viva de este claro. Por ejemplo, considérese una viga de dos claros cargada uniformemente, cuyo diagrama de momentos límite elegidos por carga muerta y viva aparece en la fig. 11.8*a*. Para encontrar la cantidad de acero superior requerido en el claro *AB* se suprime la carga viva de ese claro. Sólo permanece el momento flexionante de la carga muerta (véase la fig. 11.8*b*), que indica en qué grado debe darse refuerzo en el claro, para impedir falla por este modo de carga.

Las principales ventajas del diseño al límite son semejantes a las que resultan de la redistribución de momentos. Se pueden elegir patrones de momentos para evitar congestión del refuerzo en los apoyos de los miembros. También se pueden lograr economías apreciables diseñando los momentos obtenidos al dividir los momentos flexionantes libres entre los momentos positivos y negativos, en vez de diseñar los picos de momento flexionante que se encuentran de la envolvente de momentos de la teoría

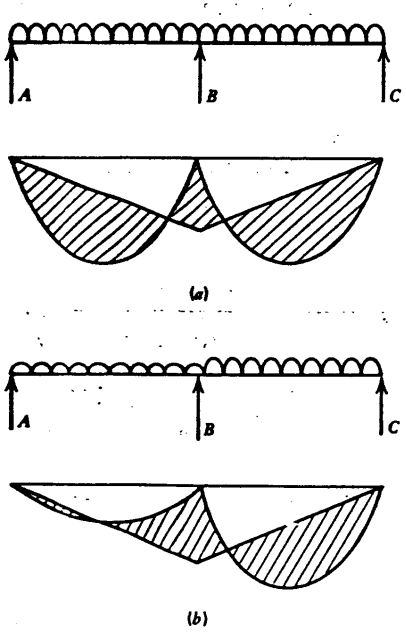


Fig. 11.8. Diagramas de momento flexionante al mínimo para cargas total y parcial. (a) Viga con carga viva en ambos claros más carga muerta, y diagrama de momento al límite. (b) Viga con carga viva en el claro derecho solamente más carga muerta y diagrama de momento al límite.

elástica para distintas posiciones de la carga. El método también proporciona al diseñador una visión más clara del comportamiento real de la estructura. Sin embargo, generalmente no se incluyen en los códigos de construcción las formulaciones del conocimiento actual de la capacidad de rotación plástica y de servicio en reglas simples para el diseño al límite. Por ejemplo, el ACI 318-71 [11.8] y el británico CP110 [11.13] no tienen recomendaciones para el diseño al límite. Las mayores restricciones contra la aceptación del diseño al límite han sido la preocupación de que el comportamiento bajo la carga de servicio, con respecto al agrietamiento y deflexiones, pueda no ser satisfactorio, las complejidades de algunos de los procedimientos disponibles de diseño al límite y la carencia de datos experimentales precisos con relación a la capacidad de rotación plástica de los miembros.

11.5 METODOS DE DISEÑO AL LIMITE

A continuación un informe del comité ACI-ASCE [11.15] sobre el diseño al límite y algunos métodos propuestos de diseño al límite se estudian para indicar posibles enfoques en el diseño al límite.

11.5.1 Informe del Comité 428 del ACI-ASCE

En un informe de avance [11.15] sobre el diseño al límite, el comité 428 de ACI-ASCE presentó ejemplos de cláusulas adecuadas para incluirse en un código de construcción. En vez de recomendar un solo método de diseño al límite, las cláusulas definen valores de envolvente o límites superiores e inferiores, de factores que definen las relaciones de momento - curvatura. Estas cláusulas, resumidas más adelante, permiten al diseñador utilizar cualquiera de los métodos aceptables de diseño al límite, publicados en años recientes.

La distribución de momentos

Se puede encontrar la distribución inelástica de momentos en la carga máxima utilizando cualquier conjunto de suposiciones que caigan dentro de las siguientes condiciones:

1. La rigidez a flexión elástica de las secciones $E_c I$ se determinará de la sección bruta o la sección agrietada transformada, utilizando valores de E_c y n dentro del 25% de los valores del código del ACI, en que E_c = módulo de elasticidad del concreto, n = razón modular, e I = momento de inercia de la sección. No se debe de suponer que el momento M_y del límite elástico sea inferior a $0.8M_u$, en que M_u = momento resistente máximo.

2. Se utilizarán las suposiciones de la teoría de la resistencia del código del ACI para calcular el momento resistente máximo M_u y la carga axial

máxima P_u. Se utilizarán las mismas suposiciones para determinar la curvatura φ_u en M_u y P_u, excepto que la deformación a compresión en la fibra extrema en el concreto ε_c en φ_u será ε_{co} para los miembros con carga axial y a flexión, y en el intervalo

$$\varepsilon_{co} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{co} + 0.02\frac{b}{z} + \left(\frac{\rho_s f_y}{20}\right)^2 \tag{11.10}$$

para miembros sin carga axial significativa, en que ε_{co} = deformación del concreto a compresión máxima despreciando la influencia del confinamiento, velocidad de carga y gradiente de deformación, al que se asignará un valor dentro del intervalo 0.003 a 0.004; b = ancho de la cara a compresión de la sección; z = claro a cortante definido por la ec. 11.16, ρ_s = relación del volumen total de estribos y acero a compresión en la longitud s al volumen bds del concreto, en que d = peralte efectivo del miembro y s = separación de los estribos, y f_y = resistencia de cedencia del acero en kip/plg² (1 kip/plg² = 6.89 N/mm²).

3. La relación momento - curvatura entre M_y y M_u estará dentro de la linea recta BC y las líneas $BB'C$ de la fig. 11.9.

4. La longitud a lo largo de un miembro desde la sección de momento flexionante máximo M_m en que se supone que ocurren las curvaturas inelásticas, l_p, será mayor que el menor de

$$R_c(0.25d + 0.03zR_m) \tag{11.11}$$

y

$$R_c d \tag{11.12}$$

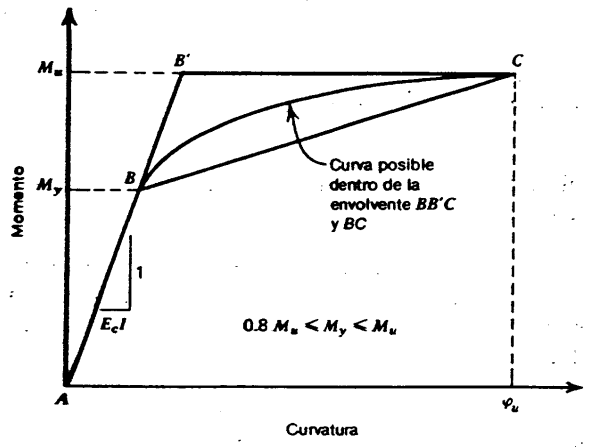


Fig. 11.9. Relación supuesta de momento vs. curvatura.[11-15]

pero no debe de ser mayor que

$$R_c(0.5d + 0.1zR_m) \tag{11.13}$$

donde

$$R_c = \frac{0.004 - \varepsilon_{ce}}{\varepsilon_{co} - \varepsilon_{ce}} \tag{11.14}$$

$$R_m = \frac{M_m - M_y}{M_u - M_y} \tag{11.15}$$

$$z = \frac{4M_m}{4V_z + \sqrt{wM_m R_m}} \tag{11.16}$$

ó

$z = \infty$ en la región de momento constante

donde ε_{ce} = componente elástica de ε_c calculada o supuesta en el intervalo de 0.001 a 0.002, V_z = fuerza cortante adyacente a la carga concentrada o reacción en la sección de momento máximo, y w = carga distribuida uniformemente por longitud unitaria en la sección de momento máximo (tomada como cero, si actúa una carga concentrada o reacción en la sección, en dirección opuesta).

5. Las condiciones de equilibrio y compatibilidad geométrica deben satisfacerse totalmente.

El diseño

Los miembros diseñados de acuerdo con la distribución inelástica de momentos satisfarán los siguientes requerimientos:

1. Los esfuerzos calculados elásticamente en el refuerzo a las cargas de servicio multiplicadas por 1.2 para las cargas de gravedad, ó 1.0 si se incluyen las cargas laterales, no deben exceder de $0.9f_y$ ó 60 kip/plg² (414 N/mm²), lo que séa menor.

2. Para porciones de longitudes de miembros, donde el momento en la carga máxima excede $0.8M_u$, se proporcionarán estribos cerrados para resistir la fuerza cortante que exceda $bd\sqrt{f'_c}$ lb, donde b y d están en pulgadas y f'_c está en lb/plg² (1 lb = 4.45 N, 1 plg = 25.4 mm, 1 lb/plg² = 0.00689 N/mm²).

3. Para el diseño de marcos no arriostrados, se considerará el efecto de las deflexiones en las fuerzas internas, con deflexiones elásticas e inelásticas de cargas sostenidas, aumentadas en un factor de 3.

4. Los factores de carga utilizados para determinar la carga máxima requerida, calculada de las cargas de servicio, se deben multiplicar por el factor

$$\frac{\gamma + 1}{\gamma + M_y/M_u} \tag{11.17}$$

donde γ es la potencia de la parábola que define la curva BC de la fig. 11.9 ($= 1$ para la línea recta BC, $= 2$ para la línea curva BC mostrada, $= \infty$ para las líneas $BB'C$).

Comentarios

En la sección sobre la distribución de momentos, el artículo 1 define la rigidez elástica y el fin del intervalo elástico. El artículo 2 indica el método para calcular el momento máximo y la carga axial y la curvatura correspondiente. El límite superior de la ec. 11.10 se obtuvo de la ecuación de Corley (6.46). El artículo 3 permite utilizar una parte superior inclinada bilineal, curva o plana, para la relación de momento - curvatura. El artículo 4 proporciona la longitud de articulación plástica equivalente, que abarca el intervalo de valores que se obtienen de las ecuaciones de Corley (6.45), Sawyer (6.49) y Baker (6.41). El término R_m es necesario para tomar en cuenta el efecto de la magnitud del momento máximo. El término R_ε es necesario para ajustar la longitud de acuerdo con la deformación supuesta máxima del concreto, para obtener una rotación inelástica, prácticamente constante para el intervalo posible de valores supuestos de ε_{cu}. La ec. 11.16 da z en las regiones en que varía la razón del momento/fuerza cortante. El artículo 5 expresa nuevamente las condiciones que deben satisfacerse tanto en un análisis inelástico como en un análisis elástico.

En la sección sobre el diseño, el propósito del artículo 1 es asegurar que el acero no ceda bajo carga de servicio y produzca agrietamiento y deflexiones excesivas. Para calcular la fuerza del acero, se puede dividir el momento de la carga de servicio entre un brazo de palanca de momentos internos supuestos de $7/8d$. El artículo 2 requiere que el diseñador tome más cortante en los estribos, en las regiones donde la cedencia del acero a tensión por flexión puede provocar amplio agrietamiento y pérdida de cortante transmitida por el concreto. Además, los estribos proporcionan confinamiento para el concreto. El artículo 3 requiere tomar en cuenta los cambios de momentos debidos a las deflexiones, remplazando cualquier otra necesidad de tomar en cuenta la esbeltez de la columna. El artículo 4 toma en cuenta el desarrollo, no simultáneo, de los momentos últimos en las secciones críticas. Se supone que en la carga máxima, los momentos en las secciones críticas se distribuyen uniformemente a lo largo de la curva entre B y C en la fig. 11.9, y que todos los momentos contribuyen igualmente a la carga máxima. Por ejemplo, si se utiliza la línea recta BC y $M_y/M_u = 0.9$, el factor de multiplicación para los factores de carga, dado por la ec. 11.17, es $2/1.9 = 1.05$.

11.5.2 Métodos disponibles de diseño al límite

Un procedimiento de diseño al límite trata de satisfacer tres condiciones: 1) limitar el equilibrio, 2) compatibilidad rotacional y 3) servicio. Casi todos los métodos de diseño al límite disponibles consideran inicialmente una o dos de esas condiciones, y las restantes son objeto de una comprobación posterior. También se puede buscar la distribución más económica de momentos flexionantes, que es la distribución de momentos que permite la mayor reducción de momentos, cuando se compara con los momentos de la envolvente elástica que se obtienen de las distintas combinaciones de cargas de diseño. De los métodos de diseño al límite propuesto, probablemente los que merezcan más atención son los debidos a Baker, [11.14, 11.16, 11.17] Cohn, [11.11, 11.18] Sawyer, [11.19] y Furlong, [11.20] que se describen brevemente a continuación.

Método de Baker

Baker [11.14, 11.16, 11.17] ha estado desarrollando un método de diseño al límite desde la década de 1940. El diseño se basa en los requerimiento del equilibrio al límite. Los requerimientos de compatibilidad rotacional y servicio se comprueban como pasos posteriores. El diseño se inicia determinando una distribución de momentos flexionantes máximos que está en equilibrio con las cargas máximas. Esto puede obtenerse dibujando el diagrama de momentos flexionantes libres, para los miembros bajo cargas máximas, cuando los extremos están libres de restricción rotacional, y dibujando la línea base de momentos en alguna posición conveniente, como en la fig. 11.7. Las secciones se diseñan para esos momentos máximos. Nótese que en la carga máxima se ha desarrollado un mecanismo de colapso. La capacidad de rotación de las regiones de articulación plástica se comprueba para asegurar que se puede desarrollar la distribución elegida de momentos flexionantes en la carga máxima, y se determine el patrón de momentos en la carga de servicio y se verifiquen los esfuerzos para asegurar que los miembros sean adecuados por servicio. La distribución supuesta de momentos máximos puede requerir modificación, si se encuentra capacidad inadecuada de rotación o servicio insatisfactorio.

Método de Cohn

Cohn [11.11, 11.18] ha desarrollado un método basado en los requerimientos del equilibrio al límite y servicio. El requerimiento de compatibilidad rotacional se comprueba como paso subsecuente. La solución se obtiene reduciendo los momentos de la envolvente elástica obtenida de las distintas

combinaciones de carga máxima, multiplicando por parámetros apropiados $x_j \leqslant 1$, en que x_j es el parámetro de seguridad por cedencia para la sección j. El valor de x_j queda determinado por los siguientes requerimientos: en la carga de servicio, las secciones críticas del marco deben permanecer dentro del intervalo elástico; en la carga máxima, las fuerzas internas deben de estar en equilibrio con las cargas externas y se deben formar uno o más mecanismos de colapso; y las reducciones global de momento de la envolvente elástica deben ser un máximo. Un diseño típico busca el valor mínimo para x_j consistente con un comportamiento aceptable bajo la carga de servicio y las condiciones de equilibrio en la carga máxima. Las secciones se diseñan en base a la distribución determinada de los momentos flexionantes, y las regiones de articulación plástica se verifican para asegurar que tengan suficiente capacidad de rotación para desarrollar la distribución supuesta de momentos en la carga máxima.

Método de Sawyer

Sawyer [11.19] ha presentado un enfoque desarrollado en los requerimientos de equilibrio al límite y compatibilidad rotacional. Como paso subsecuente se verifica el requerimiento de servicio. El método utiliza indirectamente un análisis de compatibilidad rotacional, al ajustar un diseño dado por aproximaciones sucesivas. El diseño se comienza ajustando los momentos de envolvente elástica obtenidos de las distintas combinaciones de carga de diseño en la carga máxima, para establecer un patrón de momentos flexionantes para los que se diseña el refuerzo. La rotación inelástica de cada región plástica se calcula para cada combinación posible de cargas en la carga máxima, utilizando cualquier conjunto de momentos ajustados que satisfaga el equilibrio estático y caiga dentro de los momentos resistentes máximos de las secciones. Se puede suponer una curva momento - curvatura con un momento de cedencia de 0.85 del momento. Luego se utiliza la teoría elástica para calcular los momentos que resultan de estos ángulos por flexión inelástica y la carga externa impuesta en la estructura. Si los momentos calculados exceden los momentos resistentes máximos de las secciones, se revisa el refuerzo agregando refuerzo a las regiones en que se excede el momento máximo o a las regiones en que es excesivo el ángulo inelástico resultante. Se recalculan los momentos introducidos por los ángulos inelásticos y la carga externa, y se ajusta el refuerzo hasta que se haya demostrado el carácter adecuado de los momentos máximos de resistencia. Luego se verifica el diseño por la teoría elástica para asegurar que los esfuerzos del acero en la carga de servicio no sean excesivos.

Método de Furlong

El método de diseño al límite de Furlong [11.20] comprende momentos máximos asignados para estructuras arriostradas contra traslación lateral.

Furlong analizó los peores casos de distintos tipos y arreglos de cargas en distintos arreglos de claros, para determinar los patrones posibles de momentos de diseño en vigas continuas que satisficieran los requerimientos de servicio (el acero a tensión no debe ceder en las cargas de servicio) y de equilibrio de límite. Luego se analizaron las rotaciones plásticas resultantes de esas distribuciones de momentos máximos para determinar los requerimientos de ductilidad de curvatura. Se tabularon las distribuciones posibles de momentos de diseño así encontradas y se dio una ecuación simple para los requerimientos de ductilidad de curvatura. Se obtiene un enfoque de diseño conveniente. Para diseñar una viga, se refuerzan las secciones, de manera que en cada claro, los momentos máximos de resistencia estén en equilibrio con la carga máxima que deba tomarse y los momentos máximos de resistencia sean iguales o mayores que el producto de M_F y el coeficiente apropiado dado en la tabla 11.1, en que M_F = momento flexionante máximo en el claro debido a las cargas máximas, cuando los extremos están libres de restricción rotacional. Las secciones también se proporcionan de manera que

$$\frac{\varphi_u}{\varphi_y} \geqslant 1 + 0.25\,\frac{l_n}{d} \tag{11.18}$$

donde φ_u = curvatura máxima, φ_y = curvatura en la primera cedencia, l_n = claro libre y d = peralte efectivo de la sección.

Tabla 11.1 Coeficiente de momentos de vigas para distintas restricciones de extremo [11.20]

Restricción de extemo	Tipo de momento	Vigas cargadas solo por una fuerza a mitad del claro	Las demás vigas
Claro con dos extremos restringidos	Momento negativo	0.37	0.50
	Momento positivo	0.42	0.33
Claro con un extremo restringido	Momneto negativo	0.56	0.75
	Momento positivo	0.50	0.46

En la fig. 11.10 está representado un ejemplo de la determinación de los momentos resistentes máximos, para un claro interior de una viga continua, que transmite una carga uniforme w_u por longitud unitaria. Las secciones quedarían proporcionadas para satisfacer la ec. 11.18 utilizando gráficas semejantes a las fig.s. 6.9 y 6.10. Es claro que el método de Furlong da un enfoque simple y directo de diseño. Utilizar momentos máximos asignados, significa que el diseñador evita las complejidades de

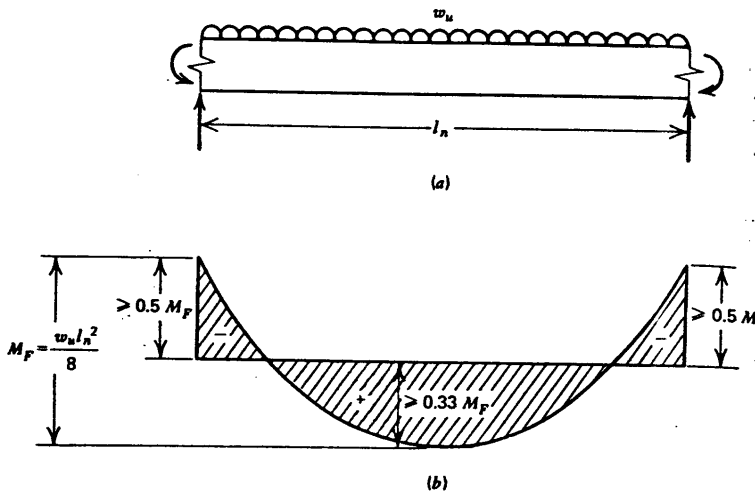


Fig. 11.10. Momentos asignados al límite para un claro interior cargado uniformemente.[11.20] (a) Claro interior de viga continua. (b) Diagrama de momento flexionante al límite.

las soluciones por ajustes y que no tiene que verificar la capacidad de rotación plástica y el servicio.

11.5.3 Método general para calcular las rotaciones requeridas en las articulaciones plásticas

Para desarrollar el patrón de momentos máximos utilizados en el diseño, los métodos de Baker y Cohn exigen verificar la rotación inelástica requerida en las regiones de articulación plástica, las que ocurren en las regiones de momentos máximos positivos y negativos. Entre las regiones de articulaciones plásticas, los miembros actúan elásticamente, ya que es normal que el refuerzo no siga con exactitud el patrón de momentos flexionantes y da una mayor resistencia a la flexión que la requerida fuera de las regiones de articulación plástica. Se pueden calcular las rotaciones de articulación plástica necesarias para lograr la carga máxima por el método de la flexibilidad (también conocido como el método de δ_{ik}) utilizando un procedimiento que desarrolló principalmente Baker.[11.16]

La carga máxima de una estructura estáticamente indeterminada, se alcanza cuando está por formarse la última articulación plástica. Idealmente, para una estructura que sea estáticamente indeterminada al grado n-ésimo, se alcanza la carga máxima cuando se han formado n articulaciones plásticas y la o las articulaciones plásticas restantes están por desarrollarse.

Las n articulaciones plásticas se posicionan donde se origina la plasticidad. Para calcular la rotación plástica requerida de las regiones de articulación plástica, cuando se acaba de alcanzar la carga máxima, se pueden hacer las siguientes suposiciones:

1. Las relaciones momento - curvatura son bilineales, y tienen una porción superior horizontal, como lo representa la curva $AB'C$ de la figura 11.9.
2. La rigidez a flexión elástica EI es constante en todo el claro.

Se puede desarrollar el método considerando una viga continua de tres claros (figura 11.11). La viga es estáticamente indeterminada al segundo grado. Considérese que las articulaciones plásticas se forman primero en los apoyos 1 y 2 y sean los momentos máximos en 1 y 2 M_1 y M_2 respectivamente. Para encontrar las rotaciones plásticas θ_1 y θ_2 en las articulaciones plásticas 1 y 2, cuando la carga máxima actúa en la estructura, sustitúyase las articulaciones plásticas por articulaciones sin fricción. Se pueden simular los momentos máximos en las articulaciones, aplicando pares externos M_1 y M_2 en las articulaciones. Considérese los efectos de aplicar las cargas externas, M_1 y M_2 por separado. Los diagramas de momentos flexionantes resultantes aparecen en la figura 11.12. El momento flexionante en cualquier punto de la estructura en la carga máxima es

$$M = M_0 + X_1 M_1 + X_2 M_2 \tag{11.19}$$

donde M_0 = momento flexionante en cualquier punto, cuando los miembros están libres de restricción rotacional en los apoyos (figura 11.12*a*),

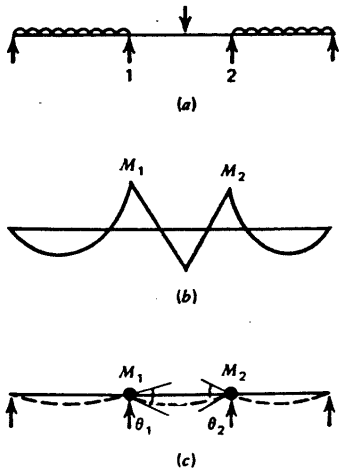


Fig. 11.11. Viga continua cuando se alcanza la carga última. (a) Viga. (b) Diagrama de momento flexionante en la carga última. (c) Viga cuando recién se alcanza la carga última.

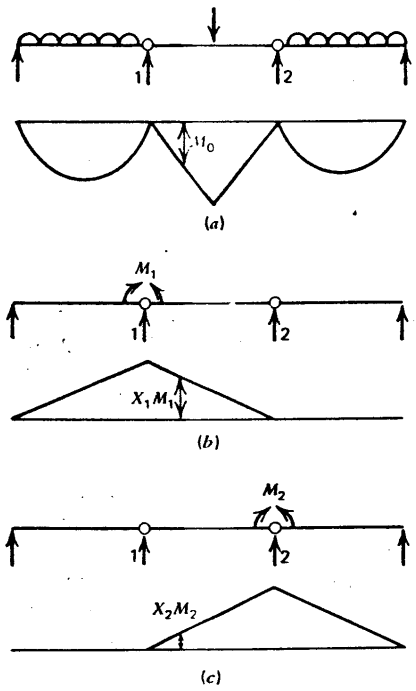


Fig. 11.12. Momentos flexionantes en viga de la fig. 11.11 con articulaciones sin fricción en los apoyos debido a la carga externa y a momentos de apoyo aplicados por separado. (a) Carga transversal externa que actúa en viga con articulaciones sin fricción en 1 y 2, y diagrama resultante de momentos flexionantes. (b) Pares M_1 que actúan en la viga con articulaciones sin fricción en 1 y 2 y diagrama resultante de momentos flexionantes. (c) Pares M_2 que actúan en la viga con articulaciones sin fricción en 1 y 2 y diagrama de momentos flexionantes resultantes.

X_1 = momento flexionante en cualquier punto cuando $M_1 = 1$ (figura 11.12*b*) y X_2 = momento flexionante en cualquier punto cuando $M_2 = 1$ (figura 11.12*c*). El miembro se comporta elásticamente entre las articulaciones. La energía de deformación elástica almacenada en la viga es

$$U = \int \frac{M^2}{2EI}dx = \int (M_0 + X_1M_1 + X_2M_2)^2 \frac{dx}{2EI} \qquad (11.20)$$

donde dx = elemento de longitud del miembro, y las integraciones se realizan a lo largo de toda la longitud de la viga. Las rotaciones en las articulaciones 1 y 2, debidas a las deformaciones elásticas entre las articulaciones, se pueden encontrar utilizando el teorema de Castigliano. Las rotaciones calculadas en las articulaciones sin fricción, cuando se aplica la carga máxima a la estructura, serán las rotaciones requeridas de las articulaciones plásticas de la estructura real. Se tiene entonces.

$$-\theta_1 = \frac{\partial U}{\partial M_1} = \int \frac{X_1}{EI}(M_0 + X_1M_1 + X_2M_2)\,dx$$

$$\therefore \quad -\theta_1 = \int \frac{X_1M_0}{EI}dx + M_1\int \frac{X_1^2}{EI}dx + M_2\int \frac{X_1X_2}{EI}dx \qquad (11.21)$$

y

$$-\theta_2 = \frac{\partial U}{\partial M_2} = \int \frac{X_2}{EI}(M_0 + X_1M_1 + X_2M_2)\,dx$$

$$\therefore \quad -\theta_2 = \int \frac{X_2M_0}{EI}dx + M_1\int \frac{X_1X_2}{EI}dx + M_2\int \frac{X_2^2}{EI}dx \qquad (11.22)$$

Los signos negativos son necesarios para θ_1 y θ_2 en las ecuaciones 11.21 y 11.22, pues las rotaciones ocurren en la dirección opuesta a la dirección de M_1 y M_2.

Si $M_0 = 0$ y $M_2 = 0$ (eliminando las cargas transversal extrema y el par M_2 se puede escribir

$$-\theta_1 = M_1\int \frac{X_1^2}{EI}dx = M_1\delta_{11} \qquad (11.23)$$

donde δ_{11} = rotación en 1 debido al par unitario en 1.

Y si $M_0 = 0$ y $M_1 = 0$, se tiene

$$-\theta_1 = M_2\int \frac{X_1X_2}{EI}dx = M_2\delta_{12} \qquad (11.24)$$

donde δ_{12} = rotación en 1 debida al par unitario en 2

Y si $M_1 = 0$ y $M_2 = 0$, se tiene

$$-\theta_1 = \int \frac{X_1M_0}{EI}dx = \delta_{10} \qquad (11.25)$$

donde δ_{10} = rotaciones en 1 debido a las cargas externas.

Por tanto, se pueden escribir las ecuaciones 11.21 y 11.22

$$-\theta_1 = \delta_{10} + M_1\delta_{11} + M_2\delta_{12} \qquad (11.26)$$

$$-\theta_2 = \delta_{20} + M_1\delta_{21} + M_2\delta_{22} \qquad (11.27)$$

En general, la solución de una estructura que sea estáticamente indeterminada al n-ésimo grado comprenderá encontrar las rotaciones de articulación plástica $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_i, \ldots, \theta_n$ en las articulaciones plásticas $1, 2, \ldots, i, \ldots, n$. La rotación θ_i en la articulación i es

$$-\theta_i = \delta_{i0} + M_1\delta_{i1} + M_2\delta_{i2} + \cdots + M_i\delta_{ii} + \cdots + M_n\delta_{in}$$

ó

$$-\theta_i = \delta_{i0} + \Sigma M_k\delta_{ik} \qquad (11.28)$$

donde

$$\delta_{i0} = \int \frac{X_i M_0}{EI}\, dx \tag{11.29}$$

= rotación en la articulación i debida a las cargas externas únicamente

$$\delta_{ik} = \int \frac{X_i X_k}{EI}\, dx \tag{11.30}$$

= rotación en la articulación i debida a $M_k = 1$ actuando en la articulación k únicamente y M_i y M_k = momentos máximos en las articulaciones i y k. X_i = momento flexionante en cualquier punto cuando $M_i = 1$, X_k = momento flexionante en cualquier punto cuando $M_k = 1$, EI = rigidez a flexión y dx = elemento de longitud del miembro. Las integraciones se realizan en todo el largo de la viga.

Por tanto, el método comprende hacer la estructura estáticamente determinada, colocando articulaciones sin fricción en los puntos de articulación plástica estimados y encontrar las rotaciones provocadas en las articulaciones por las cargas externas y los momentos máximos que actúan en las articulaciones. Las articulaciones plásticas se eligen en las posiciones del origen de plasticidad. Si se escogen incorrectamente las posiciones, se obtiene un valor negativo para la rotación, cuando se calcule, y se deben ajustar las posiciones de la articulación. También se debe notar que en la figura 11.28, se pueden determinar en forma independiente δ_{i0}, M_k, y δ_{ik} por lo que el cálculo de θ_i no comprende la solución de ecuaciones simultáneas.

El cálculo del coeficiente δ_{ik} de flexibilidad (o influencia) requiere la solución de una integral de producto que involucra los momentos flexionantes X_i y X_k. En la mayoría de los casos, X_i o X_k varía linealmente a lo largo del miembro. Considérese un miembro AB de longitud l con rigidez EI a flexión constante. Supongamos que el momento X_i tenga una variación general a lo largo del miembro y que el momento X_k tenga una variación lineal a lo largo del miembro, como en la figura 11.13. Ahora se tiene

$$X_k = \frac{x}{l} X_B + \frac{l-x}{l} X_A$$

$$\therefore \quad \delta_{ik} = \int_0^l \frac{X_i X_k}{EI}\, dx = \frac{1}{EI}\int_0^l X_i \frac{x}{l} X_B\, dx + \frac{1}{EI}\int_0^l X_i \frac{l-x}{l} X_A\, dx$$

Pero $\int_0^l X_i x\, dx$ = primer momento del área del diagrama de X_i alrededor de $A = A_i \bar{x}_i$, se $\int_0^l X_i(l-x)\, dx$ = primer momento del área del diagrama de X_i alrededor de $B = A_i(l - \bar{x}_i)$

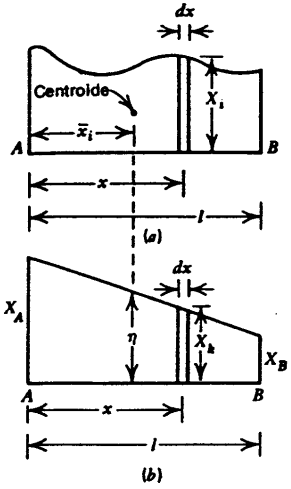


Fig. 11.13. Diagramas de momentos flexionantes. (a) X_i diagrama de momento flexionante (variación general). (b) diagrama de momento flexionante de X_k (variación lineal).

$$\therefore \quad \delta_{ik} = \int_0^l \frac{X_i X_k}{EI}\, dx = \frac{1}{EI}\left\{\frac{X_B}{l} A_i \bar{x}_i + \frac{X_A}{l} A_i(l - \bar{x}_i)\right\}$$

$$= \frac{A_i}{EI}\left(X_B \frac{\bar{x}_i}{l} + X_A \frac{l - \bar{x}_i}{l}\right)$$

$$= \frac{A_i}{EI}\eta \tag{11.31}$$

donde A_i = área del diagrama de momentos con variación general, η = ordenada del diagrama de momentos con variación lineal en el punto verticalmente opuesto al centroide del diagrama de momentos con variación general, y EI = rigidez a flexión de la sección del miembro.

En el caso de vigas continuas de claros múltiples, los valores de δ_{ik} se reducen a expresiones simples. Considérese la viga continua cargada uniformemente, mostrada en la figura 11.14 en la carga máxima. Supóngase que las articulaciones plásticas se forman primero en los apoyos e insértese las articulaciones sin fricción en los apoyos para hacer que la viga sea estáticamente determinada. Entonces, de las ecs. 11.28, la rotación en la articulación 1 es

$$-\theta_1 = \delta_{10} + M_1\delta_{11} + M_2\delta_{12} + M_3\delta_{13} + M_4\delta_{14}$$

donde de las ecs. 11.29 a 11.31 se tiene

$$\delta_{10} = \int \frac{X_1 M_0}{EI}\, dx = \frac{1}{EI_A}\left(\frac{2}{3} M_{FA} l_A \times -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI_B}\left(\frac{2}{3} M_{FB} l_B \times -\frac{1}{2}\right)$$

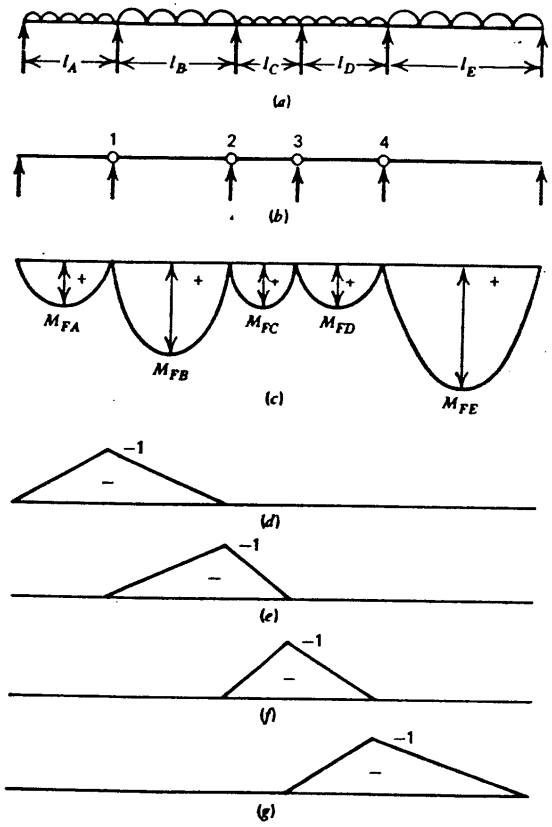


Fig. 11.14. Diagramas de momentos para viga continua para articulaciones sin fricción insertadas en los apoyos interiores. (a) Viga con carga última uniforme. (b) Estructura liberada por las articulaciones sin fricción. (c) M_0 diagrama de momentos debido a la carga uniforme. (d) Diagrama de momentos de X_1 debido a $M_1 = 1$. (e) Diagrama de momentos de X_2 debido a $M_2 = 1$. (f) Diagrama de momentos de X_3 debido a $M_3 = 1$. (g) Diagrama de momentos de X_4 debido a $M_4 = 1$.

$$= -\frac{M_{FA}l_A}{3EI_A} - \frac{M_{FB}l_B}{3EI_B} \tag{11.32}$$

$$\delta_{11} = \int \frac{X_1^2}{EI}dx = \frac{1}{EI_A}\left(-\frac{l_A}{2} \times -\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{EI_B}\left(-\frac{l_B}{2} \times -\frac{2}{3}\right)$$

$$= \frac{l_A}{3EI_A} + \frac{l_B}{3EI_B} \tag{11.33}$$

$$\delta_{12} = \int \frac{X_1X_2}{EI}dx = 0 + \frac{1}{EI_B}\left(-\frac{l_B}{2} \times -\frac{1}{3}\right) + 0$$

$$= \frac{l_B}{6EI_B} \tag{11.34}$$

$$\delta_{13} = \delta_{14} = 0 \tag{11.35}$$

donde $I_A, I_B, \ldots,$ = momentos de inercia de las secciones de los claros $l_A, l_B, \ldots, M_1, M_2, M_3, \ldots,$ = momentos máximos en $1, 2, 3, \ldots,$ y $M_{FA}, M_{FB}, \ldots,$ = valores máximos de M_0 para los claros $l_A, l_B, \ldots$. En consecuencia, se puede encontrar θ_1. Análogamente se puede encontrar $\theta_2, \theta_3,$ y θ_4. Nótese que la relación recíproca $\delta_{ik} = \delta_{ki}$ ayuda a determinar los coeficientes; en consecuencia, $\delta_{12} = \delta_{21}, \delta_{34} = \delta_{43},$ y así sucesivamente.

Las ecuaciones anteriores suponen que la plasticidad comienza en los apoyos, lo que sucede cuando las razones de momentos máximos negativos a positivos utilizadas en el diseño son menores que la razón de la teoría elástica. Si se encuentra que las articulaciones plásticas se forman primero en las secciones a mitad del claro (como lo muestra un valor negativo de θ_i de la ec. 11.28), se debe deducir un nuevo conjunto de ecuaciones para ese caso.

Nótese que las rotaciones de articulación plástica requeridas, dadas por la ec. 11.28, varían inversamente con la rigidez a flexión *EI* de la sección; una baja rigidez a flexión implica una rotación plástica requerida alta. En consecuencia, para asegurar que no se subestimen las rotaciones de articulación plástica requeridas, no se debe sobrestimar la rigidez a flexión. En consecuencia, los cálculos seguros para las rotaciones de articulaciones plásticas requeridas utilizan valores de *EI* de sección agrietada. También se puede obtener una estimación segura de $EI = M_y/\varphi_y$ o M_u/φ_y, en que M_y = momento de resistencia en la primera cedencia del acero a tensión, M_u = momento máximo de resistencia y φ_y = curvatura en la primera cedencia del acero a tensión.

11.5.4 Cálculo de los momentos y esfuerzo bajo carga de servicio

La comprobación de servicio de una estructura diseñada por diseño al límite, requiere que se determinen los esfuerzos en las cargas de servicio, para asegurar, especialmente, que el acero esté en el rango elástico y a un nivel de esfuerzo, que no tenga probabilidad de provocar agrietamiento inaceptable del concreto.

Se necesita un análisis basado en la teoría elástica lineal para calcular los momentos en la estructura a las cargas de servicio. Se pueden calcular los momentos mediante cualquiera de los métodos aceptados comúnmente. Si se ha utilizado el método de δ_{ik} de la sección 11.5.3 para calcular las rotaciones de articulación plástica, puede ser conveniente utilizar el mismo, para encontrar los momentos flexionantes de la carga de servicio. Esto puede hacerse haciendo las rotaciones de articulación plástica iguales a

cero y resolviendo simultáneamente el conjunto de las ecuaciones para los apoyos 1, 2, 3, ... , dadas por la ec. 11.28

$$0 = \delta_{i0} + \Sigma M_k \delta_{ik} \qquad (11.36)$$

con las cargas de servicio en la estructura para encontrar los momentos M_k, de apoyo de la carga de servicio, permitiendo con ello, obtener el diagrama de momentos flexionantes completo de la carga de servicio.

Dividiendo el momento entre el producto del área del acero y un brazo de palanca de $\frac{7}{8}$ del peralte efectivo, se obtiene una buena aproximación para el esfuerzo del acero.

Ejemplo 11.1

Una viga continua de concreto reforzado al menos con cuatro claros iguales, cada uno de longitud l, se apoya simplemente y transmite una carga uniforme en todos los claros. En la carga máxima, la suma del momento positivo a mitad del claro y los momentos negativos máximos promedio para cada claro es M (es decir, que la ordenada máxima del diagrama de momentos flexionantes libres o estáticos es M), y la viga está reforzada, de manera que los momentos en los apoyos interiores sean todos $0.5M$. Se puede suponer que la relación de momento - curvatura es bilineal con la rama superior horizontal. Las secciones en los apoyos interiores tienen un momento último de resistencia de 400 bd^2 lb. plg con una profundidad del eje neutro de $0.2d$, en que b = ancho de la sección y d = peralte efectivo de la sección en pulgadas (1 plg = 4.45 N y 1 plg = 25.4 mm). La longitud equivalente de las zonas de articulación plástica a cada lado de las secciones de momento máximo crítico es de $0.5d$ y las deformaciones de concreto a compresión en la fibra extrema en el extremo de las etapas idealizadas elástica e inelástica son de 0.001 y 0.004, respectivamente. La rigidez a flexión EI de los miembros en el intervalo elástico es de $150{,}000bd^3$ lb plg^{2}con una profundidad del eje neutro de $L.375d$. Calcular la máxima relación permisible l/d para la viga, si se requiere que ocurra redistribución completa de los momentos flexionantes en la carga máxima.

Solución

La figura 11.15 muestra la viga y el diagrama de momentos flexionantes en la carga máxima. Ya que la razón de momentos máximos negativos a máximos positivos es menor que el valor dado por la teoría elástica, las articulaciones plásticas se forman primero en los apoyos. Insértense articulaciones sin fricción en los apoyos interiores. De la ec. 11.28, se tiene

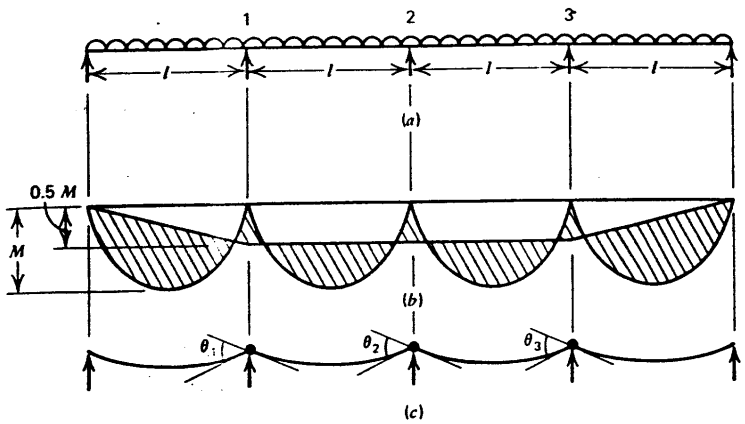


Fig. 11.15. Viga continua del ejemplo 11.1. (a) Viga en la carga última. (b) Diagrama de momento flexionante al límite. (c) Rotación de articulación plástica cuando recién se alcanza la carga última.

$$-\theta_1 = \delta_{10} + M_1\delta_{11} + M_2\delta_{12} + M_3\delta_{13}$$

en donde las ecs. 11.32 a 11.34

$$\delta_{10} = -\frac{2}{3}\frac{Ml}{EI} \qquad \delta_{11} = \frac{2}{3}\frac{l}{EI} \qquad \delta_{12} = \frac{1}{6}\frac{l}{EI} \qquad \delta_{13} = 0$$

$$\therefore \quad -\theta_1 = -\frac{2}{3}\frac{Ml}{EI} + 0.5M\frac{2}{3}\frac{l}{EI} + 0.5M\frac{1}{6}\frac{l}{EI} + 0 = -\frac{Ml}{4EI}$$

Adicionalmente,

$$-\theta_2 = \delta_{20} + M_1\delta_{21} + M_2\delta_{22} + M_3\delta_{23}$$

donde de las ecs. 11.29 a 11.31

$$\delta_{20} = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}Ml \times -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3}Ml \times -\frac{1}{2}\right) = -\frac{2}{3}\frac{Ml}{EI}$$

$$\delta_{21} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{l}{2} \times -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{22} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{l}{2} \times -\frac{2}{3}\right) + \frac{1}{EI}\left(-\frac{l}{2} \times -\frac{2}{3}\right) = \frac{2}{3}\frac{l}{EI}$$

$$\delta_{23} = \frac{1}{EI}\left(-\frac{l}{2} \times -\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{6}\frac{l}{EI}$$

$$\therefore \quad -\theta_2 = -\frac{2}{3}\frac{Ml}{EI} + 0.5M\frac{1}{6}\frac{l}{EI} + 0.5M\frac{2}{3}\frac{l}{EI} + 0.5M\frac{1}{6}\frac{l}{EI}$$

$$= -\frac{Ml}{6EI}$$

Por tanto, las rotaciones de articulación plástica requeridas en los apoyos son

$$\theta_1 = \frac{Ml}{4EI} = \theta_3 \quad \text{por simetría} \qquad \text{y} \quad \theta_2 = \frac{Ml}{6EI}$$

Nótese que los valores positivos de θ_1, θ_2, y θ_3 implican que se han elegido correctamente las posiciones de las primeras articulaciones plásticas en formarse.
Se tiene $M = 2 \times 0.5M = 2 \times 400bd^2 = 800bd^2$ y $EI = 150{,}000bd^3$. En consecuencia, las rotaciones requeridas de articulación plástica son

$$\theta_1 = \theta_3 = \frac{800bd^2 l}{4 \times 150{,}000bd^3} = \frac{1}{750}\frac{l}{d} \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \frac{800bd^2 l}{6 \times 150{,}000bd^3} = \frac{1}{1125}\frac{l}{d} \text{ rad}$$

De la ec. 6.40, la rotación plástica disponible total en cada articulación plástica es

$$\theta_a = \left(\frac{\varepsilon_c}{c} - \frac{\varepsilon_{ce}}{kd}\right) 2l_p$$

donde l_p = longitud equivalente de la articulación plástica a cada lado de la sección crítica.

$$\therefore \quad \theta_a = \left(\frac{0.004}{0.2d} - \frac{0.001}{0.375d}\right) 2 \times 0.5d = 0.0173 \text{ rad}$$

Por tanto, para la redistribución total de momento se requiere

$$\frac{1}{750}\frac{l}{d} \leqslant 0.0173 \qquad \text{y} \qquad \frac{1}{1125}\frac{l}{d} \leqslant 0.0173$$

ó

$$\frac{l}{d} \leqslant 13.0 \qquad \text{y} \qquad \frac{l}{d} \leqslant 19.5$$

Por tanto, la capacidad rotacional de las articulaciones plásticas requiere que $l/d \leqslant 13.0$ para una redistribución completa de los momentos.
Nótese que se puede encontrar la rotación requerida de la articulación plástica para distintos casos de posiciones de carga viva, ajustando los valores de los momentos libres (estáticos) de manera que correspondan a la carga del claro.

Ejemplo 11.2

Una viga de claro l con extremos restringidos contra rotación transmite una carga w_u distribuida uniformemente por longitud unitaria en la carga máxima. Se puede suponer que la relación momento - curvatura de las secciones bilineal con la rama superior horizontal. Las secciones tienen una rigidez EI a flexión uniforme a lo largo del miembro. Calcular la redistribución permisible de momentos flexionantes en la carga última de la distribución de momentos elásticos en términos de la ductilidad requerida φ_u/φ_y en las secciones de articulación plástica, en que φ_u = curvatura máxima y φ_y = curvatura en la primera cedencia del acero a tensión.

Solución

Sean M'_u y M_u los momentos máximos negativo y positivo de resistencia, respectivamente. Haciendo referencia al diagrama de momentos flexionantes de la figura 11.16*b*, y utilizando el teorema del área de momentos, el cambio en la pendiente de la viga entre el apoyo y la mitad del claro es

$$\theta = \frac{2}{3}\frac{(M'_u + M_u)}{EI}\frac{l}{2} - \frac{M'_u}{EI}\frac{l}{2}$$

$$= \frac{l}{6EI}(2M_u - M'_u) \qquad \text{(i)}$$

También, por equilibrio

$$M'_u + M_u = \frac{w_u l^2}{8} \qquad \text{(ii)}$$

Si la viga se comporta elásticamente, la pendiente del miembro en el apoyo y a mitad del claro es horizontal; entonces las ecs. *i* y *ii* dan

$$\theta = 0 = \frac{l}{6EI}(2M_u - M'_u)$$

$$\therefore \quad M'_u = 2M_u = \frac{w_u l^2}{12} \qquad \text{(iii)}$$

Si $M'_u < 2M_u$, se desarrollan articulaciones plásticas en los apoyos antes que a la mitad del claro (véase la figura 11.16*c*). Cuando se

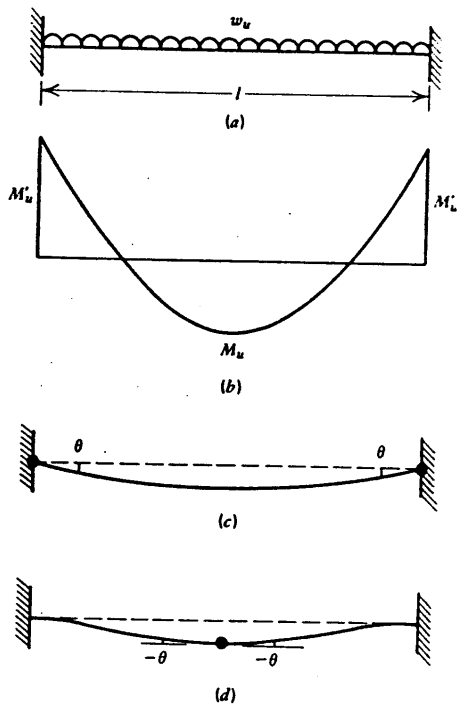


Fig. 11.16. Viga del ejemplo 11.2. (a) Viga. (b) Diagrama de momento flexionante al límite. (c) Carga última recién alcanzada con articulaciones plásticas en los apoyos y a punto de formarse a mitad del claro. (d) Carga última recién alcanzada con articulación plástica a mitad del claro y a punto de formarse en los apoyos.

acaba de alcanzar la carga máxima, la pendiente del miembro es horizontal a mitad del claro y de las ecs. *i* y *ii* se encuentra la rotación requerida en los apoyos:

$$\theta = \frac{l}{6EI}(2M_u - M'_u) = \frac{l}{6EI}\left(\frac{w_u l^2}{4} - 3M'_u\right) \qquad \text{(iv)}$$

Si $M'_u > 2M_u$, se desarrolla una articulación plástica a mitad del claro antes que en los apoyos (véase la figura 11.16*d*). Entonces cuando justamente se alcance la carga máxima, la pendiente del miembro es horizontal en los apoyos y las ecs. *i* y *ii* dan la rotación plástica requerida a cada lado de la sección crítica a mitad del claro:

$$\theta = \frac{l}{6EI}(2M_u - M'_u) = \frac{l}{6EI}\left(\frac{w_u l^2}{4} - 3M'_u\right) \qquad \text{(v)}$$

Si β es el porcentaje del momento negativo según la teoría elástica que se puede redistribuir en la carga máxima se tiene

$$\beta = \frac{w_u l^2/12 - M'_u}{M'_u} \times 100 = 100\left(\frac{w_u l^2}{12M'_u} - 1\right)$$

$$\therefore \quad M'_u = \frac{w_u l^2}{12}\left(\frac{100}{100 + \beta}\right) \qquad \text{(vi)}$$

También se puede suponer que

$$EI = \frac{M'_u}{\varphi_y} \qquad \text{(vii)}$$

donde φ_y = curvatura en primera cedencia en las sección crítica. Sustituyendo M'_u y EI de las ecs. vi y vii en las ecs. iv y v se obtiene la rotación plástica requerida a un lado de la sección crítica:

$$\theta = \frac{\varphi_y l}{2}\frac{\beta}{100} \qquad \text{(viii)}$$

De la ec. 6.39, la rotación plástica disponible a un lado de la sección crítica es

$$\theta_a = (\varphi_u - \varphi_y)l_p \qquad \text{(ix)}$$

donde φ_u = curvatura máxima y l_p = longitud equivalente de articulación plástica a un lado de la sección crítica.
Para que ocurra la redistribución requerida de momentos, se debe tener $\theta \leqslant \theta_a$ cuando β es positiva.

$$\therefore \quad \frac{\varphi_y l}{2}\frac{\beta}{100} \leqslant (\varphi_u - \varphi_y)l_p$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi_u}{\varphi_y} \geqslant 1 + \frac{\beta}{200}\frac{l}{d}\frac{d}{l_p} \qquad \text{(x)}$$

y en forma análoga, cuando β es negativa se debe tener $-\theta \leqslant \theta_a$

$$\therefore \quad \frac{\varphi_u}{\varphi_y} \geqslant 1 - \frac{\beta}{200}\frac{l}{d}\frac{d}{l_p} \qquad \text{(xi)}$$

Nótese que la ductilidad de curvatura requerida depende de β, l/d, y l_p/d. Por ejemplo, si $\beta = 30\%$, $l/d = 30$, y $l_p/d = 0.5$, la ec. x indica que la relación requerida $\varphi_u/\varphi_y = 1 + (0.15 \times 30/0.5) = 10$. Ya que $l/d = 30$ es aproximadamente el máximo valor probable para una viga continua (véase la tabla 10.1) y $l_p/d = 0.5$ es aproximadamente la longitud mínima probable de articulación plástica equivalente (véanse las ecs. 6.41 y 6.49), $\varphi_u/\varphi_y = 10$ es la ductilidad de curvatura requerida máxima probable para 30% de redistribución de momentos, en el caso de extremos totalmente restringidos contra rotación y el miembro cargado uniformemen-

te. Los valores de β, l/d, y l_p/d se pueden calcular de la ec. x. Usando las figs. 6.9 y 6.10 se puede verificar si una sección tiene suficiente ductilidad. Se puede obtener, usando la ec. 11.28, un resultado más general para los claros de vigas continuas que transmiten distintas combinaciones de cargas muertas y vivas, donde ocurre cierta rotación en los extremos de los claros.

Ejemplo 11.3

Una losa de concreto reforzado en un sentido es continua en dos claros de 20 pies (6.10 m). Se desea que la losa transmita una carga viva de servicio de 150 lb/pie^2 (7.18 kN/m^2). El concreto es de peso normal con resistencia de cilindro de 3000 lb/plg^2 (20.7 N/mm^2), y la resistencia de cedencia del acero es de 60,000 lb/plg^2 (414 N/mm^2). Determinar un espesor adecuado de losa y distribución de acero mediante el diseño al límite.

Solución

Se puede utilizar una diversidad de relaciones de momentos posibles negativos a positivos máximos. En este diseño se utilizarán momentos máximos iguales negativo y positivo, lo que produce una distribución conveniente de acero y el mínimo espesor permisible en la tabla 10.1 sin una comprobación de las deflexiones.

$$\therefore \quad h = 20 \times \frac{12}{24} = 10 \text{ plg}$$

$\therefore$ las cargas de servicio son

$$D = \tfrac{10}{12} \times 150 = 125 \text{ lb/pie}^2 \qquad \text{y} \qquad L = 150 \text{ lb/pie}^2$$

de la ec. 1.1, las cargas máximas son

para D únicamente, $U = 1.4 \times 125 = 175$ lb/pie^2

para $D + L$, $U = 1.4 \times 125 + 1.7 \times 150 = 430$ lb/pie^2.

DISEÑO DE LA SECCION POR RESISTENCIA

La figura 11.17*a* es el diagrama de momento flexionante al límite con carga máxima muerta más viva en cada claro. Para encontrar la relación entre las cargas máximas y los momentos, sea x_o la distancia desde el apoyo del extremo a la sección de momento flexionante positivo máximo y fuerza cortante cero, y R la reacción del apoyo izquierdo. Considerando las acciones entre el apoyo del extremo y la sección de momento positivo máximo, se tiene

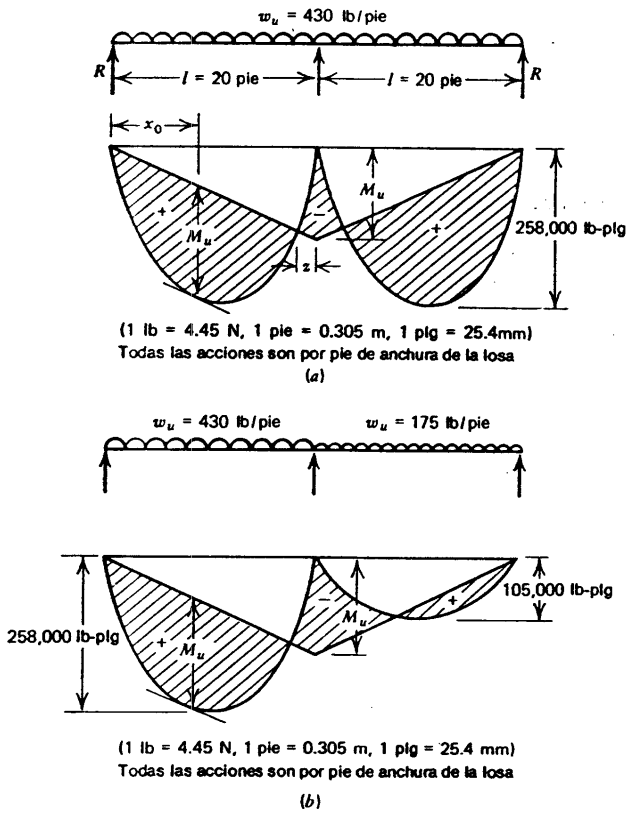


Fig. 11.17. Diagramas de momento flexionante para el diseño al límite de la losa del ejemplo 11.3. (a) Diagrama de momento flexionante al límite y de carga para carga viva última en ambos claros más carga muerta para el cálculo de las resistencias de la sección. (b) Diagrama de cargas y momento flexionante al límite para la carga última viva en el claro del lado izquierdo más la carga muerta para el cálculo del acero de momento negativo en el claro del lado derecho.

$$0 = R - w_u x_0 \qquad \therefore \qquad x_0 = \frac{R}{w_u}$$

$$M_u = Rx_0 - \frac{w_u x_0^2}{2} = \frac{R^2}{w_u} - \frac{R^2}{2w_u} = \frac{R^2}{2w_u}$$

$$\therefore \quad R = \sqrt{2w_u M_u}$$

También, considerando las secciones entre los apoyos de los extremos y el centro, se tiene

$$M_u = -Rl + \frac{w_u l^2}{2} = -l\sqrt{2w_u M_u} + \frac{w_u l^2}{2}$$

$$\therefore \quad M_u^2 - 3w_u l^2 M_u + \frac{w_u l^4}{4} = 0$$

de donde

$$M_u = \frac{w_u l^2}{11.65} \qquad \text{(i)}$$

y

$$R = \sqrt{2w_u \frac{w_u l^2}{11.65}} = 0.414 w_u l$$

En la sección de momento cero se tiene

$$0 = 0.414 w_u l(l - z) - \frac{w_u}{2}(l - z)^2$$

$$\therefore \quad z = 0.172l \qquad \text{(ii)}$$

Nótese que, suponiendo que el momento positivo máximo ocurre a mitad del claro, se podría obtener una buena aproximación para el momento M_u máximo. Esto significaría que

$$M_u + 0.5M_u = \frac{w_u l^2}{8}$$

$$\therefore \quad M_u = \frac{w_u l^2}{12}$$

que es solo 3% menor que el valor exacto dado por la ecuación i. De la ecuación i, los momentos máximos positivo y negativo son

$$M_u = \frac{430 \times 20^2}{11.65} \times 12$$

$$= 177{,}000 \text{ lb} \cdot \text{plg/pie anchura}$$

Se pueden usar, por ejemplo, varillas del núm. 5 con recubrimiento de $\frac{3}{4}$.

$$d = 10 - \tfrac{3}{4} - \tfrac{5}{16} = 8.94 \text{ plg}$$

$$\therefore \quad \frac{M_u}{\varphi f'_c b d^2} = \frac{177{,}000}{0.9 \times 3000 \times 12 \times 8.94^2} = 0.0684$$

En consecuencia, de la tabla 4.2, $\omega = 0.0714$.

$$\therefore \quad \rho = \frac{f'_c}{f_y}\omega = \frac{3000}{60{,}000} \times 0.0714 = 0.00357$$

De la tabla 4.1

$\rho_{max} = 0.016 > \rho$ $\quad \therefore$ satisfactorio

y de acuerdo con el ACI 318-71 [11.8]

$\rho_{min} = 0.0018 < \rho$ $\quad \therefore$ satisfactorio

$A_s = 0.00357 \times 8.94 \times 12 = 0.383 \text{ plg}^2/\text{pie anchura.}$

En consecuencia, se pueden emplear varillas del número 5 a centros de $0.31/0.383 \times 12 = 9.7$ plg. Se usan entonces varillas del número 5 (15.9 mm de diámetro) con centros a 10 plg (25 4 mm). Para encontrar la región de la losa sobre la que se requiere acero de momento negativo, se quita la carga viva de ese claro. Las ordenadas del momento flexionante libre máximo ($w_u l^2/8$) en la carga máxima son para carga muerta más viva $430 \times 20^2 \times 12/8 = 258{,}000$ lb plg/pie de ancho y para carga muerta sola $175 \times 20^2 \times 12/8 = 105{,}000$ lb plg/pie de ancho. Para encontrar la cantidad de acero de momento negativo requerido en el claro del lado derecho, se quita la carga viva de ese claro, como en la figura 11.17*b*, my se utiliza el diagrama de momentos resultante para calcular los puntos posibles de corte para esas varillas. Al claro del lado izquierdo se aplican puntos semejantes de corte

Verificación de la capacidad de rotación plástica

Para la sección $n = 9$ y $\rho n = 0.00357 \times 9 = 0.0321$, y la ec. 10.9 consecuentemente da

$$k = \sqrt{\rho^2 n^2 + 2\rho n} - \rho n$$

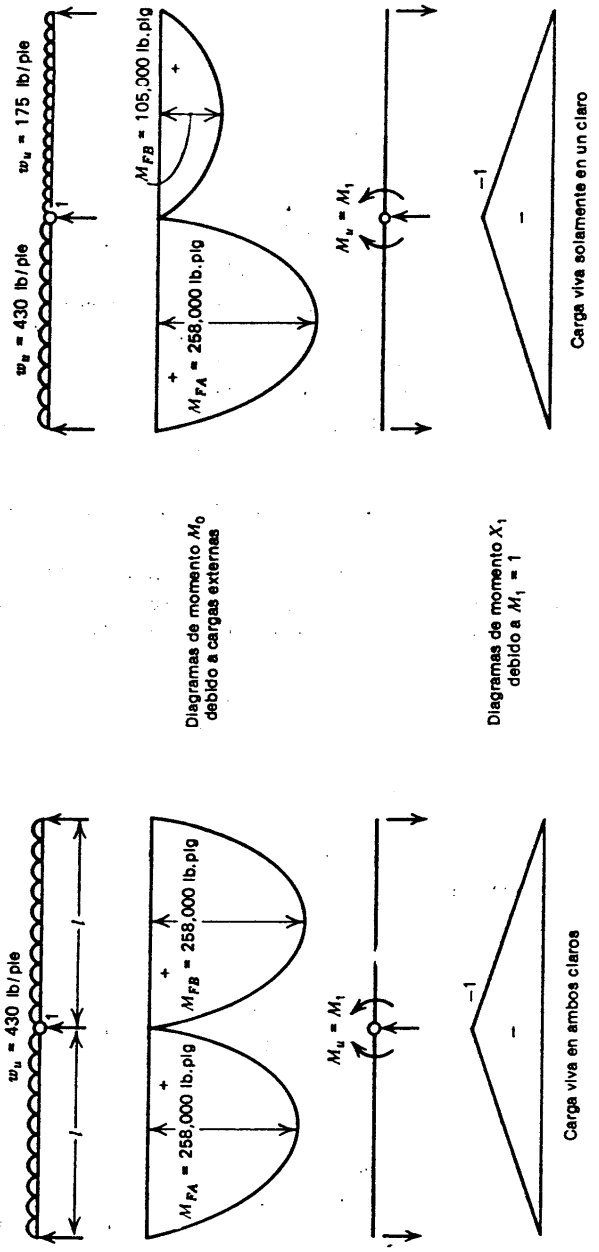
$$= \sqrt{0.0321^2 + 2 \times 0.0321} - 0.0321 = 0.223$$

$$\therefore \quad \varphi_y = \frac{f_y/E_s}{d(1-k)} = \frac{60{,}000/29{,}000{,}000}{8.94(1 - 0.223)} = 0.000298 \text{ rad/plg.} \qquad \text{(iii)}$$

y

$$EI = M_u/\varphi_y = 177{,}000/0.000298 = 594 \times 10^6 \text{ lb} \cdot \text{plg}^2/\text{pie anchura} \qquad \text{(iv)}$$

La losa es estáticamente indeterminada de primer grado. Supóngase que la primera articulación plástica se forma en el apoyo central y que el momento máximo allí es de $M_u = M_1 = 177{,}000$ lb pie/plg de ancho. Insértese una articulación sin fricción en el apoyo central. La figura 11.18 muestra los momentos flexionantes en la losa para los casos de cargas con carga viva en ambos



(1 lb = 4.45N, 1 pie = 0.305 m, 1 plg = 25.4 mm)
Todas las acciones son por pie de anchura de la losa

Fig. 11.18. Diagramas de momento flexionante para verificar la capacidad de rotación de la articulación plástica para el diseño al límite de la losa del ejemplo 11.3.

claros o en uno solo. De la ecuación 11.28, si el subíndice 1 se refiere al apoyo central, se tiene

$$-\theta_1 = \delta_{10} + M_1\delta_{11} \tag{v}$$

donde

$$\delta_{11} = \int \frac{X_1^2}{EI}\,dx = \frac{2}{EI}\left(-\frac{l}{2} \times -\frac{2}{3}\right) = \frac{2l}{3EI}$$

$$= \frac{2 \times 240}{3 \times 594 \times 10^6} = 0.269 \times 10^{-6} \text{ rad/(lb} \cdot \text{plg/pie anchura}$$

$$\delta_{10} = \int \frac{X_1 M_0}{EI}\,dx = \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3} M_{FA} l \times -\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{EI}\left(\frac{2}{3} M_{FB} l \times -\frac{1}{2}\right)$$

$$= -\frac{l}{3EI}(M_{FA} + M_{FB})$$

Para la carga viva en ambos claros, se escribe

$$\delta_{10} = -\frac{240}{3 \times 594 \times 10^6}(258{,}000 + 258{,}000) = -0.0695 \text{ rad}$$

En consecuencia, la ec. v da

$$-\theta_1 = -0.0695 + 177{,}000 \times 0.269 \times 10^{-6} = -0.0219 \text{ rad}$$

$\therefore$ rotación plástica requerida $\theta_1 = 0.0219$ rad

Para carga viva sólo en un claro se tiene

$$\delta_{10} = -\frac{240}{3 \times 594 \times 10^6}(258{,}000 + 105{,}000) = -0.0489 \text{ rad}$$

Por tanto, la ec. v da

$$-\theta_1 = -0.0489 + 177{,}000 \times 0.269 \times 10^{-6} = -0.0013 \text{ rad}$$

$\therefore$ rotación plástica requerida $\theta_1 = 0.0013$ rad

De la ec. 6.39, la rotación plástica disponible es

$$\theta_a = (\varphi_u - \varphi_y)2l_p \tag{vi}$$

donde l_p es la longitud equivalente de la articulación plástica a cada lado de la sección crítica. De la ecuación ii, $z = 0.172l = 0.172 \times 240 = 41.3$ plg y $z/d = 41.3/8.94 = 4.62$. Las ecuaciones 6.47 y 6.49 indican que $l_p = 0.5d + (0.05 \times 4.62d) = 0.73d$ ó $l_p = 0.25d + (0.075 \times 4.62d) = 0.60d$. En forma conservadora, se estima que l_p es $0.6d$. Además, la profundidad del bloque de esfuerzos de concreto rectangular equivalente en el momento máximo es

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{0.383 \times 60{,}000}{0.85 \times 3000 \times 12} = 0.751 \text{ plg}$$

$$c = \frac{a}{\beta_1} = \frac{0.751}{0.85} = 0.884 \text{ plg}$$

Si $\varepsilon_c = 0.003$, $\varphi_u = \varepsilon_c/c = 0.003/0.884 = 0.00339$ rad/plg.
En consecuencia, de las ecuaciones iii y vi la rotación plástica disponible es

$$\theta_a = (0.00339 - 0.000298)2 \times 0.6 \times 8.94$$
$$= 0.0332 \text{ rad}$$

Ya que θ_a es mayor que los valores de θ_1 se dispone de la capacidad de rotación plástica requerida.

Comprobación por servicio

Se ha controlado la deflexión bajo carga de servicio utilizando una relación de claro/espesor no mayor que 24, como lo recomienda la tabla 10.1.
El grado de agrietamiento en las cargas de servicio se puede verificar de los momentos flexionantes máximos de carga de servicio, que se encuentran de la teoría elástica lineal.
La carga viva L en ambos claros más la carga muerta D, da un momento negativo máximo (véase la figura 11.19) de

$$M = \frac{(L + D)l^2}{8} = \frac{(150 + 125)20^2 \times 12}{8} = 165{,}000 \text{ lb} \cdot \text{plg/pie ancho}$$

El esfuerzo máximo del acero para esta carga es

$$f_s = \frac{M}{A_s(1 - k/3)d} = \frac{165{,}000}{0.383 \times (1 - 0.223/3)8.94}$$
$$= 52{,}000 \text{ lb/pie}^2 < 60{,}000 \text{ lb/pie}^2$$

Por tanto, el acero no está cediendo en la carga de servicio.
La carga viva L en un claro más la carga muerta D, da un momento positivo a medio claro (próximo al máximo, véase la figura 11.19) de

$$M = \frac{3Ll^2}{32} + \frac{Dl^2}{16} = \left(\frac{3 \times 150}{32} + \frac{125}{16}\right)20^2 \times 12$$
$$= 105{,}000 \text{ lb} \cdot \text{plg/pie ancho}$$

El esfuerzo máximo del acero para esta carga es de

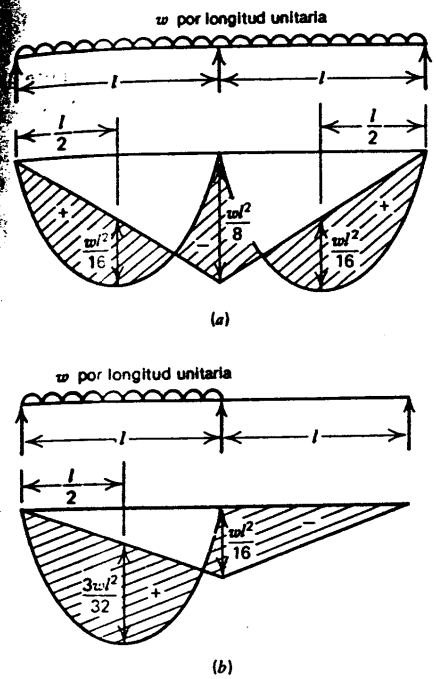


Fig. 11.19. Diagramas de momento flexionante de la teoría elástica para verificación de esfuerzos de carga de servicio para el diseño al límite de la loza del ejemplo 11.3. (a) Carga en ambos claros. (b) Carga solo en un claro.

$$f_s = \frac{105{,}000}{0.383 \times (1 - 0.223/3)8.94} = 33{,}100 \text{ lb/pie}^2$$

La ecuación 10.71 indica que los máximos anchos de grieta dependen del valor de $f_s\sqrt[3]{t_b A}$, en que t_b = espesor del recubrimiento de concreto medido al centro de las varillas y A = área efectiva del concreto en tensión que rodea a cada varilla. Entonces

$t_b = \frac{3}{4} + \frac{5}{16} = 1.06$ plg
$A = 10 \times 2 \times 1.06 = 21.2 \text{ plg}^2/\text{varilla}$

máx $f_s = 52{,}000 \text{ lb/plg}^2$

$$\therefore \quad f_s\sqrt[3]{t_b A} = 52{,}000\sqrt[3]{1.06 \times 21.2}$$
$$= 146{,}600 \text{ lb/plg} < 170{,}000 \text{ lb/plg}$$

Por tanto, de acuerdo con la ecuación 10.71 el agrietamiento en la losa en las cargas de servicio no es mayor que el permitido para exposición interior y está próximo a ser satisfactorio para exposición exterior.

Verificación de la resistencia por cortante

La máxima fuerza cortante en la carga máxima está adyacente al soporte central con el claro totalmente cargado. La máxima es

$$V_u = \frac{w_u l}{2} + \frac{M_u}{l}$$

$$= \frac{430 \times 20}{2} + \frac{177{,}000}{20 \times 12} = 5040 \text{ lb/pie ancho}$$

$$\therefore \quad \frac{V_u}{bd\sqrt{f'_c}} = \frac{5040}{12 \times 8.94\sqrt{3000}} = 0.859$$

Por tanto, no se requiere refuerzo por cortante.

Comentarios al diseño

Si se hubiera utilizado la envolvente de los momentos flexionantes elásticos en la carga máxima para el diseño de las secciones, el momento negativo último máximo hubiera sido

$$\frac{(1.4D + 1.7L)l^2}{8} = \frac{430 \times 20^2 \times 12}{8} = 258{,}000 \text{ lb} \cdot \text{plg/pie ancho}$$

y el momento positivo último máximo (a mitad del claro) hubiera sido

$$\frac{1.4Dl^2}{16} + \frac{3 \times 1.7Ll^2}{32} = \left(\frac{175}{16} + \frac{3 \times 255}{32}\right)20^2 \times 12$$

$$= 167{,}000 \text{ lb} \cdot \text{plg/pie ancho}$$

Los momentos máximos de diseño al límite utilizados fueron 177,000 lb-plg/pie de ancho. Por tanto, el momento negativo de diseño al límite es 31% menor que el momento de la envolvente elástica y el momento positivo de diseño al límite es 6% mayor que el momento de la envolvente elástica, lo que indica el grado de ahorro en el acero. Nótese que el momento negativo máximo utilizado en el diseño al límite no puede lograrse sin una redistribución de 31% de momento negativo elástico. Esto se verificó, y se encontró que la ductilidad de curvatura es adecuada. El ACI 318-71 [11.8] permitiría una redistribución de aproximadamente 17% de acuerdo con la ec. 11.17, lo que ilustra la naturaleza conservadora de la ecuación del ACI.

El máximo esfuerzo en el acero en las cargas de servicio en el diseño al límite es alto ($0.87f_y$), pero si el acero no está cediendo, se puede demostrar que los anchos de las grietas son aceptables, si se utiliza una distribución razonable del acero, lo que requiere varillas a centros razonablemente próximos. El pequeño espesor del recubrimiento de concreto para el acero utilizado en una losa, también es útil para mantener pequeños los anchos de las grietas superficiales.

Un procedimiento de diseño, tal como el descrito en este ejemplo, puede necesitar de un método de tanteos, ya que a veces la rotación requerida de las articulaciones plásticas en la carga máxima es excesiva; además los esfuerzos del acero en las cargas de servicio pueden ser excesivos. Ello puede exigir que el diagrama de momentos flexionantes al límite elegido se aproxime más al patrón elástico de momentos flexionantes. Adicionalmente, la articulación plástica crítica, en el ejemplo, estaba en el apoyo central, pero en otros casos, especialmente cuando la relación de carga viva a carga muerta es alta y la carga viva sólo está en claros alternos, las articulaciones plásticas críticas pueden ocurrir a mitad del claro. La comprobación de la rotación requerida en articulaciones de momentos plásticos positivos requiere de ecuaciones adicionales a las deducidas en la sección 11.5.3.

11.5.5 Comentarios sobre el diseño al límite

La teoría y ejemplos de las secciones anteriores indican que las complejidades del diseño al límite, así como el esfuerzo de cálculo involucrado, son mucho mayores que los asociados con el diseño basado en la distribución de momentos flexionantes elásticos. Por tanto, la carga adicional impuesta en el diseñador por el diseño al límite puede no ser aceptable mas que en casos especiales.

En cierta medida, se pueden obtener simple y seguramente las ventajas del diseño al límite, de aliviar la congestión del acero y ahorrar algo de acero, mediante la redistribución limitada de momentos del diagrama de momento elástico permitido por los actuales códigos de diseño. Por tanto, el enfoque de diseño basado en los patrones de momentos flexionantes elásticos, con o sin cierta redistribución de momentos, probablemente permanecerá como el único enfoque práctico durante algún tiempo. El uso futuro de los procedimientos de diseño al límite parece depender de la disponibilidad fácil de programas amplios de computadora, capaces de tomar en cuenta el comportamiento elástico e inelástico y poder diseñar estructuras y verificar el comportamiento en todas las etapas de carga.

11.6 DISEÑO POR CARGAS SISMICAS

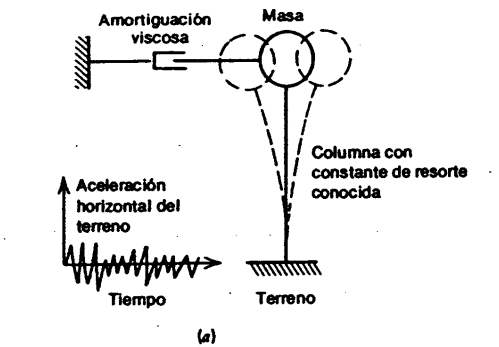
11.6.1 Conceptos básicos

Durante un sismo ocurren en forma aleatoria movimientos del terreno en todas direcciones. Las mediciones de las aceleraciones horizontal y vertical

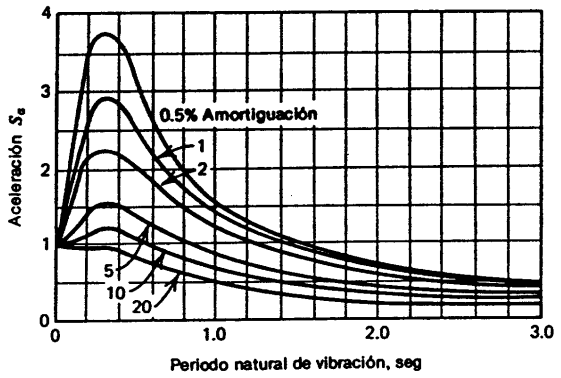
del terreno, en función del tiempo, han indicado que las aceleraciones del terreno pueden ser considerables. Por ejemplo, durante el sismo de 1940 en El Centro, la aceleración horizontal máxima del terreno registrada fue de 0.33g. Un ejemplo extremo fue el sismo de 1971 de San Fernando, durante el cual las aceleraciones máximas del terreno excedieron 1 g, medidas en la presa de Pacoima.

Cuando durante un sismo, una estructura se sujeta a los movimientos de terreno ésta responde de manera vibratoria. Cuando la estructura se comporta elásticamente, la aceleración máxima de respuesta depende del periodo natural de vibración de la estructura y de la magnitud de amortiguación presente. Los análisis dinámicos de estructuras que responden elásticamente a registros típicos de sismos han indicado el orden de aceleración de respuesta que pueden experimentar las estructuras. En los textos de Wiegel [11.21] y Newmark y Rosenblueth [11.22] se encuentran los resultados de esos análisis dinámicos. Por ejemplo, la figura 11.20*a* ilustra una estructura simple, en la forma de un oscilador de un solo grado de libertad, sujeto a vibraciones del terreno. La figura 11.20*b* muestra la respuesta de aceleración máxima de la estructura que se comporta elásticamente, que obtuvo Housner, [11.21] cuando se sujeta la estructura a movimientos registrados del terreno de algunos sismos en Estados Unidos. La aceleración S_a máxima de respuesta se grafica como función del periodo natural de vibración de la estructura y la magnitud de la amortiguación, lo que se expresa como porcentaje del amortiguamiento viscoso crítico. Las curvas están idealizadas ("alisadas") de las curvas reales más irregulares; se puede considerar que $S_a = 1$ es la aceleración máxima del terreno. Por ejemplo, si se utiliza la figura 11.20*b* para idealizar un sismo en que la máxima aceleración del terreno fuera de 0.33 g, se multiplicarían los valores de S_a de la figura por 0.33 g. Es evidente que para un intervalo de periodos, la aceleración máxima de respuesta de la estructura puede ser varias veces mayor que la aceleración del terreno. La aceleración máxima de respuesta de estructuras con un periodo muy pequeño (es decir, estructuras muy rígidas) se aproxima a la aceleración máxima del terreno. La aceleración máxima de respuesta de estructuras con periodos grandes de vibración puede experimentar poco más que la máxima aceleración del terreno, y a periodos mayores pueden experimentar menos que la máxima aceleración del terreno. Un aumento en la amortiguación siempre produce una disminución en la aceleración de respuesta. Usando la figura 11.20, se pueden obtener las cargas de inercia máxima, que actúan en la estructura simple durante el sismo, multiplicando la aceleración por la masa.

La carga sísmica de diseño que recomiendan los códigos de construcción, por ejemplo el SEAOC [11.23] y el ICBO, [11.24] tienen la forma de carga lateral estática. Normalmente se aplica carga lateral estática equivalente para estructuras de plantas múltiples con una distribución cercana a la triangular a la estructura, imponiendo la mayor carga en la parte superior, simulando con ello el perfil de deflexiones del primer modo de vibración



(*a*)



(*b*)

Fig. 11.20. Espectro de diseño que da la aceleración como función de la amortiguación y el periodo de vibración para un oscilador lineal de un solo grado de libertad que responde elásticamente a ciertos movimientos [11.21] del terreno bajo terremotos. (a) Oscilador. (b) Espectro de diseño.

de la figura 11.20*a*. Estos códigos utilizan cargas de diseño estáticas para determinar la resistencia de estructura necesaria para soportar las cargas dinámicas inducidas por el sismo. Sin embargo, el nivel recomendado de carga lateral estática de diseño es bastante bajo. Los análisis dinámicos de estructuras, que responden elásticamente a movimientos del terreno registrados durante sismos intensos, han mostrado que las cargas de inercia de respuesta teórica pueden ser mucho mayores que las cargas laterales de diseño estático, recomendadas por dichos códigos. Aunque esta diferencia es demasiado grande para reconciliarse por factores de seguridad en el diseño, se sabe bien que estructuras diseñadas con las cargas laterales de los códigos han sobrevivido sismos intensos. Se ha atribuido esta anomalía aparente a la habilidad de las estructuras dúctiles de disipar energía me-

diante deformaciones inelásticas, con ayuda de otros factores tales como una respuesta reducida debida a mayor amortiguación, y a la interacción del terreno con la estructura. La ductilidad de los miembros puede ser el factor más importante.

Es evidente que no sería económico diseñar una estructura para que soportara el probable sismo más fuerte sin daño. El costo de proporcionar resistencia para soportar vibraciones laterales de muy alta intensidad debe de ponderarse contra la importancia de la estructura y la probabilidad de los sismos. Los criterios para el nivel de cargas del código SEAOC [11.23] son como sigue: los edificios deben resistir sismos menores sin daño, sismos moderados sin daño estructural pero con cierto daño no estructural y sismos importantes sin colapso pero con cierto daño estructural y no estructural. Por tanto, se acepta la posibilidad de daño, pero sin pérdida de vidas. El objetivo, del código es tener estructuras que se comporten elásticamente bajo sismos que se pueda esperar que ocurran más de una vez en la vida del edificio; más aun, las estructuras deben poder sobrevivir sin colapso al sismo más importante que pudiera ocurrir durante la vida del edificio. Para evitar el colapso durante el sismo más importante, los miembros deben ser tan dúctiles que absorban y disipen energía por deformaciones inelásticas. El orden de ductilidad involucrada puede estar asociado con deformaciones permanentes muy grandes. De esa manera, aunque la estructura no se desplomara, el daño resultante podría estar más allá de la reparación y la estructura sería una pérdida económica total.

11.6.2 Requerimientos de ductilidad de desplazamiento

En el diseño por sismo, una consideración de importancia, es la necesidad de tener una estructura capaz de deformarse de manera dúctil cuando se sujeta a varios ciclos de carga lateral que penetran en el intervalo inelástico. Los análisis dinámicos no lineales de estructuras diseñadas según el código, y que responden a movimientos típicos de sismos, han indicado el orden de deformaciones inelásticas requeridas. [11.21, 11.22, 11.25]

Se puede observar el efecto del comportamiento no lineal en la respuesta de una estructura a los movimientos de sismos intensos con referencia a un oscilador de un solo grado de libertad. Tal oscilador, que responde elásticamente, tendrá una relación de carga - deflexión como la representada en la figura 11.21*a*, donde el punto *b* es la respuesta máxima. El área *ABC* bajo la curva representa la energía potencial almacenada en la deflexión máxima; y cuando la masa vuelve a la posición cero, la energía se convierte en energía cinética. Si el oscilador no es suficientemente fuerte para transmitir la carga de inercia de respuesta totalmente elástica, y desarrolla una articulación plástica con características elastoplásticas, la curva de carga - deflexión será como en la figura 11.21*b*. Cuando se alcan-

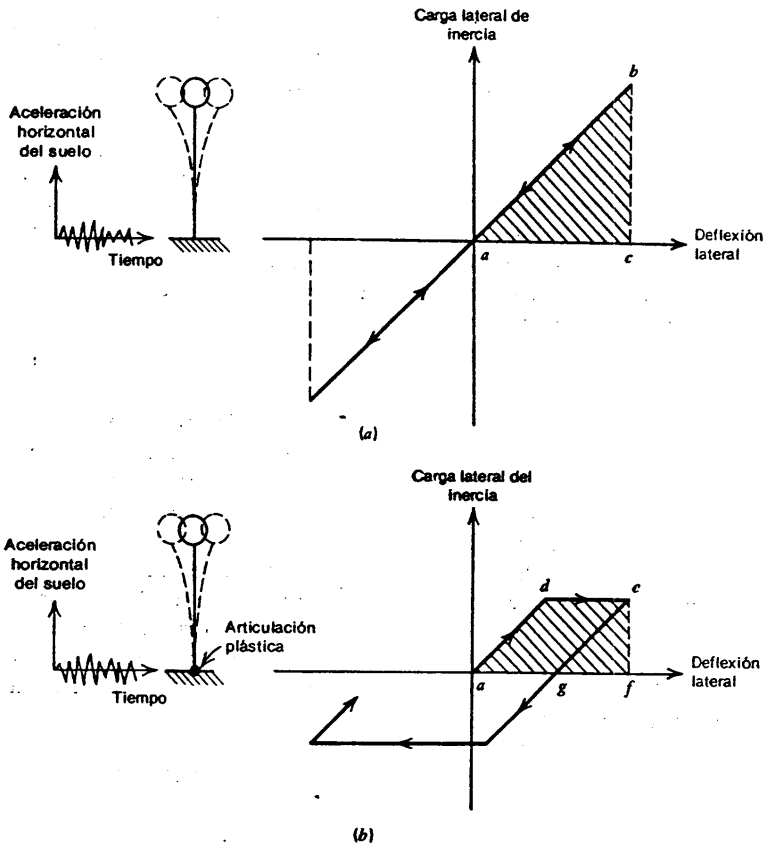


Fig. 11.21. Respuesta de osciladores a movimientos de terremotos. (a) Respuesta elástica. (b) Respuesta elastoplástica.

ce la capacidad de la articulación plástica, la respuesta de deflexión prosigue a lo largo de la línea *de*, y el punto *e* representa la respuesta máxima. La energía potencial almacenada en la deflexión máxima en este caso queda representada por el área *adef*: nótese que la capacidad de articulación plástica ha limitado las fuerzas que actúan en la estructura. Cuando la masa regresa a la posición cero, la energía, convertida en energía cinética, queda representada por la pequeña área triangular *efg*, debido a que la energía que representa el área *edeg* se disipa por la articulación plástica transformada en calor y otras formas irrecuperables de energía. En consecuencia, es evidente que en la estructura elástica, toda la energía almacenada se devuelve como energía de velocidad (cinética) en cada ciclo,

en tanto que en la estructura elastoplástica sólo se devuelve parte de la energía. En consecuencia, no se requiere que la energía potencial almacenada en la estructura elastoplástica en cada ciclo sea tan grande como en la estructura elástica, y la deflexión máxima de la estructura elastoplástica no es necesariamente mucho mayor que el de la estructura elástica. En efecto, muchos análisis dinámicos[11.25,11.21] han indicado que la deflexión máxima que alcanzan las dos estructuras pueda ser aproximadamente la misma. En la figura 11.22*a* se ilustra el comportamiento basado en la suposición de deflexiones máximas iguales.

Una medida de la ductilidad de una estructura es el factor μ de ductilidad de desplazamiento definido como

$$\mu = \frac{\Delta_u}{\Delta_y} \tag{11.37}$$

donde Δ_u es la deflexión lateral en el extremo del intervalo posterior al elástico y Δ_y es la deflexión lateral la primera vez que se alcanza la cedencia. Cuando está involucrada una cantidad de ciclos de carga, se toma a Δ_y como la deflexión lateral cuando se alcanza por primera vez la cedencia en la primera excursión de la carga al intervalo posterior al elástico.

El comentario al código CEAOC[11.23] indica que se puede estimar el factor de ductilidad de desplazamiento, requerido en el diseño, en base a la relación de la carga de inercia de respuesta elástica a la carga de diseño estático del código (como puede verse de los triángulos semejantes de la figura 11.22*a*) y que los valores típicos para el factor μ de ductilidad de desplazamiento pueden variar entre 3 y 5.

A la relación de la carga de diseño estático del código a la carga de inercia de respuesta elástica se le puede denominar el factor R de reducción de la carga. En la suposición de deflexión máxima igual de la figura 11.22*a*, esto quiere decir que

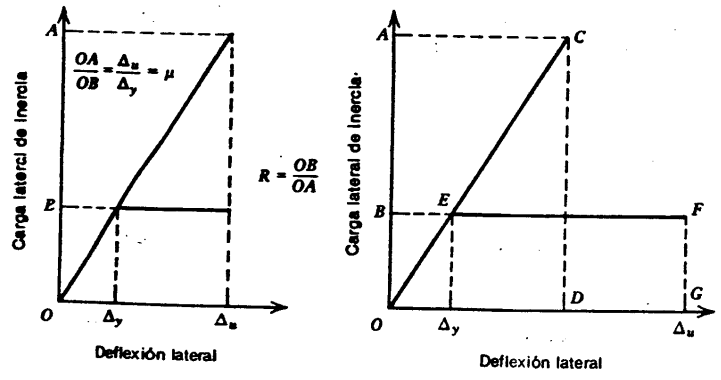


Fig. 11.22. Respuestas supuestas de estructuras elásticas y elastoplásticas. (a) Respuesta de flambeo máximo igual. (b) Respuesta de energía potencial máximo igual.

$$R = \frac{1}{\mu} \tag{11.38}$$

Algunos análisis dinámicos han indicado que la suposición de la deflexión máxima igual de la figura 11.22*a* puede no ser conservadora. En especial, el concreto reforzado puede mostrar un deterioro de rigidez bajo inversiones de cargas, lo que produce una reducción en las características de disipación de energía. Blume[11.21] ha demostrado que un valor del factor R de reducción que da un límite superior probable es

$$R = \frac{1}{\sqrt{2\mu - 1}} \tag{11.39}$$

La ecuación 11.39 está basada en el concepto de energía igual, lo que implica que la energía potencial almacenada por el sistema elástico en la deflexión máxima es la misma que la almacenada por el sistema elastoplástico en la deflexión máxima. Esto se ilustra en la figura 11.22*b*, y requiere que el área *OCD* sea igual al área *OEFG*.

$$\therefore \quad \frac{OA \times OD}{2} = \frac{OB \times \Delta_y}{2} + (\Delta_u - \Delta_y)OB$$

Pero $OD = \Delta_y OA/OB$.

$$\therefore \quad \frac{\Delta_y}{2}\frac{OA^2}{OB} = OB\left(\Delta_u - \frac{\Delta_y}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \left(\frac{OB}{OA}\right)^2 = \frac{\Delta_y}{2(\Delta_u - \Delta_y/2)} = \frac{1}{2\Delta_u/\Delta_y - 1}$$

lo que da la ecuación 11.39, ya que $OB/OA = R$ y $\Delta_u/\Delta_y = \mu$.

En seguida se muestra una comparación entre los valores de μ dados por las ecuaciones 11.38 y 11.39 para una diversidad de valores de R.

$R = \frac{\text{(Carga de diseño)}}{\text{(Carga de respuesta elástica)}}$	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
μ de la Eq. 11.38	5.0	2.5	1.67	1.25	1.0
μ de la Eq. 11.39	13.0	3.63	1.89	1.28	1.0

Es evidente que el sistema elastoplástico, que responde a un nivel de resistencia más baja, sufriría mayores desplazamientos para que pueda absorber la misma energía que el sistema elástico. También es evidente que la

diferencia entre las ecuaciones 11.38 y 11.39 puede ser apreciable a valores bajos de R.

La figura 11.23, graficada por Blume,[11.21] compara las ecuaciones 11.38 y 11.39 con los resultados obtenidos de los análisis dinámicos en sistemas de un solo grado de libertad realizados por Clough.[11.26] Se compararon sistemas elastoplásticos y de rigidez degradada con sistemas elásticos. De la figura 11.23 es evidente que la ecuación 11.39 puede ser un límite superior, y que un valor más realista de R es el dado por la ecuación 11.38.

Las consideraciones anteriores se aplican aproximadamente a marcos de pisos múltiples. Es aparente que a los edificios diseñados para satisfacer las cargas estáticas del código se les puede exigir considerable ductilidad durante los sismos intensos, aunque, desde luego, se puede reducir la demanda de ductilidad diseñando a cargas laterales estáticas mayores. Utilizando un espectro de diseño como el de la figura 11.20*b*, y el factor de reducción definido por las ecuaciones 11.38 y 11.39, el diseñador puede relacionar aproximadamente el sismo que se debe resistir a la carga de diseño estático y el factor de ductilidad de desplazamiento. Para un edificio de plantas múltiples, los desplazamientos Δ_y y Δ_u que dan el factor de ductilidad de desplazamiento se miden en una posición adecuada (v. gr., al nivel del techo). En un marco de múltiples niveles, las articulaciones plásticas tienden a desarrollarse en las secciones críticas por toda la estructura, pero no todas se desarrollan bajo la misma carga. En consecuencia, la relación de carga lateral - deflexión no será bilineal como en la figura 11.21*b*, sino que tenderá a estar más curva debido a que la rigidez se reduce gradualmente, conforme se desarrollan articulaciones plásticas en distintos niveles de carga. Para evaluar el factor de ductilidad de desplazamiento en tal caso, se puede suponer una curva aproximada bilineal de carga lateral - deflexión, tomando la deflexión en primera cedencia como la debida a la carga de diseño estático aplicada al marco que se comporta elasticamente. Sin embargo, las aproximaciones son tales, que una evaluación exacta de la demanda de ductilidad en los casos importantes puede requerir análisis dinámicos no lineales de la estructura bajo la acción de sismos importantes.

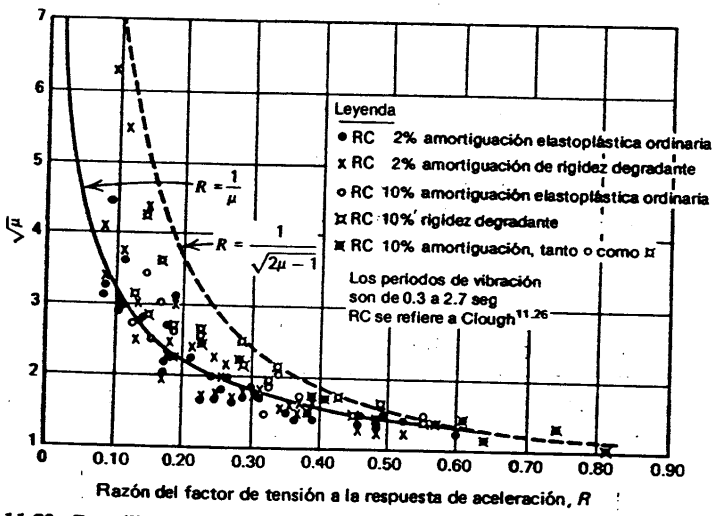


Fig. 11.23. Ductilidad de desplazamiento vs. razón de resistencia a demanda elástica para osciladores de un solo grado de libertad que responden al terremoto de N-S de 1940 en el Centro.[11.21]

Se enfatiza que la ductilidad está asociada con las deformaciones plásticas, por lo que está asociada con el daño estructural permanente. Esto quiere decir que una estructura, diseñada utilizando un factor R de reducción de carga bajo, es susceptible de sufrir daño permanente durante los sismos de menor intensidad. Para los edificios importantes, especialmente aquellos que necesitan funcionar después de un desastre sísmico, puede no utilizarse la ductilidad potencial de la estructura, debido a que el control de los daños dominará como criterio de diseño. Para tal estructura, se puede utilizar un mayor factor de reducción de carga, por ejemplo, $R = 0.5$, que requiere $\mu = 2$ de acuerdo con la ec. 11.38.

11.6.3 Requerimientos de ductilidad de curvatura

La ductilidad de las secciones de concreto reforzado se puede expresar mediante la relación φ_u/φ_y de ductilidad de curvatura, en que φ_u = curvatura en el extremo del intervalo posterior al elástico y φ_y = curvatura en la primera cedencia. Esto supone que predominan las deformaciones a flexión. En el capítulo 6 se estudiaron los valores disponibles para el factor φ_u/φ_y de ductilidad de curvatura de miembros típicos. El factor disponible de ductilidad de curvatura es bastante grande en muchos casos, aunque es importante reconocer que hay una diferencia significativa entre el factor Δ_u/Δ_y de ductilidad de desplazamiento y el factor φ_u/φ_y de ductilidad de curvatura. Ello se debe a que una vez que ha comenzado la cedencia en un marco, las deformaciones se concentran en las posiciones de la articulación plástica; en consecuencia, cuando un marco se deflexiona lateralmente en el intervalo inelastico, la relación φ_u/φ_y requerida en una articulación plástica puede ser mayor que la razón Δ_u/Δ_y.

La relación entre la ductilidad de curvatura y la ductilidad de desplazamiento se puede ilustrar en un caso simple con referencia a la columna de voladizo con una carga lateral en el extremo en la fig. 11.24. (También se muestra la distribución idealizada de curvatura en el momento máximo.) Se puede determinar la deflexión lateral en la parte superior de

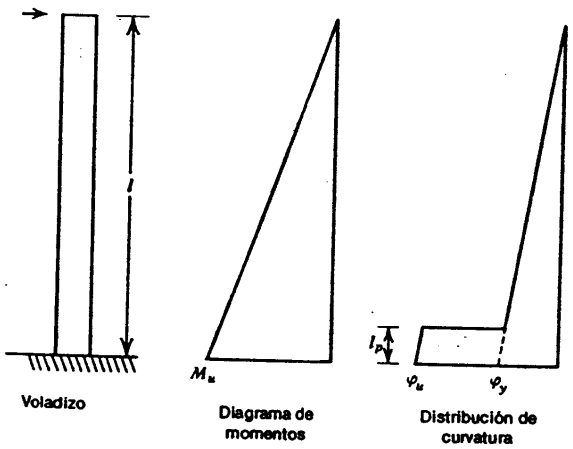


Fig. 11.24. Columna en voladizo con carga lateral en el momento último.

la columna tomando momentos del diagrama de curvatura alrededor de la parte superior. En la sección 6.6 se estudió el cálculo de las deflexiones a partir de las curvaturas. La deflexión lateral en la parte superior en el momento máximo es

$$\Delta_u = \left(\frac{\varphi_y l}{2}\frac{2l}{3}\right) + (\varphi_u - \varphi_y) l_p (l - 0.5 l_p)$$

en que l = longitud de la columna y l_p = longitud equivalente de la articulación plástica. La deflexión lateral en la parte superior a primera cedencia es

$$\Delta_y = \frac{\varphi_y l}{2}\frac{2l}{3}$$

$$\therefore \quad \mu = \frac{\Delta_u}{\Delta_y} = 1 + \left(\frac{\varphi_u - \varphi_y}{\varphi_y}\right)\frac{l_p(l - 0.5 l_p)}{l^2/3}$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi_u}{\varphi_y} = \frac{l^2(\mu - 1)}{3 l_p (l - 0.5 l_p)} \qquad (11.40)$$

Por ejemplo, si $\mu = 4$ los valores requeridos de φ_u/φ_y de la ec. 11.40 son:

l_p/l	0.05	0.1	0.15	0.20	0.25	0.30	0.35
φ_u/φ_y	20.5	10.5	7.2	5.6	4.6	3.9	3.5

Ya que la longitud equivalente de la articulación plástica l_p está típicamente en el intervalo 0.5 a 1.0 veces el peralte del miembro (véase la sección 6.6.4), es evidente que la relación de φ_u/φ_y requerida para una columna en voladizo generalmente será mayor que la razón Δ_u/Δ_y y que si la longitud de la articulación plástica equivalente es una pequeña proporción de la longitud l, la demanda de φ_u/φ_y será especialmente alta. Por otra parte, para muros cortantes donde la relación de la altura l al peralte es tal que la longitud de articulación plástica equivalente es alrededor de 0.3 de la altura, los factores de ductilidad de curvatura y desplazamiento serán del mismo orden.

En el caso más complejo de un marco de pisos múltiples, la relación φ_u/φ_y requerida de los miembros, diseñada de acuerdo con las cargas sísmicas de los códigos actuales, todavía no ha quedado claramente establecida. La relación entre el desplazamiento y las ductilidades de curvatura es compleja, debido a que para la mayoría de los marcos de niveles múltiples, la cedencia no ocurre en las secciones críticas en la misma carga, y la distribución de las cargas de inercia es más complicada que la distribución de las cargas estáticas recomendada por los códigos. En las siguientes secciones se estudian algunos intentos de relacionar las relaciones de Δ_u/Δ_y y φ_u/φ_y para los marcos de plantas múltiples.

11.6.4 Determinación de la demanda de ductilidad de curvatura de marcos de niveles múltiples utilizando mecanismos de colapso estático

Suposiciones

Es posible hacer una evaluación aproximada del orden de ductilidad de curvatura que necesitan los marcos de plantas múltiples para lograr un factor dado de ductilidad de desplazamiento en base a los mecanismos de colapso estático y algunas suposiciones simplificatorias. Se considera una estructura reticular (fig. 11.25) que está sujeta tanto a cargas de gravedad como sísmicas mientras que responde a un pulso de aceleración de un sismo. Se hacen las siguientes suposiciones.[11.27]

1. Las secciones del marco tendrán características bilineales de momento-curvatura como en la fig. 11.26, aunque no necesariamente con los mismos valores de M_u, φ_y, ó φ_u. Para las vigas, los valores de estas cantidades dependen de las propiedades de la sección; sin embargo, para columnas también influye el nivel de carga axial al comienzo de la cedencia. Esta suposición ignora la mayor rigidez a flexión de los miembros que no se han agrietado y la mayor rigidez a flexión entre las grietas, por lo que se sobrestiman, en cierta medida, las deformaciones elásticas debidas a la flexión.

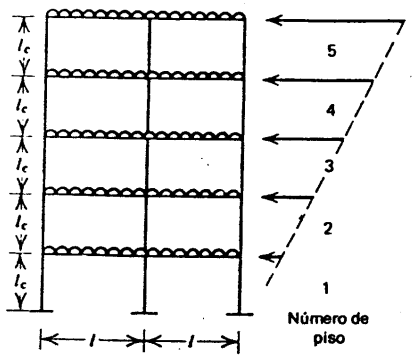


Fig. 11.25. Marco con carga de gravedad y sísmica.

2. Sólo se consideran las deformaciones de los miembros debidas a la flexión, lo que es una suposición razonable para las estructuras de marcos que carecen de miembros peraltados y para marcos que no tienen extenso agrietamiento de tensión diagonal. Despreciar los desplazamientos debidos al cortante compensa en cierta medida la sobrestimación de los desplazamientos a flexión elastica.

3. Cuando se aumenta la carga sísmica en el marco hasta que ocurre la cedencia, la cedencia comienza en todas las secciones críticas en la misma carga y en suficientes secciones para formar un mecanismo. En la práctica rara vez ocurre así, debido a las variaciones en las resistencias reales del acero y el concreto, diferencias entre las cargas sísmicas triangulares especificadas por código y la distribución real de la carga de inercia inducida en la estructura por un sismo y los distintos factores que afectan la resistencia de los miembros, como se estudió en el capítulo 1. Sin embargo, la suposición permitirá obtener una solución razonablemente simple.

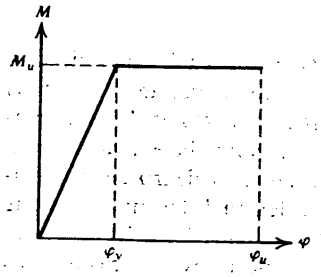


Fig. 11.26. Relación supuesta de momento vs. curvatura.

Desplazamiento lateral en la primera cedencia

La fig. 11.27 muestra la distribución de curvatura en una columna típica, cuando la carga lateral ha aumentado al grado de apenas provocar cedencia en el marco. Esta distribución de curvatura en la columna sigue la forma del diagrama de momento flexionante debido a que los momentos todavía están en la región lineal inicial de la relación de momento-curvatura. La curvatura en las columnas difiere de nivel a nivel debido a las distintas propiedades de las secciones y los niveles de carga axial. Se puede calcular la deflexión lateral en cualquier nivel de las columnas con relación al terreno tomando momentos alrededor de ese nivel del diagrama de curvatura por debajo de ese nivel. Los entrepisos del marco se numeran $1, 2, 3, \ldots, i, \ldots, r, \ldots$, desde el inferior. Notando que en la columna hay curvaturas tanto positivas como negativas, la deflexión lateral en la parte superior del r-ésimo piso a primera cedencia con relación al fondo de la estructura es

$$\begin{aligned}\Delta_y = {} & \varphi_{c1} l_c \left(r l_c - \frac{l_c}{2}\right) - \varphi_{c1}\left(1 + \frac{1-\beta_1}{\beta_1}\right)\frac{l_c}{2}\left(r l_c - \frac{2l_c}{3}\right) \cdot \\ & + \varphi_{c2} l_c \left(r l_c - \frac{3l_c}{2}\right) - \varphi_{c2}\left(1 + \frac{1-\beta_2}{\beta_2}\right)\frac{l_c}{2}\left(r l_c - \frac{5l_c}{3}\right) + \cdots \\ & + \varphi_{ci} l_c \left[r l_c - \left(i - \frac{1}{2}\right) l_c\right] - \varphi_{ci}\left(1 + \frac{1-\beta_i}{\beta_i}\right)\frac{l_c}{2}\left[r l_c - \left(i - \frac{1}{3}\right) l_c\right] + \cdots \\ & + \varphi_{cr}\frac{l_c^2}{2} - \varphi_{cr}\left(1 + \frac{1-\beta_r}{\beta_r}\right)\frac{l_c^2}{6} \\ = {} & \frac{l_c^2}{6} \sum_{i=1,2,\ldots,r} \frac{\varphi_{ci}}{\beta_i}\left[6\beta_i(r - i + 0.5) - 3(r - i) - 1\right] \end{aligned} \tag{11.41}$$

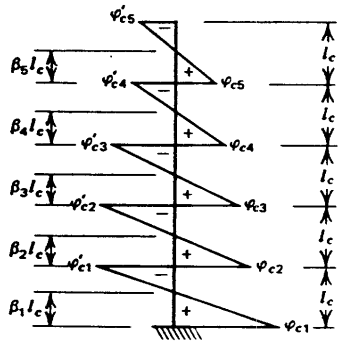


Fig. 11.27. Distribución de curvatura en una columna típica a primera cedencia en un marco.

en que $\varphi_{c1}, \varphi_{c2}, \ldots, \varphi_{ci}, \ldots, \varphi_{cr}$ son las curvaturas de columna en el fondo de la 1a, 2a,. . ., *i*-ésima, . . ., *r*-ésima planta, cuando se alcanza la cedencia por primera vez en el marco, y $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_i, \ldots, \beta_r$ se refieren a las posiciones de los puntos de inflexión en esas plantas. Al tomar los momentos de los diagramas de curvatura para obtener la ec. 11.41, se ha tratado la distribución de curvatura de cada planta como si estuviera compuesta de un bloque rectangular y uno triangular, como se ilustra en la fig. 11.28 para la planta *i*. Es decir, que la contribución de esa planta a la deflexión es igual al momento del rectángulo *BCDE* menos el momento del triangulo *ACD*, ambos tomados alrededor de la parte superior de la *r*-ésima planta.

Si se supone que los puntos de inflexión ocurren a 0.6 de altura de la columna desde la base de las columnas de la planta inferior, y a media altura en las columnas de los demás entrepisos, entonces

$$\beta_1 = 0.6 \qquad \text{y} \qquad \beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_r = 0.5$$

y de la ec. 11.41 la deflexión en la parte superior de la *r*-ésima planta en la primera cedencia con relación a la base de la estructura queda como

$$\Delta_y = \frac{l_c^2}{6}\left[\varphi_{c1}\left(r + \frac{1}{3}\right) + \varphi_{c2} + \varphi_{c3} + \cdots + \varphi_{cr}\right] \qquad (11.42)$$

Desplazamiento lateral en el intervalo inelástico y requerimiento de ductilidad de curvatura

El desplazamiento lateral que ocurre después del comienzo de la cedencia se debe a la rotación en las posiciones de la articulación plástica. Se pueden desarrollar dos tipos posibles de mecanismo de colapsc.

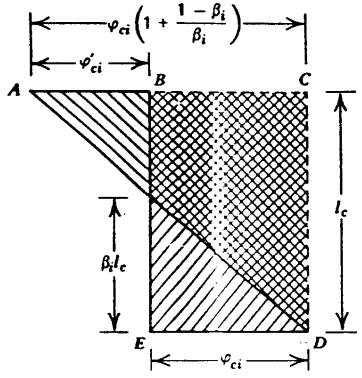


Fig. 11.28. Distribución de curvatura en la columna de la planta *i*.

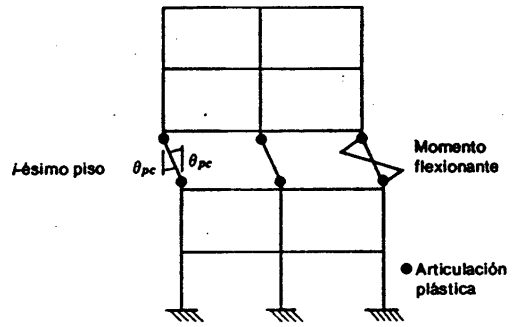


Fig. 11.29. Mecanismo de tralación lateral de columna en la *i*-ésima planta.

Caso 1 Mecanismo de traslación de la columna

Si ha comenzado la cedencia en las secciones críticas de las columnas antes de que las vigas alcancen la curvatura de cedencia, entonces en la ec. 11.41 se tiene $\varphi_{c1} = \varphi_{yc1}, \varphi_{c2} = \varphi_{yc2}, \ldots, \varphi_{cr} = \varphi_{ycr}$, donde $\varphi_{yc1}, \ldots, \varphi_{ycr}$ son las curvaturas de cedencia en las columnas *l*, . . . , *r* respectivamente. En este caso ocurrirá deflexión adicional a carga lateral constante por deformación plástica en las secciones críticas de las columnas. En el peor caso, esta ulterior deflexión puede ocurrir al desarrollarse un mecanismo de traslación lateral de columna solamente en un entrepiso, ya que las columnas de los otros niveles son más fuertes. En la fig. 11.29, que muestra el mecanismo desarrollado solamente en el *i*-ésimo piso, sólo se ilustran las deformaciones plásticas. Toda la deformación inelástica se debe a las rotaciones plásticas en las articulaciones de las columnas del piso crítico. La distribución de curvatura en una columna típica del *i*-ésimo piso, cuando se alcanza la curvatura máxima en ambas articulaciones en la columna aparece graficada en la fig. 11.30. En general, la rotación θ_{pc}, plástica per-

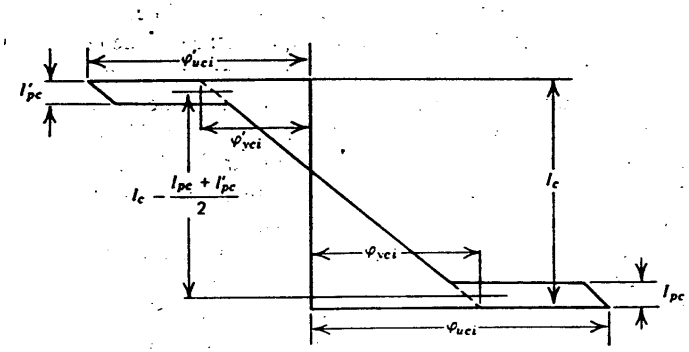


Fig. 11.30. Distribución de curvatura en una columna típica en primera cedencia en el marco.

misible en las articulaciones de columna es $(\varphi'_{uci} - \varphi'_{yci})l'_{pc}$ ó $(\varphi_{uci} - \varphi_{yci})l_{pc}$, lo que sea menor, donde φ'_{uci} y φ_{uci} son las curvaturas últimas en la parte superior e inferior de la columna del i-ésimo piso φ'_{yci} y φ_{yci} son las curvaturas de cedencia en las partes superior e inferior de la columna del i-ésimo piso y l'_{pc} y l_{pc} son las longitudes de la articulación plástica equivalente.

La deflexión lateral en la parte superior del i-ésimo piso, cuando se alcanza la curvatura máxima en las columnas del i-ésimo piso para este mecanismo es

$$\Delta_u = \Delta_y + \theta_{pc}[l_c - 0.5(l_{pc} + l'_{pc})] \tag{11.43}$$

En consecuencia, las ecs. 11.37 y 11.43 dan el factor de ductilidad de desplazamiento como

$$\mu = 1 + \frac{\theta_{pc}}{\Delta_y}[l_c - 0.5(l_{pc} + l'_{pc})] \tag{11.44}$$

donde Δ_y está dado por la ec. 11.41 y θ_{pc} es $(\varphi'_{uci} - \varphi'_{yci})l'_{pc}$ ó $(\varphi_{uci} - \varphi_{yci})l_{pc}$, lo que sea menor; los términos con prima se aplican aquí a la articulación plástica en la parte superior de la columna y los términos sin prima se aplican a la articulación plástica en la parte inferior de la columna. Por ejemplo, si el factor μ de ductilidad requerida es 4, $l_{pc} = l'_{pc} = 0.7h$ donde h = peralte de la columna, $l_c = 8h$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_i = \cdots = \beta_r = 0.5$, y $\varphi_{yc1} = \varphi_{yc2} = \cdots = \varphi_{yci} = \cdots = \varphi_{ycr}$, la ec. 11.44 indica que el requerimiento es $\varphi_{uci}/\varphi_{yci} = 12.54r - 3.2$, donde r es el número del piso hacia cuya parte superior se están midiendo las deflexiones. Es evidente que se requieren factores muy grandes de ductilidad de curvatura de secciones de columna si se desarrolla este mecanismo, especialmente en los edificios altos. Por ejemplo, para el ejemplo dado, el requerimiento para el factor de ductilidad de curvatura de columna sería de $\varphi_{uci}/\varphi_{yci} = 122$ si $r = 10$ ó 34 si $r = 3$. También se debe notar que para el mismo ejemplo, el requerimiento de $\varphi'_{uci}/\varphi'_{yci}$ sería más estricto que el correspondiente a $\varphi_{uci}/\varphi_{yci}$ si el mecanismo se forma en las columnas del primer piso, pero sería idéntico, si el mecanismo se forma en cualquier otro piso de la estructura.

En la ec. 11.44 se ha tomado el factor de ductilidad de desplazamiento μ como la relación de los desplazamientos último al de cedencia con respecto al terreno. Si $\mu = 4$, para el piso superior, la ec. 11.44 muestra que para los pisos por debajo del superior (pero arriba de las articulaciones plásticas) μ será mayor que 4 ya que para los pisos inferiores Δ_y es más pequeño. Si para un edificio de n pisos se requiere un valor μ promedio de 4 para todas los pisos, y si se desarrollan articulaciones plásticas en las columnas del 1er piso, debe sustituirse $r = 0.5n$ en la ec. 11.44 para encontrar el factor requerido de ductilidad de curvatura, debido a que el centro de masa del edificio estará por debajo de la mitad de la altura, y si se obtiene el valor requerido μ de 4 en aproximadamente la mitad de la altura

del edificio, se obtiene una aproximación razonable para el factor de ductilidad de desplazamiento del edificio como un todo. Sin embargo, si las articulaciones plásticas se desarrollan en columnas más altas, el factor de ductilidad de curvatura tendrá que ser mayor.

Si el marco tiene varias plantas de altura, es evidente que el factor disponible de ductilidad de curvatura de las secciones de columnas generalmente será insuficiente para satisfacer la demanda de ductilidad de un mecanismo de traslación lateral de columna.

Caso 2 mecanismo de traslación lateral de viga

Si ha comenzado la cedencia en las secciones críticas de las vigas antes de que las columnas alcancen la curvatura de cedencia, ocurrirá deformación lateral adicional bajo carga lateral constante por deformación plástica en las articulaciones plásticas de las vigas. También será necesario desarrollar una articulación plástica en la base de cada columna, pero el resto de las columnas puede permanecer elástico. La fig. 11.31 muestra el mecanismo resultante de traslación lateral de la viga. Sólo se ilustran deformaciones plásticas. Una consideración de las deformaciones indicadas en la fig. 11.31 muestra que la rotación plástica en la base de cada columna es

$$\theta_{pc} = \frac{\Delta_u - \Delta_y}{rl_c} \tag{11.45}$$

La fig. 11.32 detalla la geometría de la deformación plástica de las vigas y columnas. Ya que las deformaciones son pequeñas, se pueden relacionar las rotaciones plásticas en las vigas y en la base de cada columna como sigue

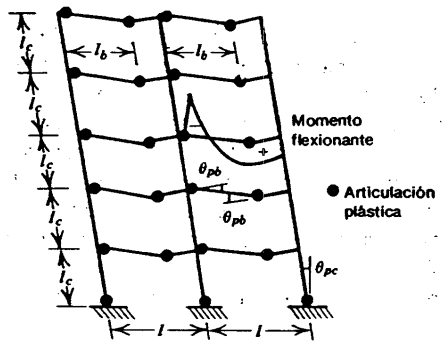


Fig. 11.31. Mecanismo de traslación lateral de viga.

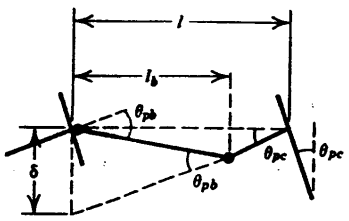


Fig. 11.32. Geometría de deformaciones plásticas en mecanismo de traslación lateral de viga.

$$\delta = l\theta_{pc} = l_b\theta_{pb}$$

Y sustituyendo θ_{pc} de la ec. 11.45, se tiene

$$\theta_{pb} = \theta_{pc}\frac{l}{l_b} = \frac{\Delta_u - \Delta_y}{rl_c}\frac{l}{l_b} \tag{11.46}$$

Los desplazamientos laterales se miden en las ecs. 11.45 y 11.46 a la parte superior del r-ésimo piso con relación al terreno. Ademas, rl_c se ha escrito en estas dos ecuaciones como una aproximación para $rl_c - 0.5l_{pc}$; pero como l_{pc} es pequeña en comparación con rl_c, la aproximación está justificada. Ajustando la ec. 11.46 se ve que se puede escribir el desplazamiento lateral en la parte superior del r-ésimo piso, con relación al terreno en la curvatura máxima, en términos de la rotación de las articulaciones de viga como

$$\Delta_u = \Delta_y + \frac{rl_c l_b}{l}\theta_{pb} \tag{11.47}$$

donde θ_{pb} es $(\varphi'_{ub} - \varphi'_{yb})\Sigma\, l'_{pb}$ ó $(\varphi_{ub} - \varphi_{yb})l_{pb}$, lo que sea menor, donde los términos en las ecuaciones de θ_{pb} con prima se refieren a las articulaciones plásticas de momento positivo y los términos sin prima se refieren a las articulaciones plásticas de momentos negativos. Rara vez, las articulaciones plásticas de momentos positivos son críticas, debido a las mayores longitudes totales de las articulaciones plásticas equivalentes ($\Sigma\, l'_{pb}$ = suma de las longitudes de articulaciones plásticas equivalentes a cada lado de la sección crítica) y a que la sección es más dúctil primordialmente por la presencia de un patín a compresión (debido a la losa). En consecuencia, generalmente θ_{pb} está limitada por la articulación plástica de momento negativo.

Además, en términos de las articulaciones plásticas en las bases de las columnas, de la ec. 11.45 se tiene

$$\Delta_u = \Delta_y + rl_c\theta_{pc} \tag{11.48}$$

donde $\theta_{pc} = (\varphi_{uc1} - \varphi_{yc1})l_{pc}$.

Por tanto, de las ecs. 11.37 y 11.47, el factor de ductilidad de desplazamiento en términos de las articulaciones de vigas es

$$\mu = 1 + \frac{rl_c l_b}{l}\frac{\theta_{pb}}{\Delta_y} \tag{11.49}$$

donde la ec. 11.41 da Δ_y y generalmente θ_{pb} es la rotación plástica en la articulación plástica de momento negativo $(\varphi_{ub} - \varphi_{yb})l_{pb}$.

Por ejemplo, sea el factor de ductilidad de desplazamiento requerido $\mu = 4, l_c = 8d$ donde d = peralte efectivo de la viga, $l_b = \frac{2}{3}l$, $l_{pb} = 0.7d$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_r = 0.5$, y $\alpha\varphi_{yb} = \varphi_{c1} = \varphi_{c2} = \cdots = \varphi_{cr}$, donde α relaciona la curvatura de cedencia de la viga con las curvaturas de columna en esa etapa. Entonces la ec. 11.49 indica que el valor requerido para el factor de ductilidad de curvatura $\varphi_{ub}/\varphi_{yb}$ en las vigas cuando $\alpha = 1$ es 16.2 cuando$r = 3$y 17.6 cuando $r = 10$. Es claro que en la práctica se puede obtener la ductilidad requerida de esas secciones de viga; más aun, el factor de ductilidad de curvatura requerido no aumenta significativamente cuando aumenta el número de plantas. Si las vigas son más peraltadas y las columnas están próximas a ceder cuando las vigas ceden, $\alpha > 1$. Si $\alpha = 3$, el factor $\varphi_{ub}/\varphi_{yb}$ de ductilidad de curvatura requerido de la viga para el ejemplo anterior es 46.7 cuando $r = 3$ y 50.7 cuando $r = 10$. lo que indica el peligro de tener columnas que sean mucho más flexibles que las vigas, aunque la cedencia comience primero en éstas. Adicionalmente, los requerimientos para $\varphi'_{ub}/\varphi'_{yb}$ no serán tan rígidos como para $\varphi_{ub}/\varphi_{yb}$ debido a que se dispone de una mayor longitud de articulación plástica en la articulación de momento positivo. También, de las ecs. 11.37 y 11.48, el factor de ductilidad de desplazamiento en términos de la articulación en la base de cada columna es

$$\mu = 1 + rl_c\frac{\theta_{pc}}{\Delta_y} \tag{11.50}$$

donde la ec. 11.41 da Δ_y y $\theta_{pc} = (\varphi_{uc1} - \varphi_{yc1})l_{pc}$. Por ejemplo, si el factor requerido de ductilidad de desplazamiento es 4, $l_{pc} = 0.7h$ donde h = peralte de la columna, $l_c = 8h$, $\beta_1 = 0.6$, $\beta_2 = \beta_3 = \cdots = \beta_r = 0.5$, y $\varphi_{yc1} = \varphi_{c1} = \varphi_{c2} = \cdots = \varphi_{cr}$, la ec. 11.50 indica que el valor requerido para el factor de ductilidad de curvatura $\varphi_{uc1}/\varphi_{yc1}$ en las bases de las columnas es 11.2 cuando $r = 3$ y 12.1 cuando $r = 10$. En consecuencia, la ductilidad de curvatura requerida en las bases de las columnas no es tan elevada como la requerida para las columnas en el mecanismo de traslación lateral de columnas.

Estudio de los resultados del análisis del mecanismo de colapso estático

Las ecuaciones deducidas 11.44, 11.49 y 11.50 indican el orden del factor de ductilidad de curvatura requerido por las cargas laterales estáticas, para que alcancen un factor de ductilidad de desplazamiento dado. Dados los detalles de un marco, se pueden utilizar las ecuaciones para evaluar el carácter adecuado de un diseño. El mecanismo de traslación lateral de columna de la fig. 11.29 es peligroso debido a que pueden ocurrir las deformaciones plásticas en las columnas de un solo piso; en un edificio alto es improbable que se disponga de suficiente ductilidad de curvatura para que este mecanismo sobreviva a un sismo importante. Es evidente que es mucho mejor asegurar que ocurra el mecanismo de traslación lateral de viga de la fig. 11.31, ya que la ductilidad requerida de las secciones de viga es más baja y se puede dar con mayor facilidad. Para asegurar que ocurra el mecanismo de traslación lateral de la viga, se deben hacer las columnas suficientemente fuertes para evitar la formación de articulaciones plásticas en las columnas. Las bases de columnas en este mecanismo tendrían que estar detalladas cuidadosamente, con aros o hélices transversales, para desarrollar la rotación plástica requerida.

Las ecuaciones deducidas se basan en la suposición simplificadora de que el marco alcanza la cedencia en todas las secciones de articulación plástica en forma simultánea. Si es necesaria una redistribución de momentos antes de que se desarrollen todas las articulaciones plásticas, será necesario que la ductilidad de curvatura requerida en las primeras articulaciones a formarse sea mayor. Adicionalmente, se ha supuesto que los patrones de momentos flexionantes son como se obtuvieron de la carga lateral estática equivalente recomendada por los códigos. Esta carga estática de código, tal como se muestra en la fig. 11.25, corresponde predominantemente con el primer modo de respuesta de vibración. Para los edificios altos, los modos superiores de vibración pueden tener bastante influencia y producir un cambio radical en los patrones de momentos flexionantes. De esa manera, pueden formarse simultáneamente menos articulaciones plásticas en las vigas en el caso real dinámico, que lo que sugiere el enfoque basado en las cargas estáticas del código. Por tanto, sólo puede considerarse como guía el enfoque estático recién presentado.

Sin embargo, el análisis estático indica la conveniencia de tener columnas fuertes, para evitar en lo posible la formación de articulaciones plásticas en las columnas (debido a que la energía se disipa con mayor eficiencia en las articulaciones plásticas de las vigas). Por lo general, parece que las secciones en las articulaciones plásticas de las vigas y bases de columnas deberían poder alcanzar los factores de ductilidad de curvatura de al menos 4 veces el factor de ductilidad de desplazamiento requerido (o sea, $\varphi_u/\varphi_y \geq 4\mu$).

11.6.5 Determinación de la demanda de ductilidad de curvatura de marcos de niveles múltiples utilizando análisis dinámicos no lineales

No se puede aseverar que el método aproximado anterior, basado en los mecanismos de colapso estático, proporcione una evaluación exacta del factor de ductilidad de curvatura requerido en el caso complejo de un marco de plantas múltiples, que responde no linealmente a un sismo importante. Se ha analizado dinámicamente una cantidad de marcos de plantas múltiples que responden no linealmente a sismos (véanse por ejemplo las referencias 11.28 y 11.21), pero es difícil obtener conclusiones generales. El número de variables comprendidas en la respuesta no lineal de estructuras de plantas múltiples es tan elevado que no se pueden hacer en la actualidad más que declaraciones cualitativas. Por ejemplo, el tipo de movimiento del terreno tiene considerable influencia, y una estructura diseñada para desarrollar ductilidades de curvatura casi uniformes en sus miembros, al responder a un movimiento del terreno, puede desarrollar ductilidades localmente altas de curvatura al responder a un movimiento distinto del terreno. Parecería necesario hacer muchos más análisis dinámicos no lineales en una diversidad de marcos de plantas múltiples para dar una mejor indicación del orden de los factores requeridos de ductilidad de curvatura. En seguida se estudian algunos resultados de los análisis disponibles dinámicos no lineales.

Los analisis de marcos de plantas múltiples han indicado que el factor de ductilidad de desplazamiento de un marco es del mismo orden que para un sistema de un solo grado de libertad con las mismas características de fuerza - desplazamiento y diseñada para la misma fracción de la carga de respuesta elástica. Se ha obtenido el factor θ_u/θ_y de ductilidad rotacional de los miembros a partir de dichos análisis, donde θ_u = rotación en el extremo del miembro en la respuesta máxima y θ_y = rotación en el extremo del miembro en la primera cedencia. Se puede obtener el factor requerido de ductilidad de curvatura de esos análisis, a partir de la distribución de curvatura con una longitud supuesta de articulación plástica. Por ejemplo, si los momentos M en los extremos de un miembro son iguales, pero de signo opuesto, y el miembro no está sujeto a cargas transversales en su longitud (es decir que el miembro está en curvatura doble simétrica como en la fig. 11.33), la teoría elástica muestra que la rotación del extremo es

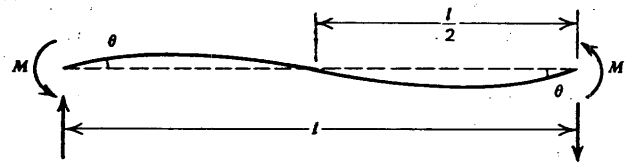


Fig. 11.33. Miembro en curvatura doble simétrica.

$$\theta = \frac{Ml}{6EI}$$

donde l = longitud del miembro y EI = rigidez a flexión de la sección. Cuando recién se alcanza la cedencia en los extremos, $\theta = \theta_y$ y $M = M_y$, donde M_y = momento en la primera cedencia. La curvatura de cedencia es $\varphi_y = M_y/EI$.

$$\therefore \quad \theta_y = \frac{\varphi_y l}{6}$$

Una rotación adicional en los extremos del miembro impone rotación plástica θ_p, donde

$$\theta_p = (\varphi_u - \varphi_y) l_p$$

donde φ_u = curvatura en el extremo del intervalo inelástico y l_p = longitud equivalente de la articulación plástica. Entonces, la rotación total del extremo es

$$\theta_u = \theta_y + \theta_p$$

$$\therefore \quad \frac{\theta_u}{\theta_y} = 1 + \frac{\theta_p}{\theta_y} = 1 + 6\frac{l_p}{l}\left(\frac{\varphi_u}{\varphi_y} - 1\right)$$

$$\therefore \quad \frac{\varphi_u}{\varphi_y} = 1 + \frac{l}{6l_p}\left(\frac{\theta_u}{\theta_y} - 1\right) \tag{11.51}$$

Por ejemplo, si $\theta_u/\theta_y = 8$ y $l_p/l = 0.1$, la ec. 11.51 da $\varphi_u/\varphi_y = 12.7$. De relaciones l_p/l más pequeñas se obtienen valores mayores de φ_u/φ_y. Las cargas transversales en los miembros hacen que cambie la simetría de deformación del miembro, y la rotación θ_y de cedencia cambia del valor recién calculado haciendo más difícil la definición de θ_y. Sin embargo, se pueden encontrar los valores requeridos de φ_u/φ_y que corresponden a patrones dados de momentos y deformaciones plásticas dadas. Es evidente que el factor φ_u/φ_y de ductilidad de curvatura es un índice considerablemente más significativo de la ductilidad de los miembros que el factor de ductilidad rotacional θ_u/θ_y, debido a la dependencia de θ_y de la carga, al igual que las propiedades del miembro significa que no se puede escribir una expresión única para θ_y.

Para el caso de deformación simétrica ilustrada en la fig. 11.33, con frecuencia los análisis dinámicos de los marcos han encontrado factores θ_u/θ_y de ductilidad rotacional de los miembros, de aproximadamente el doble del factor de ductilidad de desplazamiento, en el caso de marcos bien proporcionados. Sin embargo, la presencia de pisos débiles producirá una demanda de ductilidad rotacional en ellos mucho mayor que para marcos bien proporcionados.

La concentración de demanda de ductilidad en partes débiles de las estructuras, mostrada tanto por análisis dinámicos no lineales como por el

enfoque del mecanismo de colapso estático, apunta a un principio sumamente importante en el diseño sísmico. En el diseño ordinario por cargas estáticas, la presencia de partes demasiado fuertes de la estructura jamás disminuirá la resistencia de la misma. Sin embargo, en el diseño sísmico, cuando una estructura se apoya en la disipación de energía por articulaciones plásticas dúctiles para sobrevivir a los sismos, la presencia de partes demasiado fuertes de la estructura significa que la demanda de ductilidad de curvatura está concentrada en regiones locales de la estructura y puede conducir al colapso, debido a las muy elevadas deformaciones inelásticas impuestas allí. Nótese que una parte débil de una estructura actúa como un fusible. Una vez que se alcanza la resistencia de esa parte de la estructura (por ejemplo, en el caso de un mecanismo de traslación lateral de columna), el resto del marco puede permanecer dentro del intervalo elástico. Las partes débiles de las estructuras pueden ser atribuibles al subdiseño de esa parte de la estructura o sobrediseño de otras partes de la misma. En consecuencia, en el diseño sísmico hay peligro tanto de elementos de resistencia inferior como de resistencia excedida. Una causa común de la sobrerresistencia es la presencia de muros que no se han tomado en cuenta en la respuesta estructural. La presencia de muros en algunas plantas podría obligar a que se formara un mecanismo de traslación lateral de columna en otros pisos. Por ejemplo, si el primer piso de un edificio está abierto y sus pisos superiores están encerrados por muros, el daño podría concentrarse en el primer piso. Para evitar este problema, se pueden utilizar juntas de separación entre tales muros y los elementos estructurales. Como ejemplo reciente del daño que se concentra principalmente en un piso de la estructura, considérese el hospital Olive View después del sismo de 1971 en San Fernando, California (véase la fig. 11.34). En esta estructura había muros de cortante y columnas en los cuatro pisos superiores. En el primer piso la única resistencia a las cargas laterales provenía de las columnas, por lo que el daño se concentró principalmente en las columnas de ese piso. El desplazamiento lateral permanente de la estructura después del sismo, que fue de casi 2 pies (0.6 m), se debió casi principalmente a deformaciones en el primer piso. En la fig. 5.7 se muestran ejemplos de columnas con estribos y hélices de este piso, en donde se ve que sólo el concreto sumamente bién confinado puede deformarse en esta medida y mantener la capacidad de transmisión de carga. Las figs. 11.34 y 5.7 ilustran otra cuestión con respecto al daño del sismo. Las columnas son mucho más difíciles de reparar que las vigas debido a que es necesario enderezar y apuntalar la estructura durante la reparación. Un daño extenso en las columnas puede significar que se requiera demoler la estructura, como sucedió en el caso del hospital de Olive View.

Los análisis dinámicos no lineales también indican que en las columnas de los marcos de plantas múltiples pueden ocurrir distribuciones inesperadas de momento flexionante, en comparación con la distribución obtenida de la carga lateral estática del código. El análisis de la carga lateral

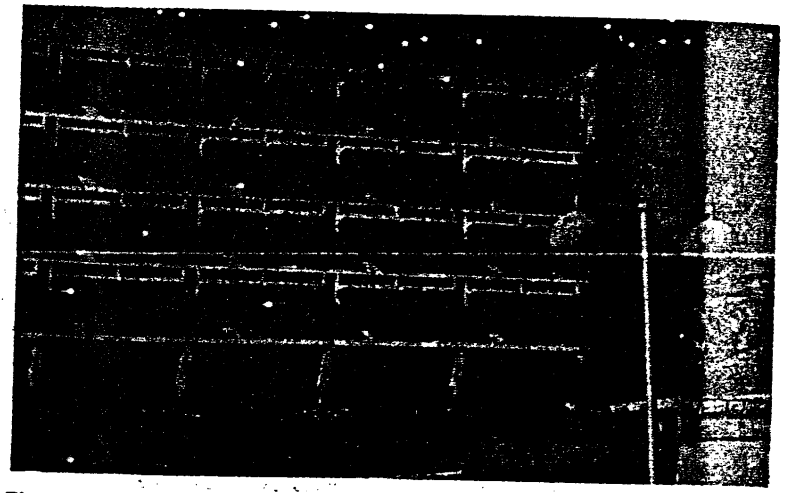


Fig. 11.34. Parte del hospital de Oliva View después del terremoto de 1971 en San Fernando.

estática indica que generalmente existen puntos de inflexión próximos a la mitad de la altura de las columnas, a menos que las vigas sean mucho más flexibles que las columnas, excepto en los pisos próximos a la parte superior e inferior del marco. Sin embargo, el análisis dinámico no lineal sugiere que en determinados momentos durante la respuesta de la estructura a los movimientos sísmicos, el punto de inflexión en una columna puede estar próximo a la unión de viga - columna, y ocasionalmente, incluso la columna puede estar en curvatura simple. Kelly[11.29] obtuvo algunos diagramas de momento flexionante de columna (fig. 11.35) para un marco de 12 plantas, diseñado de acuerdo con el código de cargas sísmicas de Nueva Zelandia y respondiendo a la componente N-S del sismo de El Centro en 1940. El análisis, un procedimiento de paso a paso a lo largo de la historia del sismo, obtuvo la solución directamente del desplazamiento incremental y tomó en cuenta el comportamiento elastoplástico de los miembros. La causa de la distribución inesperada de los momentos flexionantes de columna en algunos instantes es la fuerte influencia de los modos superiores de vibración, especialmente el segundo y tercero. En la fig. 11.36 se muestran los perfiles deflexionados de un marco en vibración. La carga lateral estática del código normalmente tiene una distribución triangular que corresponde a las cargas laterales que varían linealmente desde cero en la base de la columna a un máximo en la parte superior de la estructura, a veces con una carga concentrada adicional en la parte superior. Esta distribución de cargas corresponde aproximadamente al modo fundamental (primero) de vibración. Si son significativos los otros modos de vibración, es evidente que la distribución de las cargas de inercia en la

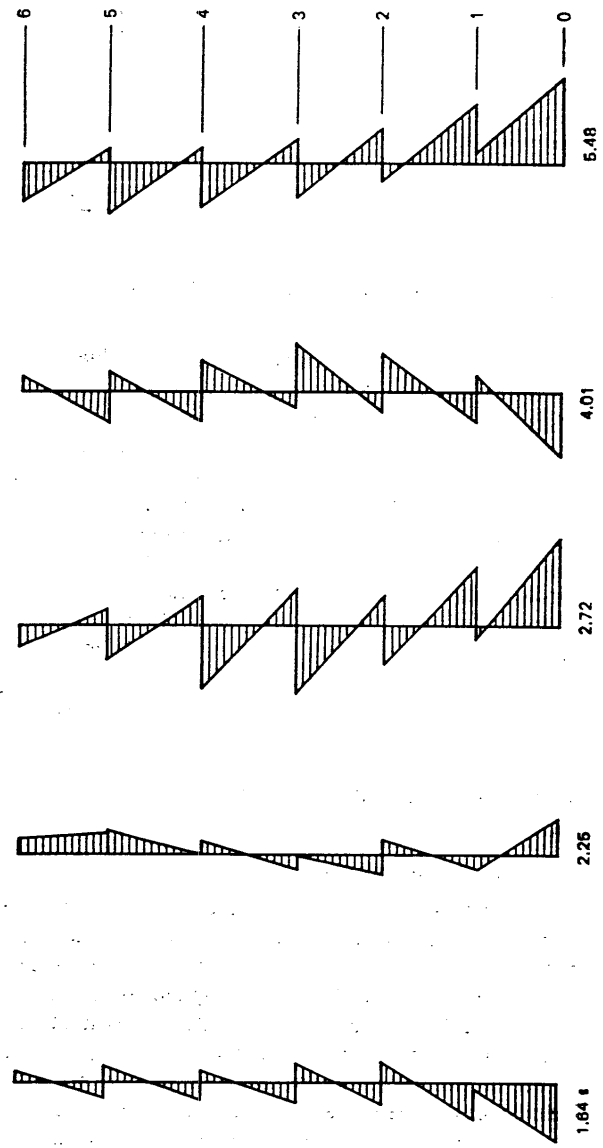


Fig. 11.35. Momentos flexionantes en las columnas de un marco de 12 plantas que responde no linealmente al terremoto de El Centro en 1940, componente N-S.[11.29]

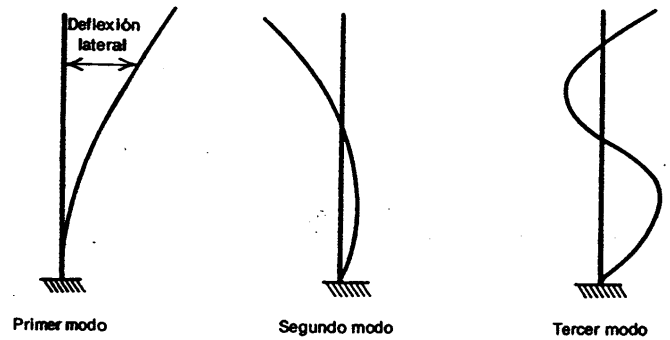


Fig. 11.36. Perfiles modales aproximados de marco vibratorio.

estructura en determinados instantes podría diferir apreciablemente de la supuesta, y producir por ejemplo la distribución de momentos flexionantes mostrada en la fig. 11.35. El corrimiento del punto de inflexión en las columnas a un punto bien distante de la posición a mitad de la altura en algunos casos significa que los momentos inducidos en la columna pueden ser mucho mayores que el momento obtenido de un análisis de carga lateral estática y puede conducir a que se formen articulaciones plásticas en las columnas.

El análisis dinámico también indica que generalmente no están presentes las articulaciones plásticas en todas las vigas en el mismo intervalo de tiempo. El desarrollo de articulaciones plásticas tiende a moverse hacia arriba del marco, en ondas que abarcan unos cuantos pisos a la vez, pero puede haber instantes en edificios de baja altura donde todas las vigas tengan articulaciones plásticas formadas simultáneamente.

11.6.6 Factores adicionales en el análisis por ductilidad

Efectos de la velocidad de carga

Ya que las cargas sísmicas son dinámicas, es necesario considerar el efecto de las cargas rápidas en una estructura. Las cargas extremadamente rápidas pueden producir un aumento significativo en la resistencia, tanto del concreto como del acero. La tabla 11.2 resume algunos datos presentados por un informe[11.30] del ACI e indica el efecto de la velocidad de deformación en la resistencia a compresión del concreto y en el punto inferior de cedencia del acero. Los movimientos sísmicos pueden provocar una diversidad de velocidades de deformación, según el periodo de vibración de la estructura y la demanda de ductilidad. Para las estructuras que tienen un pequeño periodo de vibración y una elevada demanda de ductilidad, las velocidades de deformación son sorprendentemente altas y pueden producir un aumento significativo de resistencia en los materiales.

Tabla 11.2 Efecto de la razón de deformación en la resistencia del material[11.30]

Razón de deformación promedio plg/(plg) (segundo) mm/(mm) (segundo)	Razón de resistencia a resistencia estática		
	Concreto		Un punto de cedencia inferior del acero
	$f'_c = 2500$ lb/plg^2 (17.2 N/mm^2)	$f'_c = 6500$ lb/plg^2 (44.8 N/mm^2)	$f_y = 45$, 51 y 57 kip plg^2 (310, 352 y 393 N/mm^2)
0.001	1.05	1.11	1.02–1.05
0.01	1.17	1.16	1.07–1.14
0.1	1.39	1.23	1.16–1.21
1.0	1.62	1.40	1.25–1.28

Por ejemplo, la fig. 11.37 presenta una gráfica idealizada de esfuerzo - tiempo para una varilla de refuerzo de acero en una articulación plástica en un miembro a flexión para un periodo de vibración de T segundos. Si la demanda de ductilidad de curvatura es alta, el tiempo en el intervalo plástico en el medio ciclo T_p puede exceder considerablemente al tiempo requerido para cargar hasta la cedencia T_y; en consecuencia, T_y puede ser pequeño. En un caso extremo, si $T_p = 15T_y$ y $T = 0.1$ seg, es evidente que $T_y = 0.1 \times 1/34 = 0.0029$ seg. Para el acero con una resistencia de cedencia de 60 kip plg^2 (414 N/mm^2) y módulo de elasticidad de 29×10^6 lb/plg^2 (200,000 N/mm^2), la deformación en la cedencia es $60{,}000/29 \times 10^6 = 0.00207$, y la velocidad de deformación promedio durante el intervalo T_y del ejemplo sería $0.00207/0.0029 = 0.71$ plg por plg/segundo, que ciertamente produciría un aumento notable de resistencia, como la indica la tabla 11.2. Sin embargo, en el diseño se acostumbra ignorar todo aumento en resistencia, debido a la velocidad de deformación. Se debe tener presente que desconsiderar dicho aumento en la resistencia, no necesariamente es un paso conservador para estructuras de pequeños periodos con elevadas demandas de ductilidad.

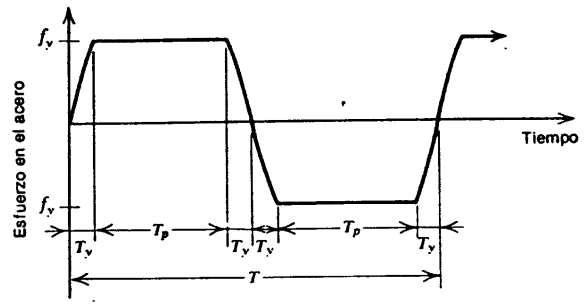


Fig. 11.37. Historia idealizada de esfuerzo vs. tiempo de una varilla de esfuerzo.

Efectos de cargas alternadas en las estructuras

Los marcos sujetos a movimientos intensos de sismos sufren varias inversiones de cargas que penetran bastante en el intervalo inelástico durante un terremoto. Normalmente, se supone que las relaciones de momento - curvatura, en las secciones críticas de los marcos bajo cargas alternadas repetidas hasta el intervalo de cedencia, son elastoplásticas bilineales (como en la fig. 11.38) en los estudios dinámicos del comportamientos de marcos. Sin embargo, se debe notar que el comportamiento real de los miembros de concreto reforzado es bastante distinto de esta relación elastoplástica supuesta. En especial, ocurre una reducción apreciable en rigidez con las cargas alternadas. La reducción en la rigidez no impide que un miembro debidamente detallado alcance su resistencia a flexión de diseño, pero la deformación en que se alcanza la resistencia a flexión es mayor. Una reducción de rigidez debida a la deformación inelástica provoca un aumento en el periodo de vibración de la estructura, que altera su respuesta al sismo.

El comportamiento de los miembros sujetos a momento flexionante cíclico (alternante) ya se estudió en la sección 6.7, y se obtuvieron relaciones teóricas de momento - curvatura. También anteriormente, se presentó el estudio del efecto de la flexión cíclica en el cortante y en la adherencia. Se pueden resumir los factores que afectan las relaciones de carga-deflexión de los miembros sujetos a grandes deformaciones inelásticas alternadas como sigue:

1. El comportamiento inelástico del refuerzo de acero. El acero con carga alternada en el intervalo de cedencia muestra el efecto Bauschinger, donde la curva de esfuerzo-deformación es no lineal a un esfuerzo mucho menor que la resistencia inicial de cedencia (véase la sección 2.2.4 y las figs. 2.27 a 2.29).

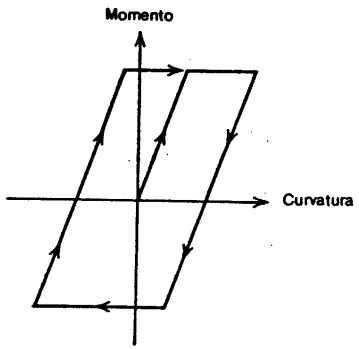


Fig. 11.38. Comportamiento elastoplástico bilineal idealizado.

2. El grado de agrietamiento del concreto. La apertura y cierre de grietas provoca un deterioro del concreto, por lo que produce una degradación en la rigidez. A mayor proporción de carga que transmita el concreto, mayor será la degradación de rigidez.

3. La efectividad de la adherencia y el anclaje. Bajo cargas cíclicas de alta intensidad ocurre un deterioro gradual de la adherencia entre el concreto y el acero.

4. La presencia de cortante. Las fuerzas cortantes altas producen una pérdida adicional de rigidez debido a la mayor deformación cortante en las zonas de articulación plástica bajo las cargas alternadas.

Las influencias de algunos de estos factores en la rigidez de una viga doblemente reforzada pueden verse con referencia a la fig. 11.39. Cuando la viga se carga hacia abajo, penetrando bastante en el intervalo inelastico del acero a tensión, las grietas grandes de la fig. 11.39*a* no se cierran completamente en la descarga, sino que permanecen abiertas como en la fig. 11.39*b*, debido a las deformaciones plásticas residuales del acero. Si entonces se carga al miembro en la dirección opuesta, como en la fig. 11.39*c*, la resistencia a la rotación será menor que la correspondiente durante la primera carga, debido a que la presencia de grietas abiertas en la zona a compresión significa que el acero a compresión transmite toda la compresión. En consecuencia, la rigidez a flexión de la sección sólo es la del acero, la que se reduce, aún más, cuando el acero a compresión alcanza el nivel de esfuerzo en que comienza el efecto Bauschinger y se comporta inelásticamente. Como se muestra en la fig. 11.39*d*, las grietas en la zona a compresión pueden llegar a cerrarse, según la magnitud de la carga y las cantidades relativas de acero superior e inferior. Cuando las grietas se

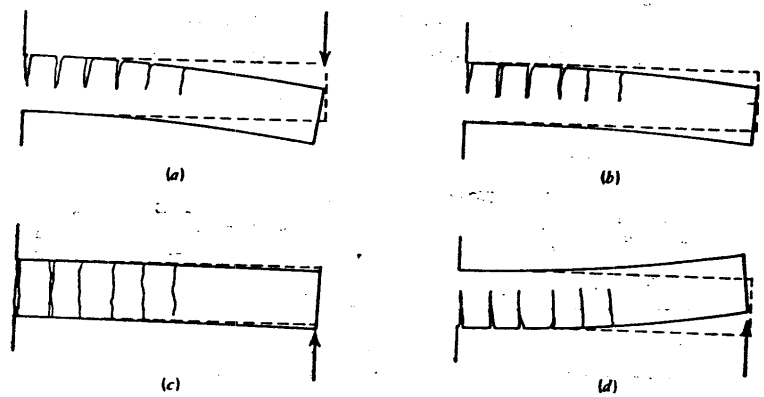


Fig. 11.39. Efecto de carga invertida en viga de voladizo de concreto reforzado. (a) Al final de la primera carga. (b) Después de descargar. (c) Al inicio de la carga invertida. (d) Al final de la carga invertida.

cierran, aumenta la rigidez del miembro, ya que en ese tiempo el concreto nuevamente transmite cierta compresión. Si las grietas no se cierran y el miembro está descargado, se puede agrietar la sección crítica en todo su peralte. El ancho de este agrietamiento de peralte total depende de la cantidad de cedencia y de la efectividad de la adherencia. Si entonces se carga el miembro hacia abajo, éste actúa nuevamente al inicio como una viga de acero, ya que el concreto no está en contacto en la cara de la grieta.

El abrir y cerrar de las grietas en las zonas que alternan entre tensión y compresión puede gradualmente conducir a un deterioro en la resistencia a compresión del concreto debido a que las caras de la grieta no pueden entrar en contacto pleno, debido al ligero movimiento lateral relativo o partículas en la grieta. Otra causa del deterioro de la resistencia y rigidez es la presencia de agrietamiento en el peralte total en una sección, ya que en estas condiciones se debe transmitir toda la fuerza cortante en la sección por acción de dovela del refuerzo principal y por un cortante de trabazón del agregado grandemente disminuido. En el capítulo 7 se señaló que una transferencia apreciable de cortante por acción de dovela está asociada con grandes desplazamientos a cortante (véase la fig. 7.30). Estos provocan rajaduras longitudinales del concreto a lo largo de las varillas a flexión y conducen a pérdida adicional de adherencia y degradación subsecuente en la rigidez. Si la fuerza cortante que debe transferirse a través de la región de articulación plástica es grande, el fenómeno estudiado puede llevar a una falla por cortante deslizante a lo largo de una grieta ancha continua a través de la sección crítica. Un refuerzo adicional del alma hará poco por aliviar la situación.

En la fig. 11.40 se ilustra el efecto de abrir y cerrar de las grietas y el efecto Bauschinger del acero en la relación de momento - curvatura para una sección doblemente reforzada. El redondeamiento y estrechamiento del ciclo indica que la idealización elastoplástica utilizada con frecuencia de la fig. 11.38 no es más que una burda suposición. El redondeamiento y estrechamiento de los ciclos significa que el área dentro de éstos es más

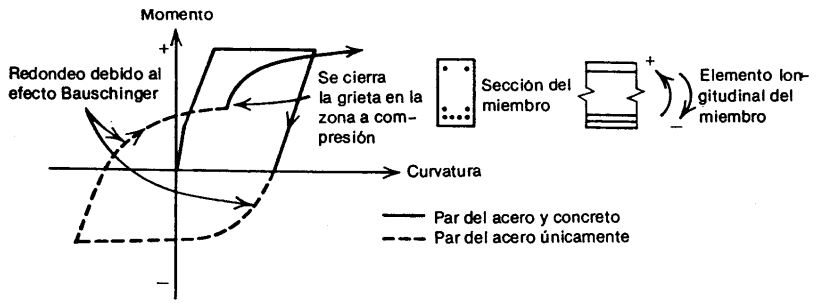


Fig. 11.40. Relación de momento vs. curvatura para sección doblemente reforzada con flexión invertida.

pequeña que la correspondiente basada en la suposición elastoplástica; por tanto, hay menos disipación de energía por ciclo que lo normalmente supuesto, lo que influye en la respuesta de los marcos a movimientos sísmicos intensos. Los análisis realistas dinámicos deben basarse en ciclos más exactos de momento - curvatura. Para las vigas, una mejor idealización sería una respuesta del tipo Ramberg-Osgood, sugerida por Jennings,[11.31] o la respuesta de rigidez degradada sugerida por Clough [11.26] (véase la fig. 11.41). La ecuación

$$\frac{\varphi}{\varphi_{ch}} = \frac{M}{M_{ch}}\left(1 + \left|\frac{M}{M_{ch}}\right|^{r-1}\right) \tag{11.52}$$

define la curva esqueleto de Ramberg-Osgood, donde φ_{ch}, M_{ch}, y r son parámetros empíricos, que definen a la curva esqueleto. La rama de la curva que comienza desde un punto con coordenadas M_0/M_{ch}, φ_0/φ_{ch} está dada por

$$\frac{\varphi - \varphi_0}{2\varphi_{ch}} = \frac{M - M_0}{2M_{ch}}\left(1 + \left|\frac{M - M_0}{2M_{ch}}\right|^{r-1}\right) \tag{11.53}$$

La curva de rigidez degradada de Clough supone que la rigidez en la carga en cada ciclo depende de la deformación alcanzada en el ciclo anterior. Este modelo se basó en resultados de pruebas observadas. Para las vigas con áreas significativamente distintas superior e inferior de acero, y para columnas, el efecto de estrechamiento es más marcado, y puede ser necesario un ciclo cuya área sea todavía menor que las idealizaciones de la fig. 11.41*b*.

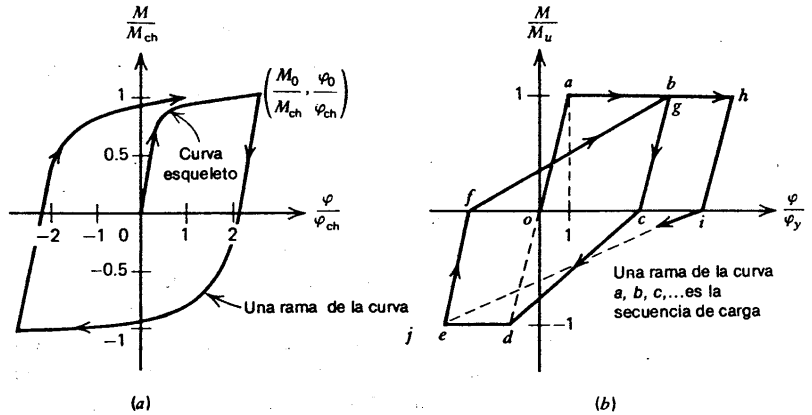


Fig. 11.41. Relaciones idealizadas de momento vs. curvatura. (a) Relación de Ramberg-Osgood. (b) Relación de rigidez degradante de Clough.

El perfil de los ciclos de momento - curvatura ilustrado en las figs. 11.40 y 11.41 indica que cuando comienza la cedencia, la deformación cambia de ciclo a ciclo. Como se definiera antes, el factor de ductilidad de desplazamiento es la relación del desplazamiento máximo al desplazamiento en primera cedencia, es decir que se utiliza el desplazamiento cuando comienza la cedencia en la primera excursión a la cedencia como desplazamiento de referencia, no el desplazamiento cuando comienza la cedencia en cada ciclo. El mismo tipo de definición se aplica a la curvatura y a la ductilidad rotacional, lo que permite que el factor de ductilidad indique claramente la deformación máxima.

En estudios de sistemas de un solo grado de libertad, Clough [11.26] comparó las estructuras simples con propiedades elastoplásticas y de rigidez degradada. Se encontró que para estructuras de periodos largos la propiedad de rigidez degradada no afecta significativamente las amplitudes iniciales de vibración durante los sismos, pero que la pérdida de rigidez producida por los grandes desplazamientos de cedencia reducía la respuesta subsecuente de desplazamiento de la estructura de rigidez degradada. Sin embargo, las estructuras de periodos breves ($T = 0.3$ seg) con propiedades de rigidez degradada tuvieron requerimientos de ductilidad de desplazamiento significativamente mayores que la estructura elastoplástica correspondiente. En consecuencia, las propiedades de rigidez degradada pueden no afectar materialmente la resistencia contra sismos de marcos de plantas múltiples de periodos largos; en efecto, la pérdida de rigidez reduce la respuesta subsecuente de los marcos. Empero, la resistencia de las estructuras de periodo breve puede reducirse por un comportamiento de rigidez degradada, cuya causa se puede apreciar en la fig. 11.20. Una reducción en la rigidez produce un aumento en el periodo que, para una estructura de periodo largo, provoca una reducción en la aceleración de respuesta, pero para una estructura de periodo corto, puede provocar un aumento apreciable en la aceleración de respuesta.

Durante las pruebas se ha observado la degradación de la rigidez de los marcos bajo cargas laterales alternadas. De acuerdo con los requerimientos del código [11.8] del ACI de 1971 para marcos dúctiles en zonas sísmicas se diseñó un modelo a escala 1:5 de una estructura de una sola crujía por lado y seis plantas (fig. 11.42) que se probó en la Universidad de Canterbury. [11.32] La carga sísmica de diseño siguió el código de cargas de Nueva Zelandia. La estructura del modelo se sujetó a una carga de gravedad de 27 lb/pie^2 (1290 N/m^2) en cada piso además de su propio peso, y se sujetó a cargas estáticas alternadas con la distribución mostrada en la fig. 11.43. En la fig. 11.44 se muestra la estructura probada. Las curvas para la carga lateral medida en función de la deflexión lateral en la parte superior del marco (fig. 11.45) muestran una degradación considerable de la rigidez durante los ciclos de la carga lateral. La pendiente de las líneas que conectan las extremidades de los ciclos de carga - deflexión, indica que la rigidez

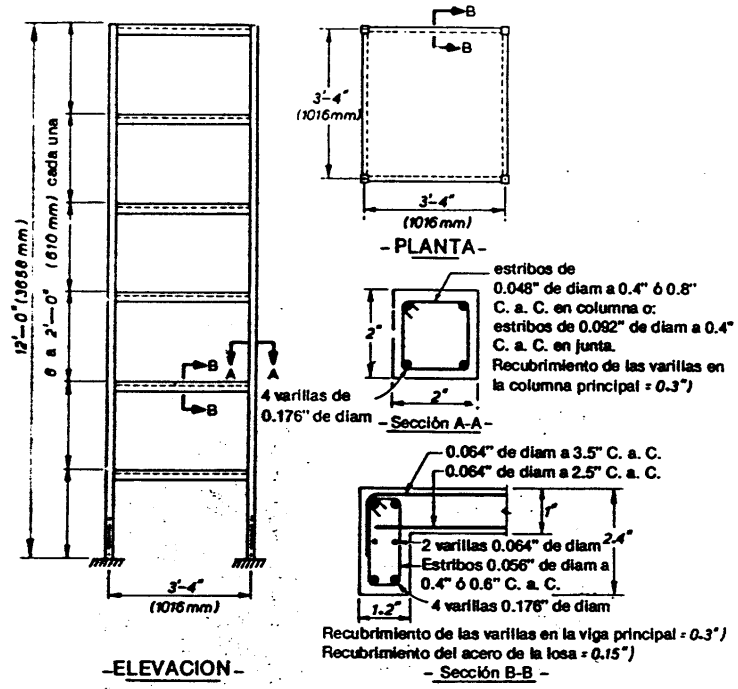


Fig. 11.42. Estructura de construcción de concreto reforzado de un modelo.[11-32]

del marco con respecto a la carga lateral en el último ciclo de carga fue de sólo aproximadamente 20% de la rigidez inicial. El perfil de los ciclos también es muy distinto del comportamiento elastoplástico y muestra redondeo y estrechamiento debido al efecto Bauschinger y al cierre de las grietas.

Las deformaciones a cortante y deslizamiento de anclaje que ocurren en el núcleo de las uniones de viga-columna también afectan el perfil de los ciclos histeréticos de carga - deflexión en los marcos. Los núcleos de las uniones de viga-columna generalmente están sujetos a esfuerzos cortantes muy elevados cuando se sujeta un marco a carga lateral de alta intensidad. Las cargas laterales alternadas hacen que la dirección de los esfuerzos cortantes se alterne, y la apertura y cierre de las grietas a tensión diagonal en el núcleo del alma puede conducir a una reducción en la resistencia a cortante y a un deterioro de la rigidez a cortante del núcleo de la unión. Dichas uniones necesitan estar reforzadas por acero transversal para ayudar a transmitir el cortante y confinar el concreto. Otra característica del comportamiento de la unión de viga-columna es la reducción posible en la efectividad del refuerzo a compresión. Una varilla en un miembro

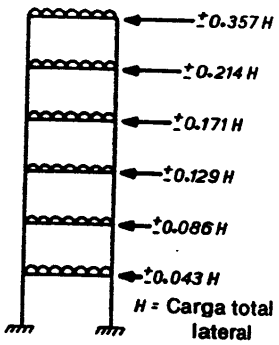


Fig. 11.43. Carga en estructura de modelo de construcción de concreto reforzado.[11.32]

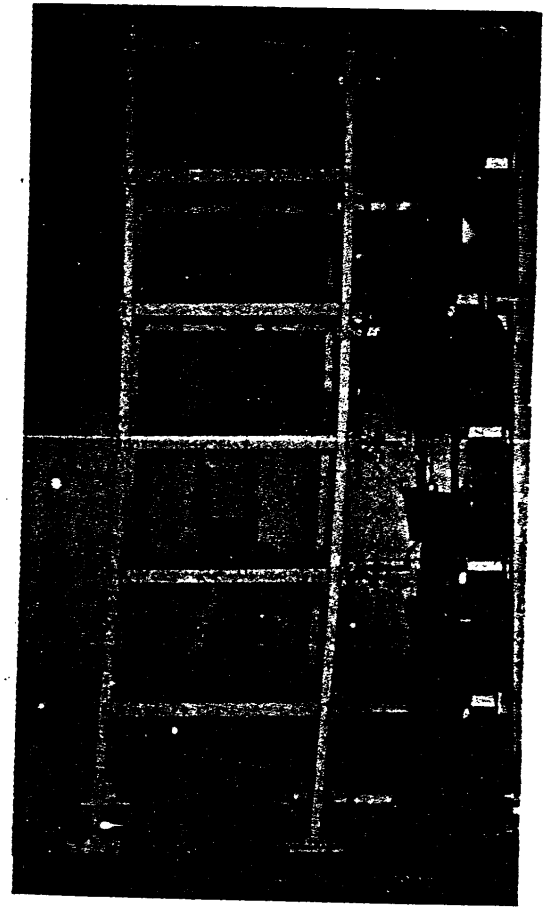


Fig. 11.44. Estructura de modelo de construcción de concreto reforzado bajo prueba.[11.32]

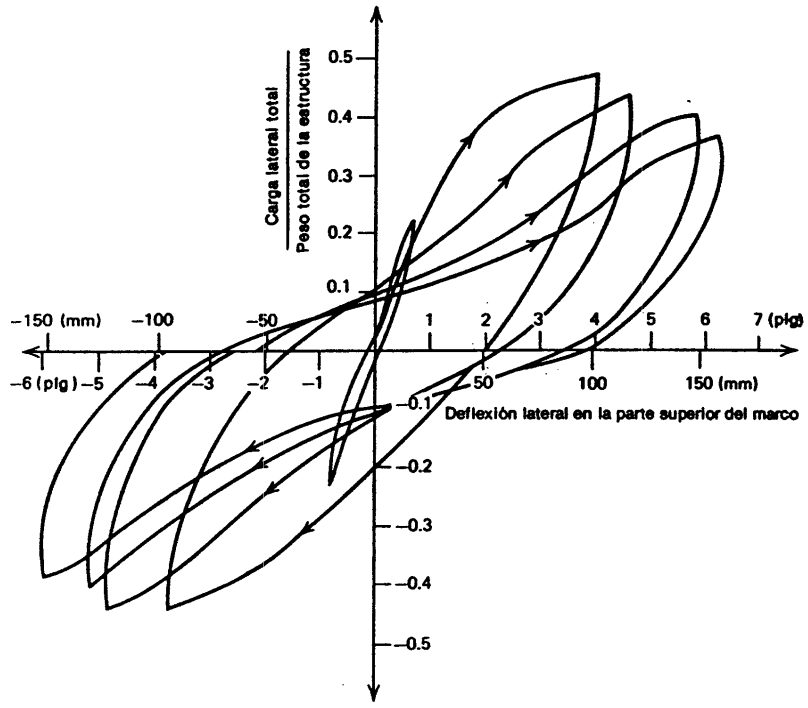


Fig. 11.45. Curvas de carga lateral, flambeo para estructura de modelo de construcción de concreto reforzado.[11.32]

que pase a través del núcleo de la unión estará en tensión de un lado del núcleo y en compresión del otro lado, como lo indica el diagrama de momentos flexionantes. En el límite, se puede esforzar la varilla para que ceda en tensión en un lado del núcleo de la unión y en compresión del otro lado. Para dicha varilla, se tiene que desarrollar el doble de la fuerza de cedencia de la varilla por adherencia dentro del núcleo de la unión, lo que a su vez requiere esfuerzos muy elevados de adherencia, y el deterioro de adherencia bajo las cargas alternadas puede producir un deslizamiento del refuerzo a través del núcleo de la unión. Si ocurre el deslizamiento, la tensión en la varilla puede anclarse en la viga del otro lado del núcleo de la unión. En consecuencia, el "acero a compresión" en la viga en la cara de la columna puede realmente estar a tensión, lo que reduce la resistencia, rigidez y ductilidad de la sección. En el capítulo 13 se estudia con detalle la resistencia y comportamiento de las uniones de viga-columna bajo condiciones de carga sísmica.

Efectos de carga biaxial

Los movimientos del terreno durante los sismos ocurren en direcciones aleatorias, aunque en el diseño sísmico se ha acostumbrado considerar que

la carga sísmica sólo actúa en las direcciones de los ejes principales de la estructura y solamente en una dirección a la vez. En realidad, un ángulo general de cargas sísmicas puede producir un caso muy extremo en una estructura de edificio, al grado que pueda ser sumamente difícil impedir la formación de articulaciones plásticas en columnas en el caso general de cargas. Armstrong,[11.33] Row,[11.34] y otros han estudiado los efectos de la carga biaxial.

Considérese una estructura simétrica de edificio con la planta como en la fig. 11.46*a* sujeta a cargas sísmicas laterales en una dirección general. Una planta del edificio se deflexiona en la dirección de la carga, como en la fig. 11.46*b*. Es evidente que no es necesario que el ángulo θ sea muy grande antes de que se imponga la cedencia en las vigas en ambas direcciones. Por ejemplo, si la estructura simétrica de la fig. 11.46*a* alcanza un

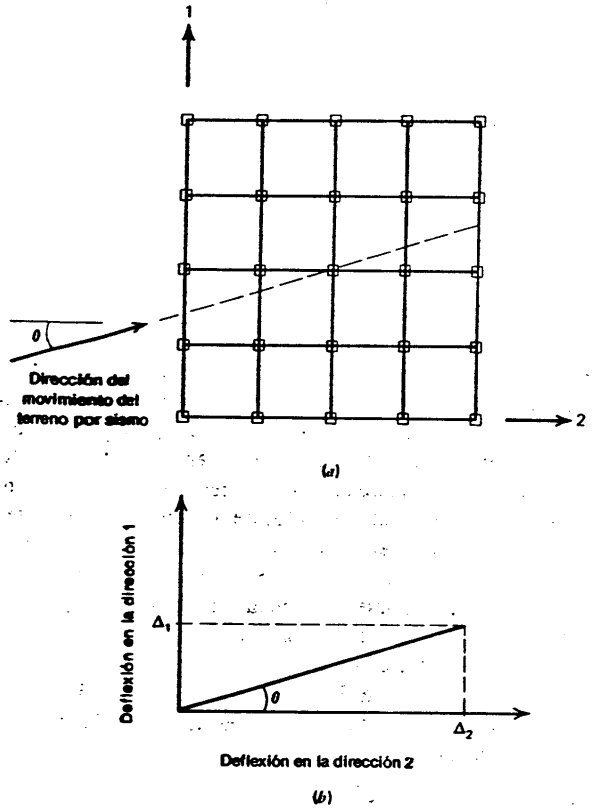


Fig. 11.46. Dirección general de carga de terremoto en construcción. (a) Planta de la construcción. (b) Flambeo horizontal de un piso.

factor de ductilidad de desplazamiento $\mu = \Delta_u/\Delta_y$ de 4 en la dirección 2, sólo requiere $\Delta_1 = \Delta_2/4$ para provocar cedencia también en la dirección 1. En consecuencia, para un factor de ductilidad de desplazamiento de 4, basta con inclinar la carga solamente un ángulo $\theta = \tan^{-1} 0.25 = 14°$ o con respecto a un eje principal del edificio para producir cedencia en ambas direcciones de un edificio simétrico. En consecuencia, la cedencia en ambas direcciones puede ocurrir simultáneamente para gran parte de la carga. La carga simultánea de los marcos en ambas direcciones tiene los siguientes efectos.

1. La flexión biaxial de las columnas reduce la resistencia a flexión de las mismas (véase la sección 5.4), pero el momento resultante del sistema de vigas aplicado a la columnas se aumenta. Por ejemplo, si ΣM_{ub}, es el momento aplicado por las vigas en cada dirección, el momento resultante aplicado biaxialmente a la columna será de $\sqrt{2}\,\Sigma M_{ub}$. Este aumento de 41% en el momento aplicado por las vigas, combinado con una reducción en la resistencia a flexión de la columna debida a la flexión biaxial, puede hacer que las columnas formen articulaciones plásticas antes que las vigas, lo que produce una posible falla frágil y colapso.

2. La fuerza cortante que actúa en las columnas será mayor que para la cedencia de los marcos en solamente una dirección (41% más elevada si hay vigas de igual resistencia en cada dirección). Las secciones cargadas a lo largo de una diagonal deben resistir esta mayor fuerza cortante.

3. En forma semejante, los núcleos de uniones en las intersecciones de vigas - columnas serán actuadas por fuerzas mayores cortantes. Además, con la articulación plástica de los miembros ocurriendo en dos direcciones, el confinamiento del núcleo de la unión proporcionado por las vigas del derredor puede ser menos efectivo.

Definición de la deformación máxima

Con frecuencia la definición de la deformación máxima produce dificultad cuando se calcula o mide la ductilidad disponible de una estructura o componente estructural sujeta a carga sísmica. La deformación máxima disponible no necesariamente es aquella deformación que corresponde a la capacidad de transmisión máxima de carga; en consecuencia, no es necesariamente la deformación que corresponde a una deformación de concreto a compresión de una fibra extrema específica o una deformación específica del acero. En cambio, si parece que la definición adoptada para la deformación máxima, debe depender de la cantidad de reducción en la capacidad de transmisión de carga que se pueda tolerar, o el grado de daño a la estructura que pueda tolerarse. Si no se puede tolerar el daño en absoluto (por ejemplo, en las estructuras prestigiadas o las que contienen químicos peligrosos), puede suceder que tenga que asegurarse una respuesta completamente elástica y que las resistencia del diseño deban ser

correspondientemente altas. En el otro extremo de la escala, el único criterio puede ser el de la supervivencia sin el colapso, en cuyo caso podrían tolerarse deformaciones muy grandes, que involucraran daño estructural quizás más allá de una posible reparación, durante la respuesta. Para los casos intermedios, podrían fijarse deformaciones límites. Muchos elementos y estructuras tienen una capacidad de deformación más allá del máximo de la curva de carga - deflexión. Cuando el criterio es la supervivencia sin colapso, es demasiado conservador definir la deformación máxima como la deformación que corresponde a la máxima capacidad de trasmisión de carga. Parecería razonable reconocer al menos parte de esta capacidad de deformación después de alcanzar la carga máxima y de definir la deformación máxima disponible como la deformación cuando se ha reducido la capacidad de transmisión de carga en una cantidad arbitraria después de la carga máxima. Por ejemplo, podría tolerarse una reducción de 10 a 20% en la capacidad de transmisión de carga máxima en muchos casos, pero la cantidad exacta dependería del caso específico. En casos importantes se podría utilizar un análisis dinámico paso a paso para determinar si cierto comportamiento histerético de carga - desplazamiento de la estructura fuera adecuado para sobrevivir al sismo.

11.6.7 Provisiones especiales del código del ACI para el diseño sísmico de marcos dúctiles

El código[11.8] del ACI de 1971 tiene un apéndice que contiene provisiones especiales para el diseño sísmico. De acuerdo con el comentario,[11.10] las provisiones "pretenden aplicarse a estructuras de concreto reforzado localizadas en una sona sísmica, donde el daño importante a la construcción tiene una alta probabilidad de ocurrir y diseñadas con una reducción apreciable en las fuerzas sísmicas de laterales totales debido al uso de sistemas resistentes a cargas laterales consistentes en marcos espaciales dúctiles resistentes a momentos . . .". Las provisiones especiales no son obligatorias si no se utilizan factores de reducción de carga para las fuerzas sísmicas laterales. Las provisiones se aplican a marcos con conexiones de vigas columna coladas en el sitio. En consecuencia, los requerimientos se aplican a marcos que "estarán sujetos a deformaciones laterales suficientes para crear articulaciones plásticas reversibles por la acción del sismo más intenso". Las provisiones se basan en las ediciones de 1967 y 1968 del código[11.23] SEAOC y otra información y resultados de investigación. Las provisiones para los marcos están divididas en secciones en miembros a flexión, columnas y uniones de vigas columnas. En seguida se resumen algunos de los tópicos más importantes.

Miembros a flexión

Se impone un límite superior a la cuantía ρ de acero a flexión. El valor máximo de ρ no debe exceder de 0.5 del valor que produzca condiciones balanceadas. La ec. 4.48 muestra que este requerimiento es

$$\rho \leq 0.5\left(\frac{0.85f'_c\beta_1}{f_y}\frac{0.003E_s}{0.003E_s + f_y} + \frac{\rho' f'_s}{f_y}\right) \tag{11.54}$$

También se hace provisión para asegurar que siempre esté presente una cantidad mínima de refuerzo superior e inferior. Tanto el acero superior como el inferior deben tener una cuantía de acero al menos de $200/f_y$, con la resistencia f_y de cedencia del acero en lb/plg^2 (1 lb/plg^2 = 0.00689 N/mm^2), en toda la longitud del miembro. También se hacen recomendaciones para asegurar que haya suficiente acero para dar margen a corrimientos imprevistos de los puntos de inflexión. En las conexiones de columnas, la capacidad de momentos positivos debe ser al menos de 50% de la capacidad de momentos negativos, y el refuerzo debe ser continuo a través de las columnas donde sea posible. En las columnas externas se debe terminar el refuerzo de las vigas en la cara remota de la columna, usando un gancho más cualquier extensión adicional necesaria para el anclaje.

La fuerza cortante de diseño se calcula en base a las cargas de gravedad del diseño en el miembro y a partir de la capacidad de momento de las articulaciones plásticas en los extremos del miembro producidas por el desplazamiento lateral. La fig. 11.47 ilustra el cálculo. El uso de la capacidad real de momento máximo significa que los cortantes inducidos por momento no pueden exceder los valores calculados. Se da refuerzo mínimo del alma en toda la longitud del miembro, y el espaciado no debe ser mayor que $d/4$ en las zonas de articulación plástica y $d/2$ en el resto de los lugares, donde d = peralte efectivo del miembro. Los estribos deben ser cerrados alrededor de las varillas que se requiera que actúen como refuerzo a compresión y en las regiones de articulación plástica, y el espaciado no debe exceder valores especificados. El acero a tensión no debe empalmarse mediante juntas en regiones de tensión o de esfuerzo alternado, a menos que haya una cantidad especificada de estribos cerrados.

Columnas

La cuantía de refuerzo vertical está limitada al intervalo de 0.01 a 0.06. Normalmente, en cualquier conexión de viga - columna la suma de las resistencias por momentos de la columna será mayor que la suma de las resistencias por momentos de la viga en cada plano principal en la conexión. Se encuentran excepciones a este requerimiento, cuando la suma de las resistencias por momentos de las secciones del núcleo confinado de la columna basta para resistir las cargas de diseño, o cuando las columnas restantes y miembros a flexión pueden resistir las cargas aplicadas en ese nivel por sí mismas. Se pretende que el requerimiento asegure que se formen articulaciones plásticas en las vigas en vez de en las columnas.

Las columnas deben diseñarse como miembros a flexión, si la máxima carga axial de diseño P_e de la columna es menor o igual a 0.4 por la capacidad P_b de carga axial de falla balanceada (o sea, $P_e \leq 0.4P_b$).

Si $P_c > 0.4P_b$, el núcleo de la columna queda confinado por refuerzo transversal especial, que consiste en aros o espirales sobre las regiones extremas de las columnas. Cada región del extremo es al menos igual al peralte global de la columna, o 18 plg (457 mm), o un sexto de la altura libre de la columna. Este acero transversal asegura ductilidad para el caso en que se formen articulaciones plásticas en los extremos de la columna. En los casos donde se utiliza una espiral, la relación volumétrica del acero en hélice debe ser al menos el dado por la ec. 5.6, es decir,

$$\rho_s = 0.45 \frac{f'_c}{f_y}\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) \tag{11.55}$$

pero no menor que $0.12f'_c/f_y$. Donde se utiliza refuerzo de aros rectangulares, el área requerida de varilla se calcula a partir de

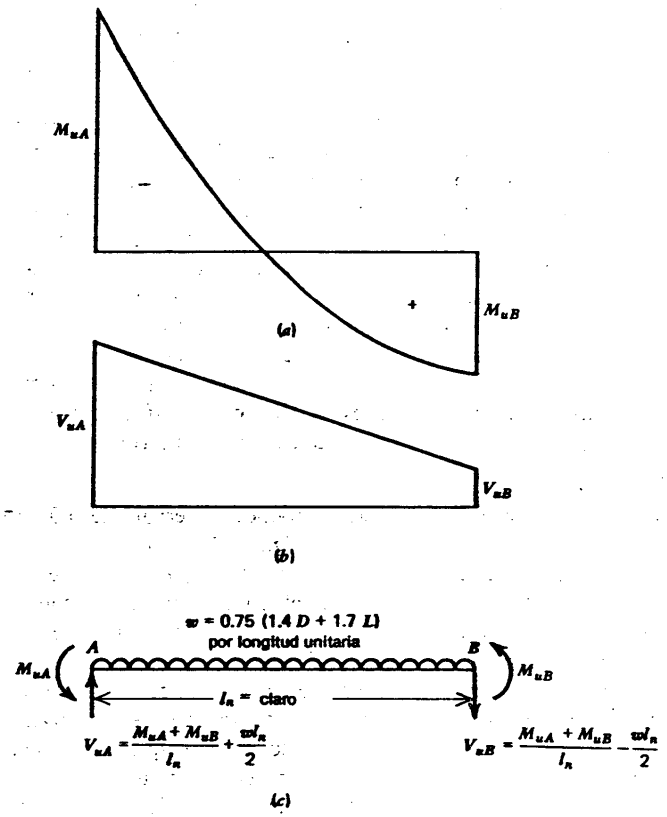


Fig. 11.47. Cálculo de la fuerza cortante con carga sísmica. (a) Diagrama de momento flexionante. (b) Diagrama de fuerza cortante. (c) Acciones en el miembro.

$$A_{sh} = \frac{l_h \rho_s s_h}{2} \tag{11.56}$$

donde A_{sh} = área de una rama de varilla transversal, l_h = longitud máxima no soportada del lado de un aro medida entre las ramas o amarres transversales suplementarios, s_h = separación de centro a centro de los aros [que no debe pasar de 4 plg (182 mm)] y ρ_s = relación volumétrica dada por la ec. 11.55, sustituyendo el área del núcleo rectangular a la parte exterior de los aros por A_c, y f_y = resistencia de cedencia de las varillas de los aros. Si se utilizan los amarres transversales suplementarios deben ser del mismo diámetro que la varilla de aro y deben agarrar a éste con un gancho. Se requiere acero transversal de confinamiento en toda la altura de las columnas que soportan muros de cortante discontinuos. La resistencia a cortante de una columna debe igualar al menos los cortantes aplicados en la formación de articulaciones plásticas en el marco, encontradas de la suma de los momentos en los extremos de la columna dividida entre la altura de la columna. El refuerzo por cortante en las columnas debe estar a una separación que no exceda $d/2$. Es preferible que los empalmes en el refuerzo vertical se hagan en las regiones de altura media de las columnas.

Conexiones de vigas - columnas

El refuerzo transversal especial a través de la conexión debe satisfacer las ecs. 11.55 u 11.56. Además, la conexión debe tener suficiente resistencia a cortante para igualar al menos las fuerzas cortantes inducidas en el núcleo de la unión por las fuerzas de cedencia del refuerzo de la viga y los cortantes de la columna. En la fig. 11.48 aparece un cuerpo libre de una conexión interior típica. La fuerza cortante por resistir es la fuerza cortante total que actúa en cada sección horizontal del núcleo de la unión. El Código recomienda ecuaciones para la resistencia a cortante similares para el mecanismo resistente al cortante en el concreto y para el refuerzo transversal en las columnas. En los casos donde las uniones tienen vigas por los lados de la columna cubriendo una proporción apreciable de la cara de ésta, el código permite que se reduzca en un medio el refuerzo por cortante requerido.

11.6.8 Estudio de las provisiones especiales del código del ACI para el diseño sísmico de marcos dúctiles

Miembros a flexión

Ductilidad de curvatura

En la sección 6.3.2 ya se estudió brevemente el factor de ductilidad de curvatura de los miembros a flexión garantizado por la ec. 11.54. Las figs.

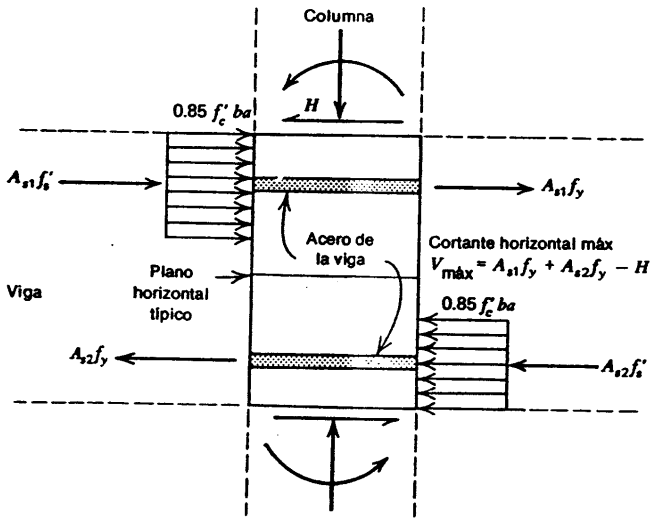


Fig. 11.48. Fuerzas cortantes horizontales que actúan en núcleo de unión durante carga sísmica.

6.9 y 6.10 dan los valores de φ_u/φ_y para secciones rectangulares con distintas resistencias de acero y concreto y cuantías de acero. Es evidente que en una articulación plástica de momento negativo en una viga en una cara de la columna ρ', será aproximadamente un medio de ρ o más, debido a que se requiere que la sección tenga una capacidad de momento positivo, que es al menos de un medio de la capacidad de momento negativo. Como se indica en la sección 6.3.2, si el acero a compresión está cediendo y $\rho' = 0.5\ \rho$, la ec. 11.54 garantiza que $\varphi_u/\varphi_y > 6$ para $\varepsilon_c = 0.004$. Una referencia a la ecuación de Corley 6.46 para ε_c indica que se pueden lograr valores de ε_c mayores que 0.006 dados valores típicos de b/z y la presencia de una cantidad moderada de estribos cerrados. Por tanto, la ec. 11.54 debe asegurar $\varphi_u/\varphi_y > 10$ en las articulaciones de momentos negativos, y se alcanzarán valores mayores con cierta reducción en la capacidad de momentos a deformaciones muy altas. En las articulaciones de momentos positivos habrá disponibles cantidades apreciables de acero a compresión y un patín más ancho que reduce el valor de ρ por tanto, el valor disponible de φ_u/φ_y debe ser igual al de una articulación de momento negativo. Las figs. 6.9 y 6.10 también indican que las secciones reforzadas con acero de grado ($f_y = 276$ N/mm^2) de acuerdo con la ec. 11.54 serán más dúctiles que las secciones reforzadas con acero de grado 60 ($f_y = 414$ N/mm^2) El aplastamiento del concreto comienza cuando la deformación del concreto en la fibra extrema excede aproximadamente 0.004, por lo que se puede esperar cierto daño en el miembro si se alcanzan deformaciones del concreto mayores que 0.004.

En la sección 11.6.4 se sugirió que las vigas de marcos bien diseñados deben poder lograr valores de φ_u/φ_y de al menos 4μ, donde μ es el factor de ductilidad de desplazamiento, que está relacionado con el factor R de reducción por medio de la ec. 11.38 u 11.39, donde R es la relación de la carga lateral estática de diseño a la carga de inercia de respuesta elástica. En esta base, la ec. 11.54 puede no ser siempre suficientemente restrictiva, por lo que sería mejor utilizar diagramas de ductilidad de curvatura, tales como las figs. 6.9 y 6.10, para asegurar si una sección dada es suficientemente dúctil.

Pandeo del refuerzo

En las regiones de articulación plástica a grandes deformaciones existe el peligro de que la ductilidad se reduzca debido al pandeo del refuerzo a compresión. Las provisiones requieren estribos cerrados espaciados a no más de 16 diámetros de varilla ó 12 plg (305 mm) en las regiones en que las varillas actúan como refuerzo a compresión. Las cargas cíclicas (alternadas) en el acero provocan una reducción en el módulo tangente de elasticidad del acero a bajos niveles de esfuerzo (véanse las figs. 2.27 a 2.29), debido al efecto Bauschinger, lo que podría conducir al pandeo de las varillas de refuerzo en compresión a niveles más bajos de carga que lo esperado. Se recomienda que en las zonas de articulación plástica el espaciado de los estribos cerrados que rodean al acero a compresión no exceda 6 diámetros de varilla del acero a compresión. Esta cuestión se estudia más extensamente en el capítulo 13.

Resistencia a cortante

Las especificaciones del ACI recomiendan el diseño del refuerzo a cortante por procedimientos normales, que no toman en cuenta el deterioro posible del cortante tomado por el concreto, bajo cargas alternadas de alta intensidad. La inversión de momentos en las regiones de articulación plástica provoca una reducción en la fuerza cortante transmitida por el concreto a través de la zona a compresión y en la fuerza cortante transmitida por la trabazón del agregado y la acción de dovela (véase la sección 7.9), lo que se debe a que en determinadas etapas existirán grietas abiertas a flexión de peralte total en el miembro en tales regiones, donde sólo un par de acero transmita el momento, habrá apertura y cierre alternos de las grietas a tensión diagonal. Esto señala la necesidad de ignorar el mecanismo resistente a cortante del concreto y de dar refuerzo al alma para resistir la fuerza cortante total en las regiones de vigas, donde es posible la cedencia del refuerzo a flexión bajo las cargas cíclicas. Esto implica suponer que $v_c = 0$ en esas regiones.

Columnas

Manera de evitar articulaciones plásticas

El código trata de hacer que las articulaciones plásticas se formen en las vigas en vez de en las columnas. requiriendo que la suma de las resistencias

de momentos de las columnas sea mayor que la suma de las resistencias de las vigas en cada plano principal de una conexión, excepto donde se hacen provisiones especiales. Desafortunadamente, este requerimiento no impide la articulación en las columnas por dos razones, como se verá a continuación.

De la sección 11.6.5 se sabe que los análisis dinámicos no lineales han demostrado que en distintas etapas durante un sismo pueden ocurrir puntos de inflexión bastante alejados de las alturas medias de las columnas. Las columnas pueden incluso estar en curvatura simple en ciertos momentos. En consecuencia, son posibles las distribuciones de momentos flexionantes tales como en la fig. 11.49 (véase también la fig. 11.35). En una unión típica, la suma de los momentos de la columna resiste los momentos totales de las vigas; en consecuencia, se tiene

$$\Sigma M_b = M_{b1} + M_{b2} = M_{c1} + M_{c2}$$

El mayor momento de la columna está dado por

$$M_{c1} = \Sigma M_b - M_{c2} \tag{11.57}$$

Si ΣM_{ub} es el momento total cuando las vigas están en la capacidad del momento máximo, y M_{uc1} es la capacidad del momento máximo de la columna 1, y se desea impedir la formación de una articulación plástica en la columna 1, el requerimiento es

$$M_{uc1} > \Sigma M_{ub} - M_{c2} \tag{11.58}$$

Si la columna permanece en doble curvatura, el caso límite ocurre cuando $M_{c2} \to 0$, y la ec. 11.58 requiere que $M_{uc1} > \Sigma M_{ub}$. Si las columnas están en

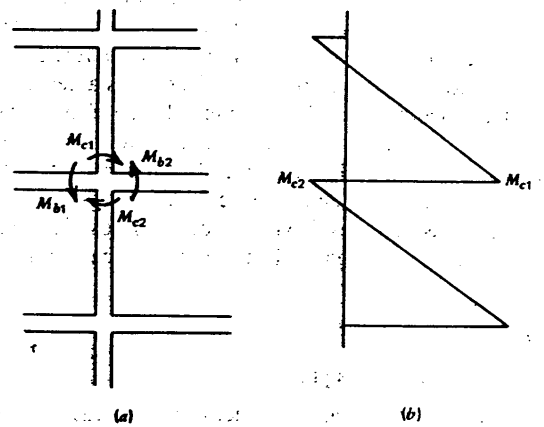


Fig. 11.49. Momentos en unión de viga-columna. (a) Parte del marco. (b) Momento flexionante de la columna.

curvatura simple, la ec. 11.58 requiere que $M_{uc1} > \Sigma M_{ub} + M_{c2}$. En consecuencia, el requerimiento del ACI de que la suma de las resistencias de columna exceda la suma de las resistencias de viga en una unión, no impide la articulación en columnas. Para asegurar que no se formen articulaciones plásticas en las columnas, se tendría que exigir que la resistencia a flexión de cada sección de columna fuera al menos igual a la suma de las resistencias a flexión de las secciones de viga en el plano de flexión, si el punto de inflexión puede estar en cualquier parte dentro de la altura del entrepiso. Si el punto de inflexión está fuera de la altura del entrepiso, se requeriría una capacidad todavía mayor de columna, lo que se estudia más extensamente en la sección 11.6.11.

En la sección 11.6.6 se estudió el efecto de las cargas de sismos en una dirección horizontal general que actúan en una estructura. Quedó evidente que si esa carga no actúa en una de las direcciones principales de la construcción, reduce la resistencia a flexión de las columnas, debido a la flexión biaxial y a la mayor contribución de momentos de viga a las columnas por efecto de las componentes de la resistencia de momento recibidas desde las vigas. Por ejemplo, si la flexión biaxial reduce la resistencia a flexión de la columna en 30% y aumenta la contribución del momento de las vigas en 40%, las columnas necesitan tener el doble de la resistencia que para el caso de flexión uniaxial. Esto puede ser especialmente serio en las columnas de las esquinas, donde además de los efectos a flexión biaxial, la descarga de la carga axial inducida por el sismo de dos vigas perpendiculares puede sumarse.

Es evidente que la sencilla especificación del ACI no impedirá la formación de articulaciones plásticas en las columnas. En el caso general, los corrimientos de los puntos de inflexión hacia afuera de las alturas medias de las columnas, y la carga no aplicada a lo largo del eje principal, necesitará de resistencias de columnas considerablemente mayores que el requerimiento del ACI para poder evitar articulaciones plásticas en las columnas. La dificultad de impedir la formación de articulaciones plásticas en las columnas es tal, que se debe considerar inevitable cierta articulación de columna. Nótese que la formación de articulaciones plásticas en sólo un extremo de las columnas de un piso no induce un mecanismo de traslación lateral de columna, a menos que se formen articulaciones plásticas debidas a momentos flexionantes de signo opuesto en las columnas de otro piso.

Ductilidad

Las provisiones requieren que las regiones de los extremos de las columnas se confinen mediante acero transversal especial, en forma de espirales o aros rectangulares, si la carga axial de diseño máximo excede 0.4 de la carga de falla balanceada. Las ecs. 11.55 u 11.56 dan la cantidad de acero transversal especial.

En la sección 5.2 se dedujo la ec. 11.55 para el acero espiral, que está basada en el requerimiento de que la resistencia de carga axial de una columna helicoidal, después de que se ha desprendido el recubrimiento de concreto, debe ser al menos igual a la resistencia de carga axial de la columna antes del desprendimiento. La ec. 11.56 para los aros rectangulares se diseñó para proporcionar en un núcleo rectangular el mismo confinamiento que existiría en el núcleo de una columna helicoidal equivalente, suponiendo que la eficiencia de los aros rectangulares como refuerzo de confinación sea de 50% del de las hélices. La fig. 11.50 ilustra la deducción de la ec. 11.56.[11.10] Para el cuerpo libre de la fig. 11.50*a* y la notación dada allí, se tiene

$$f_{ls} s d_s = 2 f_y A_{sp}$$

$$\therefore \quad f_{ls} = \frac{2 f_y A_{sp}}{s d_s}$$

donde s = paso de la espiral.
Para el cuerpo libre de la fig. 11.50*b*, se escribe

$$f_{lh} s_h l_h = 2 f_y A_{sh}$$

$$\therefore \quad f_{lh} = \frac{2 f_y A_{sh}}{s_h l_h}$$

donde s_h = separación de los aros.
Para confinamiento igual, se supone que se requiere $f_{lh} = 2 f_{ls}$

$$\therefore \quad \frac{2 f_y A_{sh}}{s_h l_h} = 2 \frac{2 f_y A_{sp}}{s d_s}$$

$$\therefore \quad A_{sh} = \frac{2 s_h l_h A_{sp}}{s d_s}$$

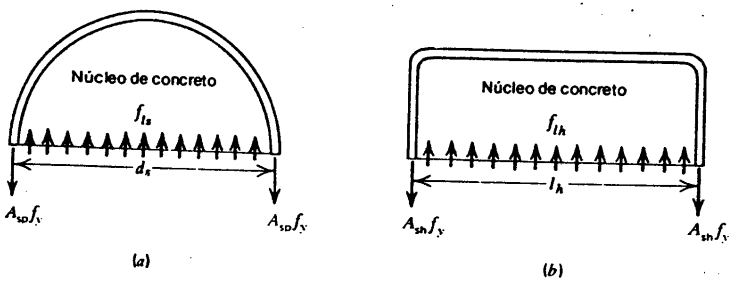


Fig. 11.50. Presión de confinamiento del concreto en columna. (a) De columna helicoidal. (b) De una columna de aros.

Para la columna espiral se tiene

$$\rho_s = \frac{A_{sp}\pi d_s}{s\pi d_s^2/4} = \frac{4A_{sp}}{s d_s} \qquad \text{o} \qquad A_{sp} = \frac{\rho_s s d_s}{4}$$

$$\therefore \quad A_{sh} = \frac{2 s_h l_h}{s d_s} \frac{\rho_s s d_s}{4} = \frac{l_h \rho_s s_h}{2}$$

que es la ec. 11.56. Cuando hay amarres transversales suplementarios, las especificaciones del ACI permiten la sustitución de la longitud no soportada del lado del aro por l_h en la ecuación anterior. Esto hace que se reduzca el área total de acero transversal a través de la sección. Por ejemplo, la introducción de dos armarres transversales suplementarios en la sección de la fig. 11.51 reduce a l_h en dos tercios; por tanto, de acuerdo con la ec. 11.56, reduciría a A_{sh} en dos tercios, y reduciendo el área total de acero transversal de la sección transversal XX en 33%. Esto es para dar cierto reconocimiento al confinamiento más favorable que se obtiene de la longitud libre reducida del lado del aro.

Conviene señalar que las ecs. 11.55 y 11.56 no necesariamente producen adecuada ductilidad de curvatura. Estas dos ecuaciones se basan en el criterio de preservar la resistencia máxima de columnas cargadas axialmente después del desprendimiento del recubrimiento de concreto, en vez de enfatizar la deformación máxima de columnas cargadas excéntricamente. Ya que la ductilidad del concreto se aumenta por la presencia del acero de confinamiento, esas ecuaciones producen un mejor comportamiento de columna. Sin embargo, se podría hacer un mejor intento por determinar la cantidad de acero de confinamiento realmente necesario para lograr las curvaturas máximas requeridas para el caso usual de carga excéntrica. Ni

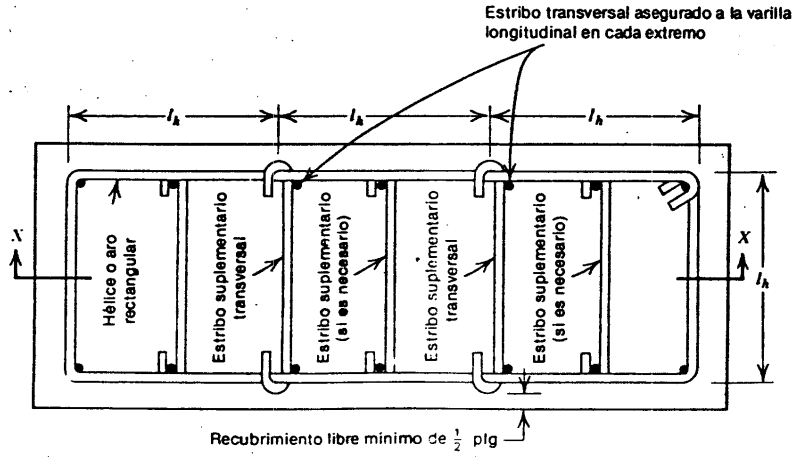


Fig. 11.51. Sección de columna con aros y tirantes transversales suplementarios.[11.10]

siquiera es seguro que la carga axial no se reduzca después del desprendimiento. La distribución uniforme de esfuerzo lateral en el concreto debida a los aros rectangulares (fig. 11.50*b*) ciertamente no es posible, ya que los aros podrán aplicar sólo una presión de confinamiento cerca de las regiones de las esquinas, debido a la pequeña rigidez a flexión de la varilla del aro. Además, no hay garantía de que el acero del aro alcance la resistencia de cedencia. En la sección 2.1.3 se estudia el comportamiento del concreto confinado por aros rectangulares, y es evidente que éstos pueden producir sólo un ligero aumento en la resistencia, aunque la ductilidad aumente significativamente. Las ecuaciones también son muy severas en las columnas que tienen pequeñas secciones transversales. Por ejemplo, si $f'_c = 4000$ lb/plg^2 (27.6 N/mm^2), $f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 N/mm^2) y el recubrimiento de concreto para los aros es de $1\frac{1}{2}$ plg (38 mm), el espaciado de aros cuadrados de $\frac{3}{4}$ plg (19.1 mm) de diámetro indicado por la ec. 11.56 es de 3.2 plg (80 mm) para columnas cuadradas de 24 plg (610 mm) ($\rho_s = 0.0138$) y 3.0 plg (77 mm) para columna cuadrada de 12 plg (305 mm) ($\rho_s = 0.0351$). Se requiere que la sección más pequeña tenga una presión de confinamiento mucho mayor en el concreto, debido al gran efecto de la relación A_g/A_c en la expresión de ρ_s. Por tanto, la ecuación puede ser demasiado conservadora para las columnas que tengan pequeñas secciones transversales. Estas ecuaciones pueden sobrestimar el efecto del desprendimiento del concreto en el contenido de acero transversal.

Es interesante notar que las provisiones del código SEAOC[11.23] para el acero transversal especial para el confinamiento sólo requieren dos tercios del acero transversal dado por la ec. 11.56, cuando se utilizan aros rectangulares simples sin amarres transversales suplementarios. La diferencia entre las ecuaciones del SEAOC y del ACI se hace más pequeña cuando se utilizan amarres transversales suplementarios.

Es claro que las ecs. 11.55 y 11.56, y los requerimientos del SEAOC, se pueden considerar sólo como guía aproximada a la cantidad de acero requerida para el comportamiento dúctil. En la sección 11.6.9 se describe un enfoque más racional para determinar la cantidad de acero de confinamiento requerido para la ductilidad adecuada en base a las relaciones de momento - curvatura.

Resistencia a cortante

Las especificaciones del ACI requieren que el refuerzo transversal sea suficiente para asegurar que la capacidad a cortante del miembro sea al menos igual a la fuerza cortante en la formación de las articulaciones plásticas en el marco. Se supone que el refuerzo transversal puede representar los papeles de refuerzo a cortante y refuerzo de confinamiento simultáneamente. Se supone que el cortante es transmitido por el mecanismo resistente a cortante del concreto, como en el procedimiento normal de diseño; por tanto, las especificaciones no toman en cuenta el deterioro posible de la capacidad a cortante del concreto bajo las cargas alternadas. Como con

las vigas, parece que la contribución del concreto a la resistencia a cortante, v_c, en las zonas de articulación plástica debe considerarse igual a cero y que la fuerza cortante sea transmitida totalmente por el refuerzo del alma. Entre las articulaciones plásticas (es decir, lejos de los extremos de las columnas) se puede considerar que el concreto transmite el cortante. El requerimiento de que el refuerzo del alma dé toda la capacidad de cortante en las articulaciones plásticas, puede ser conservador para cargas elevadas de compresión axial, por lo que la evidencia experimental futura puede revelar que el concreto puede transmitir cierto cortante si es alta la carga a compresión axial. Puede ser razonable ignorar el cortante transmitido por el concreto cuando $P_u < P_b$ y dejar que el concreto transmita un medio de v_c normal cuando $P_u > P_b$.

Las provisiones tampoco mencionan las fuerzas elevadas a cortante que pueden inducirse en una columna, cuando la carga de terremotos actúa en una dirección general de la estructura. Se aumenta la entrada de momentos a la columna (véase la sección 11.6.6), lo que produce mayor fuerza a cortante, la que debe resistir una sección cargada en la dirección de su diagonal. La resistencia a cortante de las secciones rectangulares cargadas diagonalmente no se ha investigado adecuadamente, sin embargo, es posible evaluar la contribución del refuerzo del alma a la resistencia a cortante, sumando las componentes de las fuerzas de las varillas del alma, intersectadas por la grieta a tensión diagonal.

Juntas de viga - columna

Las especificaciones indican que la resistencia a cortante del núcleo de la junta puede calcularse sumando la contribución del mecanismo resistente a cortante del concreto v_c y el refuerzo transversal, usando las mismas ecuaciones de resistencia a cortante que para las columnas. Las pruebas recientes que se estudian en el capítulo 13 han indicado que dicho procedimiento es insatisfactorio cuando se aplica carga de alta intensidad cíclica (alternada) a la junta, debido a que se quiebra el concreto en el núcleo de la misma. En la actualidad no se comprende plenamente el mecanismo de resistencia a cortante de los núcleos de juntas de concreto reforzado, aunque parecería erróneo basar un procedimiento de diseño para núcleos de las juntas en resultados de pruebas obtenidos de los miembros. Las evidencias experimentales recientes estudiadas en el capítulo 13 indican que la grieta crítica corre de esquina a esquina del núcleo de la junta, no a 45° de los ejes de los miembros que se intersectan; consecuentemente, un mejor procedimiento de diseño parecería dar suficiente refuerzo transversal para resistir la fuerza cortante total a través de la grieta de esquina a esquina.

Por otra parte, las especificaciones no mencionan las elevadas fuerzas cortantes que se inducen en un núcleo de junta, cuando el sismo actúa en una dirección general de la estructura, lo que produce carga concurrente en ambos ejes del edificio. La fuerza cortante de la junta en el caso ge-

neral, es mayor que para la carga sísmica a lo largo de un eje del edificio. Adicionalmente, tal carga general, que provoca cedencia en el sistema de viga en dos direcciones simultánemante, puede significar que el confinamiento de la junta por las vigas que la rodean no es tan eficiente como lo implican las especificaciones.

En el capítulo 13 se estudian con detalle las investigaciones recientes y procedimientos de diseño para núcleos de juntas.

11.6.9 Un procedimiento alterno para calcular el refuerzo transversal especial para el confinamiento en las zonas de articulación plástica de columnas

El enfoque

Las consideraciones anteriores, estudiadas en la sección 11.6.8, han indicado que se debe aceptar cierta articulación plástica de las columnas como inevitable durante un sismo sumamente intenso, debido a que la carga sísmica actuando simultáneamente en las direcciones de ambos ejes principales del edificio, y la presencia de puntos de inflexión cerca de los extremos de las columnas, producirán momentos flexionantes elevados en las columnas. Para impedir articulaciones plásticas en las columnas se requerirían columnas mucho más fuertes que las vigas. Además la presencia de muros y variaciones no intencionales en la resistencia de los miembros podría ocasionar articulaciones en las columnas. Por tanto, las zonas potenciales de articulación plástica de las columnas deben poder comportarse en forma dúctil.

Como se expresara antes, el enfoque del código existente para determinar el acero especial transversal se basa en un criterio de mantener la resistencia de carga axial de la columna después que se desprenda el recubrimiento de concreto. Este procedimiento no relaciona los requerimientos del detallado con las capacidades de rotación plástica requerida en las secciones de columna cargada excéntricamente.

La relación momento - curvatura da una medida de la capacidad de rotación plástica de las secciones, y un enfoque basado en asegurar una relación momento - curvatura satisfactoria podría formar una base racional para detallar las columnas por ductilidad. Un problema en la evaluación del factor φ_u/φ_y de ductilidad de curvatura disponible a partir de una relación momento - curvatura es la definición de la curvatura φ_u máxima. Es evidente que muchas secciones mantienen capacidad considerable para la rotación plástica más allá del máximo de la curva momento - curvatura, y como se estudia en la sección 11.6.6, sería razonable reconocer esto y definir φ_u como la curvatura, cuando se ha reducido la capacidad de momentos de la sección a 80-90% del momento máximo. Por lo demás, de consideraciones anteriores, se sabe que las columnas en las bases deberían poder alcanzar valores de φ_u/φ_y hasta de 4μ, donde μ es el factor de ductilidad de desplazamiento. Un criterio razonable sería requerir que las zonas de articulación plástica potencial de las columnas pudieran lograr un valor de φ_u/φ_y de al menos 4μ lo que daría suficiente ductilidad, a menos que hubiera elementos sobrerreforzados o subrreforzados que impusieran la articulación de columna en un piso. La deducción de relaciones momento - curvatura, a partir de las curvas esfuerzo - deformación del concreto confinado y el acero longitudinal, permite aplicar este criterio y determinar la cantidad requerida de refuerzo transversal.

Análisis de momento - curvatura

Al deducir las características momento - curvatura de secciones de columna de concreto reforzado rectangulares cargadas excéntricamente, se toman en cuenta los siguientes factores:

1. Nivel de carga axial en la columna.
2. Cuantía de acero longitudinal.
3. Proporción de sección de columna confinada.
4. Características esfuerzo - deformación del material.

Idealmente, también deberían considerarse los efectos de las cargas cíclicas, pero la complejidad del análisis de la carga cíclica dificulta estudiar una extensa diversidad de casos. En este estudio se analizan las cargas monotónicas, lo que debe dar una evaluación razonable en primera instancia.

En las secciones 6.2.2 y 6.5.3 se describen las suposiciones hechas en el análisis teórico de momento - curvatura, así como el método de análisis. Se supone que el refuerzo de acero longitudinal tiene la curva esfuerzo - deformación definida por las ecs. 6.28 a 6.32. Esta curva, que incluye el efecto de endurecimiento por deformación, está ilustrada en la fig. 2.25*c*. Se supone que el concreto confinado por aros rectangulares tiene la curva de esfuerzo - deformación en compresión definida por las ecs. 2.6 a 2.11 (véase la fig. 2.18). La pendiente de la rama descendente de la curva para el concreto confinado está definida por un parámetro Z dado por

$$Z = \frac{0.5}{\frac{3}{4}\rho_s\sqrt{\frac{b''}{s_h}} + \frac{3 + 0.002f'_c}{f'_c - 1000} - 0.002} \qquad (11.59)$$

donde ρ_s = relación del volumen del refuerzo del aro transversal al volúmen del núcleo de concreto medido al exterior de los aros, b'' = ancho del núcleo confinado medido al exterior de los aros, s_h = separación de los aros transversales y f'_c = resistencia de cilindro a compresión del concreto en lb/plg^2 (1 lb/plg^2) = 0.00689 N/mm^2). Se supone que la curva esfuerzo - deformación para el concreto de recubrimiento (fuera de los aros) en compresión es idéntica a la del concreto confinado hasta una deformación de 0.004. Se supone que a deformaciones mayores que 0.004 se ha despren-

dido el concreto de recubrimiento y que tiene resistencia cero. Se ignora la resistencia a tensión del concreto.

En la práctica se necesitan distintas disposiciones de acero transversal que comprenden el traslape de aros, o aros con tirantes transversales suplementarios en todas, menos las secciones de columnas pequeñas para dar apoyo lateral a las varillas longitudinales en la sección. En la sección 6.5.2 se estudió la definición de Z para ese caso, y en la fig. 11.52 se muestra una sección de columna con una distribución posible del acero. Para esta distribución se puede calcular Z suponiendo b'' = ancho del lado de un aro, s_h = separación de los conjuntos de aros traslapados y ρ_s = relación del volumen de un aro al volumen del núcleo de concreto dentro de ese aro. Faltan datos experimentales sobre la eficiencia de las distintas distribuciones del acero transversal, por lo que provisionalmente es prudente adoptar definiciones conservadoras.

En la asección 6.2.2 se describió el procedimiento para realizar el análisis del momento - curvatura. Un enfoque conveniente es dividir la sección en una cantidad de láminas discretas que tengan la orientación del eje neutro, y remplazar el acero longitudinal por un tubo delgado equivalente (ilustrado en la fig. 6.19 y descrito en el ejemplo 6.3). Las acciones internas se determinan sumando las contribuciones de las láminas y la relación momento - curvatura que se encontró por un procedimiento iterativo y aumentando sucesivamente el valor de la deformación de la fibra extrema del concreto.

La fig. 6.20 muestra las curvas momento - curvatura que se obtuvieron de una columna reforzada con acero longitudinal de grado 40 (f_y = 276 N/mm^2) Algunas de las conclusiones obtenidas del análisis[11.35, 11.36] de una diversidad de variables son como sigue:

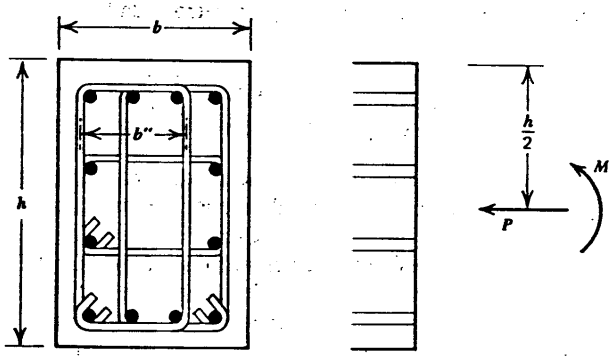


Fig. 11.52. Sección de columna y acciones externas.

1. Un elevado contenido de acero transversal conduce a mejores características de esfuerzo - deformación del concreto, lo que permite mantener mejor la capacidad de momento a elevadas curvaturas.
2. Un elevado contenido de acero longitudinal significa que se depende menos de la capacidad del concreto, por lo que se puede mantener mejor la capacidad de momento a curvaturas elevadas.
3. Una elevada carga axial significa que el concreto transmite una gran proporción de la carga; por tanto, puede no mantenerse bien la capacidad de momento a curvaturas elevadas.
4. El acero longitudinal de alta resistencia con endurecimiento prematuro por deformación mantiene mejor la capacidad de momento que el acero suave en que no comienza el endurecimiento por deformación sino hasta deformaciones muy elevadas.
5. El concreto de alta resistencia produce mayor reducción en la capacidad de momento al desprenderse su recubrimiento.
6. Como en las secciones pequeñas, una proporción grande de concreto de recubrimiento produce mayor reducción en la capacidad de momento al desprenderse aquel.

Enfoque para determinar el acero transversal requerido por ductilidad

Los requerimientos de acero transversal para las columnas se pueden evaluar a partir de las curvas momento - curvatura determinando los valores de Z requeridos para lograr adecuada ductilidad. Como se estudió antes, el requerimiento por diseño sísmico podría ser un factor φ_u/φ_y de ductilidad de curva igual a 16, a una capacidad de momento no menor de 0.85 de la capacidad de momento máximo, si el factor de ductilidad de desplazamiento es 4.

Norton[11.35] realizó una investigación analítica de columnas cuadradas utilizando el enfoque recién descrito. Las figs. 11.53 a 11.55 muestran curvas típicas de momento - curvatura obtenidas para flexión alrededor de un eje principal, manteniendo constante la carga axial en distintos niveles. En cada curva, A denota el inicio del desprendimiento del recubrimiento de concreto (deformación de la fibra extrema de concreto de 0.004), y C y T denotan el inicio del endurecimiento por deformación del acero a compresión y tensión respectivamente. Las curvas están dibujadas a partir de la primera cedencia del acero a tensión. Se supuso que el acero de grado (f_y = 414 N/mm^2) tiene las siguientes propiedades (véase la notación de la fig. 2.25c): $\varepsilon_{sh} = 4\varepsilon_y$, $\varepsilon_{su} = 0.12$ y $f_{su} = 1.58f_y$. El acero longitudinal estaba distribuido alrededor del perímetro de la sección. Se supuso que el recubrimiento al exterior de los aros es de c = 1.5 plg (38 mm). Se han obtenido valores de Z que satisfacen el mencionado requerimiento[11.35] de curvatura última (véase la tabla 11.3) a partir de las curvas momento - ductilidad curvatura de las figs. 11.53 a 11.55 y otras para distintos ta-

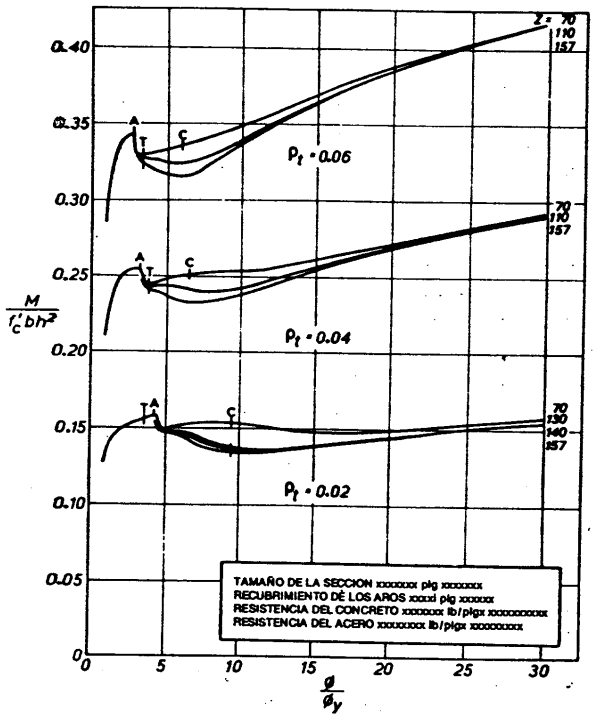


Fig. 11.53. Curvas de momento vs. ductilidad para $P = 0.1f'_c A_g$.

maños de secciones. Cuando no se pudo satisfacer el requerimiento de curvatura máxima con cantidades razonables de acero transversal, no se indicó valor de Z en la tabla. El análisis supone que el acero a compresión no se pandea. La deformación calculada en el acero a compresión en $\varphi_u/\varphi_y = 16$ para cada caso está incluida en paréntesis junto a los valores de Z en la tabla 11.3. Las deformaciones del acero a compresión son grandes; por tanto, los aros deben estar espaciados estrechamente para evitar el pandeo.

Se pueden utilizar los valores de Z de la tabla 11.3 para diseñar el refuerzo transversal para columnas dúctiles con las propiedades especificadas de los materiales. Como se estudió en la sección 6.5.2, se puede calcular el valor de Z correspondiente a un arreglo dado de aros utilizando la ec. 11.58. Por ejemplo, para el arreglo de tres aros traslapados que aparecen en la sección de columna de la fig. 11.52, si el diámetro del aro es de $\frac{1}{2}$ plg (12.7 mm), el espaciado de cada conjunto de aros es de $s_h = 4$ plg (102 mm), las dimensiones de las columnas son $b = h = 20$ plg (508 mm), el espesor del zuncho $c = 1.5$ plg (38 mm), la resistencia del concreto $f'_c = 4000$ lb/plg (27.6 N/mm^2), y suponiendo que $b'' = \frac{2}{3}(b - 2c)$, la ec. 11.59 da

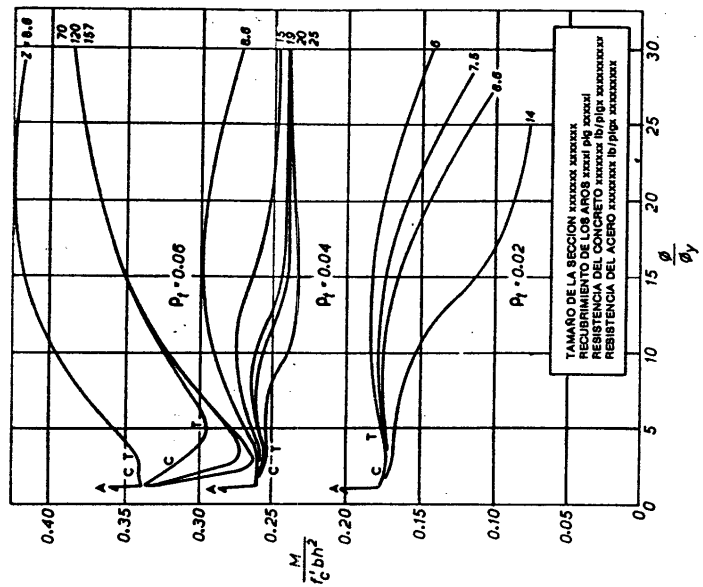


Fig. 11.55. Curvas de momento vs. ductilidad para $P = 0.5f'_c A_g$.

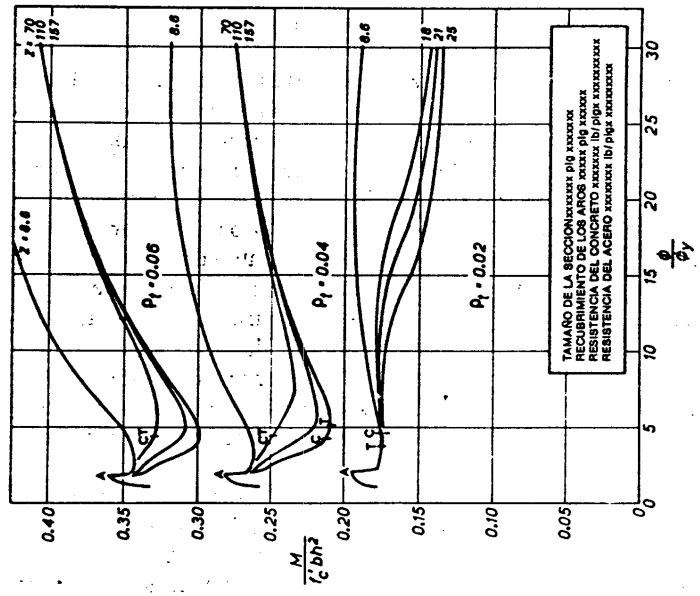


Fig. 11.54. Curvas de momento vs. ductilidad para $P = 0.3f'_c A_g$.

Tabla 11.3 Valores aproximados de Z y deformación[a] a comprensión del acero requerida para una capacidad de momentos de 85 % de la capacidad de momentos máximos a $\varphi_u/\varphi_y = 16$ para concreto de $f'_{c2} = 4000$ lb/plg^2 (27.6 N/mm^2), acero longitudinal $f_y = 60{,}000$ lb/plg^2 (414 N/mm^2), distribuido uniformemente alrededor del perímetro de la sección zuncho a aros $c = 1.5$ plg (38 mm)

Tamaño de la sección	Razón de acero longitudinal $\rho_t = A_{st}/A_g$	Nivel de carga axial, P/f'_cA_g			
		0.1	0.2	0.3	0.5
Cuadrada de 15 plg (381 mm)	0.02	55 (0.019)	16 (0.023)	5 (0.030)	—
	0.04	127 (0.025)	127 (0.033)	25 (0.037)	9 (0.074)
	0.06	127 (0.027)	127 (0.034)	127 (0.040)	127 (0.073)
Cuadrada de 20 plg (508 mm)	0.02	90 (0.021)	28 (0.025)	14 (0.032)	—
	0.04	140 (0.026)	140 (0.033)	70 (0.041)	13 (0.067)
	0.06	140 (0.027)	140 (0.033)	140 (0.040)	140 (0.068)
Cuadrada de 30 plg (762 mm)	0.02	157 (0.023)	39 (0.028)	21 (0.034)	7.5 (0.057)
	0.04	157 (0.025)	157 (0.033)	157 (0.042)	19 (0.059)
	0.06	157 (0.027)	157 (0.033)	157 (0.041)	157 (0.061)

[a] La deformación a compresión del acero aparece dentro de paréntesis junto a los valores de Z

$$Z = \frac{0.5}{0.75 \times \dfrac{2(17 + 11.33)0.2}{17 \times 11.33 \times 4}\sqrt{\dfrac{11.33}{4}} + \dfrac{3 + 8}{3000} - 0.002} = 24.8$$

La tabla 11.4 da algunos valores de Z calculados así para el arreglo de tres aros traslapados en la fig. 11.52 para distintos diámetros de aros y espaciados de conjuntos de aros. También se pueden encontrar los valores de Z para otros diámetros y espaciados de Z. Es posible compilar tablas semejantes a la tabla 11.4 para otras distribuciones de aros y resistencias del concreto. Se pueden utilizar las tablas 11.3 y 11.4 para diseñar el acero transversal de columnas con las propiedades de materiales y distribución de aros de dichas tablas. Por ejemplo, una columna cuadrada de 15 plg (381 mm) con $A_{st}/A_g = 0.04$ y $P = 0.3f'_cA_g$ requeriría $Z = 25$ de acuerdo con la tabla 11.3, y aros de 1/2 plg (12.7 mm) de diámetro a centros de 4 plg (102 mm) satisfarían este requerimiento de acuerdo con la tabla 11.4.

Se pueden determinar los valores de Z requeridos para otras resistencias de acero y concreto. Norton[11.35] y también Park y Sampson[11.36] han reportado otros resultados.

El ACI 318-71 requiere de acero transversal especial en columnas, cuando el nivel de la carga axial excede de $0.4P_b$ donde P_b es la carga axial cuando se alcanza simultáneamente una deformación a compresión de la fibra extrema del concreto de 0.003 y cedencia del acero a tensión. Una carga axial de $0.4P_b$ corresponde a intensidades de carga que varían de $0.12f'_cA_g$

Tabla 11.4 Valores de Z para secciones cuadradas con tres aros rectangulares traslapados: Longitud no soportada del lado del aro = 2/3 × dimensión de núcleo confinado, $f'_c = 4000$ lb/plg^2 (27.6 N/mm^2) y $c = 1.5$ plg (38 mm)[a]

Acero transversal, diámetro a centros	Tamaño de la sección		
	15 plg (381 mm)	20 plg (508 mm)	30 plg (762mm)
$\frac{3}{8}$ plg (9.5 mm) a 12 plg (305 mm)	125	138	155
$\frac{3}{8}$ plg (9.5 mm) a 4 plg (102 mm)	36	42	51
$\frac{1}{2}$ plg (12.7 mm) a 4 plg (102 mm)	21	25	31
$\frac{5}{8}$ plg (15.9 mm) a 4 plg (102 mm)	14	16	20
$\frac{3}{4}$ plg (19.1 mm) a 4 plg (102 mm)	9.9	12	15

[a] ACI 318-71 requiere para $T > 0.4P_b$ aros de 5/8 plg (15.9 mm) de diámetro con $f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 M/mm^2) espaciados como sigue:
para sección de 15 plg (381 mm), espaciado = 3.1 plg (79 mm), que da $Z = 9.6$
para sección de 20 plg (508 mm), espaciado = 3.2 plg (81 mm), que da $Z = 12$
para sección de 30 plg (762 mm), espaciado = 2.9 plg (74 mm), que da $Z = 13$

para una sección cuadrada de 10 plg (254 mm) con $f'_c = 6$ Kip/plg (41.4 N/mm^2) y $f_y = 60$ kip/plg^2 (414 N/mm^2) a $0.18f'_cA_g$ para una sección cuadrada de 30 plg (762 mm) con $f'_c = 4$ kip/plg^2 (27.6 N/mm^2) y $f_y = 40$ kip/plg^2 (276 N/mm^2). Como apéndice a la tabla 11.4 se muestran los valores de Z que corresponden a los requerimientos de acero transversal especial del ACI 318-71 para la distribución de tres aros traslapados. Una comparación con los valores de Z indicados en la tabla 11.3 para la carga axial dentro del intervalo de $0.2f'_cA_g$ a $0.5f'_cA_g$ muestra que las provisiones del ACI son conservadoras, excepto para columnas cargadas fuertemente con pequeñas secciones transversales y pequeñas cuantías de acero longitudinal. Los resultados obtenidos antes[11.36] para una sección con acero suave ($f_y = 40{,}000$ lb/plg^2 (276 N/mm^2)) de refuerzo longitudinal indicaron una mayor demanda de acero transversal que la tabla 11.3.

Comentarios al enfoque

El enfoque recién presentado depende mucho de la demanda de curvatura máxima y de la definición de la curvatura máxima, así como de las curvas supuestas esfuerzo - deformación para el concreto confinado y acero.

La curva supuesta esfuerzo - deformación para el acero de grado 60 ($f_y = 414$ N/mm^2) utilizada para obtener los resultados tabulados y graficados de la tabla 11.3 y figs. 11.53 a 11.55 incluye el efecto de endurecimiento por deformación, que se supuso que comienza en 4 veces el valor de la deformación a cedencia. El inicio prematuro del endurecimiento por deformación del acero longitudinal permite mantener mejor la

capacidad de momento de la sección que para el acero sin endurecimiento por deformación prematura. Se puede considerar insensato confiar en el endurecimiento por deformación, ya que las especificaciones del acero no cubren la etapa en la que comienza el endurecimiento por deformación. Sin embargo, es realista incluir su efecto.

Además el acero transversal actúa simultáneamente como refuerzo a cortante y da restricción contra el pandeo lateral del refuerzo longitudinal. Siempre verifíquese que haya suficiente acero transversal que actúe como refuerzo a cortante. Para controlar el pandeo de las varillas longitudinales, el espaciado de los aros no debe ser mayor que 4 plg (102 mm) ni mayor que 6 diámetros de varillas longitudinales.

11.6.10 Disipación de la energía sísmica mediante dispositivos especiales

El enfoque convencional al diseño por sismo, es decir, confiar en el comportamiento dúctil de los miembros estructurales para la disipación de la energía, tiene la desventaja obvia de que la estructura se daña durante un sismo importante y que es necesario repararla. El daño puede ser tan serio que se necesite demoler la estructura. Otro enfoque es separar la función de transmisión de carga de la estructura de la función de disipación de energía, lo que se puede lograr incorporando, en la estructura, dispositivos especiales para disipar la energía generada en la estructura por los movimientos del sismo. Estos dispositivos protegen a las estructuras contra el daño.

Algunos ejemplos de mecanismo de disipación de energía que incorporan dispositivos de acero suave, que pueden utilizarse en las estructuras, son tiras rodantes (flexionables) en forma de *U*, la torsión de varillas cortas y la flexión de vigas cortas. Los dispositivos basados en estos mecanismos se pueden incorporar entre superficies en movimiento o en el arriostramiento diagonal en los marcos. Kelly y asociados[11.37] informaron recientemente de los resultados de investigaciones en Nueva Zelandia del comportamiento de esos dispositivos. Las pruebas revelaron que la torsión plástica del acero suave es un mecanismo sumamente eficiente para disipar la energía. A deformaciones plásticas en el intervalo de 3 a 12% se vio que es posible disipar energía del orden de 2000 a 7500 lb plg/plg^3 por ciclo (14 a 50 $\times$ 10^6 J/m^3 por ciclo) con vida media de entre 100 y 1000 ciclos. Es evidente que utilizar esos dispositivos en las estructuras tiene buena perspectiva, por lo que debe estimularse una investigación más extensa para producir artículos disponibles comercialmente.

Un método sugerido para limitar las fuerzas dinámicas máximas, a las que se sujeta una estructura de plantas múltiples durante un sismo, es el enfoque de la "planta suave". Las columnas de una planta inferior, típicamente la primera de la estructura, se diseñan para que cedan a una carga lateral predeterminada. Después que se inicia la cedencia, todas las deformaciones inelásticas ocurren en esas columnas y la estructura por arriba queda protegida contra fuerzas laterales mayores. Fintel y Khan[11.38] han propuesto métodos posibles de diseño de la planta suave. Sin embargo, el diseñador debe intentar ese tipo de solución con cuidado. Las columnas de la planta suave deben estar diseñadas con exactitud, es decir, que no se permite sobrerrefuerzo ni subrefuerzo. Las fluctuaciones de las cargas de columnas durante el sismo, provocadas por la inversión del momento de volteamiento y las aceleraciones verticales, dificultan dicho análisis de resistencia para las columnas. Adicionalmente, las demandas de ductilidad en las columnas de esa planta son considerables. Los desplazamientos laterales en la planta suave serían grandes, por lo que es necesario hacer provisiones para alojarlos. Enderezar las columnas después del sismo también presenta dificultades. Newmark y Rosenblueth[11.22] estudian otros métodos posibles para aislar partes de las estructuras de los sismos.

11.6.11 Diseño por capacidad para la carga sísmica de marcos

Ya que es imposible predecir con exactitud las características de los movimientos del terreno, que puedan ocurrir en un lugar dado, es imposible evaluar el comportamiento completo de un marco de concreto reforzado y pisos múltiples, cuando se le sujeta a perturbaciones sísmicas muy grandes. Sin embargo, es posible impartir a la estructura características que aseguren el mejor comportamiento. En términos de daño, ductilidad, disipación de energía o falla, esto quiere decir una secuencia deseable en la falla de la cadena compleja de resistencia en un marco. Implica una jerarquía deseable en el modo de falla de la estructura. Para establecer una secuencia en el mecanismo de falla de una cadena compleja es necesario conocer la resistencia de cada eslabón, conocimiento que no debe basarse en suposiciones seguras o capacidades confiables, sino realistamente en las resistencias más probables de las componentes estructurales que estarán sujetas a deformaciones muy grandes durante un sismo catastrófico. En el capítulo 1 se estudiaron las definiciones de las distintas resistencias y su relación mutua.

A pesar de la naturaleza probabilística de la carga de diseño o patrón de desplazamiento por aplicar a la estructura, a la luz del conocimiento actual, consiste en una asignación determinista de propiedades de resistencia y ductilidad la mejor promesa para una respuesta exitosa y la prevención del colapso durante un sismo catastrófico. Se puede incorporar este criterio a un proceso de diseño de capacidad racional. En el diseño por capacidad de estructuras resistentes a sismos, se escogen mecanismos disipantes de energía y se detallan adecuadamente, y se dan otros elementos estructurales con suficiente capacidad de resistencia de reserva para asegurar que se mantengan los mecanismos elegidos de disipación de

energía casi a su resistencia total durante todas las deformaciones que puedan ocurrir. Para ilustrar el enfoque del diseño por capacidad, brevemente se estudia la deducción de la fuerza cortante de diseño para vigas y cargas de diseño en columnas de marcos.

Diseño por capacidad para cortante en vigas

Para que se suprima una falla a cortante no dúctil, es necesario asegurar que la resistencia confiable a cortante de la viga V_d sea igual o mayor que la fuerza cortante asociada con el sobrerrefuerzo M_o a flexión de la viga, que no se puede exceder durante la excitación sísmica. Además del cortante inducido por momentos sísmicos, es necesario hacer provisiones para las fuerzas cortantes resultado de la carga gravitacional y de las aceleraciones verticales. Por tanto, con referencia a la fig. 11.47, en el apoyo del lado izquierdo se tiene

$$V_{dA} \geq \frac{M_{oA} + M_{oB}}{l_n} + \lambda_a \frac{wl_n}{2} \tag{11.60}$$

V_{dA} = resistencia cortante confiable de la viga en A
M_{oA}, M_{oB} = capacidades de sobrerrefuerzo a flexión en las articulaciones plásticas potenciales en A y B
λ_a = factor de aceleración vertical
l_n = claro libre de la viga
w = carga muerta y viva uniforme de diseño descompuestas como en la fig. 11.47

Para el diseño rutinario es más conveniente expresar esta relación en términos de resistencias ideales y de factores apropiados de resistencia, como se expresa en las ecs. 1.5 y 1.7. De acuerdo con ello, la ec. 11.60 queda como

$$V_{iA} = \frac{1}{\varphi}\left(\varphi_o \frac{M_{iA} + M_{iB}}{l_n} + \lambda_a \frac{wl_n}{2}\right) \tag{11.61}$$

donde V_{iA} = resistencia ideal a cortante de la viga en A, que debe suministrarse completamente por el refuerzo
M_{iA}, M_{iB} = resistencia ideal a flexión de las secciones en los apoyos (v.gr., $M_{iA} = A_s f_y jd$ en el apoyo A)
φ = factor de reducción de capacidad por cortante (v.gr., 0.85)
φ_o = factor de sobrerrefuerzo a flexión (v.gr., 1.3)

Un margen típico para la aceleración vertical debida a los movimientos sísmicos sería de $0.25g$, lo que da $\lambda_a = 1.25$. Con los valores numéricos escogidos para todos los factores, la ec. 11.61 queda como

$$V_{iA} = 1.53 \frac{M_{iA} + M_{iB}}{l_n} + 1.47 \frac{wl_n}{2} \tag{11.62}$$

Es evidente que el grado de protección contra una falla posible a cortante en el diseño sísmico, necesita ser considerablemente mayor que para el diseño de carga de gravedad o de viento.

Diseño por capacidad de columnas

La estimación de los momentos de columna y cargas axiales concurrentes en los marcos resistentes a sismos es mucho más difícil. Antes de describir el procedimiento de diseño por capacidad de columnas, se deben expresar nuevamente los criterios de diseño que deben satisfacerse.

En el estudio anterior se enfatizó repetidamente que se debe evitar en lo posible, la formación de articulaciones plásticas en las columnas. Además de la demanda de ductilidad de curvatura muy grande asociada con los mecanismos de traslación lateral de columna, que se ilustró en varios ejemplos, hay otras razones para evitar o al menos demorar las articulaciones plásticas de columna. La cedencia de columnas en todas las columnas de una planta lleva a desalineamiento permanente de la construcción. La carga a compresión, que está presente más comúnmente en las columnas, reduce la ductilidad de curvatura disponible. La articulación de columnas, asociada con traslación lateral grande entre plantas, introduce problemas de inestabilidad que a su vez pueden poner en peligro la capacidad de transmisión de carga de gravedad de la estructura.

Entonces se plantea la pregunta: ¿cómo puede el diseñador dar un grado razonable de protección, si acepta que durante una excitación grande dinámica al azar se debe impedir o retrasar la articulación de columna, excepto en unos cuantos lugares inevitables?

De acuerdo con el criterio de diseño por capacidad, sería necesario garantizar que la capacidad confiable a flexión de una sección crítica de columna, adyacente a una junta de viga - columna, sea al menos igual a la peor demanda probable a flexión que pueda ocurrir concurrentemente con una carga axial probable; se debe notar que no es necesario que la relación entre la descarga total de momento por las vigas y la resistencia a flexión en las columnas sea tan estricta como en el caso para cortante en vigas, debido a que la sección de columna habrá estado diseñada por ductilidad.

Demanda de flexión para secciones de columnas

Debido a la distribución desproporcionada de los momentos alrededor de las uniones de viga-columnas durante los modos superiores de respuesta de un marco de plantas múltiples, podrían aparecer momentos flexionantes en las secciones críticas, apreciablemente mayores que los deducidos del análisis estático, lo que se señaló antes con referencia a la fig. 11.35 y en la sección 11.6.8. Para reducir la probabilidad de la cedencia de columnas, se debe hacer que la resistencia confiable de la columna en una sección crítica (v.gr., por sobre el nivel del piso en la fig. 11.49) sea mayor que la descarga total de momentos probable por las vigas adjuntas. Es decir, que se necesita

$$M_{dc1} \geq \lambda_{c1} \Sigma M_{pb} \tag{11.63}$$

donde M_{dc1} = capacidad confiable a flexión de la sección de columna en presencia de la carga axial adecuada
ΣM_{pb} = suma de las capacidades probables a flexión de la viga cuando se forman articulaciones plásticas en las vigas
λ_{c1} = factor de distribución de momentos, dependiente de la respuesta dinámica inelástica del marco cuando se sujeta a movimientos sísmicos.

Estudios de casos específicos[11.29] han indicado que el valor de λ_{c1} para marcos regulares podría estar entre 0.8 y 1.3, en que se observara el valor mayor para un marco relativamente flexible y el valor más pequeño es representativo de un marco relativamente rígido que respondiera predominantemente en su primer modo de vibración.

Nuevamente la ec. 11.63 se expresa en forma más conveniente en términos de resistencias ideales como se definieron en el capítulo 1; así se tiene

$$M_{ic1} \geq \frac{\lambda_{c1}}{\varphi_c} \Sigma \varphi_{pb} M_{ib} \tag{11.64}$$

donde M_{ic1} = resistencia ideal a flexión de la sección de columna en presencia de carga axial de diseño
M_{ib} = resistencia ideal a flexión de las vigas
φ_{pb} = factor de resistencia probable para las vigas según se definió en la sección 1.4.4
φ_c = factor de reducción de capacidad para las columnas

Para ilustrar las implicaciones de esta relación se compara la ec. 11.64 con los requerimientos actuales de los códigos ACI[11.8] y SEAOC[11.23], utilizando valores típicos para los disitintos factores.

De acuerdo con estos dos códigos, se encuentra que con $\varphi_c = 0.7$ y $\varphi_b = 0.9$

$$M_{ic1} \geq \frac{0.5}{\varphi_c} \Sigma \varphi_b M_{ib} = 0.64 \Sigma M_{ib} \tag{11.65}$$

El código SEAOC[11.23] estipula que las sobrerresistencias de viga, con $M_{ob} = 1.25 M_{ib}$, se deben considerar al determinar las fuerzas cortantes que actúan en vigas; sin embargo, es de sorprender que el código no requiera esto para el diseño de momentos flexionantes de vigas.

El factor de 0.5 en la ec. 11.65 se debe a la suposición de que la descarga total ΣM_{ib}, del momento de viga está distribuida en proporciones iguales entre las secciones de columnas arriba y abajo de la planta.

Para el caso extremo de una distribución desproporcionada de momentos de columna, se puede considerar adecuado un factor de reducción de capacidad de columna de $\varphi_c = 0.9$ En consecuencia, suponiendo que $\varphi_b = \varphi_c = 1$ la ec. 11.64 queda como

$$M_{ic1} \geq 0.98 \Sigma M_{ib} \quad \text{cuando} \quad \lambda_{c1} = 0.8 \tag{11.66a}$$
$$M_{ic1} \geq 1.58 \Sigma M_{ib} \quad \text{cuando} \quad \lambda_{c1} = 1.3 \tag{11.66b}$$

En este caso no se dio margen al desarrollo posible de la sobrerresistencia de la viga. Se ve que en comparación con los requerimientos de los códigos ACI y SEAOC, el procedimiento propuesto de diseño por capacidad da protección considerablemente mayor contra la cedencia de las columnas, donde la resistencia ideal requerida de columna de las ecs. 11.66*a* y 11.66*b* es de 1.53 y 2.47 veces la de la ec. 11.65 del código. De hecho, del comentario al código SEAOC podría inferirse que $\varphi_{pb} = 1.1$, en la ec. 11.65, haciendo más pequeña todavía la resistencia ideal requerida de columna de acuerdo con este código.

Determinación de carga axial para las columnas

En el diseño sísmico es importante determinar con exactitud las cargas axiales probables inducidas por el sismo en las columnas, las que son especialmente críticas en el caso de columnas exteriores. Cuando los marcos se diseñan para cargas laterales estáticas equivalentes, se deducen de inmediato las cargas axiales correspondientes. Sin embargo, estas fuerzas son representativas sólo del primer modo de respuesta de la estructura; no reflejan las verdaderas cargas de columna que se pueden desarrollar en un marco. De acuerdo con el criterio del diseño por capacidad, un enfoque para determinar las cargas de columnas utilizada en Nueva Zelandia supone que todas las vigas que forman marco a una columna desarrollan su sobrerresistencia a flexión simultáneamente a lo largo de la altura total de la estructura, lo que implica que en cada planta se proporciona la entrada de carga a la columna sumando las fuerzas cortantes de entrada de las vigas, usando ecuaciones de fuerza cortante semejantes al lado derecho de la ec. 11.60, tomando el primer término como positivo o negativo, según el lado de la columna. Las cargas de columna así obtenidas se utilizan entonces para diseñar las secciones de columna; se utiliza un factor de reducción dd capacidad de columna, $\varphi_c = 0.7$, en el diseño de la sección. Este procedimiento parece ser innecesariamente severo, especialmente para los marcos altos. Antes se señaló que durante la respuesta dinámica inelástica de un marco se forman articulaciones plásticas de viga en grupos, típicamente de dos a cinco pisos a la vez, y viajan por toda la altura del marco. En consecuencia, al calcular las cargas de columna inducidas por sismo debe ser más racional dar cierto margen al hecho de que no están presentes simultáneamente todas las articulaciones plásticas de vigas posibles.

En la fig. 11.56 está ilustrado ese tipo de enfoque para una estructura de ejemplo de 20 pisos. Para obtener las cargas de columna inducidas por la carga lateral crítica para las columnas del sexto piso, se puede suponer que se desarrollan las sobrerresistencias M_{ob} de todas las vigas en los seis pisos inmediatamente arriba del sexto, que típicamente pueden ser 125% de la resistencia ideal de viga, M_{ib}, de manera que $M_{ob} = 1.25 M_{ib}$. Es im-

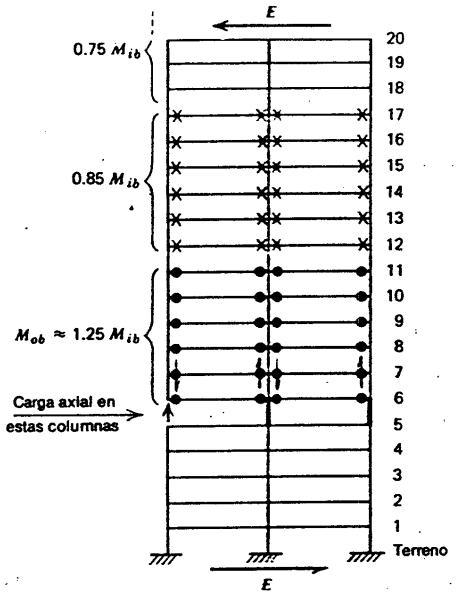


Fig. 11.56. Momento de viga y patrón de articulación plástica para evaluar cargas axiales inducidas por terremoto en columnas.

probable que se hayan formado articulaciones plásticas en las vigas de los seis pisos siguientes superiores, aunque se puede suponer que, por ejemplo, 85% de la resistencia ideal de cada una de las vigas en estos pisos quedará desarrollado. Para los siguientes seis pisos superiores se puede suponer una reducción adicional a, por ejemplo, 75% de las resistencias de viga ideal, como se ilustra en la fig. 11.56.

Las cargas de columnas así deducidas, tendrían que combinarse con las cargas de gravedad descompuestas apropiadamente y con las componentes de aceleración vertical, para dar valores de límite superior e inferior a las cargas de las columnas. Ya que estas cargas axiales se basan en condiciones extremas y transitorias de capacidad de comportamiento, parece no haber necesidad de introducir un factor φ_c de reducción de capacidad adicional. Una resistencia ideal de sección igual a la carga axial así deducida puede ser suficiente. En todo caso, se dispondrá de cierta resistencia de reserva debido a que la resistencia probable de la sección de columna será mayor que la resistencia ideal, como se muestra en el capítulo 1, especialmente cuando la gran compresión axial hace significativa la contribución de la resistencia a compresión del concreto. Se debe recordar que es muy posible que la resistencia probable del concreto colocado sea bastante mayor que la resistencia f'_c ideal.

Fuerza cortante en columnas

De lo anterior es evidente que se debe dar un grado algo mayor de protección contra la falla a cortante en las columnas, sencillamente debido a que las fallas a cortante de columna son frágiles. Para ser consistentes con el criterio de diseño por capacidad, se tendría que considerar el desarrollo simultáneo de articulaciones plásticas en la parte superior e inferior de la columna. Sin embargo, ya se han diseñado por separado estas secciones para las descargas de momentos máximas probables. Como lo revela la fig. 11.57, no podrían ocurrir momentos flexionantes de columna correspondientes a dos articulaciones plásticas. La fig. 11.57*a* muestra el patrón de momentos para secciones de columna que podrían desarrollar 98% de la descarga total de momentos de viga en la parte superior e inferior de la planta; la fig. 11.57*b* muestra lo mismo para una descarga de momento de viga de 158% de acuerdo con las ecs. 11.66*a* y 11.66*b*. Las línea interrumpida indica el patrón de momentos que podría resultar de los requerimientos actuales de los códigos ACI[11.8] y SEAOC[11.23].

Sería irrazonable determinar la fuerza cortante de la columna de diseño a partir del momento M_{ic} completo en cada una de las columnas, ya que por lo común el momento en un extremo es mucho menor que M_{ic}. En la fig. 11.57*c* se sugiere un patrón razonable de momentos del que podrían deducirse las fuerzas cortantes de columna máximas probables, de manera que

$$V_{ic} \geq \frac{1.5M_{ic}}{\varphi l_u} \tag{11.67}$$

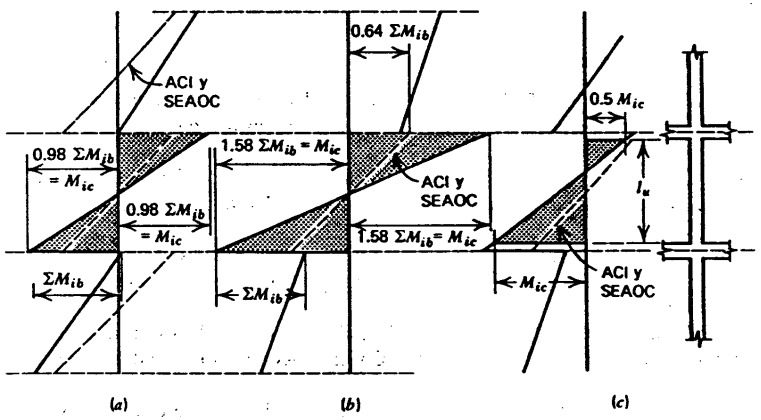


Fig. 11.57. Patrones de momentos para determinar fuerzas cortantes de columnas.

donde V_{ic} = resistencia ideal a cortante de la columna
M_{ic} = resistencia ideal a flexión de la sección de columna en presencia de la carga axial que produce máxima resistencia a flexión de la columna
l_n = altura libre de la columna
φ = factor de reducción de capacidad por cortante (v.gr., 0.85)

Conclusiones

Un procedimiento racional de diseño por capacidad seguramente dará un alto grado de protección contra fallas frágiles y cedencia en columnas. En los casos de comportamiento desusado, provocados por movimientos extremos del terreno, puede ocurrir cedencia en las columnas. Sin embargo, es probable que el procedimiento sugerido garantice una pequeña demanda de ductilidad en las columnas. Se requiere trabajo adicional para establecer valores numéricos seguros para los distintos parámetros de resistencia. Es especialmente importante evaluar de estudios de casos específicos o de alguna otra manera, el intervalo probable de los valores del factor λ_c, de distribución de momento, que depende de los patrones de momentos a lo largo de las columnas en los instantes de la respuesta dinámica de un marco. Para sostener el principal sistema de disipación de energía (es decir, cedencia en vigas) bajo excitación sísmica concurrente, a lo largo de ambos ejes principales de una construcción, se deben asignar resistencias de reserva, todavía mayores, a las columnas. Es evidente que se pueden evitar muchos problemas de diseño en los marcos espaciales de concreto reforzado, tales como cedencia en columnas, detallado de uniones de vigas-columnas e inestabilidad debida al desviajamiento si se proporciona en ambas direcciones principales un sistema independiente de resistencia a las cargas laterales, que consista en muros de cortante de concreto reforzado. En el siguiente capítulo se examinan estas ideas.

11.7 Bibliografía

11.1 W. H. Glanville y F. G. Thomas, "The Redistribution of Moments in Reinforced Concrete Beams and Frames," *Journal of the Institution of Civil Engineers*, Vol. 3, Public. Núm. 5061, 1935-1936.

11.2 A. L. Lázaro y R. Richards, "Full-Range Analysis of Concrete Frames," *Journal of the Structural División, ASCE,* Vol. 99, ST8, agosto 1973, págs. 1761-1783.

11.3 W. B. Cranston, "Tests on Reinforced Concrete Frames, 1: Pinned Portal Frames," Technical Report TRA 392, Cement and Concrete Association, Londres, agosto 1965.

11.4 W. B. Cranston, "A Computer Method for Inelastic Analysis of Frames," Technical Report TRA 386, Cement and Concrete Association, Londres, marzo de 1965.

11.5 J. M. Becker, "Inelastic Analysis of Reinforced Concrete Frames." Master of Science thesis, Cornell University, Ithaca, N. Y., 1967.

11.6 J. Blaauwendraad, "Realistic Analysis of Reinforced Concrete Framed Structures," *Heron,* Vol. 18, No. 4, Delft, 1972, 31 págs.

11.7 M. Menegotto y P. E. Pinto, "Method of Analysis for Cyclically Loaded R. C. Plane Frames Including Changes in Geometry and Non-Elastic Behaviour of Elements Under Combined Normal Force and Bending," Simposium sobre la resistencia y deformabilidad última de las estructuras sometidas a cargas repetidas bien definidas, International Association for Bridge and Structural Engineering, *Preliminary Report,* Vol. 13, Lisboa 1973 págs. 15-22

11.8 ACI Committee 318, "Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American Concrete Institute, Detroit, 1971, 78 págs.

11.9 H. Okamura, S. N. Pagay, J. E. Breen, y P. M. Ferguson, "Elastic Frame Analysis Corrections Necesary for Design of Short Columns in Braced Frames," *Journal ACI,* Vol. 67. No. 11, noviembre de 1970, págs. 894-897.

11.10 ACI Committee 318, "Commentary on Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-71)," American concrete Institute, Detroit, 1971, 96 págs.

11.11 M. Z. Cohn, "Rotational Compatibility in the Limit Design of Reinforced Concrete Continuos Beams", *Proceeding of the International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE—ACI,* Miami, noviembre de 1964, págs. 359-382.

11.12 A. H. Mattock, "Redistribution of Design Bending Moments in Reinforced Concrets Continuous Beams," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers,* Vol. 13, 1959 págs. 35-46.

11.13 BSI, "Code of Practice for the Structural Use of Concrete," CPI10: Part 1: 1972, British Standards Institution, Londres, 1972, 154 pp.

11.14 ICE Research Commitee, "Ultimate Load Design of Concrete Structures," *Proccedings of Institution of Civil Engineers,* Vol. 21, febrero 1962 págs. 399-442. (Estudio en *Proceedings*, octubre y noviembre de 1962, y junio de 1963).

11.15 ACI-ASCE Committee 428, "Progress Report on Code Clauses for Limit Design," *Journal ACI,* Vol. 65, No. 9, septiembre 1968. págs. 713-720.

11.16 A. L. L. Baker, *Ultimate Load Theory Applied to the Design of Reinforced and Prestressed Concrete Frames,* Concrete Publications Ltd, Londres 1956, 91 págs.

11.17 A. L. L. Baker y A. M. N. Amarakone, "Inelastic Hyperstatic Frames Analysis," *Proccedings of International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI,* Miami, noviembre de 1964, págs. 85-136.

11.18 M. Z. Cohn, "Limit Design of Reinforced Concrete Frames," *Journal of the Structural Division, ASCE,* Vol. 94, ST10, octubre de 1968, págs. 2467-2483.

11.19 H. A. Sawyer, "Design of Concrete Frames for Two Failure Stages," *Proceedings of International Symposium on the Flexural Mechanics of Reinforced Concrete, ASCE-ACI,* Miami, noviembre de 1964 págs. 405-431.

11.20 R. W. Furlong, "Design of Concrete Frames by Assigned Limit Moments," *Journal ACI,* Vol. 67, No. 4, abril de 1970, págs. 341-353.

11.21 R. L. Wiegel, editor, *Earthquake Engineering,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1970, 518 págs.

11.22 N. M. Newmark y E. Rosenblueth, *Fundamentals of Earthquake Engineering,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1971, 640 págs.

11.23 SEAOC, "Recommended Lateral Force Requirements and Commentary,"

Seismology Committee, Structural Engineers' Association of California, San Francisco, 1973, 146, págs.
11.24 ICBO, *Uniform Building Code,* International Conference of Building Officials, Pasadena. Calig., Vol. 1, 1970, 651 págs.
11.25 J. A. Blume, N. M. Newmark, y L. H. Corning, *Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings for Earthquake Motions,* Portland Cement Association, Skokie, Ill., 1961. 318 págs.
11.26 R. W. Clough, "Effect of Stiffness Degradation on Earthquake Ductility Requirements," Report No. 66-16. Structural Engineering Laboratory, Berkeley, University of California. octubre 1966.
11.27 R. Park. "Ductility of Reinforced Concrete Frames Under Seismic Loading", *New Zealand Engineering,* Vol. 23, No. 11, noviembre de 1963, págs. 427-435.
11.28 11.28 R. W. Clough, K. L. Benuska, y E. L. Wilson, Inelastic Earthquake Response of Tall Buildings", *Proceedings Third World Conference on Earthquake Engineering,* Nueva Zelandia, 1965, págs. 2.68-2.89.
11.29 T. E. Kelly, "Some Seismic Design Aspects of Multistorey Concrete Frames," Master of Engineering Report, University of Canterbury, Nueva Zelandia, 1964, 163, págs.
11.30 ACI Committee 439, "Effect of Steel Stregth and Reinforcement Ratio on the Mode of Failure and Strain Energy Capacity of Reinforced Concrete Beams," *Journal ACI,* Vol. 66, No. 3, marzo de 1969, págs. 165-173.
11.31 P. C. Jennings, "Response of Simple Yielding Structures to Earthquake Excitation," Tesis doctoral, California Institute of Technology, Pasadena, 1963.
11.32 G. K. Wilby, "Response of Reinforced Concrete Structures to Seismic Motions", Tesis doctoral en preparación University of Canterbury, Nueva Zelandia, 1964.
11.33 I. C. Armstrong, "Capacity Design of Reinforced Concrete Frames for Ductile Earthquake Performance," *Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering,* Vol. 5, No. 4, diciembre de 1972. págs. 133-142.
11.34 D. G. Row, "The Effects of Skew Seismic Response on Reinforced Concrete Frames," Master of Engineering report, University of Canterbury, Nueva Zelandia, 1973, 101, págs.
11.35 J. A. Norton, "Ductility of Rectangular Reinforced Concrete Columns," Master of Engineering report, University of Canterbury, Nueva Zelandia, 1972, 110 págs. mas apéndices.
11.36 R. Park y R. A. Sampson, "Ductility of Reinforced Concrete Column Sections in Seismic Design," *Journal ACI,* Vol. 69, No. 9, septiembre de 1972, págs. 543-551. (Erratum: los pies de las figuras 3 y 4 deben intercambiarse).
11.37 J. M. Kelly, R. I. Skinner, y A. J. Heine, "Mechanisms of Energy Absorption in Special Devices for Use in Earthquake Resistant Structures," *Bulletin of New Zealand Society for Earthquake Engineering,* Vol. 5, No. 3, septiembre de 1972, págs. 63-88.
11.38 M. Fintel y F. R. Khan, "Shock-Absorbing Soft Story Concept for Multistory Earthquake Structures", *Journal ACI,* Vol. 66, No. 5, mayo de 1969, págs. 381-390.

12

Muros de cortante en edificios de niveles múltiples

12.1 INTRODUCCION

Desde hace mucho se ha reconocido la utilidad de los muros en la planeación estructural de edificios de niveles múltiples. Cuando los muros se colocan en posiciones ventajosas dentro de una construcción, pueden ser muy eficientes para resistir las cargas laterales producidas por el viento o los sismos. Estos muros se han denominado muros de cortante debido a que con frecuencia gran parte de la carga lateral de un edificio, si no es que toda, y la fuerza cortante horizontal se transfieren a estos elementos estructurales. El nombre no es muy apropiado ya que en raras ocasiones el modo crítico de resistencia está relacionado con el cortante. Los edificios de niveles múltiples se han hecho más altos y esbeltos, por lo que, con esta tendencia el análisis de muros de cortante es una parte importante del diseño. Con frecuencia los muros a cortante contienen numerosas aberturas. El ingeniero estructural será afortunado si dichas aberturas forman un patrón sistemático.

En numerosas publicaciones, la mayoría escrita en la década anterior, se ha examinado el comportamiento elástico de distintos muros a cortante. Las ponencias de un simposio patrocinado por la Universidad de Southampton [12.1] representan un buen resumen del actual estado del conocimiento de las estructuras de muros de cortante. En seguida se consideran algunas de las conclusiones presentadas en esos estudios.

Las recomendaciones de los códigos utilizadas en los diez últimos años se han basado principalmente en la obra que iniciara Benjamín y Williams [12.2, 12.3] en muros bajos de cortante. También los resultados de la obra de Paiva y Siess [12.4] y los primeros trabajos de Slater, Lord y Zipprodt [12.5] en las vigas de gran peralte se interpretaron para aplicarse a muros cortantes bajos. La obra de Cárdenas y Colaboradores, [12.6, 12.7] y Barda [12.8] en los Laboratorios de investigación y desarrollo de la Asociación de Cemento Portland en Skokie, Illinois, han contribuido mucho al estado actual de compresión de lcs muros de cortante. Ciertos aspectos

originados en la resistencia sísmica y respuesta elastoplástica de muros cortantes acoplados y sus componentes se han estudiado en la Universidad de Canterbury, y se han incorporado en este capítulo las conclusiones más importantes.

Se hace énfasis en el comportamiento, como lo atestiguan las pruebas. Sin embargo todavía queda mucho trabajo por hacer antes de poder predecir con seguridad la respuesta elastoplástica de las estructuras de muros de cortante. Aquí no se intenta rastrear el origen y evaluación de las cargas por ejemplo las que puedan originarse del viento o efecto sísmico sino que, como en los capítulos anteriores, la atención se centra en los aspectos de ductilidad y de absorción de energía dictados por la naturaleza de la respuesta sísmica.

El uso de muros cortantes o su equivalente se hace imperativo en determinados edificios elevados a fin de poder controlar las deflexiones de entrepiso, provocadas por la carga lateral. Los muros cortantes bien diseñados en las áreas sísmicas tienen un buen historial. No sólo pueden proporcionar seguridad estructural adecuada, sino que también pueden dar gran protección contra daño no estructural costoso durante las perturbaciones sísmicas moderadas.

12.2 EL COMPORTAMIENTO DE MUROS EN VOLADIZO

12.2.1 Muros altos con secciones transversales rectangulares

Se puede esperar que un muro cortante de voladizo simple, como el de la fig. 12.1, se comporte esencialmente de la misma manera que una viga de concreto reforzado. La sección transversal estrecha (es decir, ancho pe-

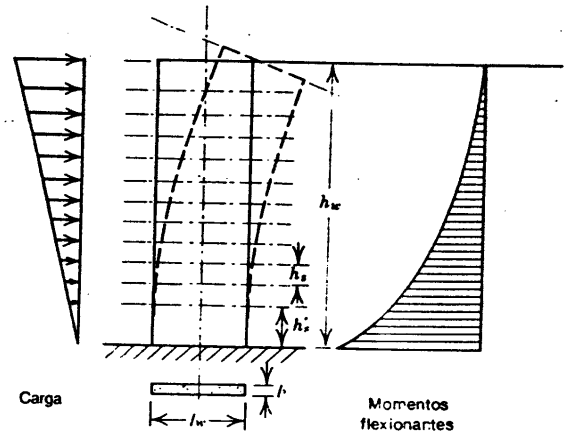


Figura 12.1 Un muro de cortante en voladizo.

queño) indica que puede plantearse el problema de inestabilidad del borde a compresión (véase la sección 4.5). Por lo general las losas de piso de un edificio de niveles múltiples, que se indican en la fig. 12.1, actúan como diafragmas horizontales y dan apoyo lateral; en consecuencia, se puede considerar que la longitud crítica con respecto al pandeo es igual a la altura de los pisos.

El muro cortante, si actúa como un voladizo grande, estará sujeto a momentos flexionantes y fuerzas cortantes que se originen principalmente en las cargas laterales y a compresión axial provocada por la gravedad. De acuerdo con esto, se puede evaluar la resistencia de la sección crítica a través del muro a partir de la relación de interacción momento - fuerza axial presentada en el capítulo 5. El refuerzo vertical o de flexión en la porción del alma de un muro de cortante, que puede ser considerable, debe ser tomado en cuenta al evaluar la capacidad a flexión.

Los requisitos esenciales son cimientos adecuados que dan fijación total a la base y suficiente conexión de los muros cortantes a cada piso para transmitir la carga horizontal.

La resistencia a flexión de muros de cortante altos

En muros de cortante, especialmente en zonas no afectadas por sismos, el requerimiento de resistencia para el acero a flexión no es grande. En tales muros ha sido práctica tradicional proporcionar aproximadamente 0.25% de refuerzo en ambas direcciones. Por tanto, en muros sujetos a pequeña flexión, se ha colocado 0.25% o un poco más de refuerzo uniformemente en todo el peralte. Es natural que en dicha disposición no se utilice con eficiencia el acero en el momento máximo debido a que muchas varillas operan en un brazo de palanca interno relativamente pequeño. Además, la curvatura máxima y por tanto la ductilidad de curvatura se reduce considerablemente cuando se usa de esta manera gran cantidad de acero a flexión. Cárdenas y Magura [12.7] lo han demostrado para una sección de muro típica con una relación de peralte a ancho de 25. Su ejemplo está reproducido en la fig. 12.2, en que los momentos y curvaturas se expresan como porcentajes de las cantidades máximas correspondientes para una sección con el mínimo contenido de acero ($\rho_v = 0.25\%$). Es claro que la distribución de acero uniforme a través de la sección no sólo no es económica, sino altamente indeseable para mayores contenidos de acero, siempre que se desee absorción de energía en el intervalo inelástico.

En una sección eficiente de muro a cortante, sujeta a momentos considerables, el grueso del refuerzo a flexión se coloca proximo al borde a tensión. Debido a las inversiones de momentos originadas bajo cargas laterales, normalmente se requieren cantidades iguales de refuerzo en ambos extremos. Por tanto, de ser necesario, se puede resistir una gran parte del momento flexionante mediante el "par de acero" interno, lo que

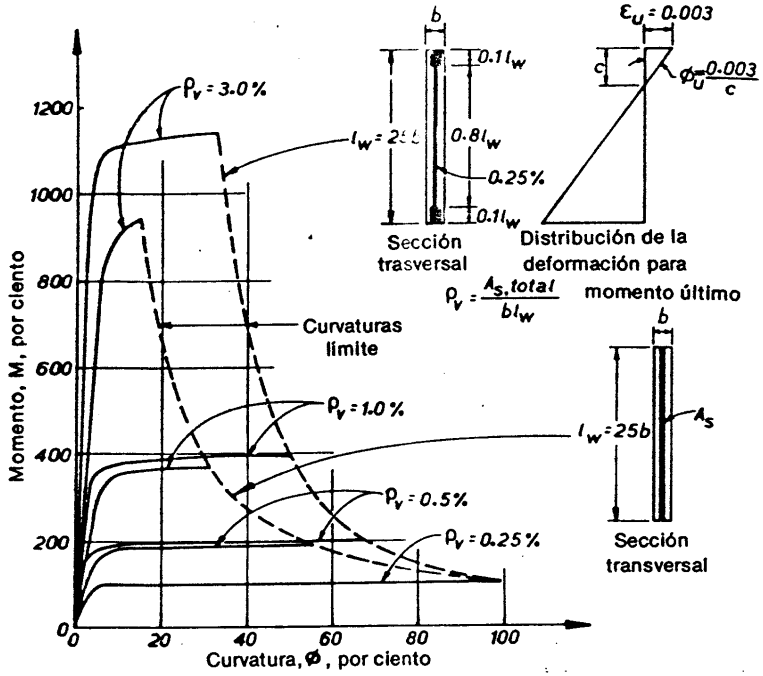


Figura 12.2 Efecto de la cantidad y distribución del refuerzo vertical en la curvatura última.[12.7]

produce mejores propiedades de ductilidad. En la sección con distribución no uniforme de acero de la fig. 12.2, se ha colocado refuerzo vertical mínimo (0.25%) sobre el 80% interior del peralte. El resto del acero ha sido asignado a las zonas exteriores (10%) de la sección. Las mayores resistencias y ductilidad debidas a esta distribución son evidentes del diagrama.

Debido a la gran área de la sección transversal, con frecuencia la carga axial de compresión en los muros de cortante es mucho menor que la que provocaría una condición de falla balanceada (P_b). Como resultado de ello, por lo general se aumenta la capacidad de momentos por las fuerzas de gravedad en los muros cortantes. Sin embargo, se debe recordar que la compresión axial reduce la ductilidad.

Cuando es deseable aumentar la ductilidad de un muro cortante en voladizo (normalmente en su base, donde los momentos de volteo y la compresión axial son máximos) se debe confinar el concreto en la zona a compresión. Se sugiere que el acero de confinamiento se suministre de la

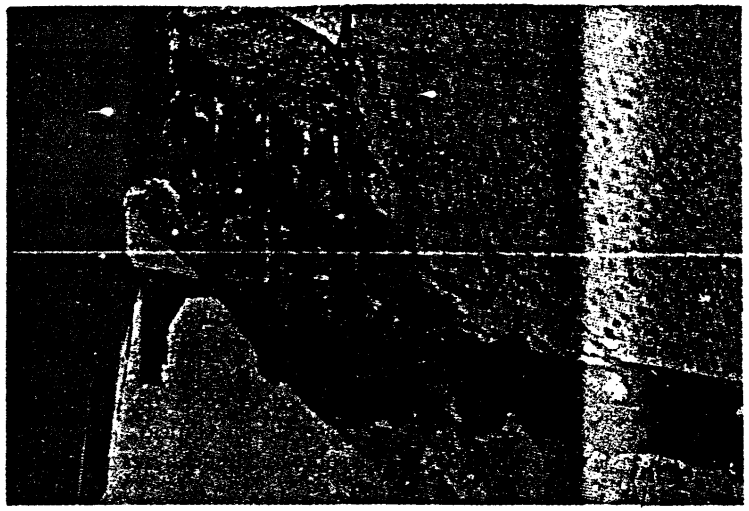


Figura 12.3 Falla a lo largo de una junta de construcción; se muestran las varillas de un empalme. Hospital Holy Cross después del terremoto de San Fernando.[12.13]

misma manera que en las columnas con estribos (véanse los capítulos 11 y 13) y que se distribuya al menos por sobre la parte del peralte l_w donde se requieran deformaciones del concreto superiores a 0.003 cuando se alcanza la ductilidad deseada. En todo caso, se deben suministrar estribos transversales alrededor de las varillas a flexión, que pueden estar sujetas a cedencia a compresión, al menos en la misma manera que en las columnas cargadas axialmente, para evitar el pandeo de esas varillas (vease la sección 13.5), lo que es especialmente importante en la región de una articulación plástica que se puede extender por la altura completa de un piso o más. En tal distancia, es improbable que los estribos nominales al espaciado máximo especificado por el código sean suficientes, cuando varios choques sísmicos pueden provocar cedencia en ambas extremidades de la sección del muro de cortante. Sólo los estribos espaciados estrechamente pueden retener el núcleo de concreto agrietado dentro de las varillas verticales a flexión en las extremidades de la sección (véase la fig. 12.3) e impedir el pandeo de las varillas longitudes.

De los fundamentos presentados al principio (véase el capítulo 5) se puede deducir la resistencia a flexión de un muro cortante rectangular que contenga refuerzo vertical distribuido uniformemente y sujeto a carga axial. Sin embargo, se obtienen considerables simplificaciones si se desprecia la contribución del refuerzo en el núcleo elástico.[12.6] De los prin-

cipios presentados con anterioridad, la aproximación conservadora correspondiente da

$$M_u = 0.5A_s f_y l_w\left(1 + \frac{N_u}{A_s f_y}\right)\left(1 - \frac{c}{l_w}\right) \qquad (12.1)$$

en que N_u, la carga axial, se toma positiva para compresión y A_s es el acero total distribuido uniformemente en el muro. Los otros términos son evidentes de la fig. 12.2.

Es necesario considerar la inestabilidad de muros delgados de cortante. En forma conservadora, se pueden tratar las fibras extremas de la sección del muro como una columna aislada sujeta a compresión axial, unicamente, que puede pandearse alrededor del eje débil de la sección. De ser necesario se puede aumentar la rigidez a flexión de la sección del muro en la dirección transversal mediante un retorno, como en la fig. 12.4. Esto puede ser necesario en el primer entrepiso de un edificio, donde con frecuencia las acciones máximas ocurren sobre longitudes libres máximas.

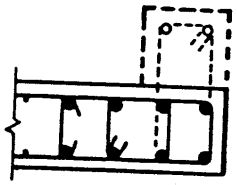


Figura 12.4 Retorno de muro para aumentar la estabilidad.

La resistencia a cortante de muros de cortante altos-

Se puede evaluar la resistencia a cortante de muros altos de cortante de la misma manera que en vigas. Se puede dar un margen adecuado para la contribución de la compresión axial en incrementar la participación del mecanismo resistente a cortante del concreto, medido por el esfuerzo v_c cortante nominal (véase la sección 7.6.1). También se debe considerar el efecto adverso de las aceleraciones verticales inducidas por los sismos. En la base del muro, donde es posible la cedencia del acero a flexión en ambas caras, se debe despreciar la contribución del concreto a la resistencia a cortante, cuando el esfuerzo P_u/A_g, de compresión axial en el área bruta del muro es menor que $0.2f'_c$, ya que posiblemente se podría compensar esta pequeña compresión mediante aceleración vertical que provocara tensión. En los capítulos 7 y 13 también se estudian los aspectos relativos a este principio, que implica que cuando $P_u/A_g < 0.2f'_c$, se debe suministrar refuerzo a cortante en forma de estribos horizontales, al menos en la longitud posible de la articulación plástica en la base del muro, para transmitir toda la fuerza cortante. Se llegó a considerar que el efecto de la relación de forma del muro en la resistencia a cortante era importante en muros de cortante cortos, tema que se estudia en la sección 12.2.2.

El mínimo refuerzo de 0.25% en la dirección horizontal, cuando se ancla debidamente, resiste un esfuerzo cortante nominal equivalente de aproximadamente $2\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.166\sqrt{f'_c}$ N/mm²) (véase la ec. 7.23*a*). El concreto resistirá al menos la misma cantidad cuando el acero a flexión esté en el rango elástico. En consecuencia, en las partes superiores reforzadas nominalmente de los muros de cortante en voladizos rectangulares, se dispone de un esfuerzo cortante equivalente de $4\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.333\sqrt{f'_c}$ N/mm²) que con frecuencia es más que adecuado.[12.6]

La distribución del acero vertical afecta el peralte efectivo de una sección de muro de cortante rectangular. Al aplicar las ecuaciones apropiadas para el esfuerzo cortante nominal, la ec. 7.5 y para el refuerzo de estribos, a ec. 7.23*a*, no es necesario tomar el peralte efectivo d como menor que $0.8l_w$ lo que es una buena aproximación para los casos comunes. Más aun, se ha dado cierto margen para ello[12.6] en la ecuación relevante del código del ACI. Las pruebas de la Portland Cemento Asociation en modelos de muros de cortante elevados han demostrado que el actual enfoque del ACI da una estimación conservadora de la resistencia a cortante para las cargas monotónicas.[12.6]

Es necesario considerar el efecto del agrietamiento diagonal en la distribución de esfuerzos a flexión en el acero, de la misma manera que en las vigas. Para cortar el refuerzo vertical en las partes exteriores de la sección del muro, se debe utilizar el desplazamiento apropiado del diagrama de momentos flexionantes mostrado en el capítulo 7. Nuevamente se puede notar que el peralte efectivo del muro podría ser de más de un piso de altura.

Juntas de construcción a través de muros de cortante

En las juntas de construcción en las que se ha observado movimiento deslizante durante los sismos, con frecuencia se ha constatado que éstos producen daños en los muros de cortante. Estos movimientos son comunes en muros bajos a cortante que trasmiten pequeñas cargas de gravedad. Sin embargo, también se ha hecho evidente dicho tipo de daño en los muros altos de cortante (vease las figs. 12.3 y 12.22). Por tanto, es necesario asegurar que se suministre suficiente refuerzo vertical en el alma del muro de cortante para suprimir una falla deslizante a cortante.

En el capítulo 7 se describió el mecanismo de trabazón del agregado o fricción a cortante, con referencia específica a las juntas de construcción. Se demostró que el esfuerzo cortante promedio que se puede transferir con

seguridad a través de una junta horizontal áspera bien preparada es al menos

$$v_{uf} = \frac{N + A_{vf} f_y}{A_g} \tag{12.2}$$

en que N = fuerza axial en la sección, positiva cuando produce compresión
A_{vf} = acero total (vertical) a utilizarse para la fuerza requerida de agarre
A_g = área transversal bruta del muro
v_{uf} = esfuerzo cortante nominal transmitido a través de la junta de construcción:

No se debe sobrestimar el efecto benéfico de la compresión axial en un muro de cortante sujeto a carga sísmica. Sólo debe tomarse en cuenta la carga de gravedad real con reducción apropiada (por ejemplo 20%) por aceleración vertical negativa. Por tanto, suponiendo que el peralte efectivo del muro de cortante sea $0.8l_w$, se tiene como resistencia a cortante nominal confiable

$$v_{uf} = \varphi \frac{0.80N + A_{vf} f_y}{0.8bl_w} \tag{12.2a}$$

en que se puede considerar que el factor φ de reducción de capacidad es 0.85.

La resistencia de la junta de construcción debe ser igual (o mayor de preferencia) a la resistencia v_u, a cortante requerida en ese nivel específico. En este contexto, la resistencia $v_u = V_u/0.8bl_w$, a cortante se refiere a la resistencia a tensión diagonal del muro. Entonces, de acuerdo con la ec. 12.2*a* cuando $v_{uf} \geq v_u$, el contenido requerido de acero $\rho_{vf} = A_{vf}/A_g$ a través de la junta de construcción queda como

$$\rho_{vf} \geq \left(v_u - 0.85 \frac{N}{A_g}\right) \frac{0.94}{f_y} \geq 0.0025 = \rho_{vf,\min} \tag{12.3}$$

Con una pequeña cantidad de compresión axial, no será difícil satisfacer la ec. 12.3. Sin embargo, en ausencia de compresión axial, no es probable que el contenido mínimo de refuerzo vertical de 0.25% en el núcleo del alma sea adecuado, a menos que el esfuerzo cortante máximo que se debe desarrollar sea muy pequeño. La fig. 12.5 muestra la cantidad de refuerzo vertical (ec. 12.3) que se debe suministrar a través de una junta de construcción horizontal. Esta es una función del esfuerzo v_u cortante nominal que debe resistirse en ese nivel de la junta, junto con distintas intensidades de esfuerzos de compresión axial para una resistencia a cedencia de 40,000 lb/plg² (276 N/mm²). Es importante que se dé esta cantidad de refuerzo

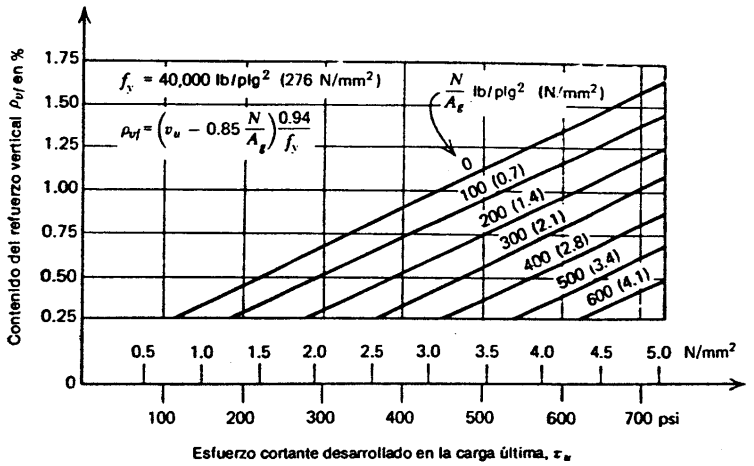


Figura 12.5 Requisito de refuerzo vertical a través de una junta de construcción de un muro de cortante.

vertical a lo largo de toda la longitud de la sección del muro. La fuerza de agarre de una varilla sólo es efectiva en la vecindad inmediata de ésta. En consecuencia, no se debe incluir el refuerzo pesado cerca de los bordes verticales extremos de las secciones de muros al evaluar la fuerza de agarre a través del núcleo de la sección.

12.2.2 Muros de cortante bajos con secciones transversales rectangulares

La altura de los muros de cortante en voladizo de muchos edificios bajos es menor que su longitud (es decir, su peralte estructural). Es claro que en tales casos no se puede basar la evaluación de la resistencia a flexión y cortante y el refuerzo apropiado en las técnicas convencionales aplicables a muros más altos. En vez de eso, son relevantes los principios establecidos con relación al comportamiento de vigas de gran peralte. Ya no es posible estudiar por separado la flexión y cortante, ya que ambas están relacionadas más íntimamente en los muros bajos de cortante.

Por lo general los muros de cortante de baja altura sólo transmiten cargas de gavedad muy pequeñas, razón por la cual se ignora su efecto benéfico derivado al menos para la resistencia a cortante. La demanda de acero a flexión también será pequeña en la mayoría de los casos, debido al brazo de palanca interno disponible relativamente grande. En consecuencia, sería más práctico distribuir el refuerzo vertical (es decir, a flexión) en forma uniforme en toda la longitud del muro, permitiendo sólo un aumento nominal en los bordes verticales.

Probablemente la pérdida de ductilidad correspondiente a la carga sísmica no será de gran importancia por dos razones. En primer lugar, el bajo requisito de acero a menudo se satisface mediante un contenido próximo al mínimo de acero (v.gr., 0.25%), que da suficiente absorción de energía en el intervalo inelástico (véase la fig. 12.2). En segundo lugar se pueden hacer muros del cortante bajos debidamente detallados que absorban todo o la mayor parte del choque sísmico en el intervalo elástico sin demanda de grandes contenidos de refuerzo.

A falta de mejor información, se ha intentado predecir el comportamiento probable de los muros de cortante bajos de las pruebas realizadas en vigas de gran peralte, ya que las similitudes geométricas sugieren el procedimiento. Casi todas las pruebas en las vigas de gran peralte tienen una característica común: la carga se aplica directamente a las caras superior e inferior de las probetas apoyadas simplemente en el claro y en los soportes, respectivamente. En la sección 7.3.3 se señaló que esta forma de aplicación de la carga aumenta considerablemente la efectividad de la acción de arco. Los estribos que cruzan la grieta diagonal principal, que se forma entre el punto de carga y el apoyo, no participan con resistencia eficiente a cortante debido a que no se pueden formar puntales de compresión entre los anclajes de los estribos. El arco se libera del cortante a lo largo del camino más corto posible, lo que está asociado con deformaciones más pequeñas. En consecuencia, no es de sorprender encontrar en los experimentos que los estribos adicionales no mejoraron la resistencia a cortante.[12.4]

Para el muro común de cortante de un edificio, la carga se introduce a lo largo de la junta entre las losas del piso y los muros, como una carga lineal. Claramente no es posible que se desarrolle una acción efectiva de arco con este tipo de carga. Leonhardt y Walther[13.21] demostraron convincentemente este comportamiento en una prueba de una viga de gran peralte (fig. 13.47) que se estudiará en la sección 13.7.4. El patrón de grietas revela la formación de puntales diagonales, de allí la participación de los estribos. En la fig. 12.6 está ilustrado un patrón semejante de

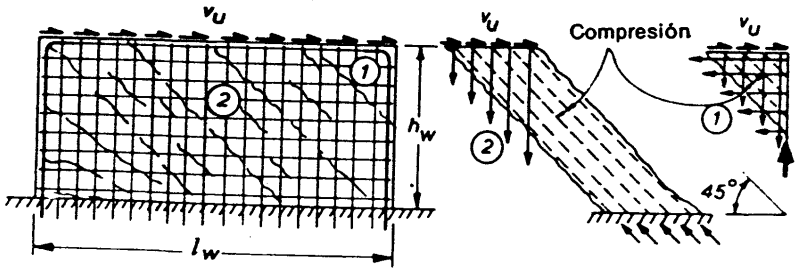


Figura 12.6 La resistencia a cortante de muros bajos de cortante.

grietas, que puede ocurrir en un muro bajo a cortante. De las consideraciones del equilibrio del cuerpo libre triangular marcado con el 1, es evidente que se requieren estribos horizontales para resistir el esfuerzo cortante aplicado a lo largo del borde superior. Las fuerzas de compresión diagonal establecidas en el cuerpo libre también requieren de refuerzo vertical. En ausencia de compresión vertical externa, los aceros horizontal y vertical deben ser iguales para permitir que se generan diagonales a compresión a 45°. Por otra parte, en el cuerpo libre unido por dos grietas diagonales y marcado con 2, sólo es necesario generar fuerzas verticales, iguales a la intensidad a cortante, para desarrollar la compresión necesaria diagonal. Con frecuencia este acero se conoce como refuerzo a cortante, aunque su papel principal es resistir el momento que tiende a volcar el cuerpo libre 2. La fig. 12.6 ilustra el papel de las varillas verticales y horizontales para resistir las fuerzas cortante en muros bajos de cortante.

En los estudios antiguos sistemáticos de los muros bajos de cortante, Benjamin y Williams aplicaron una carga lateral concentrada en el lado de tensión de voladizos cortos.[12.2, 12.3] Algunas de las recomendaciones de diseño de la década de 1960 se basaron en estos resultados y en las pruebas antiguas de vigas de gran peralte del U.S. Bureau of Standards.[12.5] El arco lineal, cuya inclinación se indica por la velación h_w/l_w fue significativo en transmitir el cortante en todas estas pruebas. Recientemente se ha abandonado el uso de esta relación con respecto a la resistencia a cortante de los muros de cortante.[12.9]

Para estudiar el comportamiento de los muros bajos de cortante y los efectos tanto del refuerzo a flexión (vertical) y a cortante (horizontal) en el modo de falla y en la ductilidad, se han realizado pruebas en la Universidad de Canterbury[12.11] en muros cuadrados de cortante en voladizo de 6 plg (150 mm) de espesor. Se sujetó a los muros a una carga de tal manera que la fuerza cortante estuviera distribuida a lo largo del borde superior (vease la fig. 12.7). Por comodidad, se expresa la carga aplicada en términos del esfuerzo nominal cortante v y la capacidad última teórica P_u^*. El modo de falla de cada uno de los muros de prueba es evidente de la fig. 12.7.

1. Deliberadamente se subdiseñó el muro *A* por cortante. Se esperaba que los estribos sólo resistieran 50% de la carga que se hubiera desarrollado, si la flexión gobernara la resistencia. La fig. 12.7*a* muestra el desarrollo de grietas diagonales durante 12 ciclos de la carga. En el refuerzo ocurrió considerable endurecimiento por deformación debido a que se pudo desarrollar 123% de la capacidad teórica a cortante y 108% de la capacidad a flexión. En la falla, se fracturó un estribo, lo que demostró la efectividad de éstos en esos muros a cortante bajos.

2. El muro *B* era idéntico al *A*, excepto porque se suministró refuerzo por cortante en exceso de la capacidad a flexión. La resistencia teórica a

flexión se asoció con esfuerzos moderados nominales cortantes es decir, $5.6\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.47\sqrt{f'_c}$ N/mm²)]. La probeta excedió su capacidad máxima de diseño en cada uno de los ciclos "plásticos" y no se pudo destruir como se pensaba debido a que el marco de carga no pudo igualar la ductilidad de la probeta. La fig. 12.7*b* muestra el muro *B* en distintas etapas de carga.

3. Suministrando más refuerzo vertical en el muro *C*, aproximadamente se duplicó la capacidad á flexión del muro *B*. Esta resistencia a flexión requirió del desarrollo de grandes esfuerzos cortantes es decir, aproximadamente $10\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.83\sqrt{f'_c}$ N/mm²)]. La resistencia a cortante de diseño del muro superó su capacidad a flexión; en consecuencia, se podría haber esperado una falla a flexión. Como lo muestra la fig. 12.7*c*, ocurrió una falla a cortante deslizante en el decimosegundo ciclo de carga a 39% de la capacidad teórica a cortante de la probeta. Este tipo de falla, típico de los miembros muy peraltados cuando se aplica fuerza cortante cíclica (alternada) de alta intensidad, no puede impedirse mediante refuerzo adicional de estribos. Normalmente no se encontraría una falla deslizante a cortante en las pruebas con carga monotónica, debido a que hasta el aplastamiento, la zona a compresión permanece relativamente intacta. Este tipo de falla se estudia con mayor detalle en la sección 12.5.3, cuando se repasa el comportamiento de vigas muy peraltadas de fachada.

En la fig. 12.8 se da la relación carga - rotación para los tres muros, en que se define "rotación" como la deflexión lateral del muro dividido entre su altura. Los ciclos 1 a 4 muestran la respuesta elástica inicial y los ciclos 7 a 8 indican la respuesta elástica después de que se hizo una excursión moderada más allá del intervalo de cedencia en cada dirección. La respuesta plástica de cada muro se puede expresar convenientemente por el factor de ductilidad cumulativa, en que "factor de ductilidad" se define como la relación de la rotación máxima del muro lograda en un ciclo de carga a la rotación del muro a primera cedencia, que se obtuvo en el quinto ciclo de carga. Este factor de ductilidad cumulativa fue de 46, 56 y 30 para los muros *A*, *B* y *C* respectivamente. El muro *C* no sólo fue el menos dúctil, sino que también mostró una clara pérdida de resistencia durante las pruebas. El mejor comportamiento del muro *B* sugiere dos importantes conclusiones para el diseño:

(*a*) Si se desea un mecanismo de falla dúctil (o sea, a flexión) en un muro bajo de cortante, los esfuerzos nominales asociados con la sobrecapacidad a flexión del muro deben ser moderados, por ejemplo $v_c \leq 6\sqrt{f'_c}$ lb/plg² ($0.5\sqrt{f'_c}$ N/mm²). lo que normalmente no es difícil de lograr. De ser necesario, se debe de aumentar el espesor del muro.

(b) Debido a que el mecanismo de falla a flexión está asociado con grietas grandes, no se debe confiar en la contribución del concreto a la

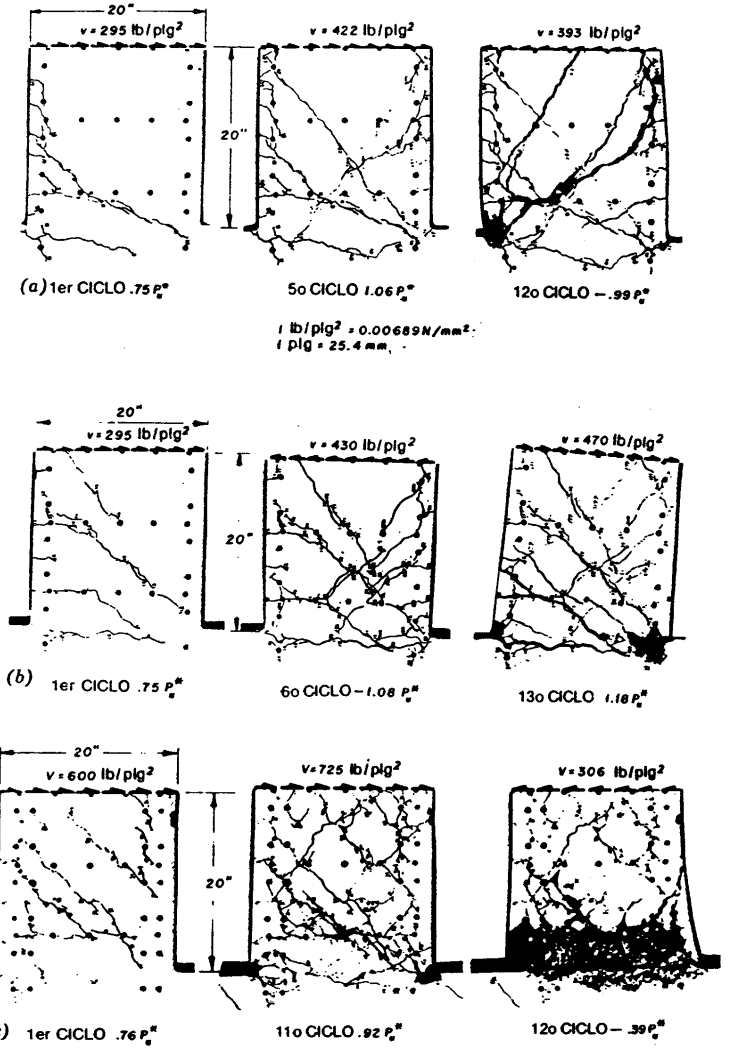
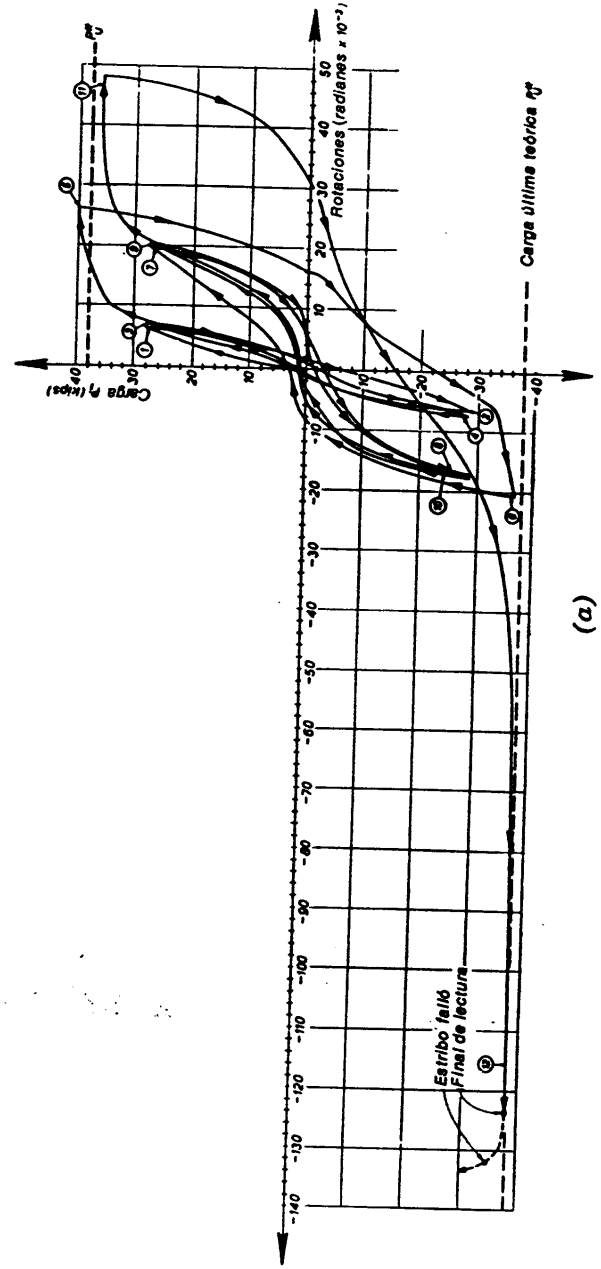


Figura 12.7 Los modos de falla de tres modelos de muros bajos de cortante.[12.11] (*a*) Muro *A*. (*b*) Muro *B*. (*c*) Muro *C*.



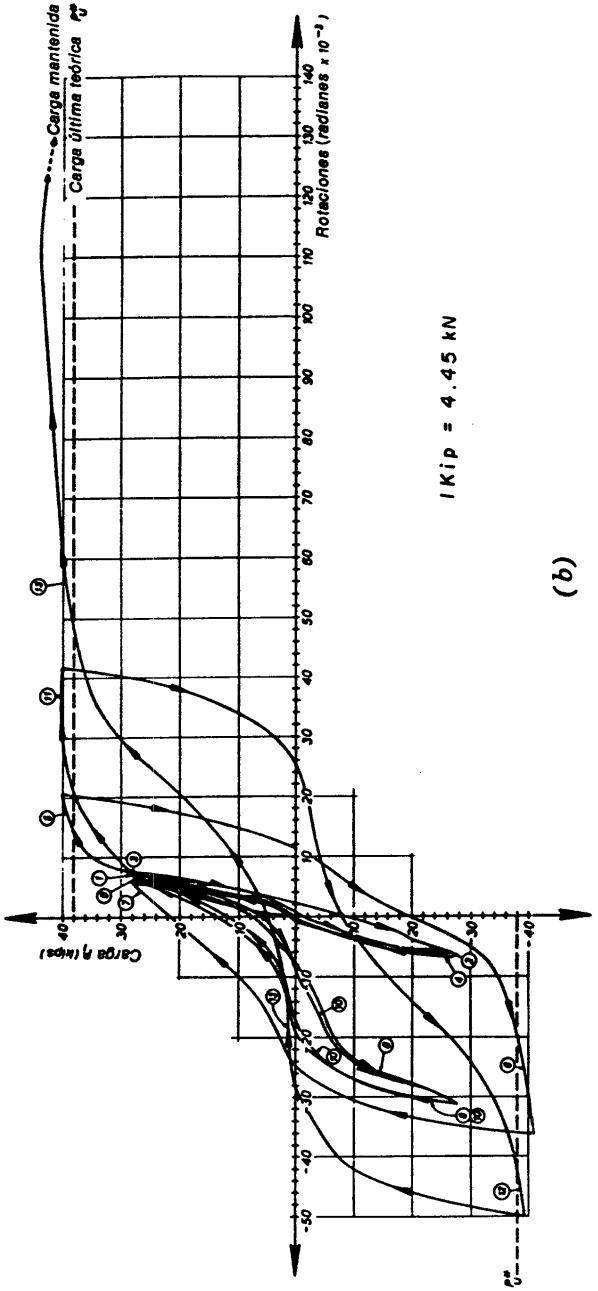


Figura 12.8. Relaciones carga-rotación para muros bajos de cortante sujetos a cargas cíclicas. (*a*) Muro *A*. (*b*) Muro *B*. (*c*) Muro C. (Vea también las páginas 648-9.)

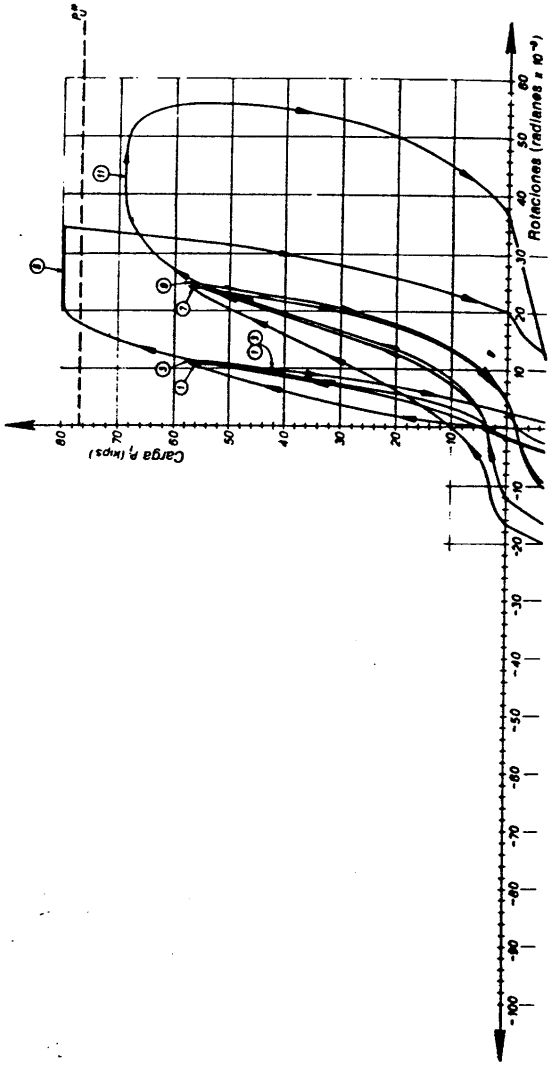


Figura 12.8 (*continúa*)

resistencia al cortante. En consecuencia, el refuerzo del alma debe resistir toda la fuerza cortante.

Se debe de notar que en estas pruebas no se tomó en cuenta el efecto posible de la compresión axial.

En el capítulo 7 se describieron las provisiones del código de ACI[12.10] para la resistencia a cortante de muros. La única diferencia entre las provisiones a cortante para muros y vigas está en la evaluación de v_c, la contribución del concreto, que toma en cuenta la presencia de la carga axial. Cárdenas, Hanson, Corley y Hognestad,[12.6] estudiaron el fondo de estas provisiones y demostraron con sus pruebas y las de muchos otros que las recomendaciones actuales del código del ACI[12.10] para muros son conservadoras y satisfactorias.

El refuerzo mínimo a cortante no debe ser menor que 0.25% del área del concreto. Antes se mencionó que en muros largos y bajos de cortante como en la fig. 12.6, el refuerzo vertical del alma será más efectivo para permitir que se formen puntales a compresión diagonal. En consecuencia, en los muros con h_w/l_w menor que 0.5, el código del ACI[12.10] requiere acero vertical del alma ρ_n igual a la cantidad de refuerzo horizontal a cortante. Para muros de cortante con relaciones de altura/longitud entre 0.5 y 2.5, se sugiere una interpolación lineal entre este acero y el mínimo de 0.25%, lo que da

$$\rho_n = 0.0025 + 0.5\left(2.5 - \frac{h_w}{l_w}\right)(\rho_h - 0.0025) \tag{12.4a}$$

$$\rho_n \geq 0.0025 \tag{12.4b}$$

$$\rho_n \leq \rho_h = \frac{v_u - v_c}{f_y} \tag{12.4c}$$

en que ρ_n y ρ_h = contenidos de acero vertical y horizontal por área unitaria de sumo.

A veces se rodean los muros de cortante por un marco periférico que puede contener refuerzo sustancial. Umemura[12.12] y otros han estudiado experimentalmente el comportamiento de estos muros, que también contienen aberturas. Algunos investigadores han intentado evaluar el comportamiento de esos muros a partir de la superposición de la acción del marco y la de diafragma del relleno del muro. El enfoque se justifica cuando no existe conexión homogénea entre los dos, lo que sucede para marcos de acero o concreto reforzado con tableros de relleno de mampostería. Sin embargo, un muro de cortante de concreto reforzado colado monolíticamente con elementos perimetrales tiende a actuar como una unidad, por lo que se deben hacer todos los esfuerzos posibles en el proceso de diseñar y detallar para estimar este comportamiento muy eficiente.

12.2.3 Muros de cortante en voladizo con patines

No hay razón para esperar que los muros altos de cortante con patines, como el de la fig. 12.9, se comporten de manera distinta que los que tienen secciones transversales rectangulares. Cuando la fuerza axial es pequeña, podemos anticipar que también estos muros utilicen el "par de acero" interno en el intervalo inelástico, ya que el contenido de refuerzo en ambos patines normalmente es el mismo. Por tanto, se podrá disponer de suficiente ductilidad, si esta se requiere durante un sismo de magnitud catastrófica, con tal que la restricción contra el pandeo del acero sea adecuada.

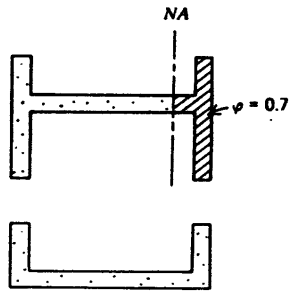


Figura 12.9 Secciones transversales con patines.

Cuando la compresión axial es significativa, todo un patín y parte del alma pueden estar en compresión. En tales casos parece aconsejable considerar que los patines son columnas con estribos cargadas axialmente. De acuerdo con ello, sería más apropiado un factor más bajo de reducción de capacidad (v.gr., $\varphi = 0.7$) al evaluar la capacidad última en este caso. Para las posiciones intermedias del eje neutro, se puede interpolar adecuadamente el valor de φ entre 0.7 y 0.9. Es evidente la importancia de suministrar suficiente refuerzo transversal alrededor del acero vertical principal en los patines.

Los patines incrementan considerablemente el momento de resistencia de muros altos en voladizo de cortante. Por tanto la resistencia de las fuerzas cortante en el alma puede ser más crítica que en los muros que tengan secciones transversales rectangulares. Se debe prestar atención especial a las juntas de construcción horizontal, que también pueden estar cargadas más severamente. En un muro de cortante bien diseñado, no se espera que el refuerzo a cortante ceda en ninguna etapa de la carga.

El comportamiento de muros de cortante cortos con patines es todavía más complejo. Incluso una pequeña cantidad de refuerzo vertical en los patines anchos puede suministrar una capacidad a flexión asociada con una carga cortante excesiva en el alma. Barda[12.8] estudió experimental-

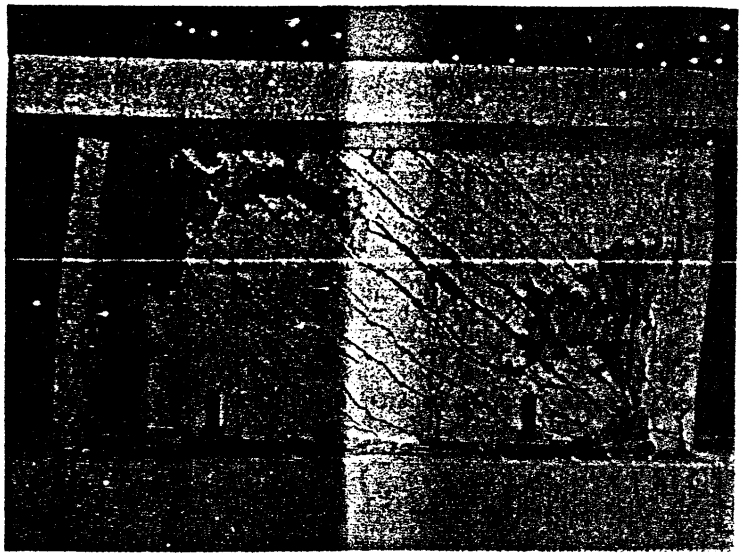


Figura 12.10 Falla a cortante de muro de cortante bajo con patines.[12.8] (Cortesía de la Portland Cement Association).

mente esos muros y confirmó la efectividad del refuerzo vertical a cortante en los muros de cortante con una relación de h_w/l_w de 0.5. Estas probetas de muros a escala de un tercio (fig. 12.10) se reforzaron deliberadamente para estimular la ocurrencia de falla a cortante. Bajo un esfuerzo nóminal cortante de 800 lb/plg^2 (5.5 N/mm^2), el refuerzo vertical del alma cedió, pero no se observó cedencia en el acero del patín vertical. La elongación del refuerzo a cortante vertical provocó una concavidad hacia abajo de la losa, y las grietas resultantes en la losa son visibles en la fig. 12.10. Se encontró que un emparrillado de refuerzo es efectivo para distribuir uniformemente las grietas diagonales y para controlar su ancho. En los muros de cortante bajos con patines, las juntas de construcción pueden constituirse en el plano de falla crítica.

Barda[12.8] determinó las resultantes de fuerzas de tensión interna de las mediciones de deformaciones. Combinando esta información con la carga externa, también se pudieron encontrar las resultantes de compresión interna para probetas semejantes. Este estudio muestra (fig. 12.11) que el patín a compresión no es efectivo en muros de cortante bajos, ya que no se puede desarrollar el brazo interno de palanca grande ideal, necesario para el comportamiento de "viga".

12.2.4 Interacción momento - carga axial en secciones de muros de cortante

Las secciones transversales de perfiles con patines, de ángulos o canales a menudo aparecen en muros de cortante, formando el núcleo de edificios de niveles múltiples. Estos se pueden sujetar a cargas axiales de intensidad variable, incluyendo tensión neta, junto con momentos flexionantes alrededor de uno o ambos ejes principales. Por razones prácticas las secciones transversales permanecen razonablemente constantes en toda la altura de la estructura. Es posible, y puede ser ventajoso, evaluar la relación de interacción entre la flexión y fuerza axial para esos muros de cortante en voladizo. Puede ser bastante tedioso y pesado obtener el refuerzo requerido para una interacción específica de carga, aunque es relativamente fácil determinar las combinaciones de carga posible para distribuciones dadas y cantidades de refuerzo, especialmente con la asistencia de una computadora. Entonces se pueden utilizar los resultados para asignar el refuerzo requerido a cualquier nivel de la estructura.

Cuando se sujeta a una sección transversal de perfil de canal a carga axial y flexión alrededor de su eje principal débil, resultan curvas de interacción del tipo ilustrado en la fig. 12.12. En esta sección particular se supuso que el refuerzo está distribuido uniformemente a lo largo del centro del espesor del muro. La excentricidad de la carga es con referencia al centroide plástico de la sección. Se considera que un momento positivo causa compresión en los bordes de los patines y tensión en el alma de la canal. Para flexión pura, esto sería una sección sobrerreforzada con aproximadamente 3% de contenido de acero total. Para un momento inverso (negativo) que provoca compresión en el alma de la sección, después de aplicar las fuerzas de compresión sigue un notable aumento en la capacidad de momento. Los cálculos se realizaron[12.14] para posiciones

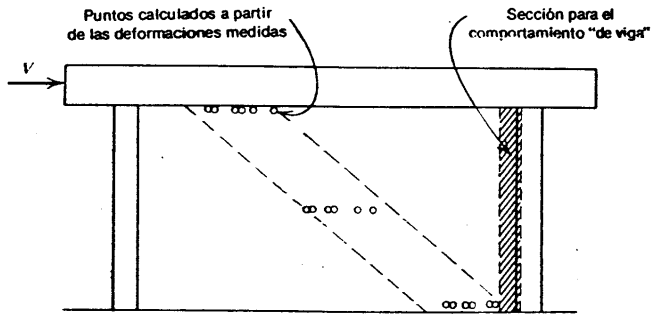


Figura 12.11 Ubicación de resultante interna a compresión en muros de cortante bajos con patines.[12.8]

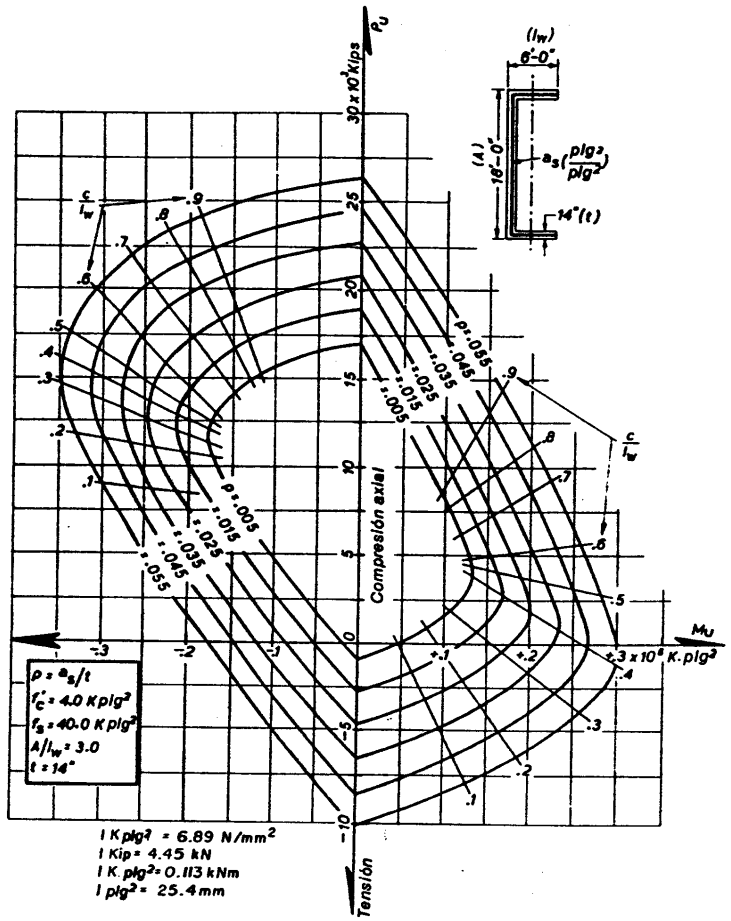


Figura 12.12 Relaciones típicas de interacción momento - fuerza axial para un muro de cortante de sección en forma de canal.

del eje neutro variando en toda la sección, manteniendo constante la deformación a compresión del concreto ($\varepsilon_c = 0.003$) en la fibra a compresión extrema y para un solo sentido del momento flexionante como se describió en la sección 5.3.4. La sección de muro en la fig. 12.12 es adecuada para resistir tensión axial moderada en combinación con momentos positivos, y considerable compresión axial con momentos negativos. Estas son combinaciones típicas de carga que ocurren en estructuras acopladas de muros de cortante.

Para poder evaluar la extensión de la zona a compresión en la sección del muro de cortante, el diseñador también puede determinar la posición

del eje neutro con respecto al borde a compresión. Estas posiciones se muestran en la fig. 12.12 en términos de la relación de la profundidad del eje neutro al peralte total, c/l_w. Por tanto, se puede estimar un valor apropiado para el factor φ de subcapacidad para cualquier caso de carga. En la sección de ejemplo de la fig. 12.12, para un momento flexionante negativo con compresión axial moderada, c/l_w podría ser 0.1; por tanto $0.1 \times 6 \times 12 = 7.2$ plg (es decir, aproximadamente la mitad del espesor del alma) estaría bajo compresión. Para este caso, sería apropiado $\varphi = 0.9$ Por otra parte, para un momento positivo con sólo una pequeña fuerza de compresión, $0.5 \times 6 \times 12 = 36$ plg del patín estarían bajo compresión. Debido a que la sección sólo tiene 14 plg de ancho, $\varphi = 0.7$ sería un valor más adecuado.

12.2.5 Interacción entre muros de cortante en voladizo

En determinados edificios de plantas múltiples, tales como edificios de departamentos, los muros de cortante trasmiten la carga gravitacional al igual que la lateral de viento o sísmica. En la fig. 12.13 se muestra una planta típica de esa clase de edificios. Se puede considerar que la losa del piso es muy flexible en comparación con la rigidez a flexión de los muros con respecto a su eje mayor; por tanto, la resistencia a flexión de la losa durante la carga lateral no necesita tomarse en cuenta en la mayoría de los casos. Las losas actúan como diafragmas horizontales, que se extienden de muro a muro y se espera que aseguren que no cambien las posiciones relativas de los muros entre sí durante el desplazamiento lateral de los pisos. La resistencia a flexión de los muros rectangulares con respecto a su eje débil también puede despreciarse en un análisis de carga lateral.

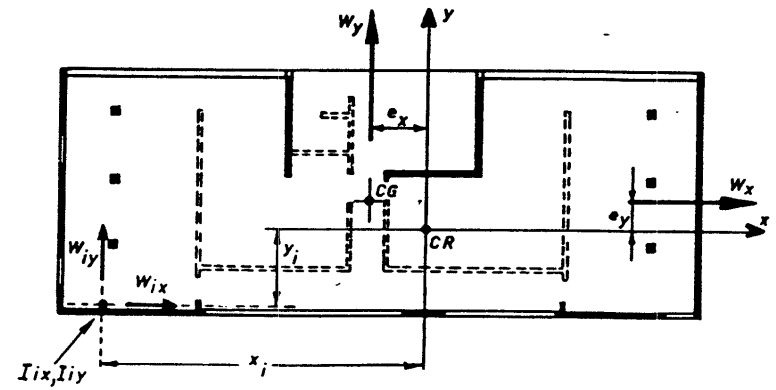


Figura 12.13 Muros de cortante de un edificio de departamentos.

El análisis elástico de un conjunto de voladizos interconectados, modelados en la fig. 12.14, puede ser muy complejo, si se toman en cuenta las deformaciones a cortante y la torsión con alabeo limitado en las unidades de muros individuales. Stiller,[12.15] Beck,[12.16] Rosman,[12.17] y otros han propuesto soluciones rigurosas y todos suponen comportamiento perfectamente elástico de la estructura homogénea isotrópica. Sin embargo, con cierta simplificación, es fácil distribuir la carga lateral total entre los muros. Esta aproximación supone que sólo ocurren deformaciones a flexión, lo que significa que el patrón de carga en la altura de cada muro es semejante. Con referencia a la fig. 12.13, se puede aproximar la distribución de la carga sísmica lateral total, W_x o W_y, entre todos los muros mediante las siguientes expresiones:

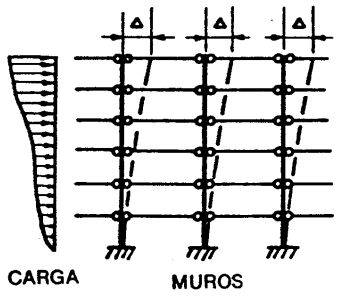


Figura 12.14 Modelo matemático de muros de cortante en voladizos en interacción.

$$W_{ix} = W'_{ix} + W''_{ix} \tag{12.5a}$$

$$W_{iy} = W'_{iy} + W''_{iy} \tag{12.5b}$$

en que

$$W'_{ix} = \frac{I_{iy}}{\Sigma I_{iy}} W_x \tag{12.6a}$$

$$W'_{iy} = \frac{I_{ix}}{\Sigma I_{ix}} W_y \tag{12.6b}$$

$$W''_{ix} = \frac{y_i I_{ix}}{\Sigma(x_i^2 I_{ix} + y_i^2 I_{iy})} e_y W_x \tag{12.7a}$$

$$W''_{iy} = \frac{x_i I_{ix}}{\Sigma(x_i^2 I_{ix} + y_i^2 I_{iy})} e_x W_y \tag{12.7b}$$

W_{ix}, W_{iy} = participación del muro i para resistir la carga lateral externa total en las direcciones x y y respectivamente

W'_{ix}, W'_{iy} = carga inducida en el muro solamente por las traslaciones entre niveles.

W''_{ix}, W''_{iy} = carga inducida en el muro solamente por la torsión entre plantas

W_x, W_y = carga externa total que deben resistir todos los muros

I_{ix}, I_{iy} = segundo momento apropiado del área de una sección de muro alrededor de sus ejes x y y

x_i, y_i = coordenadas del muro con respecto al centro de rigidez *CR* del sistema resistentes a las cargas

e_x, e_y = excentricidades que resultan de la falta de coincidencia del centro de gravedad *CG* (masas) y el centro de rigidez en que

Si W_x y W_y se deben a la carga de viento, hay que remplazar el centro de masa por la posición de la fuerza resultante del viento.

Las ecs. 12.5 a 12.7 son análogas a las que se utilizan en el análisis de grupos de remaches y se considera que dan resultados suficientemente exactos cuando se estudian las cargas sísmicas. Los errores, que pueden deberse a despreciar las deformaciones a cortante y la resistencia torsional de los muros con secciones abiertas, seguramente son menores que los debidos a ignorar el efecto del agrietamiento en la rigidez. La intensidad de la carga de gravedad en cada muro también afecta el inicio del agrietamiento y la pérdida consecuente de rigidez.

El enfoque anterior debe ser adecuado para un análisis de carga máxima, ya que representa un caso admisible estáticamente. Este análisis aproximado elástico puede asegurar que se obtenga la capacidad resistente máxima de todos los muros aproximadamente al mismo tiempo. Con los perfiles utilizados para los muros de cortante de los edificios altos de departamentos, no hay razón para esperar una deficiencia de ductilidad, en tanto no se permita que ocurran fallas secundarias prematuras (adherencia, cortante, inestabilidad etc).

Para los muros de cortante con una relación de altura/peralte inferior a 3 ($h_w/l_w < 3$), las deformaciones a cortante pueden ser suficientemente predominantes para considerarlas en los cálculos de rigidez o deflexión. Las distorsiones por cortante son más significativas en los muros con patines.

Al estimar las deflexiones de los muros sólidos de cortante para evaluar el periodo de vibración de la estructura, se pueden utilizar los principios de comportamiento elástico, pero se debería reducir el módulo E_c de Young y el módulo de rigidez G para tomar en cuenta la pérdida de rigidez provocada por el agrietamiento diagonal y a flexión[12.18] (véase también la sección 7.7).

12.3 INTERACCION DE MUROS DE CORTANTE Y MARCOS CON JUNTAS RIGIDAS

Estudiar las técnicas para evaluar la interacción de muros de cortante y marcos rígidos está más allá del alcance de este libro, pero se dispone de varios métodos de análisis estructural para resolver este problema.[12.19, 12.20] Sin embargo, se plantean determinados problemas de los claramente distintos comportamientos de muros y marcos.

La fig. 12.15*a* ilustra un muro en voladizo de cortante y un marco, los cuales trasmiten la misma carga a determinada altura, lo que hace que el muro de cortante sufra distorsiones flexionantes y que tome una pendiente constante por arriba del nivel de carga. Las secciones originalmente horizontales en cada piso se inclinan. El marco experimenta desplazamiento de traslación y tiende a hacerse vertical por arriba del nivel de la carga.

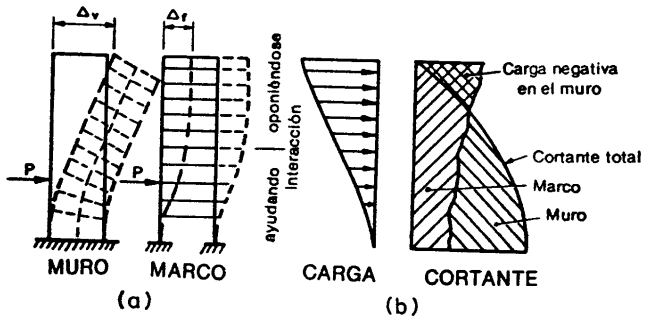


Figura 12.15 Interacción de muros de cortante y marcos rígidos.

Cuando se desprecian los acortamientos de columnas, lo que está justificado para edificios de altura moderada, los pisos permanecen horizontales. Debido a la incompatibilidad de las deformaciones, un muro de cortantes puede oponerse a un marco rígido en los pisos superiores. Sólo en los pisos inferiores las dos estructuras se asisten mutuamente para transmitir la carga externa. En la fig. 12.15*b* se ilustra la distribución típica de la carga lateral entre un muro de cortante alto y relativamente esbelto y un marco, en términos de las fuerzas cortantes.

En un informe sobre la respuesta de las construcciones a fuerzas laterales del comité 442 del ACI[12.21] se dan otros ejemplos del uso de muros de cortante en combinación con marcos y métodos de análisis, junto con una bibliografía extensa.

12.4 MUROS DE CORTANTE CON ABERTURAS

Las ventanas, puertas y ductos de servicio requieren que los muros interiores o exteriores de cortante tengan aberturas. Para asegurar una estructura racional, es importante que se tomen decisiones sensatas en las primeras etapas de planificación con respecto a la ubicación de las aberturas en toda la construcción. (Una "estructura racional de muros de cortante" es tal que su comportamiento esencial se puede evaluar por inspección simple.)

Por lo general, las estructuras irracionales de muros de cortante desafían la solución mediante análisis estructural normal. En tales casos las investigaciones de modelos o estudios de elementos finitos pueden ayudar a evaluar las fuerzas internas. Sólo los estudios especiales experimentales pueden revelar los aspectos importantes de la resistencia máxima, absorción de energía y demanda de ductilidad en los muros de cortante irracionales de concreto reforzado. No es raro que se disponga de los resultados de ese tipo de investigación cuando se ha términado ya la construcción de la estructura de los muros de cortante.

Es imperativo que las aberturas interfieran lo menos posible con la capacidad de momentos y trasmisión de cortante de la estructura. En la fig. 12.16*a* se muestra un buen ejemplo de muro irracional de cortante. El

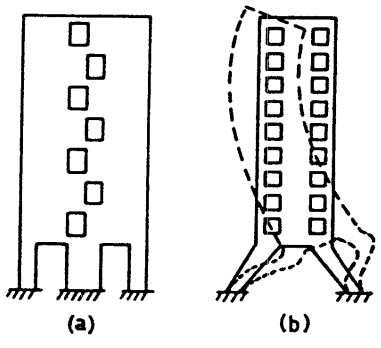


Figura 12.16 Muros irracionales de cortante. (*a*) Interferencia con la resistencia a flexión y cortante. (*b*) Deformaciones indeseables debidas a las columnas inclinadas.

repentino cambio de una sección de muro a columnas reduce drásticamente la resistencia a flexión de la estructura de voladizo en la crítica sección de la base. La distribución escalonada de las aberturas reduce severamente el área de contacto entre los dos muros, donde se deberían trasmitir las fuerzas a cortante. Las columnas del muro ilustrado en la fig. 12.16*b* podrían llevar a un caso indeseable en que el mecanismo de traslación lateral de las columnas ladea el muro en una dirección opuesta a la de la traslación lateral.

Las observaciones realizadas sobre el comportamiento probable de los muros de cortante durante las perturbaciones sísmicas indican lo indeseado de remplazar muros masivos cerca de su base con miembros de columnas más ligeras. La fig. 12.17 tomada de un estudio teórico de

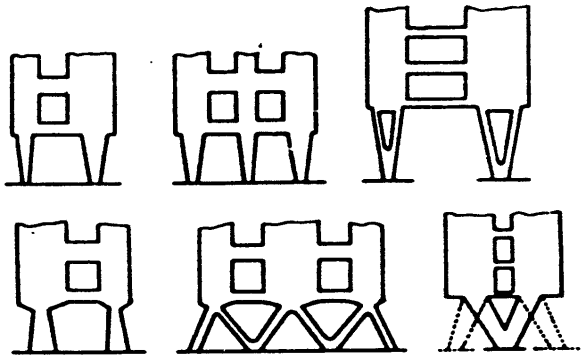


Figura 12.17 Formas indeseables de muros de cortante resistentes a sismos.

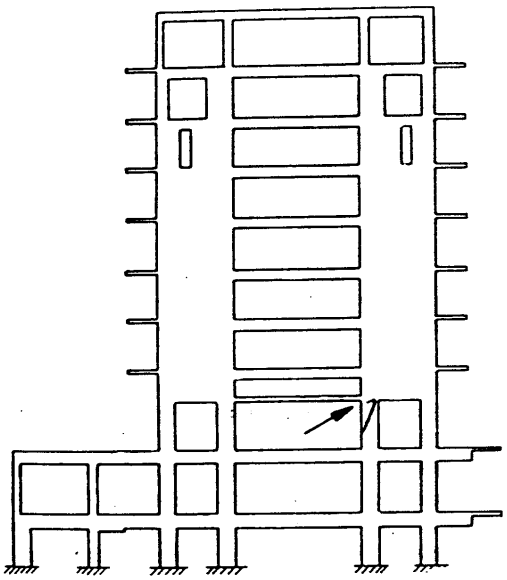


Figura 12.18 La estructuración del Hotel Macuto - Sheraton de Venezuela.

muros perforados de cortante, presenta tipos de muros que son satisfactorios para la resistencia de carga de viento, pero que probablemente causan un desastre en un sismo de importancia. Para estas cargas, se puede concentrar la absorción de energía en el intervalo inelástico en unas cuantas ramas relativamente ligeras, y se puede asociar con demandas de ductilidad que no se pueden satisfacer con el concreto reforzado.

Una ejemplo del comportamiento estructural insatisfactorio se observó en el hotel Macuto - Sheraton de Venezuela. En este edificio, los muros de cortante de 18 plg (455 mm) de espesor trasmitieron la carga sísmica a columnas redondas de 43 plg (1090 mm) de diámetro en el cuarto piso.[12.22] Durante el sismo de Caracas del 29 julio de 1967, una hilera de columnas del tercer piso falló en cortante y compresión axial. Una flecha indica el sitio en la fig. 12.18. Los momentos de volteo de los muros de cortante indujeron grandes fuerzas axiales en las columnas, lo que redujo su ductilidad a flexión. En la fig. 7.21 se muestra un acercamiento de una columna que falló.

12.5 MUROS ACOPLADOS DE CORTANTE

12.5.1 Introducción

Muchos muros de cortante contienen una o más hileras verticales de aberturas. Un ejemplo especialmente común de ese tipo de estructura es el "núcleo de cortante" de un edificio alto, que acomoda los cubos de elevadores, pozos de escaleras y ductos de servicio. Las puertas de acceso de todos estos atraviesan los muros. Por tanto, los muros a cada lado de las aberturas se pueden interconectar mediante vigas cortas, a menudo muy peraltadas. Se acostumbra referirse a esos muros como "acoplados" por las vigas. En la fig. 12.19*a* se ilustra una estructura típica.

Con frecuencia es difícil clasificar una estructura de muro de cortante acoplada. Por una parte se puede considerar que la estructura es un muro que contiene aberturas; por otra parte, puede ser más apropiado hablar de un marco rígido constituido por miembros muy peraltados. Ambas definiciones indican que es posible que las técnicas manuales convencionales de análisis estructural no sean adecuadas.

Antes que se pueda evaluar el comportamiento de un muro a cortante acoplado, se deben examinar dos tipos de deformación normalmente despreciados en el análisis de marcos.

El sistema de acoplamiento, que consiste en un conjunto de vigas cortas de acoplamiento, trasmite fuerzas cortantes de un muro a otro (fig. 12.19*a*), lo que sujeta a las vigas de acoplamiento a flexión y a cortante. Debido a la pequeña relación de claro/peralte de estas vigas, las deformaciones a cortante pueden volverse muy significativas.

Debido a que sus rigideces son grandes, las vigas de acoplamiento son sensibles a los movimientos relativos de sus apoyos empotrados. Por este motivo las deformaciones axiales de los muros acoplados, que son responsables de esos movimientos, pueden tener un efecto considerable en el comportamiento global. La pequeñas relaciones de claro/peralte de los miembros y la consideración requerida de deformaciones axiales, significa que no se pueden aplicar fácilmente las técnicas manuales de análisis de marcos. En consecuencia, se ha popularizado otro método, que permite obtener la información requerida con relativa facilidad, especialmente cuando se dispone de una pequeña computadora. Al método se le conoce como el enfoque del "análisis laminar" o "continua".

12.5.2 El análisis laminar utilizado para predecir la respuesta elástica lineal

En distintos estudios se han utilizado los conceptos del análisis laminar de Beck - Rosman.[12.23–12.25] Chitty[12.26] dio origen al concepto de la si-

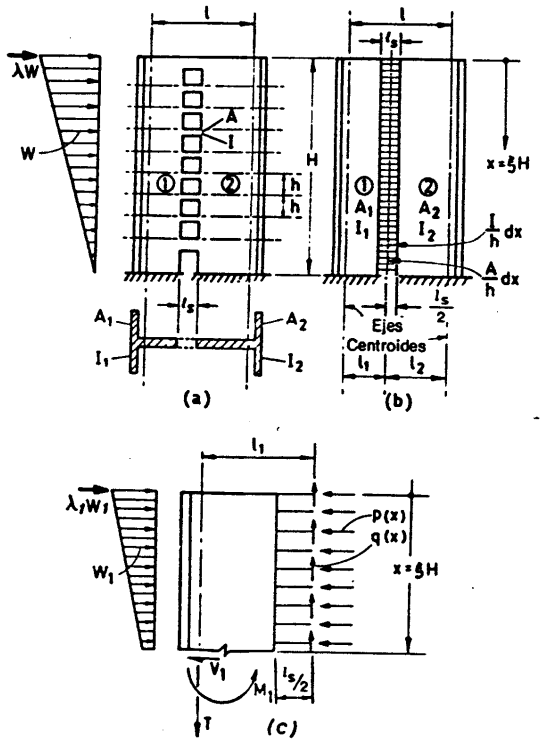


Figura 12.19 Muros acoplados de cortante y su modelo matemático. (*a*) Estructura prototipo. (*b*) Modelo matemático. (*c*) Acciones internas y externas.

mulación. El enfoque emplea un modelo matemático en que se remplazan las vigas discretas de conexión por un medio elástico continuo equivalente (es decir, láminas elásticas infinitesimales), lo que permite reducir un problema altamente indeterminado a otro relativamente simple, en que se obtienen las fuerzas cortantes indeterminadas en las vigas de conexión de una función continua. En la fig. 12.19 están ilustrados la estructura prototipo y su modelo matemático. Por lo general, las aproximaciones implicadas en el uso de este acoplamiento laminar elástico quedan dentro de los límites aceptables del diseño estructural, especialmente para los edificios altos. Los estudios fotoelásticos y los de otros modelos han verificado que el método produce un grado satisfactorio de exactitud. En este capítulo no se ha querido abundar en esta técnica que se ha refinado y extendido para distintos casos en una diversidad de publicaciones de investigación.

La acción más importante de una carga lateral externa, el momento flexionante o de volteo, se debe resistir en cualquier sección transversal horizontal a través de la estructura del muro de cortante (fig. 12.19c). La expresión correspondiente del equilibrio es

$$M_0 = M_1 + M_2 + lT \tag{12.8}$$

en que M_0 = momento externo total
M_1, M_2 = momentos internos generados en el muro 1 ó 2
T = fuerza axial inducida en los muros, tensión en el muro 1 y compresión en el muro 2 de la fig. 10.19*b*
l = distancia entre centroides de los dos muros

Todas estas acciones se consideran en el nivel x.

El propósito del análisis laminar es determinar las acciones internas recién definidas. En la fig. 12.19*c* se muestra un cuerpo libre aislado que consiste en una parte del muro 1 y láminas, cortadas a través de su punto de inflexión a la mitad del claro. Las láminas se sujetan sólo a fuerzas cortantes $q(x)$ y fuerzas axiales, $p(x)$ en los puntos a la mitad del claro. La parte de la carga externa total que resiste el muro 1 es W_1 y $\lambda_1 W_1$. Considerando las ecuaciones de las deformaciones compatibles, se puede establecer una ecuación diferencial de segundo orden que usualmente da las fuerzas cortantes laminares $q(x)$ en toda la altura de la estructura de muros de cortante acoplados.

La fuerza axial en los muros resulta de la acumulación de las fuerzas cortantes a través del sistema de acoplamiento de las vigas o láminas. A mayor rigidez del sistema de acoplamiento con relación a los muros, mayor eficiencia del acoplamiento, mayores las fuerzas inducidas a cortante vertical en las vigas y mayor la fuerza axial en los muros. La relación entre los modos de resistencia de momentos internos, mostrada por la ec. 12.8, depende de la resistencia y rigidez del acoplamiento entre los dos

muros. Es claro que es más eficiente resistir el momento externo predominantemente mediante fuerzas internas T que operan con un brazo grande I de palanca que mediante componentes M_1 y M_2 internas de momento.

En la fig. 12.20 se muestran las proporciones relativas de las contribuciones del par interno, IT, para resistir los momentos externos M_0, a distintos niveles de un núcleo de cortante elástico de 20 pisos. Se ve que el acoplamiento es eficiente para la mitad superior de la estructura para todas las vigas, menos las poco peraltadas. En la base, se indica poca diferencia en el comportamiento para vigas de 24 plg (610 mm) de peralte o infinitamente rígidas. Estas últimas representan el caso en que no ocurran distorsiones en el proceso de transferencia de cortante de un muro a otro; es decir, ocurre una distribucción continua de deformación lineal a través de toda la estructura de muro de cortante. La baja eficiencia de las vigas de acoplamiento de 6 plg (150 mm) de peralte muestra el enfoque al otro caso límite, cuando $IT = 0$; es decir, cuando todo el momento externo es resistido por flexión en los muros voladizos componentes M_1 y M_2. El papel del agrietamiento se ha examinado teórica y experimentalmente [12.28, 12.29] en el comportamiento elástico de los muros de cortante. Debido a las grandes diferencias entre las rigideces de las componentes y la

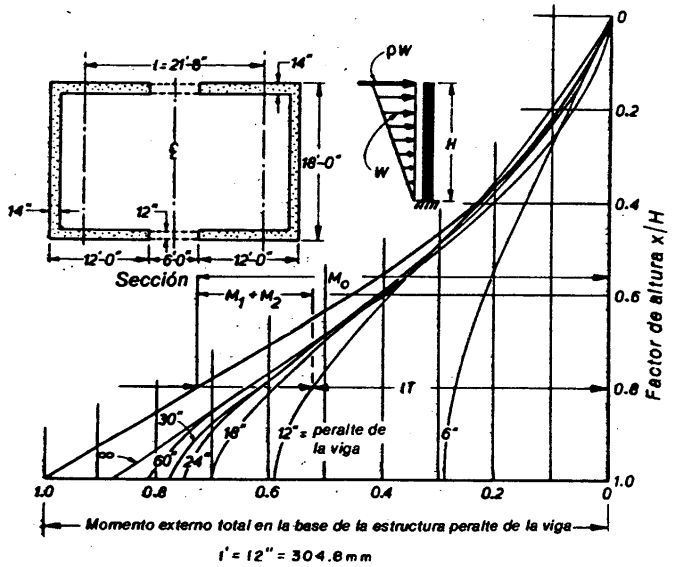


Figura 12.20 El modo de resistencia de momentos internos en una estructura de muro acoplada de cortante.

pérdida drástica de rigidez en el sistema de acoplamiento después del agrietamiento diagonal, se ha obtenido un aumento de 75 a 100% tanto en la deflexión como en los momentos de muro en los estudios de casos en que se tomó en cuenta el agrietamiento. Es mejor hacer una serie de suposiciones con respecto a la pérdida de rigidez provocada por el agrietamiento en los muros y el sistema de acoplamiento y realizar un análisis para cada una. Los resultados, dados por funciones continuas, se pueden transformar convenientemente a acciones discretas en cada planta, que subsecuentemente se utilizan en el diseño de la estructura.

En la fig. 12.19 se ilustra el tipo más común de estructuras de muros de cortante regular acoplado. El análisis laminar también puede manejar otras condiciones de frontera, tales como acoplamiento infinitamente rígido en la parte superior y bases de muro articuladas o restringidas elásticamente. Rosman ha desarrollado soluciones para muchas condiciones distintas de frontera.[12.30] Una de las desventajas de esta técnica es su incapacidad para manejar con facilidad los muros con propiedades variables en sus secciones. Para esas estructuras será más útil usar programas estándar de computadora aplicables a los marcos o se pueden emplear tablas como las que preparó Burns.[12.31] También es posible considerar propiedades variables de las secciones si se aplican la técnica del análisis de diferencias finitas al análisis laminar estándar.

12.5.3 Comportamiento elastoplástico de muros de cortante acoplados

Problemas del comportamiento elastoplástico

La resistencia de dos muros de cortante acoplados, sujetos a cargas laterales de tipo sísmico, se alcanza cuando se forma un mecanismo de colapso. Se requieren dos articulaciones plásticas en cada viga de acoplamiento para terminar su habilidad de aceptar cortante adicional. También se necesita desarrollar una articulación plástica en cada uno de los muros de cortante, normalmente en su base, para completar el mecanismo de colapso. La secuencia de formación de articulación para una carga dada depende de la resistencia relativa y rigidez de las componentes. El mecanismo es semejante al mostrado para un marco de plantas múltiples en la fig. 11.31.

El comportamiento de algunos de los muros de cortante acoplados expuestos a sismos severos indicó que todas o casi todas las vigas de acoplamiento fallaron antes de lograrse la resistencia máxima de los muros acoplados. Ejemplos clásicos son algunos de los marcos de muros extremos de cortante de dos edificios de 14 plantas dañados severamente durante el sismo de 1964 en Alaska[12.32] (figs. 12.21 y 12.22). Sin embargo, es posible que en algunas estructuras la resistencia máxima de los muros se

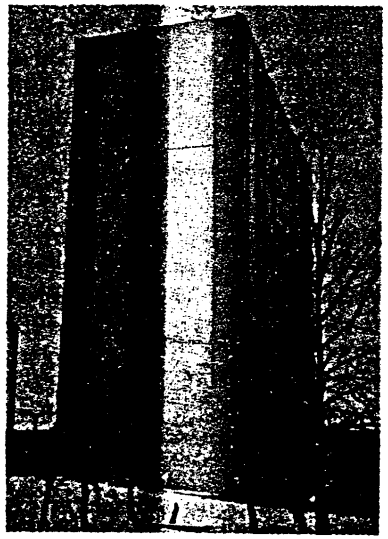


Figura 12.21. El edificio Mount McKinley en Anchorage, Alaska, dañado durante el terremoto del 27 de marzo de 1964. (Cortesía del Instituto Norteamericano del Hierro y el Acero).

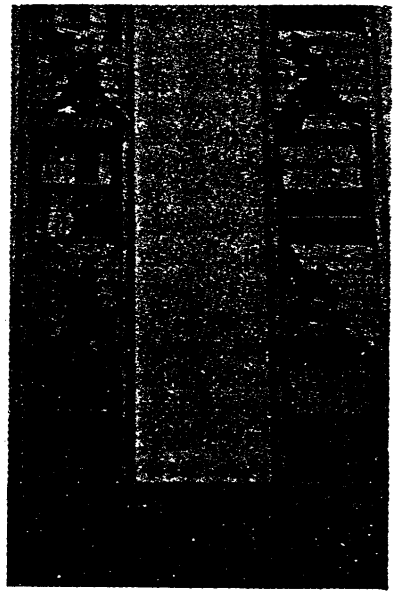


Figura 12.22. Acercamiento de las vigas de acoplamiento en el edificio Mount McKinley en Anchorage. (Cortesía del Instituto Norteamericano del Hierro y el Acero).

agote antes de que se formen articulaciones plásticas en las vigas de acoplamiento.

Se han presentado pocos estudios analíticos sobre el comportamiento plástico de los muros de cortante. Winokur y Gluck[12.33] propusieron un análisis basado en una distribución uniforme de resistencia a flexión a todo lo alto del sistema de acoplamiento. Estas vigas de acoplamiento, a menudo cortas y relativamente peraltadas, pueden estar sujetas a elevados esfuerzos cortantes cuando se desarrolla la resistencia máxima a flexión. En las vigas muy peraltadas de fachada, estas fuerzas cortantes no sólo inhiben el desarrollo total de la capacidad a flexión, sino que también restrigen la ductilidad obtenible.[12.29] Por tanto es importante evaluar la demanda de ductilidad en el sistema de acoplamiento cuando se está determinando la resistencia global máxima de la estructura acoplada de muros de cortante. Los estudios teóricos han indicado que para las vigas de acoplamiento críticos, las ductilidades requeridas pueden exceder las obtenidas experimentalmente para miembros semejantes.[12.34] La fig. 12.23 muestra los resultados de ese tipo de análisis, realizados para un núcleo de cortante de 20 niveles con las mismas dimensiones dadas en la fig. 12.20.

Del lado derecho la relación carga - desplazamiento del techo está dada con números que indican las siguientes etapas marcadas del análisis.

1. Respuesta completamente elástica bajo una carga estática lateral equivalente especificada por código de la forma mostrada en la fig. 12.20.
2. Comienzan a ceder las láminas situadas críticamente, alrededor de un tercio de la altura de la estructura. La curva punteada del inserto central muestra la distribución de las fuerzas q cortantes laminar en esta etapa de la carga. La rotación de cedencia es θ_y.
3. Con un mayor incremento de la carga, más del 90% de las láminas han cedido, y por tanto han desarrollado su resistencia máxima uniforme q_u. La acumulación de esas fuerzas produce la máxima fuerza axial en los muros acoplados. Se supone que las cargas adicionales no generan cortante adicional en el sistema de acoplamiento y, por tanto, ninguna carga adicional axial en los muros. Hasta esta etapa, se supone que ambos muros permanecen elásticos.
4. En presencia de la tensión axial, la resistencia a flexión del muro 1 se desarrolla en esta etapa de la carga. Cada muro tiene un contenido de refuerzo de $\rho = 3.5\%$.
5. Después de un pequeño aumento de la carga lateral, también se llega a la resistencia a flexión en la base del muro 2 (sujeto a compresión). Sin embargo, en un análisis más exacto, la compatibilidad de las deformaciones en los dos muros indica que ocurre cedencia en la base de ambos muros aproximadamente al mismo nivel de carga. La capacidad teórica de carga máxima del muro de cortante acoplado se alcanza en esta etapa.

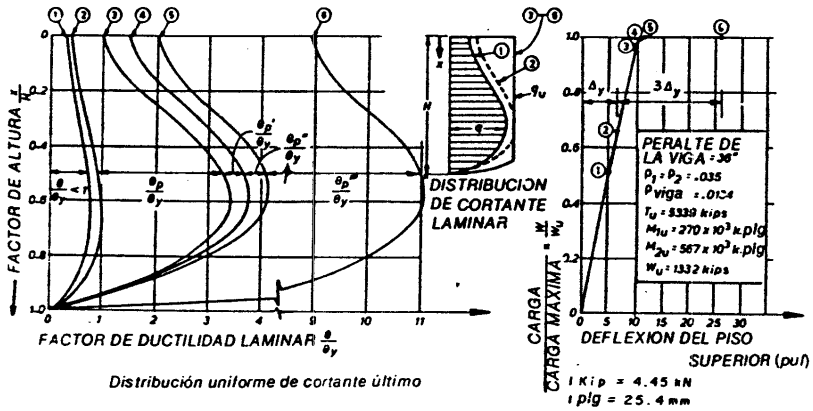


Figura 12.23 Distribución de fuerza cortante laminar, demanda de ductilidad y deflexiones de la planta superior para una estructura de muro acoplado de cortante de 20 niveles con vigas de acoplamiento de resistencia uniforme.

Aunque los dos muros son geométricamente semejantes (véase la fig. 12.20), la estructura no es simétrica debido a los diferentes grados de agrietamiento, y a la consiguiente pérdida de rigidez en ellos.

6. Para investigar el comportamiento que corresponde a una gran demanda de ductilidad global utilizando un factor de ductilidad de desplazamiento igual a 4, se impone desplazamiento adicional a la estructura haciendo que la deflexión del piso superior sea cuatro veces mayor que el ocurrido en la primera cedencia de las vigas de acoplamiento o láminas. Esta deflexión es 26 en la estructura del ejemplo.

De las deformaciones del muro se pueden obtener las rotaciones en los límites de las vigas de acoplamiento, y de dichas rotaciones se puede obtener la demanda de ductilidad laminar. Los resultados presentados en el lado izquierdo de la fig. 12.23 muestran las rotaciones plásticas θ_p en términos de la rotación θ_y a cedencia para cada una de las seis etapas de comportamiento. Es evidente que para que el sistema de acoplamiento siga las deformaciones globales estructurales prescritas, las vigas de acoplamiento deben mantener el cortante total q_u, mientras sufren rotaciones plásticas correspondientes a un factor de ductilidad laminar mayor de 11. Este es un requisito importante de ductilidad. La definición de rotación laminar aparece en el inserto de la fig. 12.29*b*.

En un estudio teórico semejante se examinó la misma estructura suponiendo que la resistencia del sistema de acoplamiento correspondía a la demanda de resistencia dentro del intervalo elástico (véase el inserto central de la fig. 12.24). La resistencia a cortante de la lámina situada críticamente es la misma que la resistencia de todas las láminas del ejemplo anterior. Ambos muros se reforzaron verticalmente con $\rho = 3.0\%$. Se for-

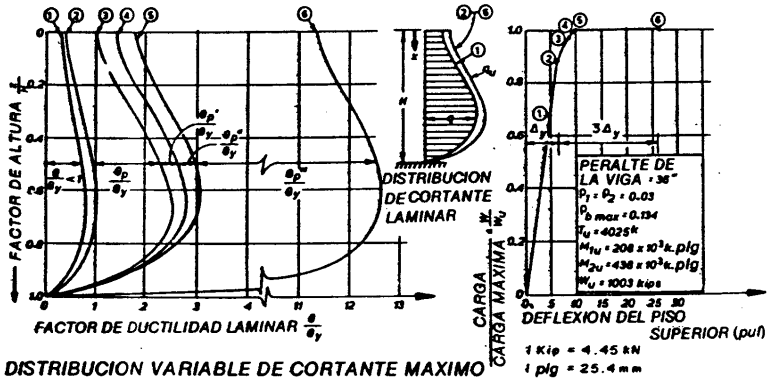


Figura 12.24 Distribución de fuerza laminar cortante, demanda de ductilidad y deflexiones de la planta superior para una estructura de muro acoplado de cortante de 20 pisos con vigas de acoplamiento de resistencia variable.

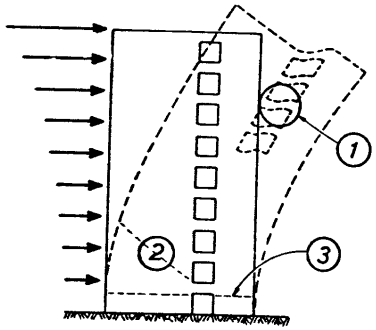


Figura 12.25 Areas críticas de comportamiento en muros acoplados de cortante.

maron articulaciones plásticas en la base del muro a cargas un poco mayores que aquélla en que se presentó la cedencia simultánea de todas las láminas. Por supuesto que la resistencia máxima de la estructura (1003 kips) es menor que la del ejemplo anterior (1332 kips) (fig. 12.24).

Aparte de las resistencias de los muros acoplados al nivel del cimiento y de los temas estudiados en la sección 12.2.1, hay tres áreas críticas de comportamiento que requieren la atención del diseñador. Estas se ilustran en la fig. 12.25 y las características numeradas se describen a continuación.

1. El estudio teórico anterior indicó que para asegurar un factor de ductilidad de desplazamiento igual a 4, es posible que la demanda de ductilidad en las vigas de acoplamiento sea muy grande. En consecuencia es necesario examinar evidencia experimental disponible para determinar si se pueden satisfacer dichas demandas de ductilidad. Esto se realiza en la siguiente sección de este capítulo.

2. Uno de los muros se sujeta a tensión considerable además de flexión cortante. Esta carga puede afectar en forma adversamente la capacidad a tensión diagonal de un muro de cortante. Del trabajo experimental con vigas (estudiado en la sección 7.6.2) y las pruebas realizadas en muros de cortante acoplados de escala pequeña de concreto reforzado (fig. 12.35) parece que son adecuadas las actuales provisiones del código del ACI. El ángulo de la grieta a tensión diagonal potencial de la fig. 12.25 no parece estar afectado por la tensión axial en el muro. Sin embargo, después de cargas alternadas cíclicas, la grieta a falla diagonal potencial asociada con la tensión axial puede enlazarse con grietas a flexión que se formaran durante cargas anteriores en la dirección opuesta. Las grietas diagonales así formadas pueden encontrar menor número de estribos que los propuestos. Afortunadamente, ambos muros están interconectados, por lo que puede ocurrir una redistribución de fuerzas cortantes hacia el otro muro, cuya capacidad a cortante se aumenta considerablemente por compresión axial.

3. El cortante horizontal total también se debe transferir a través de juntas de construcción horizontal. En la sección 12.2.1 se ha examinado el mecanismo de transferencia de cortante de entrecara y el refuerzo de juntas de construcción. En ese tipo de junta puede existir gran tensión axial (fig. 12.25), de manera que es necesario prestar atención especial a esta contingencia.

Resistencia y comportamiento de las vigas de acoplamiento

Las observaciones de los daños ocasionados por sismos han indicado repetidamente la falla por tensión diagonal de las vigas de acoplamiento o de fachada que contienen insuficiente refuerzo del alma (fig. 12.22). Es claro que esas fallas, generalmente frágiles, que dan una elevada tasa de degradación de resistencia bajo las cargas cíclicas,[12.35] se deben suprimir para que se pueda dar resistencia satisfactoria sísmica. Sin importar las cargas de diseño, la resistencia a cortante de una viga de acoplamiento debe ser igual o mayor que su capacidad a flexión, requerimiento que debe imponer un límite superior al contenido de acero a flexión en tales vigas, especialmente cuando son muy peraltadas con relación a su claro.

El límite superior actualmente aceptado para el esfuerzo cortante nominal en una viga cuando menos es de $v_u = 10\varphi_v\sqrt{f'_c}$ (lb/plg^2), como se demostró en la sección 7.4.2; en consecuencia, la fuerza cortante máxima a que puede sujetarse una viga de acoplamiento es

$$V_u \leq 10\varphi_v bd\sqrt{f'_c} \tag{12.9}$$

Con referencia a las figs. 12.19 y 12.26, una buena aproximación para

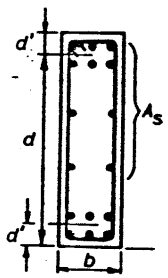


Figura 12.26 Propiedades seccionales de una viga típica de acoplamiento.

la fuerza cortante correspondiente a la capacidad segura a flexión de una viga típica es

$$V_u = \frac{2M_u}{l_s} = \frac{2}{l_s}\varphi_m(d - d')A_s f_y \tag{12.10}$$

en que φ_v = factor de reducción de capacidad en cortante = 0.85
φ_m = factor de reducción de capacidad en flexión = 0.90 de acuerdo con el código del ACI[12.10]
l_s = claro libre de la viga de acoplamiento

Igualando las capacidades a cortante (es decir, las ecs. 12.9 y 12.10), se encuentra que

$$\frac{A_s}{bd} = \frac{4.7 l_s\sqrt{f'_c}}{(d - d')f_y} < \rho_{máx} \tag{12.11a}$$

Se puede notar que todo el refuerzo en la zona a tensión de la sección de la viga se debe incluir en la evaluación de la resistencia a flexión (fig. 12.26).

Se podría llegar a creer que debido a la cantidad igual de refuerzo superior e inferior, tales vigas poseerían ductilidad a flexión muy grande (capítulo 6).

Para vigas con una relación de claro/peralte menor a 2, las fuerzas cortantes y el agrietamiento consecuente diagonal provocan una redistribución radical de las fuerzas de tensión a lo largo del refuerzo a flexión. Para pequeñas relaciones de claro/peralte, todavía hay esfuerzo de tensión en el refuerzo en lugares donde la teoría convencional a flexión indica que debe haber esfuerzos de compresión. Consideraciones teóricas semejantes a las estudiadas en la sección 7.5.1, y que se basan en el comportamiento de vigas de gran peralte agrietadas diagonalmente de concreto reforzado, han confirmado esta redistribución de fuerzas en el acero a flexión; los resultados de los experimentos también han permitido verificar el fenómeno.[12.29] En la fig. 12.27 representa una viga típica de fachada que se ha sujetado a momentos iguales en ambos extremos, lo que provoca un punto de momento flexionante nulo a mitad del claro. Ya que las dos secciones de apoyo están relativamente cercanas entre sí, la redistribución de las fuerzas en el refuerzo superior o inferior ya no es un efecto local. Por conveniencia, la tensión en el refuerzo superior se muestra arriba y la de las varillas inferiores se registra por debajo del eje horizontal del diagrama a cuatro incrementos de carga. El cortante y el consecuente agrietamiento diagonal tienen los siguientes resultados.

1. Tensión en el refuerzo a flexión en áreas en que, de acuerdo con los patrones de momento flexionante, debe prevalecer la compresión.
2. Una dispersión de tensión en toda la longitud de la viga si la relación de claro/peralte es suficientemente pequeña ($l_s/h < 1.5$).
3. Invalidación de los conceptos de diseño de vigas doblemente reforzadas, ya que tanto el refuerzo superior como el inferior pueden estar a tensión en las secciones críticas. El refuerzo no alivia la compresión en el

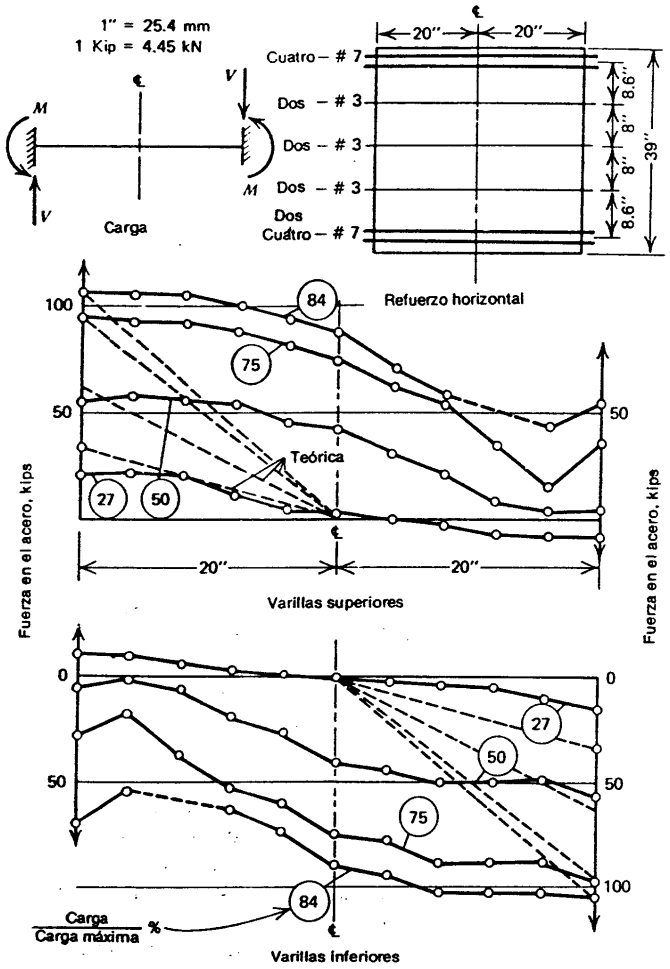


Figura 12.27 La distribución de la fuerza de tensión a lo largo del refuerzo a flexión de una viga muy peraltada de acoplamiento.

concreto, por lo que tampoco se puede esperar un aumento en ductilidad debido al refuerzo. De hecho, debido a que el refuerzo superior e inferior están en tensión en la sección crítica, el concreto debe transmitir una mayor fuerza interna de compresión que si la viga estuviera simplemente reforzada. Por tanto, la interacción entre la flexión y el cortante en las vigas de gran peralte de acoplamiento produce una reducción en la capacidad a flexión.

Sin importar la cantidad de refuerzo del alma utilizado, en las etapas finales de la carga el grueso de la fuerza cortante de las vigas se debe transferir a través de la zona a compresión del concreto a los muros de cortante, debido a que sólo se puede transmitir una pequeña cantidad del cortante total por acción de dovela del refuerzo a flexión. Sin embargo, el concreto en las áreas de la zona a compresión se hubiera agrietado durante los ciclos anteriores de carga, y las grietas se hubieran abierto y cerrado varias veces; en consecuencia, se hubiera reducido drásticamente su capacidad de transferir cortante. En efecto, se ha observado que las vigas de gran peralte reforzadas completamente contra una falla posible a tensión diagonal fallan en cortante directo deslizante a lo largo de la sección de apoyo crítico.[12.35] En la fig. 12.28, una viga con una relación l_n/h de 1.29 ilustra este tipo de falla frente a cargas cíclicas, que está asociada con la ruptura del mecanismo de trabazón del agregado. Los lugares de calibración en

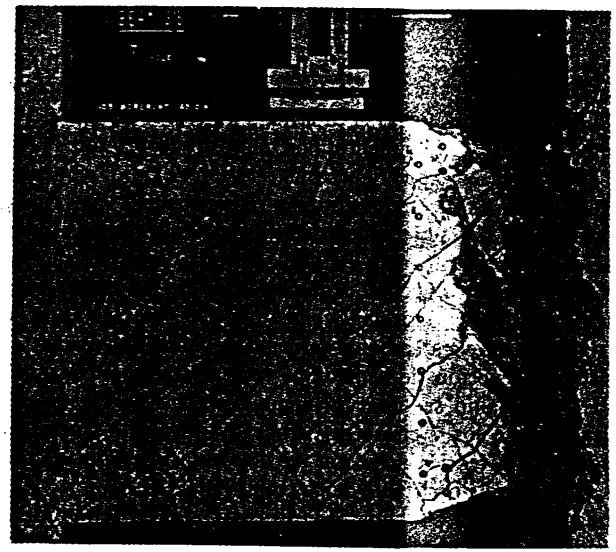


Figura 12.28 Falla a cortante deslizante en vigas de acoplamiento.

que se obtuvieron las deformaciones del acero a flexión de la fig. 12.27 también se pueden ver en esta fotografía.

Una vez iniciada la excursión al intervalo inelástico durante los ciclos de cargas alternas de tipo sísmico, se restringe la capacidad rotacional plástica de las vigas de acoplamiento reforzadas convencionalmente por la inefectividad del refuerzo a compresión y la posibilidad de una falla a cortante deslizante. Una viga convencional de acoplamiento contiene refuerzo superior e inferior iguales, que se extienden sin reducción a lo largo de todo el claro, con varillas y estribos intermedios horizontales de menor tamaño como se ilustra en la fig. 12.26. Para asegurar cierta medida de ductilidad durante las cargas cíclicas alteradas de muros de cortante resistentes a sismos, se sugiere que la fuerza cortante quede limitada por la restricción del contenido de acero a flexión a

$$\rho_{máx} = 3\frac{l_s\sqrt{f'_c}}{hf_y} \qquad (12.11b)$$

en que los esfuerzos están en unidades de lb/plg^2. Esto asegura que el esfuerzo cortante nominal en las vigas de acoplamiento no pase del 60% por sobre el valor máximo recomendado por el código del ACI.[12.10]

Ocasionalmente se encuentra que esta limitación no permite la utilización eficiente de los muros de cortante acoplados, debido a que limita la magnitud de la máxima fuerza axial que se puede generar en los muros.

El agrietamiento diagonal resultado de la aplicación alterna de fuerzas cortantes como en la fig. 12.28, disminuye rápidamente la contribución del concreto a la resistencia a cortante. Entonces es importante suministrar estribos para la fuerza completa cortante, generada en las vigas de acoplamiento cuando se desarrolla su capacidad a flexión.

Estudios teóricos y experimentos han demostrado[12.29] que la rigidez de las vigas de acoplamiento que tienen una relación de claro/peralte menor a 1.5 se reduce a menos de un quinto de la rigidez de una viga no agrietada después del inicio del agrietamiento diagonal. Esta pérdida drástica de rigidez se debe tener en cuenta cuando se evalúa la respuesta elástica de una estructura de muro acoplado de cortante. De las curvas carga - rotación de la fig. 12.29*a* para una viga en que $l_s/h = 1.29$ se aprecia la pérdida de rigidez. Esta viga contenía refuerzo del alma mayor del requerido para resistir, por acción de armadura, toda la carga teórica máxima a flexión. En efecto, no se observó ninguna cedencia a través de grietas diagonales durante los 7 ciclos de cargas. La viga falló sin alcanzar su capacidad máxima teórica a flexión de 184.0 kips, después de ductilidad limitada, por cortante deslizante como en la fig. 12.28.

Cuando el refuerzo del alma es insuficiente, los estribos ceden y sigue una degradación de la rigidez mucho mayor. Esto es especialmente notable cuando se aplican cargas pequeñas en un ciclo nuevo de carga. Las ro-

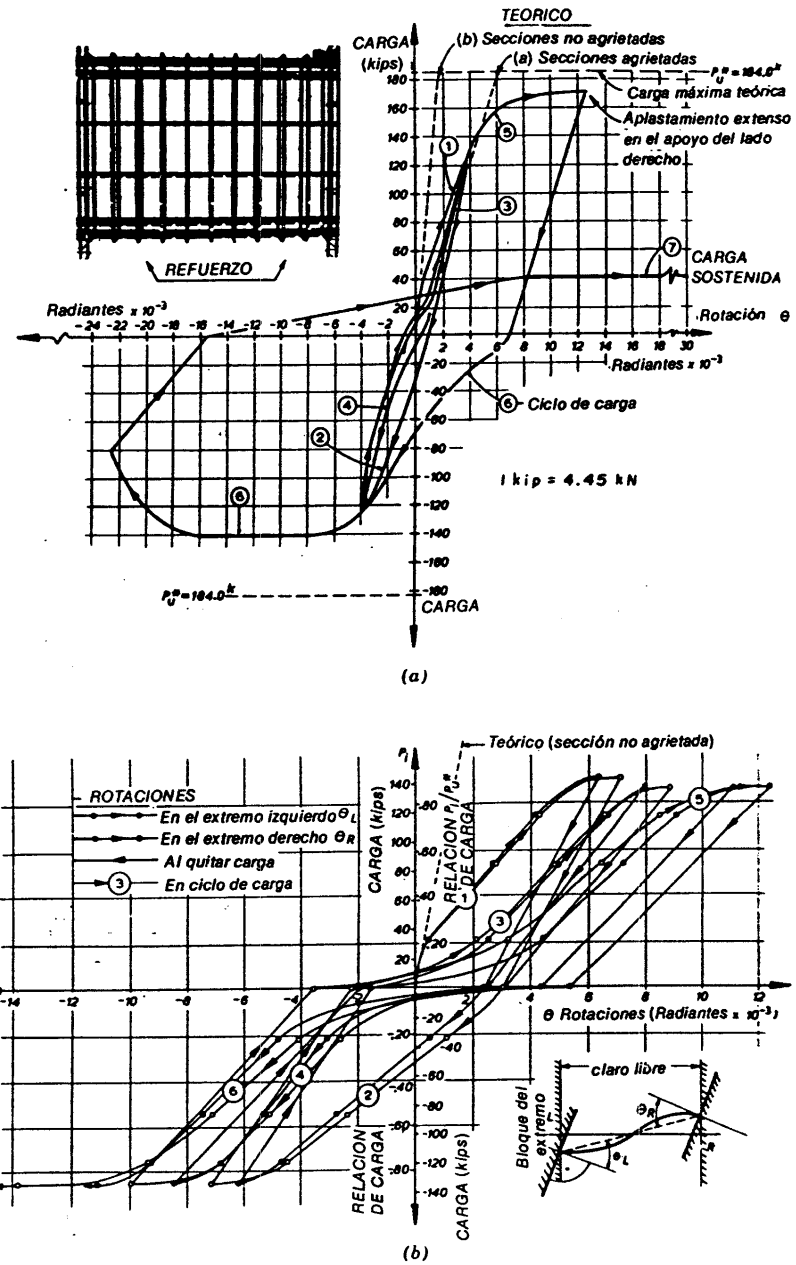


Figura 12.29 Relación carga - rotación para vigas de acoplamiento que contienen refuerzo de alma (*a*) suficiente, (*b*) insuficiente.

taciones grandes ocurren antes que se cierren las grietas diagonales abiertas anteriormente, lo que permite que se transmita la compresión diagonal recién formada. La fig. 12.29*b* ilustra este comportamiento.

Debido a que el refuerzo superior e inferior está a tensión en todo el claro libre de una viga de acoplamiento cuando $l_s/h \leq 1.5$, la viga se alarga durante los ciclos de carga inelástica.[12.28] Todas las varillas intermedias, distribuidas en todo el peralte de la viga, están así deformadas y contribuyen a la resistencia de la viga. La fig. 12.27 muestra que la fuerza total de tensión generada en todo el refuerzo horizontal es casi constante en todo el claro, y que, por tanto, la compresión interna debe actuar a lo largo de una diagonal. Si ocurre elongación del acero, se apartan los dos muros acoplados de una estructura de plantas múltiples. Es probable que las losas del piso limiten este movimiento en cierta medida, por lo que seguramente las vigas de acoplamiento restringidas de ese tipo presentarán mayor resistencia que las probetas de laboratorio utilizadas sin losas de piso presentes.

Los experimentos recientes hechos en la Universidad de Canterbury revelaron[12.35, 12.36] que se puede mejorar considerablemente la ductilidad y resistencia útil de las vigas de acoplamiento, si en vez de la distribución convencional de acero descrita antes se coloca el refuerzo principal diagonalmente en la viga. Se puede basar el diseño de ese tipo de viga en la premisa de que la fuerza cortante se descompone a sí misma en fuerzas diagonales de compresión y tensión, intersectándose a mitad del claro, donde no se debe resistir ningún momento (fig. 12.30). Inicialmente se

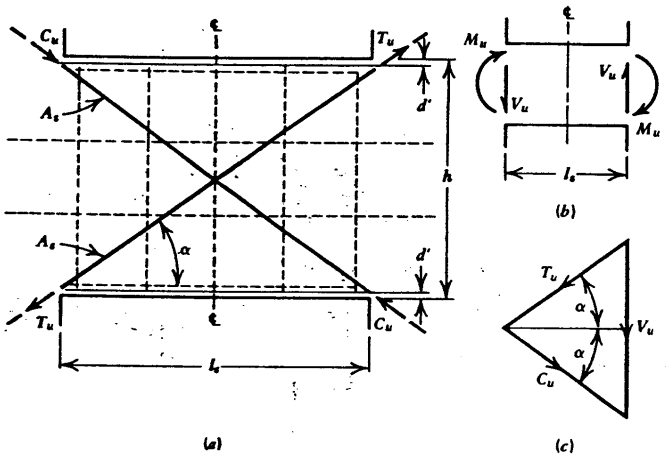


Figura 12.30 Modelo de viga de acoplamiento reforzada diagonalmente. (*a*) Geometría del refuerzo. (*b*) Acciones externas. (*c*) Fuerzas internas.

trasmite la compresión diagonal por el concreto, y el acero a compresión no aporta nada significativo. Sin embargo, después de la primera excursión al intervalo de cedencia de las varillas diagonales a tensión, se forman grandes grietas y permanecen abiertas cuando se elimina la carga. Cuando se aplica la carga invertida, como durante un sismo, se sujeta a estas varillas a grandes esfuerzos de compresión, quizás de cedencia, antes que se cierren las grietas formadas anteriormente. De acuerdo con ello, en el desarrollo de la resistencia a cedencia, las figs. 12.30*a* y 12.30*c* dan

$$T_u = C_u = A_s f_y \qquad \text{y} \qquad V_u = 2T_u \operatorname{sen}\alpha$$

por tanto

$$A_s = \frac{V_u}{2f_y \operatorname{sen}\alpha} \tag{12.12}$$

en que

$$\tan\alpha = \frac{h - 2d'}{l_s}$$

El momento resistente en los apoyos de la viga (fig. 12.30*b*) se puede encontrar, si se desea, de la fuerza cortante, es decir,

$$M_u = \frac{V_u l_s}{2} = l_s T_u \operatorname{sen}\alpha \tag{12.13a}$$

o de las componentes horizontales de las fuerzas diagonales, es decir,

$$M_u = (h - 2d')T_u \cos\alpha \tag{12.13b}$$

Ya que se deben suministrar cantidades iguales de acero en ambas bandas diagonales, la pérdida de la contribución del concreto no tiene consecuencia, con tal de que las varillas diagonales a compresión no queden inestables. En consecuencia, para la carga de tipo sísmico, es importante tener estribos amplios alrededor de las varillas diagonales a compresión para retener el concreto alrededor de las varillas. El propósito principal del concreto retenido es suministrar cierta rigidez lateral a flexión al puntal diagonal, para permitir con ello que ocurra la cedencia a compresión de las varillas diagonales principales. En la Universidad de Canterbury, donde se estudiaron varillas de sólo 6 plg (150 mm) de espesor, se identificaron claramente fallas de pandeo.[12.36] En la fig. 12.31 se sugiere una distribución del refuerzo.

Debido a que el concreto no influye en el comportamiento de las vigas de acoplamiento reforzadas diagonalmente, aparte de estabilizar las varillas a compresión, no se debe esperar degradación en resistencia o rigidez durante las cargas cíclicas alternas que imponen una ductilidad moderada. La fig. 12.32 da la relación carga - rotación para una viga que tiene las mismas dimensiones globales que en la fig. 12.28. Los ciclos histeréticos

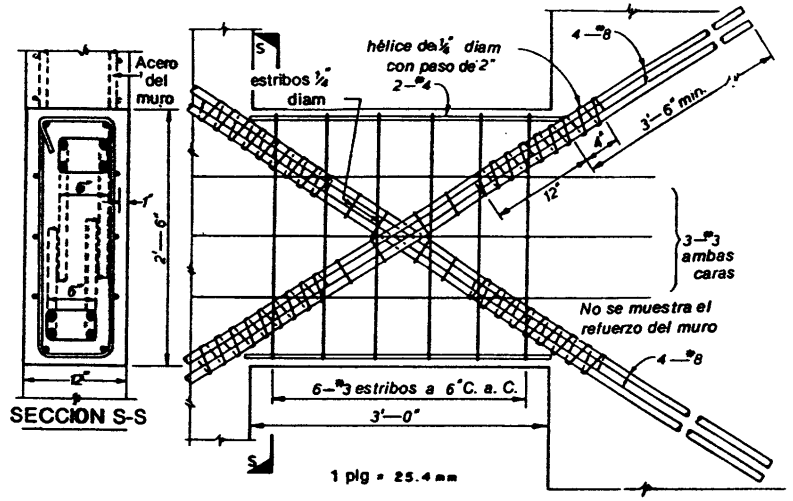


Figura 12.31 Arreglo sugerido del acero en una viga de acoplamiento reforzada diagonalmente.

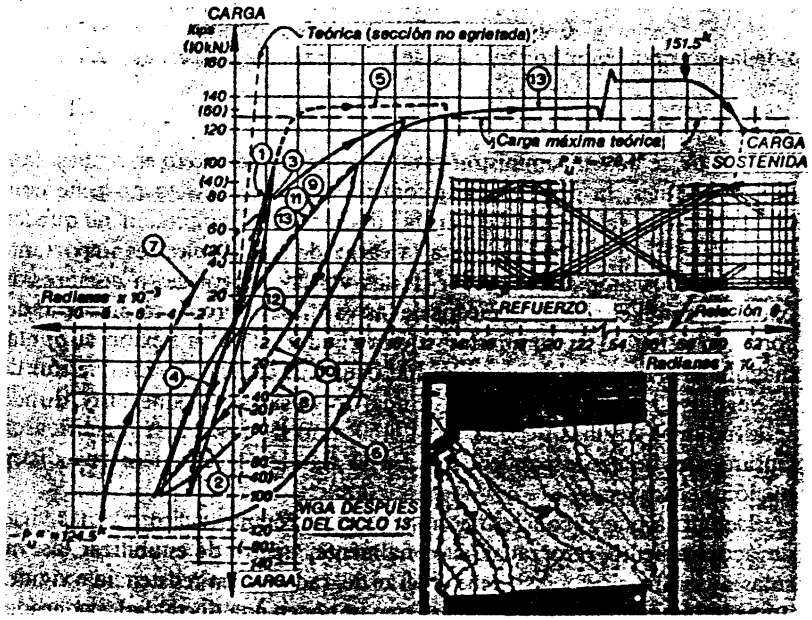


Figura 12.32 Relación carga - rotación para una viga de acoplamiento reforzada diagonalmente.

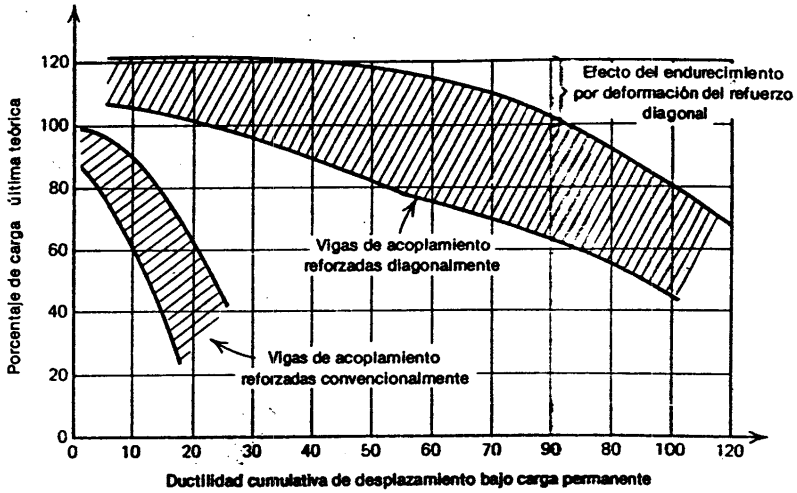


Figura 12.33 Ductilidades cumulativas impuestas en vigas de acoplamiento reforzadas convencional y diagonalmente.

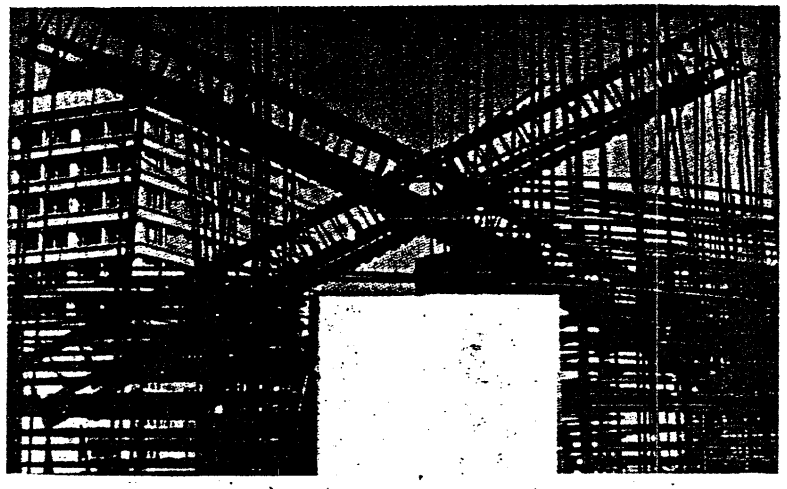


Figura 12.34 Refuerzo diagonal para una viga de acoplamiento de un muro de cortante. (Cortesía del Ministerio de Obras de Nueva Zelandia).

para esta viga tienen las características de un miembro de acero. Sólo ocurre degradación de resistencia cuando comienza el pandeo de las varillas a compresión. Sin embargo, cuando ocurren inversiones de cargas,

las varillas pueden absorber tensión y enderezarse solas. El proceso conduce gradualmente a la fractura completa del concreto alrededor de las varillas a compresión, y con ello a mayor pérdida de restricción contra el pandeo con la consecuente pérdida de resistencia.

La respuesta principal de estas vigas diagonalmente reforzadas bajo cargas alternas de alta intensidad se puede apreciar en una comparación de la reducción en resistencia con la ductilidad cumulativa impuesta durante las cargas cíclicas en las vigas probadas en la Universidad de Canterbury [12.36] (fig. 12.33). La relación claro/peralte l_n/h de estas vigas varió entre 1.03 y 1.29. La fig. 12.39 ilustra el refuerzo de ese tipo de viga en el edificio del parlamento de Nueva Zelandia en Wellington.

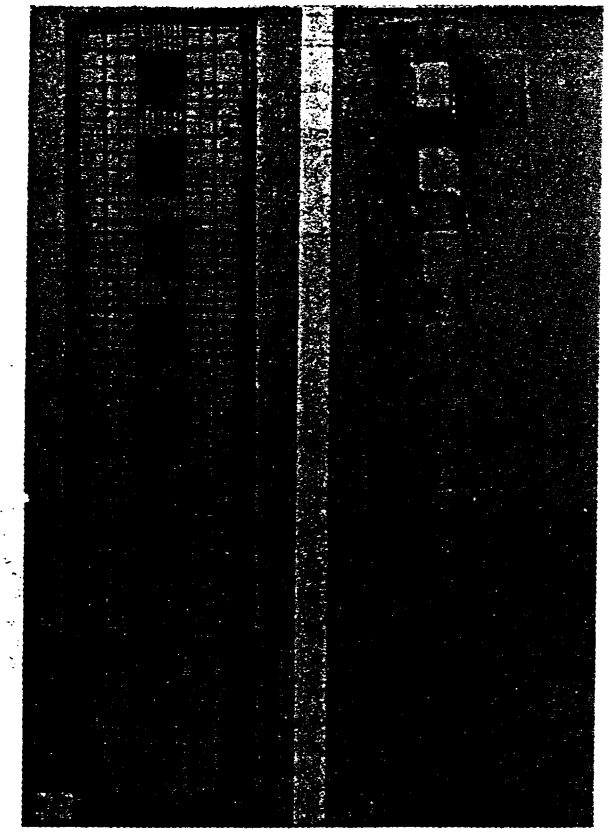


Figura 12.35 Disposición del refuerzo y patrones de grietas de dos probetas de muros de cortante acoplados.[12.37] (*a, b*) Muro de cortante *A*. (*c, d*) Muro de cortante *B*.

Resistencia de muros acoplados

Una vez deducidos los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes y axial generadas en una estructura de muro de cortante acoplado por carga lateral, de un análisis laminal u otro, se pueden combinar con acciones de gravedad. Ahora se puede considerar cada uno de los muros como un voladizo y se puede determinar su resistencia a flexión y cortante de acuerdo con los principios descritos en la sección 12.2. Normalmente se deben examinar dos casos posiblemente críticos: uno cuando la carga lateral induce una fuerza axial de compresión en el muro y el otro cuando esta fuerza es de tensión. Este último, cuando se combina con compresión inducida por gravedad, a menudo produce una tensión neta en el muro, con

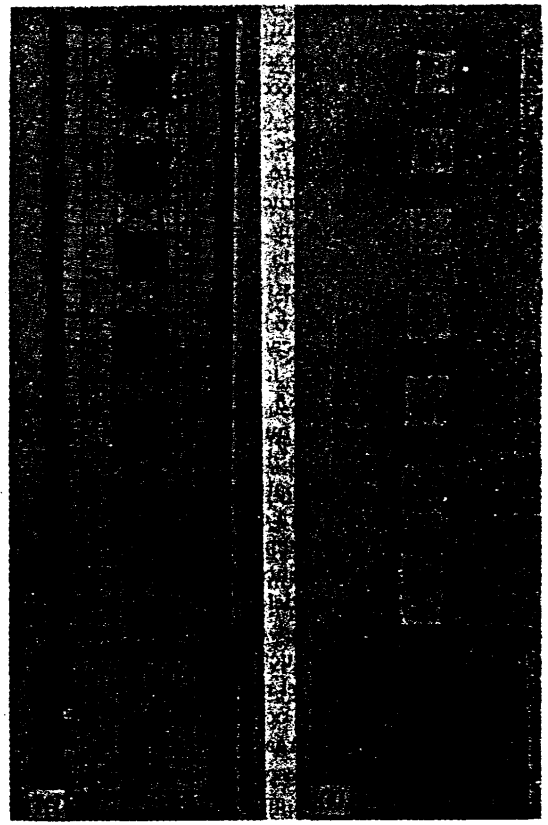


Figura 12.35 (*continúa*)

el consecuente aumento en la demanda de acero a flexión. En estos casos, se pueden utilizar en forma conveniente las curvas de interacción como las de la fig. 12.12.

La resistencia a cortante de los muros en presencia de compresión axial o tensión axial se puede determinar como se describió en el capítulo 7. Nuevamente se enfatiza que se debe suministrar todo el refuerzo a cortante horizontal cerca de la base de estos muros donde la cedencia del refuerzo vertical a flexión podría ser extensa.

12.5.4 Experimentos con muros de cortante acoplados

Para verificar el comportamiento elastoplástico de las componentes en toda la estructura, se probaron dos muros de cortante acoplados de concreto reforzado de siete niveles a un cuarto de escala en la Universidad de Canterbury.[12.37] Para simular una distribución triangular de carga estática lateral, se aplicaron cargas concentradas de igual intensidad en los niveles séptimo, quinto y tercero. La dirección de la carga se cicló durante las pruebas. Para compensar los efectos de gravedad en las secciones críticas en la base de los muros voladizos, se aplicó una compresión uniforme de 250 lb/plg^2 (1.72 N/mm^2) a cada muro mediante un sólo cable presforzado colocado centralmente. Ambas estructuras se diseñaron para la misma capacidad de carga última. En la fig. 12.35 se muestran las parrillas de refuerzo y las probetas después de la falla. En el muro *A*, se suministró refuerzo de viga convencional con estribos que teóricamente resistían todo el cortante por acción de armadura. Como se esperaba, después de tres excursiones al intervalo inelástico, en cada dirección de la carga ocurrió una falla a cortante deslizante de todas las vigas de acoplamiento, lo que es claramente evidente de la fig. 12.35*b*. A pesar de ello, el muro *A* de cortante exhibió notable ductilidad, ya que pudo soportar cerca del 80% de la carga última teórica a una deflexión del techo de 5 pies (1500 mm) en términos de la estructura de tamaño natural. Esto es evidente de la relación carga - desplazamiento del techo para esta pared (fig. 12.36*a*).

El muro *B* de cortante, que contenía vigas de acoplamiento reforzadas diagonalmente, soportó mucho menos daño aunque se impusieron ductilidades mucho mayores a este modelo durante la prueba, correspondientes a factores globales de ductilidad de 4 a 12 en términos de desplazamientos del nivel del techo. La estructura llegó a fallar finalmente debido a inestabilidad lateral en la base del muro de compresión. En una estructura de prototipo esto no hubiera ocurrido debido a la presencia de un diafragma de losa. La relación carga - desplazamiento presentada en la fig. 12.36*b* demuestra la excelente respuesta de esta estructura. La carga en cualquier etapa P_i está expresada en términos de la capacidad máxima teórica P_u^* de la estructura. Se logró una carga máxima de hasta 20% por sobre el valor teórico, debido al endurecimiento por deformación del refuerzo. La deflexión de entrepiso impuesta promedio en el decimoquinto ciclo de carga fue de 1/40 de la altura del nivel. Las curvas estables de histéresis que tienen las características de un miembro de acero, sugieren que este tipo de estructura satisface muy bien los requerimientos del diseño resistente a sismos.

12.5.5 Resumen de los principios de diseño

Para asegurar el funcionamiento satisfactorio cuando estructuras de muros de cortante acoplados se exponen a intensas acciones sísmicas, es necesario poder evaluar, aproximadamente cuando menos, el comportamiento de la estructura tanto en el intervalo elástico como el plástico de las cargas. Sólo se puede esperar un buen comportamiento si la estructura sigue una secuencia deseada de cedencia. Desde el punto de vista del control de daños y reparaciones posibles, es deseable que las componentes de los muros sean las últimas que sufran durante el proceso de imponer condiciones máximas de aumento.

Las consideraciones de la resistencia de vigas de acoplamiento reforzadas en forma convencional indican que se requiere protección total contra la falla a tensión diagonal durante las cargas cíclicas, y que el contenido de acero a flexión en ambas caras debe ser moderado para asegurar la ductilidad máxima y evitar la falla temprana por cortante deslizante. No se puede esperar que las vigas muy peraltadas de acoplamiento sujetas a grandes fuerzas cortantes sean suficientemente dúctiles para soportar las deformaciones plásticas asociadas con un factor global de ductilidad de 4 para toda la estructura. Para que se puedan utilizar vigas reforzadas convencionalmente para el diseño por sismo, se debe limitar la demanda de ductilidad en ellas, lo que sólo se puede lograr diseñando la estructura del muro de cortante acoplado para una mayor resistencia, lo que permitirá que en el rango elástico se absorba una gran proporción de la energía.

Cuando se utiliza refuerzo diagonal en las vigas de acoplamiento y se suministran estribos adecuados para permitir que los puntales de compresión soporten la carga a cedencia sin pandeo, se puede esperar comportamiento satisfactorio: se ha encontrado que estas vigas satisfacen con éxito las demandas de ductilidad comparables a las mostradas en la estructura anterior de ejemplo. También se requerirá refuerzo adicional ligero secundario o de canasta, consistente en una parrilla en ambas caras de una viga de acoplamiento para mantener las partículas de concreto roto en su lugar cuando ocurren grandes desplazamientos plásticos durante un sismo catastrófico (fig. 12.31).

El estudio de dos muros acoplados de cortante para los que se encontró que el análisis laminar es una herramienta analítica conveniente, ilustra la interacción de las componentes de muros y vigas durante la respuesta inelástica de la estructura a una carga lateral estática. Cuando la resis-

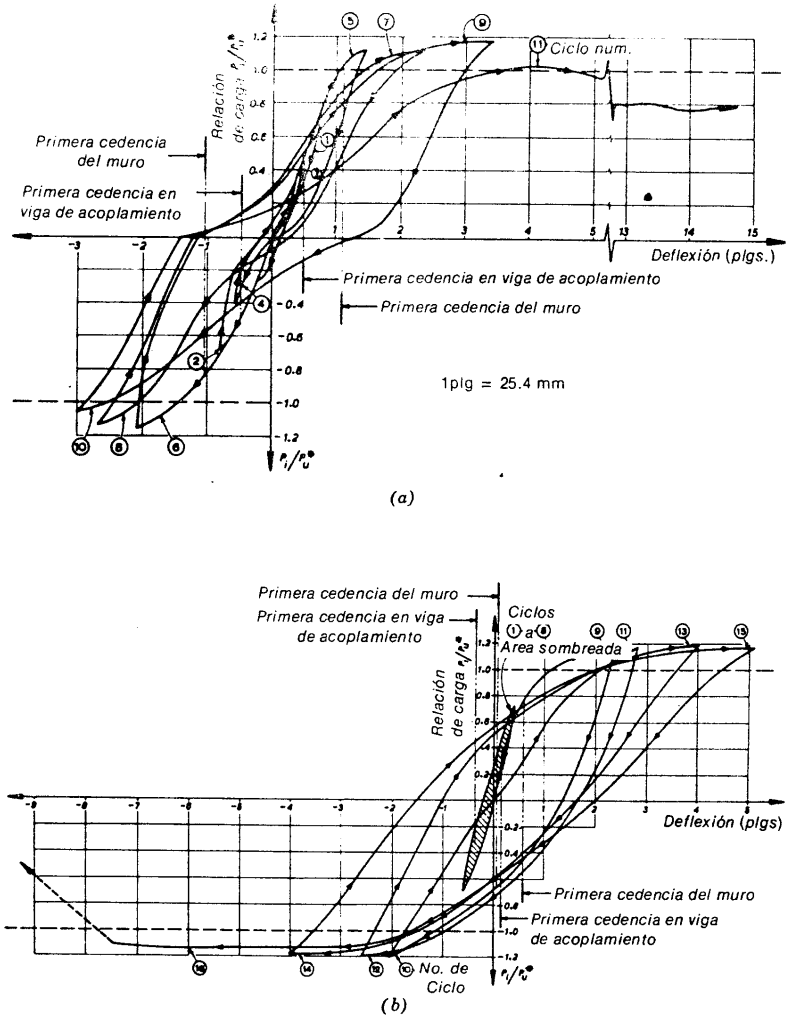


Figura 12.36 Relación carga - desplazamiento del techo para muros de cortante con: (*a*) refuerzo convencional y (*b*) vigas de acoplamiento reforzadas diagonalmente. [12.37]

tencia de las vigas de acoplamiento es grande, de manera que la principal componente del momento interno de resistencia, ec. 12.8, resulta de las cargas axiales relativamente grandes en los muros más que de los momentos de los muros, como en la fig. 12.20, el sistema de acoplamiento disipa la mayor parte de la energía total. Es importante notar que en una estructura de muro de cortante diseñada de acuerdo con estas proposiciones se disipa una parte apreciable de la energía durante una severa excitación sísmica por el sistema de acoplamiento dúctil antes de que los muros se vuelvan inelásticos. Esto significa que durante una perturbación que impone demandas moderadas globales de ductilidad a la estructura, los muros podrían no recibir daño permanente estructural y las vigas de acoplamiento podrían remplazarse o repararse con relativa facilidad de ser necesario. Indudablemente estas características también serán evidentes en las estructuras resistentes a sismos en que hay acoplados más de dos muros. Sin embargo, una evaluación analítica está más allá del alcance de este texto.

12.6 BIBLIOGRAFIA

12.1 *Symposium on Tall Buildings With Particular Reference to Shear Wall Structures*. University of Southampton, abril de 1966, Oxford, Pergamon Press, 1967.

12.2 J. R. Benjamin y H. Williams, "The Behaviour of One - Storey Reinforced Concrete Shear Walls", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 83, ST3, mayo de 1957, págs. 1-49.

12.3 J. R. Benjamin y H. A. Williams, "Behaviour of One - Storey Reinforced Concrete Shear Walls Containing Openings", *Journal ACI*, Vol. 55, No. 11, noviembre de 1958, págs. 605-618.

12.4 R. H. A. de Paiva y C. P. Siess, "Strength and Behaviour of Deep Beams in Shear", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 91, ST5, octubre de 1965, págs. 19-41.

12.5 A. W. Slater, A. R. Lord, y R. R. Zipprodt, "Shear Tests on Reinforced Concrete Beams", Department of Commerce, Bureau of Standards, Technologic Paper No. 314, 1926, págs. 387-495.

12.6 A. E. Cardenas, J. M. Hanson, W. G. Corley, y E. Hognestad, "Design Provisions for Shear Walls", *Journal ACI*, Vol. 70, No. 3, marzo de 1973, págs. 221-230.

12.7 A. E. Cardenas y D. D. Magura, "Stregth of High - Rise Shear Walls — Rectangular Cross Sections", ACI Special Publication 36, *Response of Multistorey Concrete Structures to Lateral Forces*, 1973, págs. 119-150.

12.8 F. Barda, "Shear Strength of Low - Rise Walls with Boundary Elements", Ph. D. dissertation, Lehigh University, Bethlehem, Pa., 1972, pág. 278

12.9 P. F. Fratessa y T. Zsutty, "Stregth and Perfomance of Concrete Shear Walls", A report to the Structural Engineers' Association of Northern California Seismology Subcommittee on Shear Walls, San Francisco, 1970, pág. 49

12.10 "Building Code Requeriments for Reinforced Concrete (ACI 318-71", American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78

12.11 W. J. Beekhuis, "An Experimental Study of Squat Shear Walls", Master of Engineering Report, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia, 1971, pág. 132
12.12 H. Umemura, H. Aoyama, y H. M. Liao, "Studies of Reinforced Concrete Wall and Framed Masonry Shear Walls", Report, Universidad de Tokio, 1964, pág. 89
12.13 P. C. Jennings, "Engineering Features of the San Fernando Earthquake, February 9, 1971", California Institute of Technology, Report EERL 71-02, Pasadena, junio de 1971, pág. 512
12.14 T. Paulay, "Some Aspects of Shear Wall Design", *Bulletin of the New Zealand Society for Earthquake Engineering*, Vol. 5, No. 3, septiembre de 1972, págs. 89-105.
12.15 M. Stiller, "Verteilung der Horizontalkräfte auf die aussteifenden Scheibensisteme von Hochhäusern", *Beton - und Stahlbetonbau*, Vol. 60, No. 2, 1965, págs. 42-45.
12.16 H. Beck y H. Schaefer, "Die Berechnung von Hochhäusern durch Zusammenfassung aller aussteiffenden Bauteile zu einem Balken", *Der Bauingenieur*, Vol. 44, No. 3, 1969, págs. 80-87.
12.17 R. Rosman, "Analysis of Special Concrete Shear Wall Systems", *Proceeding of the Institution of Civil Engineers*, 1970, Suplemento (VI) publicación 72665, págs. 131-152.
12.18 N. B. Green, "Factors in the Aseismic Design of Reinforced Concrete Shear Walls Without Opening", *Journal ACI*, Vol. 65, agosto de 1968, págs. 629-633.
12.19 F. R. Khan y J. A. Sbarounis, "Interaction of Shear Walls and Frames", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 90, ST3, junio de 1964, págs. 285-335.
12.20 "Design of Combined Frames and Shear Walls", Advanced Engineering Bulletin No. 14, Portland Cement Association, Skokie, Ill., 1965, pág. 36
12.21 ACI Committee 442, "Response of Buildings to Lateral Forces", *Journal ACI*, Vol. 68, No. 2, febrero de 1971, págs. 81-106.
12.22 M. E. Sozen, "The Caracas Earthquake of July 29, 1967", *Journal ACI*, Vol. 65, mayo de 1968, págs. 394-401.
12.23 H. Beck, "Contribution to the Analysis of Coupled Shear Walls", *Journal ACI*, Vol. 59, agosto de 1962, págs. 1055-1070.
12.24 R. Rosman, "Approximate Analysis of Shear Walls Subject to Lateral Loads", *Journal ACI*, Vol. 61, junio 1964, págs. 717-733.
12.25 R. Rosman, "An Aproximate Method of Analysis of Walls of Multistorey Buildings", *Civil Engineering and Public Works Review*, Vol. 59, enero de 1964, págs. 67-69.
12.26 L. Chitty, "On the Cantilever Composed of a Number of Parallel Beams Interconnected by Cross Bars", London, Edinburgh, and Dublin, *Philosophical Magazine and Journal of Science*, Vol. 38, octubre de 1947, págs. 685-699.
12.27 A. Coull y B. Stafford Smith, "Analysis of Shear Wall Structures" (a review of previous research). En Ref. 12.1, págs. 139-155.
12.28 T. Paulay, "The Coupling of Reinforced Concrete Shear Walls", *Proceedings, Fourth World Conference on Earthquake Engineering*, enero de 1969, Santiago, Chile, Vol. B-2, pags. 75-90.
12.29 T. Paulay, "Coupling Beams of Reinforced Concrete Shear Walls", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST3, marzo de 1971, págs. 843-862.
12.30 R. Rosman, *Statik und Dynamik der Scheibensisteme des Hochbaues*, Springer, Berlín, 1968, pág. 317
12.31 R. J. Burns, "An Approximate Method of Analysis Coupled Shear Walls Subject to Triangular Loading", *Proceedings, Third World Conference on Earthquake Engineering*, 1965, Nueva Zelandia, Vol. III, págs. IV-123-140.
12.32 V. B. Berg y J. L. Stratta, *Anchorage and the Alaska Earthquake of March 27, 1964*, American Iron and Steel Institute, Nueva York, 1964, pág. 63
12.33 A. Winokur y J. Gluck, "Ultimate Stregth Analysis of Coupled Shear Walls, *Journal ACI*, Vol. 65, No. 12, diciembre de 1968, págs. 1029-1035.
12.34 T. Paulay, "An Elasto - Plastic Analysis of Coupled Shear Walls", *Journal ACI*, Vol. 67, No. 11, noviembre de 1970, págs. 915-22.
12.35 T. Paulay, "Simulated Seismic Loading of Spandrel Beams", *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 97, ST9, septiembre de 1971, págs. 2407-2419.
12.36 T. Paulay y J. R. Binney, "Diagonally Reinforced Coupling Beams of Shear Walls", ACI Special Publication 42, Detroit, 1974, Vol. 2, págs. 579-598.
12.37 A. R. Santhakumar, "The Ductility of Coupled Shear Walls", tesis doctoral, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia, pág. 412

CAPITULO 13

El arte de detallar

13.1 INTRODUCCION

Estudios recientes para comprender el comportamiento de las estructuras de concreto han producido métodos más elaborados de análisis y diseño. Las técnicas orientadas a computadoras permiten realizar con rapidez los análisis elásticos o inelásticos de estructuras altamente indeterminadas. Se podría pensar que este solo desarrollo produciría estructuras más funcionales y económicas.

Sin embargo, todo buen diseñador sabe que el diseño no sólo consiste en proporcionar una sección estructural u obtener esfuerzos seguros. Algunos de los aspectos igualmente importantes de un diseño exitoso son la economía global y la facilidad de construcción. En efecto, un análisis complejo se hace inútil si los cálculos no se pueden traducir a estructuras exitosas. Esto puede suceder cuando una estructura queda representada por un conjunto de dibujos no muy bien detallados. El análisis estructural no es más que una de las muchas herramientas utilizadas por el ingeniero hábil en el proceso del diseño. Es un requisito necesario pero insuficiente para un buen diseño.[13.1]

El detallado consiste en la preparación de dibujos de colocación, detalles de las varillas de refuerzo, y listas de varillas que se utilizan para fabricar y colocar el refuerzo en las estructuras.[13.2] Pero el detallado también incorpora todo el proceso de razonamiento por el cual el diseñador permite que cada parte de su estructura funcione con seguridad bajo las condiciones de servicio y con eficiencia cuando se sujeta a la carga última o deformaciones.

Para reforzar correctamente una estructura de concreto, el diseñador debe poseer una comprensión profunda de su comportamiento —más allá de la determinacion de las ecuaciones de equilibrio y compatibilidad de deformación. Esta comprensión se debe basar en un conocimiento total de las propiedades de los materiales y el comportamiento estructural que

evidencian las pruebas, más que en los resultados obtenidos de modelos matemáticos. El diseño basado en el concepto de resistencia y comportamiento de colapso refleja en gran medida esta filosofía.

Para que pueda avanzar con rapidez la gran cantidad de trabajo de construcción que se ha de hacer, debe haber cireta estandarización y simplificación del detallado del concreto reforzado. Esto es esencial para que podamos aprovechar el potencial de las computadoras para detallar, programar y procesar datos del refuerzo así como presentar los resultados de tal manera que, el contratista pueda traducir la información a la obra sin demora o dificultad.[13.3]

El comité 315 del ACI[13.4] estudió e informó de los aspectos sísmicos del detallado. Sin embargo, se requiere considerable estudio experimental adicional que simule las condiciones sísmicas antes de que se pueda llegar a una conclusión satisfactoria con respecto al detallado. En las secciones siguientes se enumera una serie de sugerencias con relación al comportamiento sísmico y basadas en resultados de investigaciones recientes.

El detallado basado en la comprensión y percepción del comportamiento estructural del concreto reforzado en una diversidad cada vez más creciente de casos, del conocimiento de las demandas cambiantes de la economía y de las limitaciones de las prácticas de construcción, puede requerir tanta energía creativa como la deducción de las acciones estructurales por parte del análisis matemático.

Al compilar este capítulo, necesariamente limitado a unos cuantos casos específicos encontrados con mayor frecuencia en los marcos de construcciones, se aprovechó mucho la inspiración que da la obra de Leonhardt, quien realizó una gran labor para atraer atención a este aspecto olvidado del proceso del diseño.

13.2 PROPOSITO DEL REFUERZO

Antes de examinar el detallado del refuerzo, es conveniente definir claramente su proposito. Se puede suministrar acero de refuerzo en el concreto para lograr lo siguiente:

1. Resistir las fuerzas internas de tensión deducidas del análisis, el que supone que el concreto circundante no desarrolla tensión. En consecuencia, el refuerzo debe asegurar que una estructura posea resistencia adecuada.

2. Asegurar que los anchos de las grietas bajo condiciones de servicio no excedan los valores recomendados expresados en el capítulo 10. Se debe recordar que dentro de los límites prácticos y económicos, el refuerzo no puede impedir el agrietamiento.

3. Impedir el agrietamiento excesivo que pueda derivarse de la contracción o cambios de temperatura cuando los elementos estructurales están restringidos.

4. Suministrar fuerzas de compresión cuando el concreto solo, que es más adecuado para satisfacer esta función, no puede resistir la presión interna.

5. Restringir las varillas a compresión contra el movimiento lateral, impidiendo el pandeo y suministrar confinamiento en áreas altamente esforzadas a compresión de columnas, vigas y juntas.

6. Dar protección contra el deslajamiento del recubrimiento protector contra incendios sobre miembros de acero rolado, dando también soporte temporal al sistema de refuerzo durante la construcción.

En capítulos anteriores se han dado recomendaciones para el detallado de algunos de estos propositos, especialmente el control de grietas. Algunos de los principios más importantes de guía en el arte del detallado son los asociados con la adherencia y anclaje (capítulo 9).

13:3 CAMBIOS DIRECCIONALES DE LAS FUERZAS INTERNAS

Siempre que un miembro estructural de concreto cargado no sea recto o cuando cambian abruptamente sus dimensiones, se generan fuerzas internas. A veces se ignora la existencia de estas fuerzas, aunque se deben considerar cuando se detallan los miembros.

Las dos fuerzas a tensión T_1 y T_2 generadas en el quiebre de las varillas de refuerzo (fig. 13.1*a*) no son unidireccionales; en consecuencia, resulta una tercera fuerza R, lo que tendería a producir una grieta de fisuración a lo largo de la varilla, de vencerse la resistencia a tensión del concreto. En

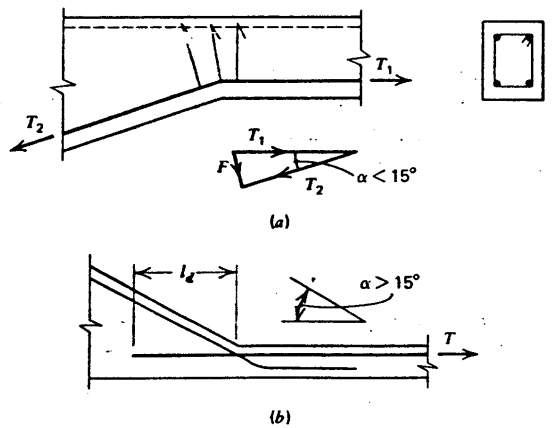


Figura 13.1. Cambios de dirección de la fuerza de tensión.[13.5] (*a*) Usando estribos cuando el cambio angular es pequeño. (*b*) Varillas principales traslapadas cuando la inclinación es grande.

los casos en que el cambio angular es pequeño ($\alpha < 15°$), se pueden utilizar estribos en el quiebre y en la vecindad inmediata para transferir la fuerza de la zona a compresión del miembro. Para impedir el agrietamiento prematuro, es aconsejable proporcionara conservadoramente el refuerzo de estribos (v.gr., para 1.5*F*). Para cambios angulares mayores hay que anclar el refuerzo por medio de una extensión recta de manera que no se genere ninguna fuerza transversal en el quiebre (fig.131*b*).

El mismo principio se aplica cuando la fuerza interna a compresión cambia abrupta o continuamente su dirección. La fig. 13.2 muestra la resultante que apunta hacia afuera generada en una pequeña viga *T*. Se deben suministrar estribos espaciados estrechamente y refuerzo transversal en el patín para impedir una separación del patín.

En las juntas se generan grandes fuerzas transversales, tales como en los aleros y ápice de un marco de portal, lo que se considera por separado en la sección 13.8.

En los miembros curvos, tales como los que aparecen en la fig.13.3, fuerza radiales iguales y opuestas inducidas por los momentos flexionantes pueden provocar tensión transversal interna, por lo que se requieren estribos espaciados regularmente para permitir que estas fuerzas se balanceen mutuamente. Considerando la fuerza de tensión en el refuerzo a flexión, de los principios básicos y de la fig. 13.3 se sigue que la carga transversal radial por longitud unitaria p_r es

$$p_r = \frac{T}{R} = \frac{A_s f_s}{R} \tag{13.1}$$

por lo que se requerirán estribos espaciados a s de manera que el área de los estribos es

$$A_{sr} = \frac{p_r s}{f_{sr}} \tag{13.2}$$

en que f_{sr} es el esfuerzo de diseño en los estribos y R es el radio del círculo. Se puede suponer [13.5] que un estribo de dos ramas puede resistir efectivamente la fuerza generada por todas las varillas curvas a flexión dentro de una distancia de 15 diámetros de estribos entre las dos ramas

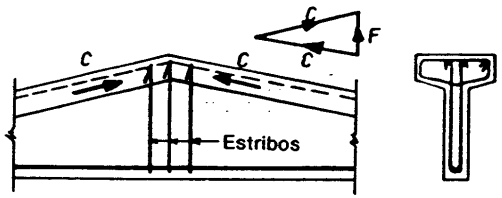


Figura 13.2. Cambio direccional de la fuerza de compresión en viga *T*. [13.5]

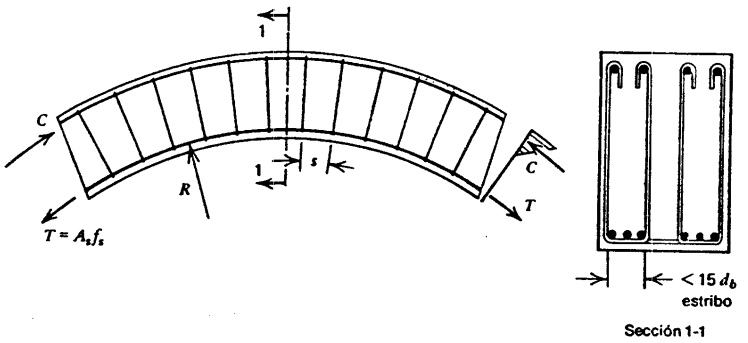


Figura 13.3. Los estribos resisten las fuerzas radiales en los miembros curvos. [13.5]

(fig.13.3). El espaciado s entre los estribos debe elegirse de tal manera que el recubrimiento no se desprenda entre dos estribos, cuando las varillas curvas tiendan a enderezarse. A continuación se describe el área afectada (achurada en la fig. 13.4).

Leonhardt [13.5] ha sugerido que, considerando la rigidez apoximada a flexión de las varillas curvas, y limitando el esfuerzo de tensión en el concreto de zuncho a un sexto de la resistencia a tensión f'_t del concreto (para dar margen al microagrietamiento y contracción), el espaciado entre los estribos no debe exceder los siguientes valores:

$$s \leqslant \frac{2\Delta s}{1 - \dfrac{f'_t c R}{420 d_b^2}} \quad \text{donde} \quad s' \geqslant 3c \tag{13.3a}$$

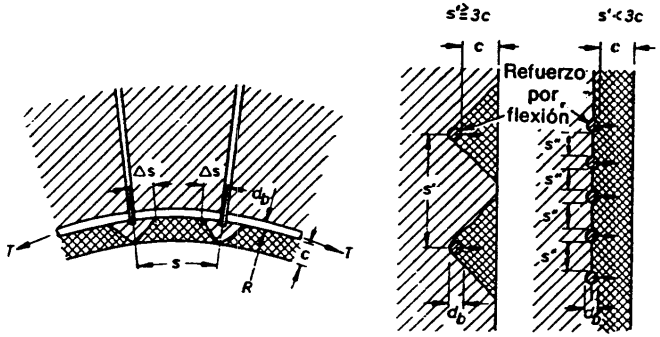


Figura 13.4 Modos supuestos de falla asociados con las fuerzas radiales inducidas en los miembros curvos. [13.5]

o

$$s \leq \frac{2\Delta s}{1 - \dfrac{f_t' s'' R}{840 d_b^2}} \quad \text{donde} \quad s' < 3c \tag{13.3b}$$

en que $\Delta s \leq 3d_b$ ó $\Delta s < c$, lo que sea menor. En la fig.13.4 se muestran todas las dimensiones que aparecen en las ecs. 13.3. La resistencia a tensión del concreto f_t' se debe expresar en unidades de lb/plg². Las ecuaciones están basadas en la suposición de que el esfuerzo f_s de trabajo en las varillas principales curvas no excede 34,000 lb/plg²(234 N/mm²).

Cuando el radio de curvatura R es suficientemente grande, el zuncho será suficiente para suministrar las fuerzas radiales de tensión para equilibrar las generadas por las varillas principales curvas. Con la misma suposición con respecto a las propiedades de resistencia, se pueden omitir los estribos cuando

$$R \geq \frac{300 d_b^2}{c} \quad \text{para } f_c' = 3000 \text{ lb/plg}^2 (21 \text{ N/mm}^2) \tag{13.4a}$$

$$R \geq \frac{240 d_b^2}{c} \quad \text{para } f_c' = 4000 \text{ lb/plg}^2 (28 \text{ N/mm}) \tag{13.4b}$$

cuando $s' \geq 3c$ y

$$R \geq \frac{600 d_b^2}{s''} \quad \text{para } f_c' = 3000 \text{ lb/plg}^2 (21 \text{ N/mm}^2) \tag{13.4c}$$

$$R \geq \frac{400 d_b^2}{s''} \quad \text{para } f_c' \geq 4000 \text{ lb/plg}^2 (28 \text{ N/mm}^2) \tag{13.4d}$$

cuando $s' < 3c$.

Cuando dos capas de varillas ocurren perpendicularmente entre sí y las varillas curvas están fuertemente esforzadas, es preferible colocarlas en la segunda capa para aumentar el recubrimiento c.

Las varillas curvas pueden provocar fisuración y consecuente deslajamiento del recubrimiento en estructuras, tales como las placas circulares. La fig. 13.5 presenta la planta de una varilla circular y la distribución de esfuerzos a tensión transversal que pueden ser responsables de la fisuración en el plano de la varilla. Leonhardt [13.5] propuso que con las suposiciones anteriores se escoja el recubrimiento de tal manera que

$$R \geq \frac{144 d_b^2}{c} \quad \text{para } f_c' = 3000 \text{ lb/plg}^2 (21 \text{ N/mm}^2) \tag{13.5a}$$

$$R \geq \frac{92 d_b^2}{c} \quad \text{para } f_c' \geq 4000 \text{ lb/plg}^2 (28 \text{ N/mm}^2) \tag{13.5b}$$

a menos que se suministre refuerzo transversal. Las varillas circunferenciales en las placas deben estar dentro de las varillas radiales y éstas

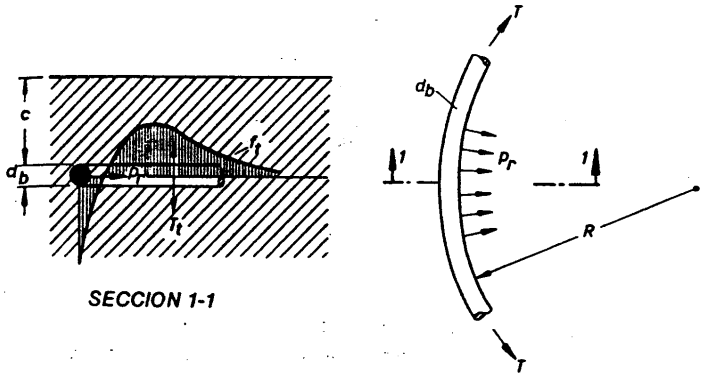


Figura 13.5 Las varillas circulares a tensión provocan esfuerzos de fisuración transversal. [13.5]

pueden atarse juntas, si el radio de las varillas circulares es más pequeño que el dado por la ec. 13.5.

Los códigos especifican la forma de los dobleces agudos, como los que ocurren en los ganchos, de manera que limiten las presiones resultantes de apoyo y esfuerzos de fisuración. En los códigos se supone que hay suficiente refuerzo transversal para resistir las fuerzas transversales a tensión para el caso que ocurra una grieta de fisuración. Para que puedan utilizarse varillas dobladas hacia arriba en las vigas, se les debe mantener alejadas del lado de las vigas, donde es máximo el peligro de desprendimiento del zuncho.

13.4 EL DETALLADO DE LAS VIGAS

En varios capítulos ya se ha estudiado con cierto detalle el comportamiento a flexión y resistencia de los miembros de concreto reforzado. Debe ser evidente que la única manera de lograr comportamiento satisfactorio y resistencia adecuada es mediante la interacción eficiente del concreto y el acero, lo que se logra por medio del detallado hábil. El objetivo de esta sección es ilustrar, examinando algunos casos típicos, que la buena práctica en el detallado puede conducir a mejor comportamiento estructural. Muchos diseñadores de estructuras de concreto ya han adaptado algunas de estas sugerencias, quizás por intuición; otras sugerencias se han deducido de las obras recientes de investigación.

13.4.1 Sitios para el anclaje

Del estudio anterior del comportamiento de adherencia, se desprende que las condiciones de esfuerzo del concreto que rodea a una varilla anclada deben tener un efecto considerable en la calidad de la adherencia. General-

mente constituye una práctica aceptada que las varillas terminen en las zonas a compresión. Sin embargo, es dudoso que se pudiera obtener mucho beneficio de esta clase de arreglo en todos los casos. Es improbable que los esfuerzos de compresión que actúan paralelos a una varilla reduzcan el peligro de fisuración originado en que los esfuerzos de tensión actúan perpendiculares a la varilla. Es cierto que una zona a compresión está libre de grietas transversales que se conocen como el origen de las grietas de fisuración. Las varillas del fondo en el claro extremo de las vigas continuas muestran mejor anclaje en el extremo simplemente apoyado que en la proximidad del punto de inflexión donde entran a una zona a compresión, lo que indica que los esfuerzos de compresión que actúan transversalmente a una varilla anclada son más benéficos. Así sucede cuando la reacción se aplica a la cara a tensión de una viga, (fig.13.6). En forma análoga, cuando se sujeta el concreto a esfuerzo de tensión transversal, las condiciones de adherencia sólo pueden deteriorarse, lo que puede suceder para las varillas superiores en las vigas T que están en la zona de momentos negativos de la losa soportada (fig.13.6). Untrauer y Henry han demostrado [13.6] que la resistencia de adherencia aumenta apreciablemente cuando hay presión normal. El aumento es más pronunciado en la carga máxima y para varillas más grandes, lo que sugiere que puede ser mejor buscar áreas de presión normal, de preferencia a zonas a compresión para el anclaje de refuerzo a flexión.

Cuando las varillas se terminan en la zona a tensión de una viga que contiene suficiente refuerzo transversal en el alma, se puede obtener considerable beneficio de la compresión que existe en el alma como resultado de acción de armadura. Por esta razón se pueden doblar las varillas horizontales en el alma para exponerlas a la presión diagonal, como en la fig. 13.7 (véase también la fig.7.14). Por razones semejantes se puede mejorar en forma considerable el anclaje de gancho en el extremo simplemente soportado de una viga, si se inclinan los ganchos, o de preferencia si están en una posición casi horizontal. De esa manera se contrarrestan mayormente los efectos de fisuración por la presión normal que se origina de la reacción (fig. 13.8).

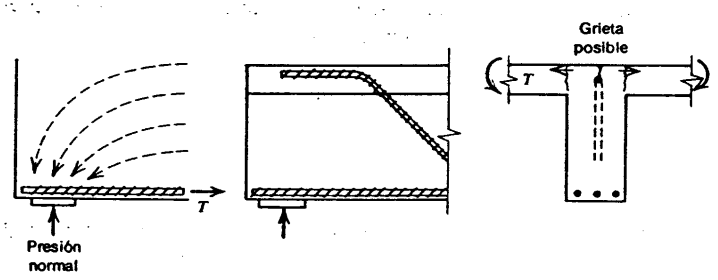


Figura 13.6. Presión o tensión transversal en el anclaje del refuerzo de viga. [13.1]

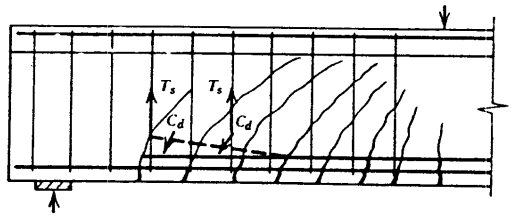


Figura 13.7. Anclaje de varillas a flexión en zona de compresión diagonal. [13.1]

En las vigas precoladas de concreto la longitud disponible para el anclaje del extremo puede ser tan corta que sólo dispositivos especiales, (fig. 13.9), pueden asegurar el desarrollo de la resistencia requerida de las varillas. En muchos casos, tales como con ménsulas o vigas de gran peralte se pueden utilizar varillas cruzadas soldadas al refuerzo a flexión (fig. 13.9). Debido a que con mucha frecuencia el punto de apoyo esta próximo al extremo libre de la viga, la falla a lo largo de una grieta diagonal aguada es una clara posiblidad (fig. 13.10). Se pueden suministrar varillas adicionales inclinadas de diámetro pequeño para asegurar que no ocurra falla de deslizamiento. El tamaño de las varillas se puede determinar utilizando el concepto de fricción a cortante de transferencia de carga estudiado en la sección 7.8. Recuérdese que las condiciones de anclaje para varillas superiores siempre son inferiores a las correspondientes a varillas inferiores, debido a la mayor sedimentación y a que el concreto envolvente puede estar en estado de esfuerzo de tensión transversal, o con mayor frecuencia, que esté agrietado. Esto es especialmente cierto en las colum-

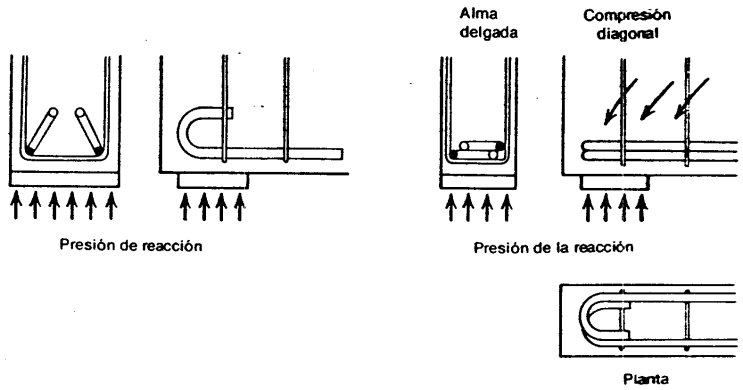


Figura 13.8. Utilización de compresión transversal en anclajes a base de ganchos. [13.5]

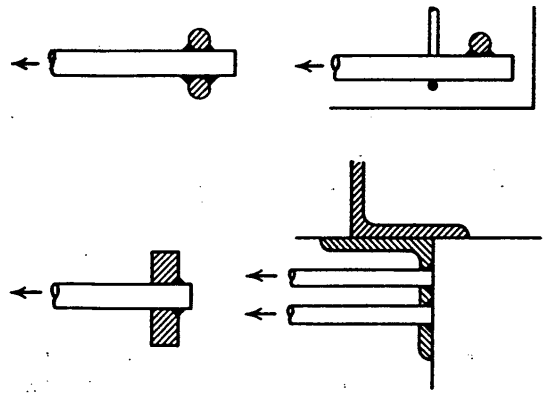


Figura 13.9. Dispositivos especiales de anclaje empleados cuando no se dispone de suficiente longitud de anclaje.[13.5]

nas interiores de pisos donde se intersectan las vigas. Incluso bajo carga de trabajo, tales áreas de una viga pasan parte de la carga a las zonas de momentos positivos debido a la pérdida de rigidez, efecto que no es perjudicial en forma alguna en tanto que el proporcionado y cuidadoso detallajo del anclaje del refuerzo positivo permitan que acepte la carga redistribuida.

La concentración y arreglo en capas múltiples del refuerzo negativo representa otra fuente de deterioro de la aherencia. Puede producir un aumento de los anchos de las grietas. El patrón de grietas en el patín de

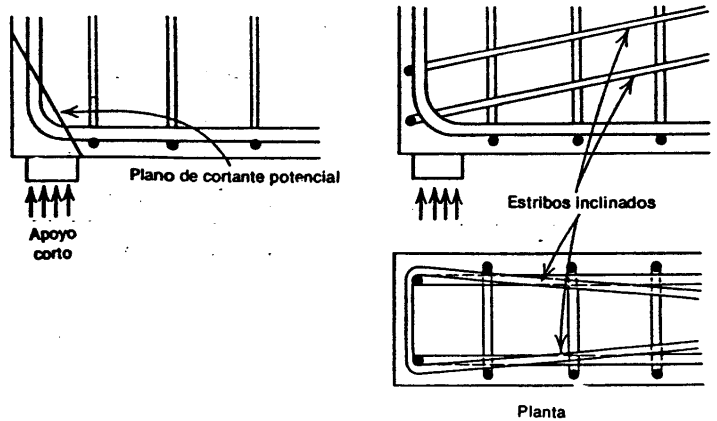


Figura 13.10. Refuerzo para impedir la falla a cortante deslizante cuando la reacción se aplica próxima al extremo libre de la viga.[13.5]

dos vigas *T* probadas por Waestlund y Jonsson[13.7] muestra este fenómeno en cierta medida. Los máximos anchos de grietas en estas vigas (fig. 13.11*a* y *b*) fueron de 0.046 plg (1.17 mm) y 0.0046 plg (0.117 mm), respectivamente, cuando el esfuerzo del acero fue de 22,700 lb/plg^2 (157 N/mm^2) en ambos casos. Las mayores anchuras de grietas medidas en los apoyos interiores de dos vigas idénticas probadas por Leonhardt, Walther y Dilger[13.1] se comparan en la fig. 13.12 a distintos incrementos de carga.

La dispersión del acero negativo hacia la losa adjunta, de preferencia utilizando varillas de diámetro más pequeño, tiene la ventaja adicional de dar un brazo de palanca interna un poco mayor y de suministrar mejor acceso para los vibradores en una junta de viga-columna generalmente aglomerada (fig.13.13). Este procedimiento se debe aplicar con discreción cuando hay fuerte refuerzo del alma. Para que se desarrolle una acción eficiente de armadura, es deseable colocar la mayor parte del refuerzo a flexión dentro de la cesta de ramas múltiples de los estribos.

En las vigas con una pequeña relación de claro de cortante/peralte a^*d, el modo predominante de resistencia a cortante después del inicio del agrietamiento diagonal es la acción de arco. De acuerdo con ello, se requiere que el refuerzo a flexión funcione como el tirante de este arco (fig. 7.10). Todo arreglo que reduzca la cantidad de acero a flexión, como el doblar las varillas (fig.13.14a), probablemente reducir la resistencia máxima a cortante. En tales casos es mejor llevar todo el refuerzo a flexión al soporte, (fig. 13.14b). Para permitir que las fuerzas concentradas de adherencia sean transmitidas a estas varillas en una longitud muy corta, no se deben omitir los estribos espaciados estrechamente.[13.1]

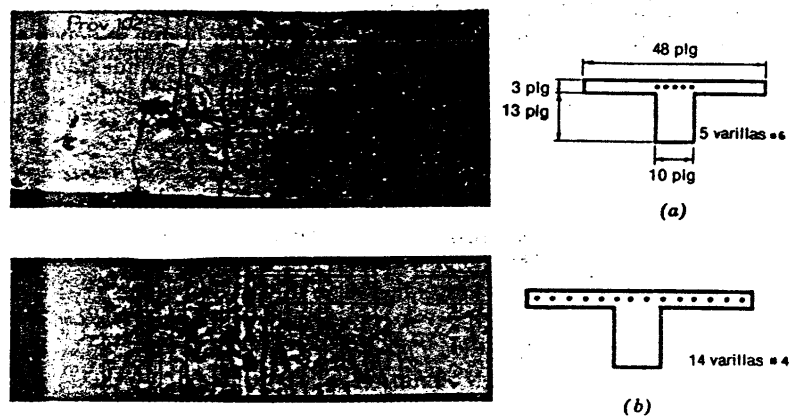


Figura 13.11. Formación de grietas en vigas *T* bajo esfuerzo en el acero[13.7] de 22,700 lb/plg^2 (157 N/mm^2) (*a*) Ancho máximo de grieta: L.L46 plg (1.17 mm). (*b*) Ancho máximo de grieta: 0.0046 (0.117 mm).

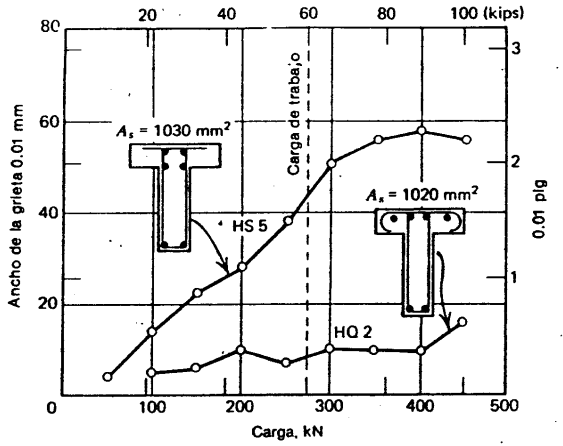


Figura 13.12. Una comparación de anchos de grietas en vigas *T* idénticas. [13.1]

13.4.2. Interacción del refuerzo por flexión y cortante

En el capítulo 7 se examinó la resistencia a cortante del refuerzo del alma con ayuda de la "analogía de la armadura". Del estudio de una junta de esta armadura (fig. 7.14), se deduce que sólo se puede resistir la compresión diagonal en la intersección de los refuerzos horizontal y vertical, la "junta de pasados" hipotética de la armadura análoga. Por este motivo, el estribo, que es el miembro a tensión en el alma, debe poder desarrollar toda su resistencia en toda su altura entre las "juntas de pasador" superior e inferior a lo largo del claro a cortante. No se pretende que los estribos desarrollen adherencia entre las "cuerdas", por lo que se deben anclar en forma acorde. La fig. 13.15 presenta algunas formas indeseables de estribos y algunas otras que satisfarían los requerimientos dados de anclaje.

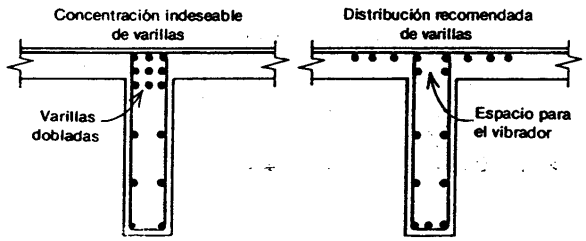


Figura 13.13. Mejora sugerida en el detallado del refuerzo superior de vigas. [13.7]

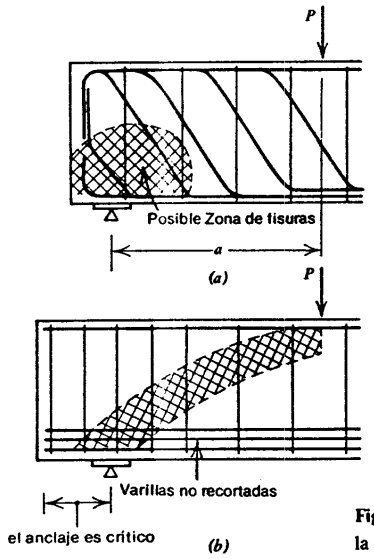


Figura 13.14. Los anclajes en vigas cortas afectan la acción de arco. [13.1]

Es esencial tener varillas grandes longitudinales que pasen a través de los ganchos de los estribos, ya que deben distribuir el apoyo concentrado recibido de los estribos. Puede ser optimista suponer que el extremo del estribo, que no está doblado alrededor de una varilla longitudinal en la zona a compresión de la viga, está bien anclado. En la carga última, especialmente cuando se han desarrollado grietas diagonales, el eje neutro puede moverse muy próximo al borde a compresión. Ya que los estribos dependen considerablemente de esta forma concentrada de anclaje, es deseable que ajunten apretadamente y que estén en contacto con las varillas longitudinales que rodean. En la sección 9.4.2. se señaló la sensibilidad de los ganchos con respecto al deslizamiento y el consecuente efecto en los anchos mayores de las grietas.

La práctica normal es doblar los estribos alrededor de las varillas longitudinales con un ángulo de 135°. Algunos códigos permiten una vuelta de 90° para los estribos. En las articulaciones plásticas donde puede desprenderse el zuncho, un giro de 90° no será satisfactorio, además de que se puede facilitar el comportamiento no satisfactorio [13.8] de los estribos cerrados ilustrado en la fig. 13.16.

Cuando hay grandes fuerzas cortantes y se utilizan más de dos varillas para resistir la flexión, es más deseable formar una "junta de armadura" en cada una de las varillas longitudinales, por lo que deben utilizarse estribos de ramas múltiples. Esto asegura que se desarrollen fuerzas de adherencia en los sitios "correctos" (es decir, en cada varilla longitudinal).

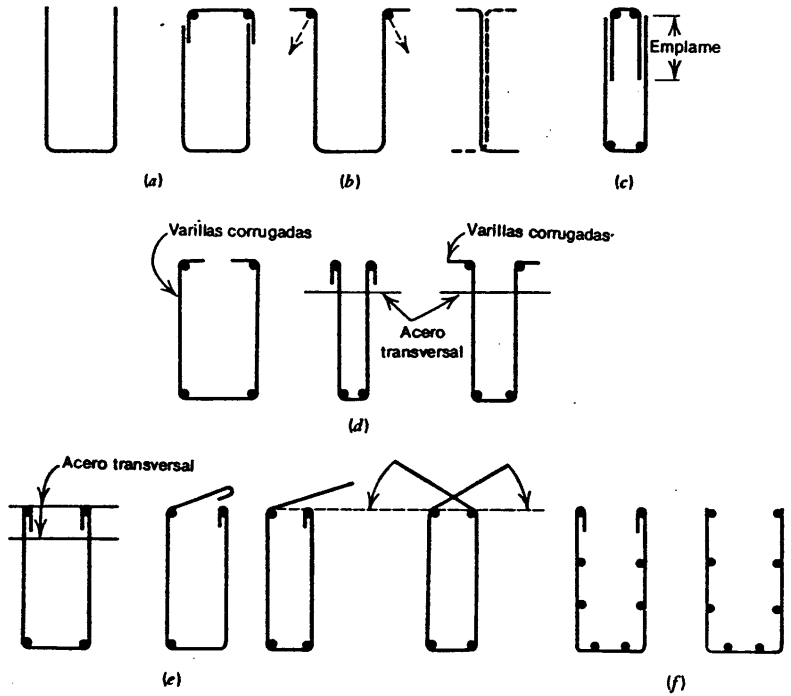


Figura 13.15. Distintas formas de estribos. (*a*) Incorrecto. (*b*) Insuficiente. (*c*) Indeseable. (*d*) De aplicación limitada. (*e*) Perfil satisfactorio. (*f*) Hechos con malla soldada de alambre.

En la fig. 13.17 está representada la concentración indeseable de compresión diagonal en vigas anchas. En ausencia de ramas verticales, de estribos, las varillas centrales no pueden resistir fuerzas verticales, por lo que son ineficientes para recibir fuerzas de adherencia.

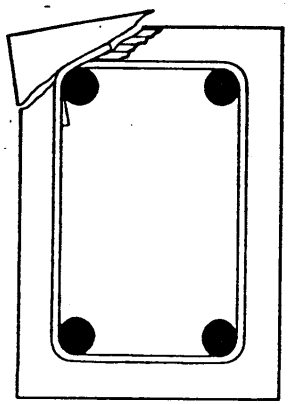


Figura 13.16. Falla posible provocada por anclaje insuficiente de los estribos.

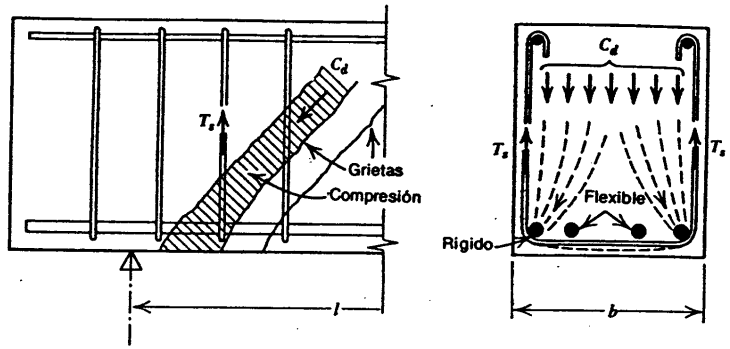


Figura 13.17. Distribución indeseable de la compresión diagonal debida a estribos muy anchos.[13.1]

También se debe tener presente un propósito secundario de los estribos al rodear el refuerzo a tensión a flexión —es decir, impedir que se abran grietas longitudinales de fisuración generadas por adherencia en el claro a cortante.

Las amplias investigaciones del cortante por Leonhardt y Walter[13.9] han indicado que con frecuencia las varillas dobladas del refuerzo a flexión son responsables de un comportamiento inferior. Se pueden dar las siguientes razones para el carácter indeseable de las varillas diagonales dobladas como refuerzo a cortante.

1. Cuando están espaciadas extensamente, las varillas dobladas pueden producir una gran concentración de esfuerzo en los dobleces, lo que puede conducir a fisuración especialmente cuando la distribución es asimétrica (fig 13.18).

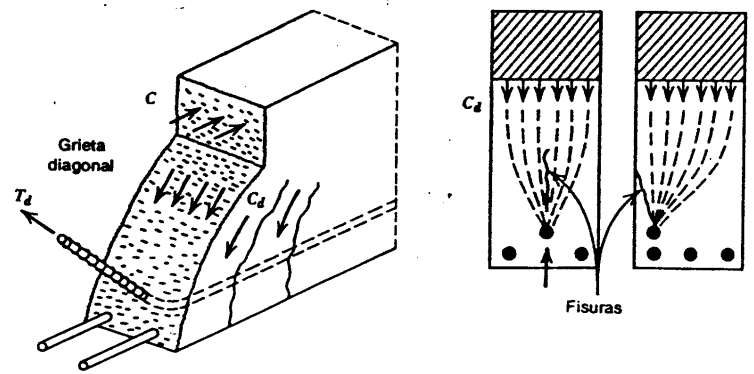


Figura 13.18. Las varillas aisladas dobladas hacia arriba no soportan satisfactoriamente las fuerzas de compresión.[13.1]

2. Cuando están espaciadas estrechamente, lo que eliminaría los efectos indeseables, las varillas dobladas quitan demasiadas varillas al refuerzo a flexión.

3. Cuando se comparan con estribos, no suministran confinamiento para el concreto en compresión.

4. Generalmente conducen a mayores anchos de grietas.

5. Son más difíciles de fabricar y de manejar en el sitio de construcción y por tanto son relativamente costosas.

En la fig. 13.19 se dan los anchos de grietas a distintos incrementos de carga, que midieron Leonhardt y Walter[13.9] en cuatro vigas de dimensiones y contenidos de acero idénticos. Es bastante aparente el efecto benéfico de los estribos espaciados estrechamente, en especial los diagonales. Por lo general, los estribos diagonales son imprácticos, aunque se pueden utilizar con eficiencia en vigas de cimentación y muros donde no ocurre inversión de esfuerzos. Con frecuencia se hacen innecesariamente gruesos esos muros para reducir los esfuerzos cortantes nominales elevados.

Las varillas diagonales cortas adyacentes a los apoyos no han demostrado demasiado eficiencia. Como lo indica la fig. 13.20, la porción inferior de esas varillas puede ser "empujada hacia abajo" por la compresión diagonal, con lo que las grietas diagonales penetran la zona a compresión. Se pueden utilizar varillas dobladas con longitud total de anclaje, aunque los estribos espaciados estrechamente funcionan mejor.

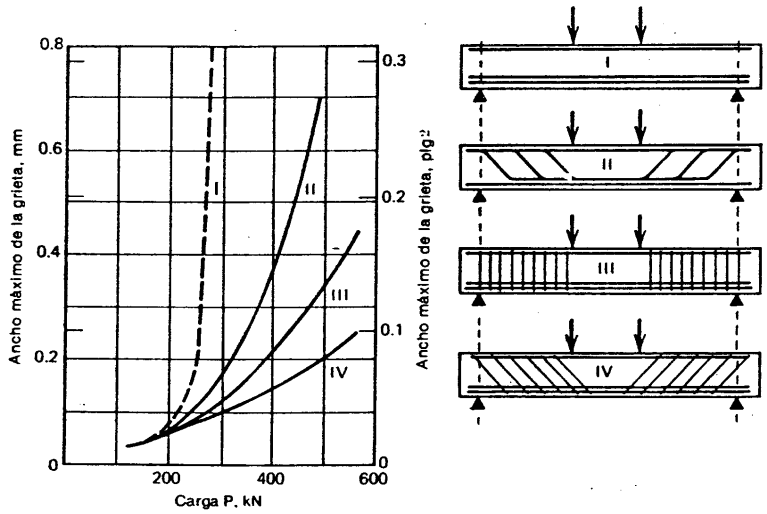


Figura 13.19. Máximo ancho de grietas de cortante para distintos tipos de refuerzo del alma.[13.9]

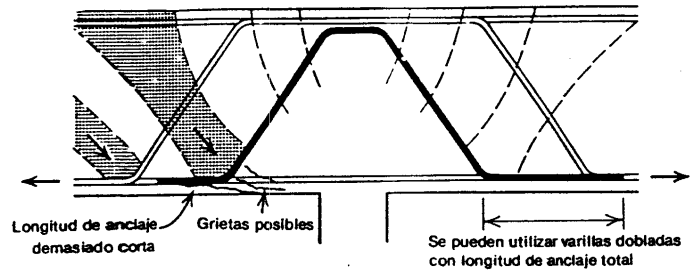


Figura 13.20. Las varillas diagonales adicionales en los apoyos se comportan pobremente.[13.1]

Algunos investigadores sostienen que sólo se puede resistir la tensión diagonal mediante varillas diagonales o refuerzo de rejilla; por este motivo, a veces se sugiere que también se suministren varillas horizontales dentro del alma. Las pruebas han indicado[13.9] que hasta la falla sólo ocurren pequeñas deformaciones en las varillas horizontales intermedias colocadas en las vigas de proporciones usuales. Sin embargo, su efecto benéfico en el control de grietas, especialmente en vigas muy peraltadas, es muy marcado (fig. 13.13). En tales casos se pueden utilizar mallas soldadas de alambre que son ventajosas para el refuerzo del alma. Cuando la carga aplicada ocurre cerca del soporte, produciendo una baja relación de claro de cortante/peralte, la acción de arco se hace predominante después del agrietamiento diagonal. En consecuencia, las varillas horizontales sobre el claro corto a cortante, como en la fig. 13.21, mejoran las condiciones alrededor de la reacción y aumentan la resistencia a fricción cortante a lo largo de una grieta diagonal potencial entre los puntos de carga y reacción.

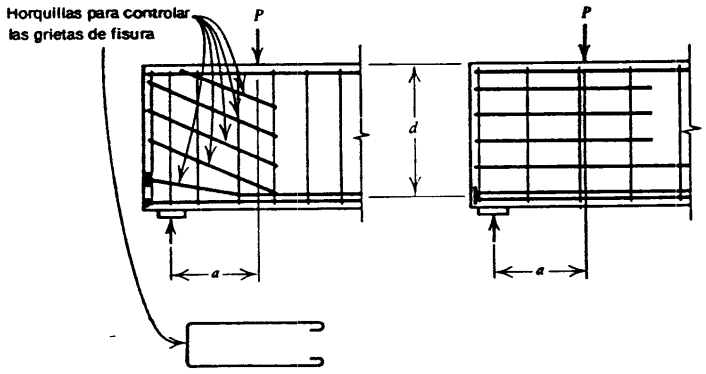


Figura 13.21. Refuerzo secundario inclinado u horizontal cuando la carga se aplica cerca del soporte.

13.4.3 El detallado de los puntos de soporte y de carga

En la mayoría de los experimentos, la carga externa se aplica directamente a la zona a compresión de la viga de prueba, lo que crea un estado biaxial de esfuerzo que mejora el comportamiento en la carga máxima. Las reacciones para las mismas vigas normalmente actúan contra el refuerzo a flexión, como lo muestran las figs. 13.14 y 13.21, con lo que mejoran considerablemente las condiciones de anclaje. En las estructuras reales con frecuencia no existen estas condiciones favorables.

Cuando se aplica la reacción al intradós de una viga (fig. 13.22*a*) la sección crítica por cortante está aproximadamente a una distancia *d* del soporte. Sin embargo, cuando la reacción se aplica desde arriba (fig. 13.22*b*), la sección crítica está claramente en la cara del apoyo. En el segundo caso el detallador debe tomar precauciones adicionales para asegurar que la reacción se "guíe" al área correcta de las vigas soportadas o losa, que debe estar suspendida.

Es esencial que la reacción para las cargas de gravedad siempre se desarrolle en la parte inferior de una viga, sin importar si está simplemente apoyada o es continua. Por ejemplo, la compresión diagonal que resulta de una acción de armadura o de arco en una viga o losa suspendida (fig. 13.23) debe encontrar un apoyo efectivo. Por tanto, el refuerzo del fondo de la losa ha de pasar por encima de las varillas transversales situadas en las esquinas de aros suspendidos espaciados estrechamente. La parrilla así formada en el fondo de la junta del muro y losa es adecuada para recibir la componente vertical de la compresión diagonal.

Con frecuencia se piensa poco en el desarrollo de la reacción necesaria en el punto en que se soporta una viga secundaria mediante una trabe primaria. Se acostumbra suponer que por medio de acción de armadura se transfiere aproximadamente la mitad de la reacción a la parte superior y la otra mitad a la región del inferior de la trabe de apoyo. En la fig. 13.24*a* está representada la distribución de fuerzas cortantes que corresponde a

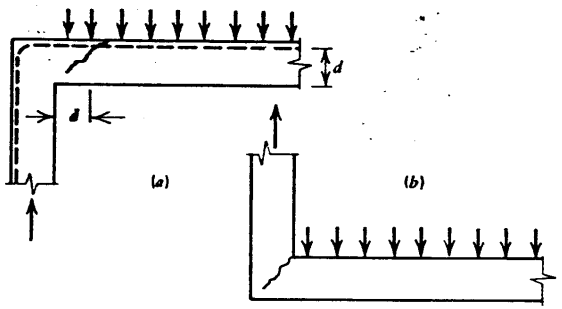


Figura 13.22. La formación de grietas diagonales indica la sección crítica cuando la reacción se aplica (*a*) desde abajo o (*b*) desde arriba de una viga.

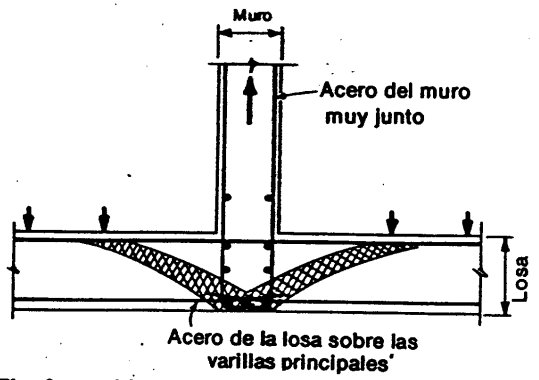


Figura 13.23. El refuerzo del muro espaciado estrechamente fuera del acero horizontal soporta efectivamente una losa suspendida.[13.1]

esta suposición. Como lo indican las pruebas,[13.1] el comportamiento real de la viga es distinto. Los mecanismos de concreto (capítulo 7) siempre resisten una porción del cortante, y debido a que están ausentes las grietas a flexión, no necesariamente se forma la grieta diagonal en el apoyo. Ambos aspectos sugieren que el cortante es tomado predominantemente por compresión diagonal (fig. 13.24*b*). La falta de apoyo suficiente para la compresión diagonal en la proximidad de la trabe principal condujo a la falla en una de las vigas de las pruebas de torsión en la Universidad de Toronto[13.10] (fig. 13.25).

Los estribos en la viga *B* secundaria y especialmente en la trabe *A* de la fig. 13.24*b* son más adecuados para recibir la fuerza de compresión diagonal. Los estribos en la trabe *A* deben transmitir la reacción *V* a la zona a compresión de la trabe, donde puede descomponerse en fuerzas de compresión diagonal. En la fig. 13.26 se muestra con mayor detalle la distribución sugerida de estribos. En el capítulo 7 se señaló la importancia de mantener baja la zona a compresión de las trabes bajo cargas puntuales no directamente aplicadas a la superficie superior de la viga para asegurar acción eficiente de arco.

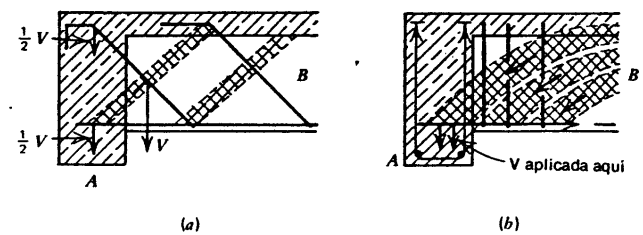


Figura 13.24. Trabe principal que soporta una viga secundaria.[13.1] (*a*) Con varillas a flexión dobladas hacia arriba; (*b*) con estribos.

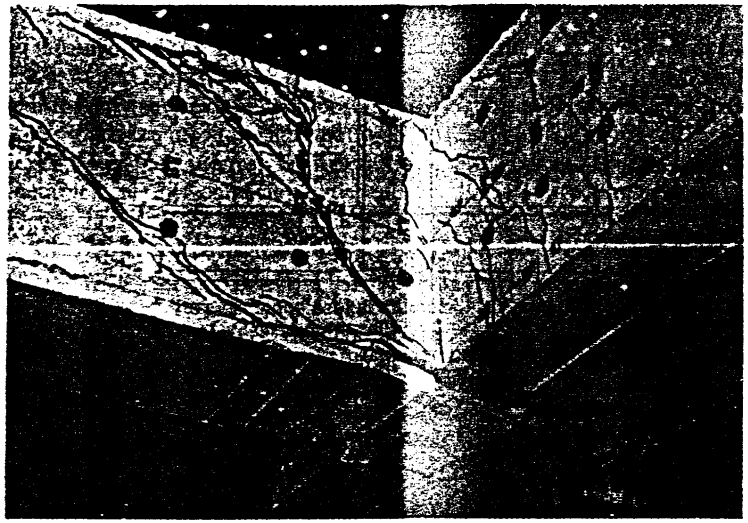


Figura 13.25. Falta de soporte para la compresión diagonal en una viga secundaria.[13.10]

Leonhardt recomienda[13.1] que los estribos de "suspensión" que se coloquen en la trabe principal A, además de los requeridos para la resistencia a cortante, puedan resistir una fuerza

$$V_s^* = \frac{h_b}{h_a} V$$

en que V = carga recibida de la viga B

h_a, h_b = peralte de las vigas, como en la fig. 13.26

Por otra parte, Baumann y Rüsh sugieren[13.11] que se suministre refuerzo de estribo de suspensión para todo el cortante o fuerza de reacción, puesto que las deformaciones grandes en estos estribos pueden llevar a grietas de fisuración horizontal a lo largo del refuerzo a flexión de la trabe de soporte. Por lo general, el costo del acero adicional es despreciable.

Cuando se intersectan vigas de peralte igual, el acero del fondo de la viga secundaria debe estar por encima del refuerzo del fondo de la viga de soporte, obteniendo con ésto el máximo beneficio del anclaje como resultado de la presión normal inducida por compresión diagonal en las vigas B secundarias. En la fig. 13.27 se muestra un ejemplo. Los estribos de suspensión se deben proporcionar para toda la reacción requerida de la viga I a los lados de la trabe de acuerdo con los requerimientos de equilibrio.

En vigas cargadas simétricamente con dos cargas concentradas existe una zona de momentos constantes entre esas cargas a través de la cual no

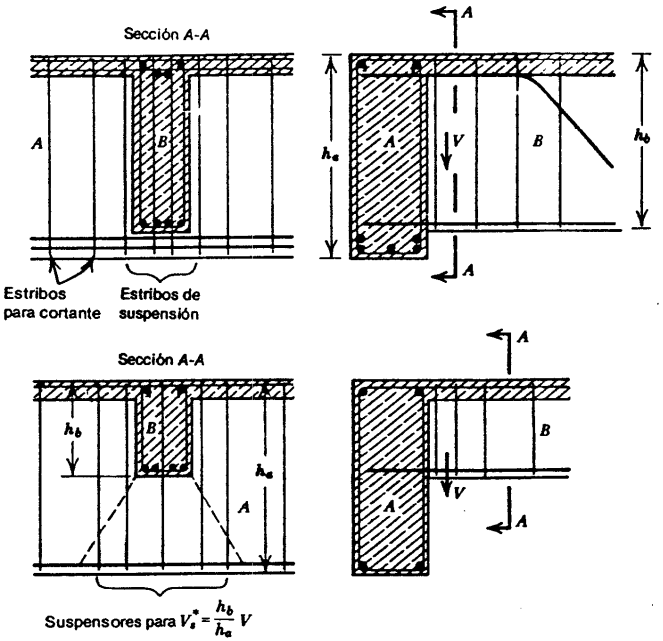


Figura 13.26. Los estribos de suspensión reciben las reacciones de la viga secundaria.[13.1]

se transfiere cortante. Cuando esas cargas se originan de vigas secundarias, como en el ejemplo inferior de la fig. 13.26, se deben extender los estribos de suspensión requeridos hacia el lado del claro a cortante de la trabe de soporte, ya que los estribos en una zona de momentos constantes son inefectivos.

La losa en voladizo (fig. 13.28) es otro ejemplo que se encuentra cuando la compresión diagonal se dirige hacia el borde inferior de la viga de

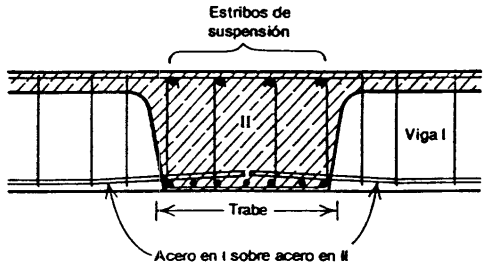


Figura 13.27. Viga que soporta otra viga de igual peralte.[13.1]

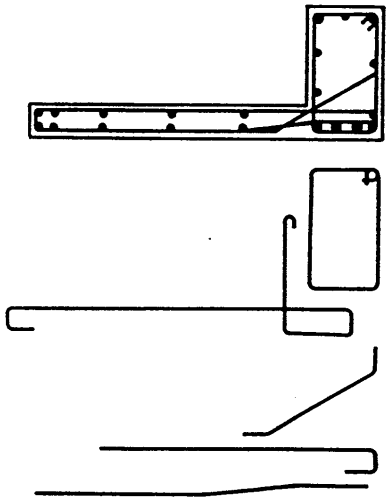


Figura 13.28. Viga que soporta una losa en voladizo.[13.5]

soporte. Por tanto, es importante transmitir la reacción desde esta área hacia la parte superior de la viga. Las varillas individuales mostradas en el diagrama sugieren una solución a este problema.

En la construcción de concreto precolado, con frecuencia se requiere una articulación intermedia a lo largo de un claro. En estos casos es obligatorio el detallado cuidadoso, ya que sólo se dispone aproximadamente de la mitad del peralte efectivo de la viga. La fig. 13.29*a* indica el flujo de las fuerzas internas de compresión. Se deben suministrar estribos de suspensión para trasmitir toda la reacción al borde superior de ambas vigas. Desde los extremos de estos estribos se puede desarrollar un puntal diagonal en la dirección de la placa de apoyo. Leonhardt sugirió[13.5] estribos especiales para 1.2 veces la fuerza cortante R. La longitud de anclaje del refuerzo inferior, que se supone que se extiende por la distancia $1.2h_2$, como en la fig. 13.29*b*, debe bastar para desarrollar una fuerza horizontal igual a $1.2R$. Debe haber suficiente refuerzo (de horquilla) que se extienda horizontalmente más allá de las esquinas rentrantes donde se puede desarrollar una grieta diagonal potencial.
El refuerzo de los voladizos cortos es semejante al de las ménsulas, estudiado en la sección 13.6.

Cuando la viga es muy peraltada, se pueden doblar diagonalmente hacia arriba algunas de las varillas a flexión, de acuerdo con la fig. 13.29*c*. Con frecuencia es difícil suministrar suficiente anclaje para ellas en la parte voladiza más pequeña de la articulación.

Cuando es necesario aplicar cargas concentradas a lo largo de una trabe de concreto reforzado en su parte inferior, se debe utilizar un dispositivo que transfiera esas fuerzas a la parte superior de la viga. La fig.

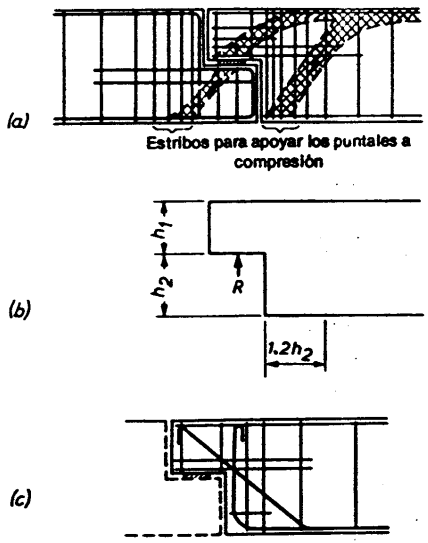


Figura 13.29. Los voladizos cortos forman una articulación en el claro de la viga.[13.5] (*a*) Utilizando refuerzo ortogonal. (*b*) Utilizando varillas dobladas hacia arriba.

13.30 muestra algunas soluciones.[13.5] Ya que no se pretende transferir esta carga a ninguna parte más que a la parte superior de la trabe, se pueden utilizar varillas redondas lisas y destruir la adherencia a lo largo de las mismas. Cuando las trabes de grúa están soportadas, es preferible postensar estas varillas pernos de alta resistencia, suponiendo que permanece suficiente fuerza de compresión entre la placa inferior de apoyo y el concreto después de la aplicación de la carga vertical, contracción y flujo plástico para transferir las fuerzas horizontales que resultan de la operación de una grúa.

13.4.4 Recorte del refuerzo a flexión

Dondequiera que se termina una varilla en la zona a tensión de una viga se crea una discontinuidad. La repentina reducción al área de acero a tensión produce un aumento súbito en la deformación del acero, lo que a su vez hace que las grietas iniciadas por las varillas cortadas se hagan más anchas. Dondequiera que las fuerzas cortantes puedan tomar una magnitud crítica, las grietas iniciadas se inclinan. Probablemente debido a la reducción en resistencia por trabazón del agregado, con frecuencia esas grietas conducen a una falla prematura a cortante. En consecuencia, es esencial que se suplemente la resistencia a cortante de esas áreas de una viga mediante refuerzo del alma. Los códigos[13.12] requieren estribos adicionales en la proximidad de los puntos de corte del refuerzo a flexión en la zona a tensión.

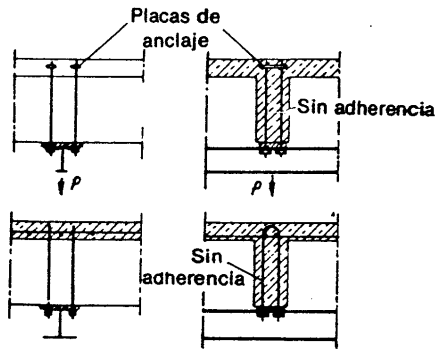


Figura 13.30. Maneras de transferir la fuerza aplicada en el intradós o sofito de una viga a su parte superior.[13.5]

Ferguson y Husain[13.13] encontraron que aparte de prolongar todo el refuerzo a flexión a través de la zona a tensión, la mejor manera de evitar el inicio de una falla a cortante, a una carga menor que la que corresponde con la capacidad a flexión, es doblar las varillas a tensión hacia arriba, en el alma de la viga (fig. 13.7). En el detallado del refuerzo a flexión en la zona a tensión es esencial evitar puntos de cambios abruptos. Para demostrar este efecto, un investigador colocó una varilla corta adicional en una viga que aparte de ello estaba reforzada adecuadamente. La viga mostró una resistencia más baja a cortante que otra semejante sin la varilla adicional.

En la sección 7.5.1 se estudió el efecto del cortante y el agrietamiento diagonal que resulta en el recorte del refuerzo a flexión, expresado por el "diagrama de *Tjd*."

13.5 EL DETALLADO DE MIEMBROS A COMPRESION

Las condiciones de adherencia y anclaje son más favorables en los miembros a compresión. En consecuencia, se plantean menos dificultades con respecto al detallado de varillas de columnas principales. Hay unas cuantas cuestiones relacionadas con el empalme de varillas de columnas que merecen atención.

Una fracción considerable de la fuerza de compresión en una varilla se transfiere por apoyo de extremo, aunque generalmente se ignora esta acción, ya que no se da margen para ésta en el diseño del empalme en una columna. El concreto en la proximidad inmediata del extremo de la varilla puede no ser capaz de absorber los esfuerzos. En numerosas columnas probadas en la Universidad Stuttgart,[13.14] el concreto bajo cada una de las varillas empalmadas reventó lateralmente antes de que el miembro pudiera alcanzar su resistencia máxima. Parece que el deslizamiento requerido para movilizar los esfuerzos de adherencia no puede ocurrir antes de que

se supere la resistencia de apoyo de extremo en las varillas. La fig. 9.23 muestra una falla de empalme en una columna.[13.14]

El refuerzo transversal adicional en los extremos de las varillas empalmadas y en sus proximidades es imperativo, para dar confinamiento al concreto altamente esforzado (áreas sombreadas de la fig. 13.31*a*). En la fig. 13.32 se muestra un arreglo de estribos adicionales en empalmes a compresión sugerido por Leonhardt y Teichen.[13.14]

Esta debilidad de un empalme a compresión sugiere que podría ser mejor colocar el empalme en un área de bajo esfuerzo (v.gr., a mitad de la altura de una columna), de existir tal lugar. En las estructuras resistentes a los sismos, se puede sujetar a una columna a momentos flexionantes muy grandes, y por ello es posible que se formen articulaciones plásticas en los extremos superior e inferior. Por este motivo, el empalme debe estar próximo a la mitad de la altura.

Siempre que la fuerza del acero cambia de dirección (v.gr., en los manerales), se generan fuerzas transversales. Los estribos adicionales colocados en esos puntos deben tener una resistencia superior, por ejemplo, en 50%—a la fuerza transversal (flecha con línea punteada en la fig.

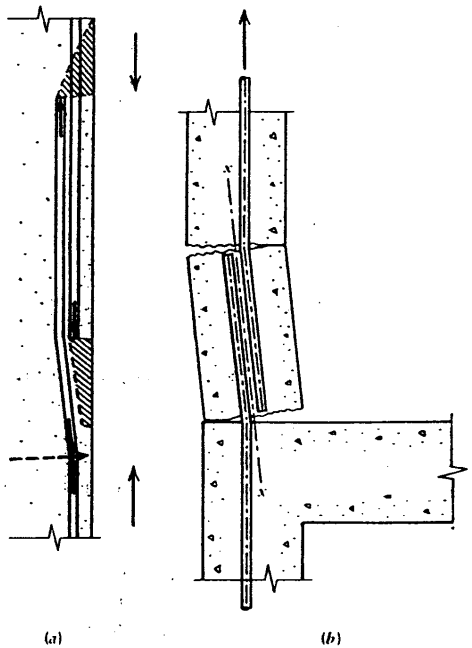


Figura 13.31. Fuerzas transversales introducidas cuando ocurre un desplazamiento de varillas. (*a*) En empalmes de columnas. (*b*) En empalmes a tensión excéntrica.

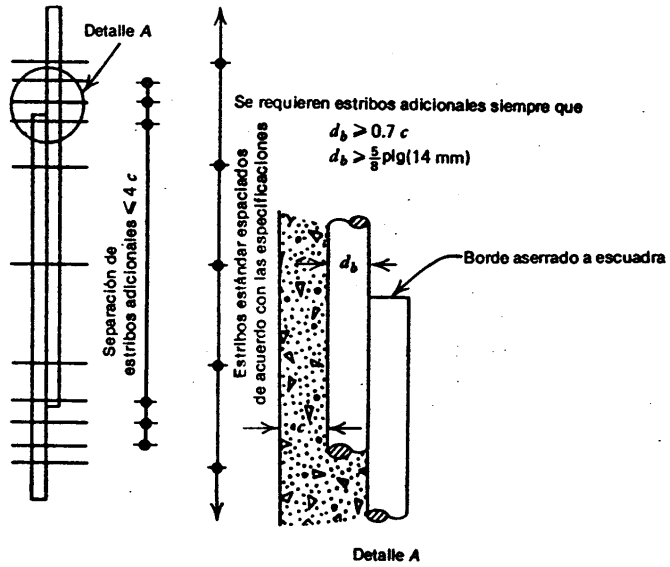


Figura 13.32. Estribos adicionales requeridos en los extremos de empalmes a compresión [13.14]

13.31*a*) generada cuando cede la varilla de la columna. Consideraciones semejantes requieren refuerzo transversal en el maneral superior (fig. 13.31*a* cuando la varilla de la columna está en tensión).

Cuando se utiliza refuerzo de una sola capa en muros delgados, se debe evitar un desplazamiento o desviación transversal. La tensión, inducida por una perturbación sísmica, puede llevar al caso ilustrado en la fig. 13.31*b*.

El propósito del refuerzo transversal en las columnas es triple. Cada uno de éstos requiere consideraciones para asegurar que se satisfaga el propósito específico.

1. Las varillas de columna que trasmiten cargas de compresión pueden pandearse. Bajo deformaciones grandes, cuando se aproxima la cedencia en el acero, no se puede confiar en la restricción lateral que proporciona el zuncho de concreto, por lo que los estribos transversales deben suministrar apoyo lateral adecuado a cada varilla de la columna para impedir la inestabilidad debida al pandeo hacia el exterior. El código actual del ACI[13.12] especifica un espaciado máximo entre estribos de 16 veces el diámetro de la varilla de la columna. Considerando teóricamente el problema, Bresler y Gilbert[13.15] han demostrado que la longitud crítica no apoyada de las varillas a compresión es mayor que esto, por lo que la provisión actual es adecuada. Sin embargo, cuando ocurre plasticidad alterna, el módulo tangente de elasticidad del refuerzo a compresión se reduce considerablemente

debido al efecto Bauschinger. Por tanto se disminuye apreciablemente la carga de pandeo crítico en varillas de columnas afectadas por sismos. Para mantener la capacidad a cedencia completa de las varillas a compresión se debe reducir considerablemente la longitud no apoyada. En consecuencia, Bresler recomienda que dentro de una longitud igual a un sexto de la altura de la columna, en cada extremo de la misma, el espaciado entre estribos no sea mayor que $6d_b$. Normalmente se satisface este requerimiento cuando se utiliza refuerzo de confinamiento.

No es la resistencia sino la rigidez de los estribos lo importante. Los estribos deben ser lo suficientemente grandes para impedir el desplazamiento lateral de las varillas de columna en la cedencia. Por esta razón, los códigos[13.12] estipulan tamaños mínimos de estribos.

2. Las columnas de edificios sujetas a cargas sísmicas con frecuencia transmiten grandes cargas de cortante y flexión. Cuando las grietas a tensión diagonal son posibles, se requiere refuerzo a cortante. En consecuencia, el anclaje y el perfil de los estribos deben ser tales que se puedan transferir fuerzas de tensión resultantes de la acción de armadura de una a otra cara de la columna, lo que es especialmente importante en regiones de posibles articulaciones plásticas, donde disminuye o es mínima la contribución del concreto a la resistencia a cortante.

3. El tercer propósito de los estribos es suministrar confinamiento al núcleo de concreto. En el capítulo 2 se dio una evaluación analítica del acero de confinamiento. Se debe notar que la efectividad del confinamiento por estribos viene de los lugares donde el acero logitudinal se mantiene rígidamente en su posición, no de la porción recta de los estribos que se extiende horizontalmente entre los puntos de cambios direccionales (fig. 2.14)a menos que haya estribos cruzados que conecten los lados.

La fig. 13.33 ilustra un caso que se puede encontrar en las columnas afectadas por cargas sísmicas. Cuando se utilizan estribos pasados es decir, mayores que $\frac{5}{8}$ plg (16 mm)] los ganchos pueden interferir con la colocación de varillas verticales y el concreto; aquí pueden ser más prácticos los estribos soldados a tope o llanos (fig. 13.76).

13.6 MENSULAS

13.6.1 Comportamiento

Con frecuencia es necesario soportar las cargas concentradas que se originan de las trabes de grúas o vigas precoladas de concreto mediante ménsulas muy próximas a la cara de una columna de soporte. Es difícil evaluar explícitamente el comportamiento elástico de esos voladizos cortos y relativamente peraltados. Sin embargo, los análisis de elementos finitos o los estudios de modelos fotoelásticos pueden suministrar las trayectorias de los esfuerzos requeridos que describen de la mejor manera el mecanismo con que se toma la carga. Cuando la intensidad de la carga es lo su-

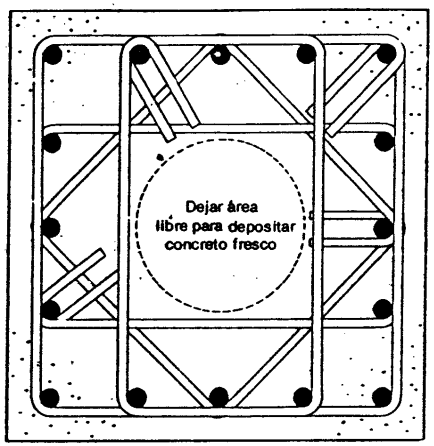


Figura 13.33. Acero de confinamiento en columnas sujetas a fuerzas sísmicas intensas.

ficientemente grande, se forman grietas aproximadamente perpendiculares a estas trayectorias de tensión principal. Después del agrietamiento del concreto, el refuerzo opera con la mayor eficiencia, si se localiza al menos aproximadamente a lo largo de esas trayectorias de tensión, y si puede generar su momento resistente con el máximo brazo de palanca interna.

En la fig. 13.34 está representada la distribución de esfuerzos principales en una ménsula trapezoidal y su columna de soporte, que obtuvieron Franz y Niedenhoff[13.16] de modelos fotoelásticos. Se simula la carga recibida de una trabe de grúa. Una evaluación de ese estudio revela la existencia de cuatro condiciones.

1. Los esfuerzos de tensión a lo largo del borde superior son casi constantes entre el punto de carga y la carga de la columna. Ya que el espaciado de las trayectorias no varía considerablemente, la fuerza total de tensión también es casi constante.

2. La fuerza de compresión a lo largo del borde inclinado de la ménsula también es aproximadamente constante, lo que indica que se desarrolla un puntal a compresión diagonal.

3. Los esfuerzos inclinados de tensión que se originan del cambio de dirección de la fuerza de compresión son muy pequeños.

4. El perfil de la ménsula tiene poco efecto en el estado de los esfuerzos. En una ménsula rectangular (fig. 13.35) la esquina exterior opuesta al punto de carga está virtualmente libre de esfuerzos.

Estas observaciones indican que a pesar de la complejidad del patrón de esfuerzos, se podría seguir un procedimiento simple de diseño basado en un mecanismo de arco lineal interno. El patrón de grietas en las pro-

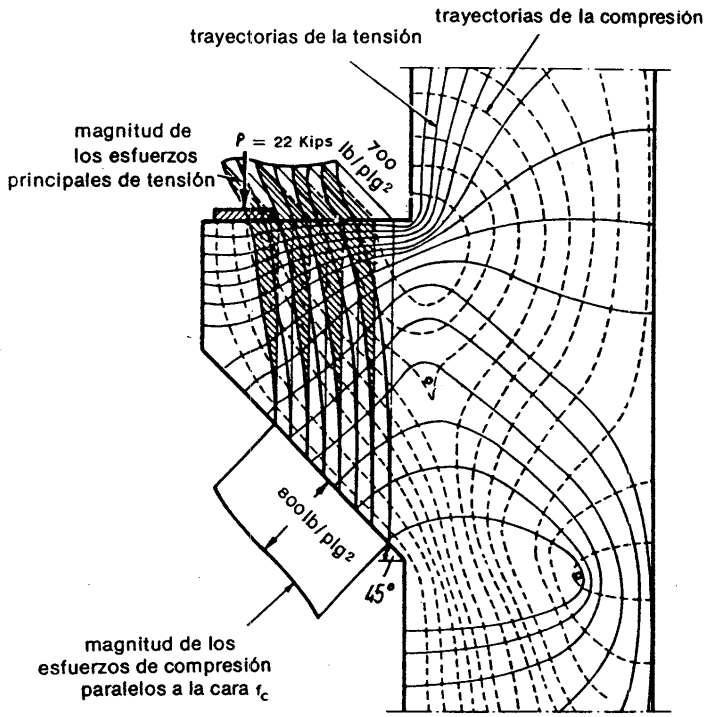


Figura 13.34. Trayectorias de esfuerzos en una ménsula elástica homogénea.[13.16]

betas de prueba lo verifica. La fuerza cortante no resistida por la componente vertical de la compresión inclinada y no por los esfuerzos cortantes a lo largo de la sección crítica. En ménsulas muy ligeramente reforzadas, la grieta a flexión crítica en la cara de la columna de soporte puede propagarse cerca del borde a compresión, debido al pequeño peralte de la zona a compresión; en consecuencia podría ocurrir una falla por cortante deslizante. Los mecanismos resistentes de dovela y por trabazón del agregado o fricción de grieta podrían necesitar movilizarse en este caso.

En el enfoque tradicional a este problema, se hubiera confiado en la consideración de esfuerzos cortantes. En efecto, con frecuencia se han reforzado las ménsulas con diagonales (fig. 13.35), para tomar parte apreciable o toda la fuerza cortante. Las investigaciones de Franz y Niedenhoff[13.16] han demostrado en forma concluyente la ineficiencia de este enfoque. Los desplazamientos a través de las grietas corresponden a una rotación de cuerpo rígido de la ménsula alrededor de un centro, localizado muy cerca de la raíz de compresión (fig. 13.37). En consecuencia,

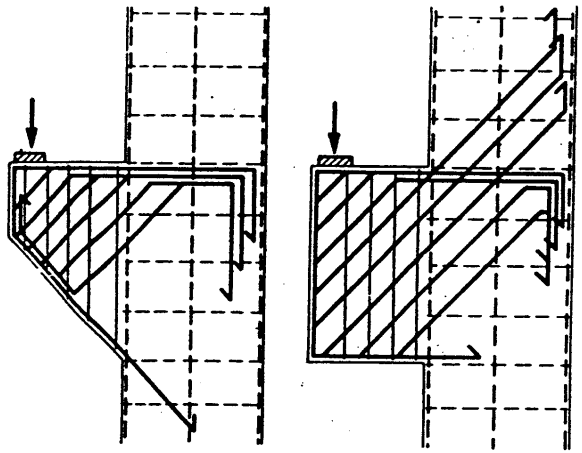


Figura 13.35 Ménsulas reforzadas diagonalmente. [13.16]

los desplazamientos cerca del borde superior son casi horizontales, por lo que las varillas diagonales estarían sujetas a fuerzas considerables de dovela. Más aun, las varillas dobladas hacia arriba no suministran suficiente área de acero horizontal en la proximidad inmediata de la carga aplicada; por tanto, se observaron fallas de anclaje.

13.6.2 Mecanismos de falla

Kriz y Raths desarrollaron un amplio programa de pruebas,[13.17] y las recomendaciones actuales del código de ACI[13.12] se basan en sus resultados. De sus estudios se pueden identificar los siguientes mecanismos de falla.

1. Ocurre falla de tensión por flexión cuando cedencia excesiva del refuerzo a flexión provoca que el concreto se aplaste en el extremo inclinado de la ménsula. Las grietas de flexión se hacen sumamente anchas (fig. 13.36*a*).

2. Se desarrolla fisuración diagonal a lo largo del puntal a compresión diagonal después de que se forman grietas de flexión. La falla se debe finalmente a la compresión por cortante (fig. 13.36*b*).

3. Una serie de grietas cortas diagonales muy inclinadas puede llevar a una falla de cortante deslizante, conforme se interconectan las mismas, cuando la ménsula se separa de la cara de la columna (fig. 13.36*c*).

4. Puede ocurrir una falla de fisuración a lo largo de refuerzo a flexión pobremente anclado cuando la carga se aplica demasiado próxima al extremo libre de un voladizo corto (fig. 13.36*d*). El extremo rotatorio de una viga libremente soportada puede imponer la reacción del borde de la

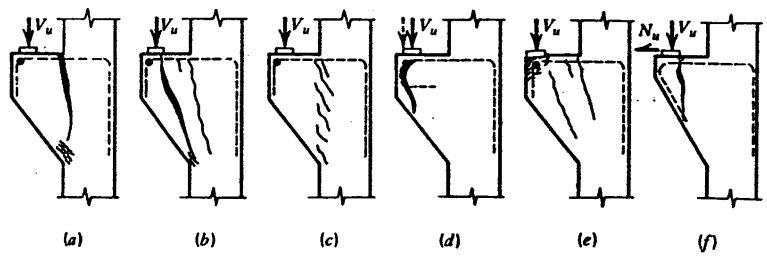


Figura 13.36. Mecanismos de falla en las ménsulas. (*a*) Tensión por flexión. (*b*) Fisuración diagonal. (*c*) Cortante deslizante. (*d*) Fisuración de anclaje. (*e*) Aplastamiento debido a esfuerzos de apoyo. (*f*) Tensión horizontal.

placa de apoyo, y la excentricidad no planeada puede provocar este tipo de falla.

5. Con placas de apoyo demasiado pequeñas o muy flexibles, o cuando la ménsula es demasiado angosta, el concreto se puede aplastar por la parte de abajo, lo que conduce a una falla de apoyo (fig. 13.36*e*).

6. Se acentúan varios de estos mecanismos cuando hay una fuerza horizontal N_u además de la carga de gravedad V_u, lo que puede deberse a los efectos dinámicos en las trabes carriles o puede inducirse por contracción, flujo plástico o acortamiento por temperatura de vigas de concreto precolado restringidas unidas a la ménsula.

Se puede plantear un caso de falla potencial cuando la cara exterior de la ménsula es poco profunda y también se introduce una carga horizontal adversa (fig. 13.36*f*).

7. El mecanismo de arco lineal implica que se debe desarrollar la capacidad del refuerzo a flexión en la proximidad inmediata de la placa de apoyo. Esto lleva a un mecanismo de falla importante en las ménsulas: la falla del anclaje. Es claro que el puntal a compresión diagonal no puede desarrollarse, a menos que se trasmita su componente horizontal al refuerzo principal cerca del extremo libre de la ménsula.

Los requerimientos de detallado de las ménsulas se siguen directamente de los siete mecanismos de falla recién listados. Es evidente que los estribos verticales, que se usan para la resistencia a cortante, serían inefectivos en todos estos casos.

Parece que se puede basar al diseño en cualquier mecanismo estáticamente admisible de resistencia[13.18] que reconoce la rigidez relativa donde es aplicable, y los desplazamientos principales dentro de la ménsula próxima a la falla. Las pruebas comparativas indican que se puede utilizar cierto refuerzo diagonal provechosamente y que una combinación óptima de acero horizontal y diagonal puede producir una demanda mínima de acero [13.19] Sin embargo, esa ventaja económica puede quedar compensada por la mayor cantidad de trabajo necesario para doblar las varillas.

13.6.3 Diseño y detallado de ménsulas

La selección del refuerzo a flexión se puede basar en suposiciones conservadoras para asegurar que una ménsula que soporte un miembro estructural primario no ceda antes de que se logre la capacidad máxima del miembro primario, lo que puede lograrse si se suplementa el acero a flexión, que se debe determinar de los primeros principios, mediante varillas horizontales en los dos tercios superiores de la ménsula. Para la mayoría de los casos se puede estimar el brazo de palanca interna en $z = 0.85d$. En forma alterna, se pueden aplicar los conceptos de la resistencia a flexión máxima, como en la fig. 13.37*a*. La fuerza de compresión inclinada a un ángulo α es

$$C = 0.85abf'_c = \frac{T}{\cos\alpha} = \frac{A_s f_y}{\cos\alpha} = \frac{V}{\operatorname{sen}\alpha}$$

en que b es el ancho de la ménsula y las otras variables se pueden identificar en la fig. 13.37*a*. Por tanto se tiene

$$a = \frac{A_s}{0.85b\cos\alpha}\frac{f_y}{f'_c} \tag{13.6}$$

y

$$z = d - \frac{a}{2\cos\alpha} \tag{13.7}$$

en que

$$\tan\alpha = \frac{z}{l}$$

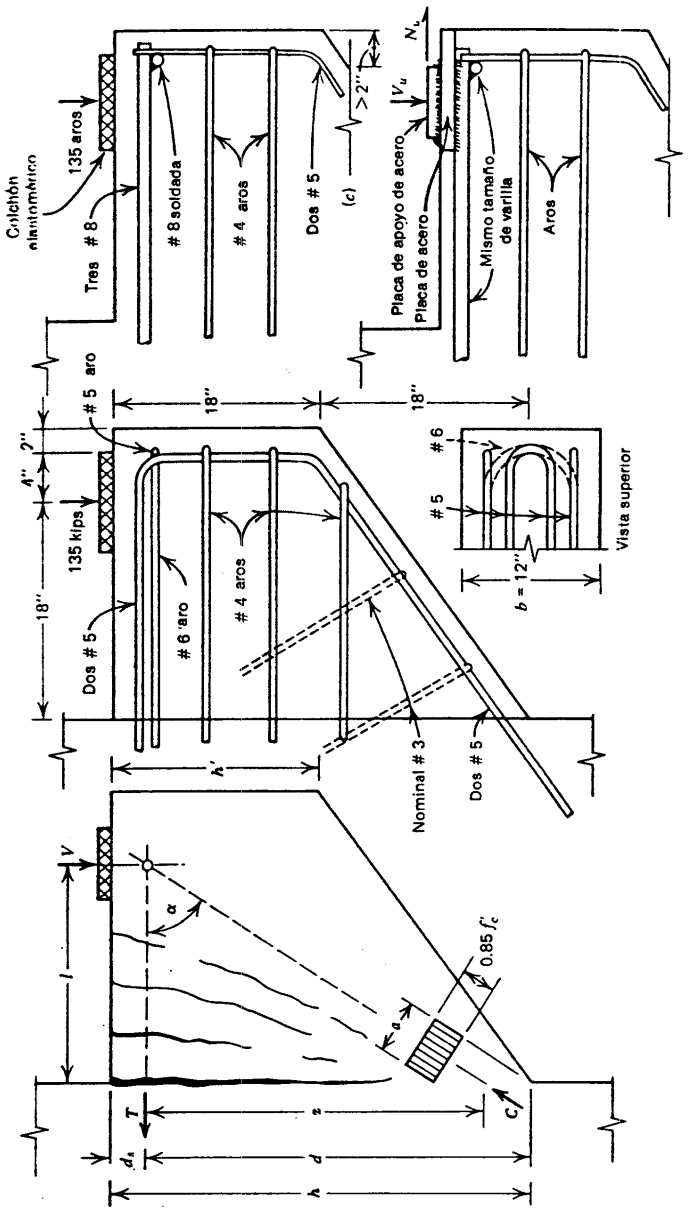
Por tanto

$$A_s = \frac{Vl}{zf_y} \tag{13.8}$$

Es aconsejable resolver estas ecuaciones por tanteos. Se sugiere[13.16] suministrar acero horizontal adicional, $A_h \geq 0.25A_s$, sobre el peralte de la ménsula.

El procedimiento de diseño del código del ACI[13.12] es totalmente empírico, y una versión simplificada de las proposiciones de Kriz y Raths,[13.17] basado en más de 200 pruebas. En este enfoque se ha relacionado el esfuerzo cortante nominal a través de la sección más peraltada de la ménsula con la carga, N_u y V_u, contenido del acero $\rho = A_s/bd$, la resistencia del concreto y la relación claro de cortante-peralte l/d. La forma simplificada de esta relación empírica es

$$v_u = \left(6.5 - 5.1\sqrt{\frac{N_u}{V_u}}\right)\left(1 - \frac{l}{2d}\right)\left\{1 + \left[64 + 160\sqrt{\left(\frac{N_u}{V_u}\right)^3}\right]\rho\right\}\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \tag{13.9}$$



(a)

Figura 13.37. Fuerzas internas y detalles alternativos de una ménsula. (*a*) Dimensiones básicas. (*b*) Detalles típicos utilizando varillas pequeñas. (*c*) El anclaje de varillas grandes. (*d*) Conexión soldada para tensión horizontal.

Se debe utilizar con las siguientes restricciones (veánse también las figs. 13.37*a* y 13.36*f*):

1. $l/d \leqslant 1$
2. $d \leqslant 2h'$
3. $0.04 \leqslant \rho(f_y/f'_c) \leqslant 0.13$
4. $N_u/V_u \geqslant 0.20$
5. Se debe considerar a N_u como carga viva (fig. 13.37*d*).
6. $0.5 \leqslant A_h/A_s \leqslant 1.0$, en que A_h es el refuerzo horizontal del alma paralelo al acero principal a tensión A_s.

Cuando se suministran soportes deslizantes de manera que no se pueda introducir tensión horizontal N_u (fig. 13.37*c*) la ec. 13.9 se reduce a

$$v_u = 6.5\left(1 - \frac{l}{2d}\right)(1 + 64\rho_v)\sqrt{f'_c} \text{ lb/plg}^2 \qquad (13.10)$$

en que

$$\rho_v = \frac{A_s + A_h}{bd} \leqslant 0.20\frac{f'_c}{f_y} \qquad (13.11)$$

Cuando la ménsula es muy corta (v.gr., $l/d < 0.5$), el cortante deslizante a lo largo de la cara de la columna puede hacerse crítico (fig. 13.36*c*). Para este caso el concepto de fricción cortante de la resistencia de carga puede ser más aplicable (véase la sección 7.8).

Al considerar los límites dados por la ac. 13.10 y la sección 7.8.2, y las restricciones apropiadas anotadas antes, se puede mostrar que los esfuerzos cortantes máximos aceptables estarán entre los límites de

$$3.25\sqrt{f'_c} \leqslant v_u \leqslant \left\{\begin{matrix} 17.2\sqrt{f'_c} \\ 0.2f'_c \\ 800 \text{ lb/plg}^2 \end{matrix}\right\} \text{ lo que sea menor}$$

$$(1\sqrt{f'_c} \text{ lb/plg}^2 = 0.083\sqrt{f'_c} \text{ N/mm}^2)$$

Para la mayoría de los casos, $v_u = 10\sqrt{f'_c}$ lb/plg² dará una buena primera aproximación para el tamaño práctico más pequeño de una ménsula.

En el ejemplo 13.1 se presenta una aplicación por tanteos de estas proposiciones de diseño.

Es esencial dar anclaje efectivo para el refuerzo horizontal en el extremo libre de la ménsula. Cuando las varillas a flexión son de diámetro pequeño, se puede utilizar un aro horizontal (fig. 13.37*b*). Para varillas mayores, será necesario tener anclajes mecánicos. Una varilla cruzada de diámetro grande o un ángulo estructural soldado a los extremos de las varillas a flexión puede suministrar este anclaje (fig. 13.37*c*). Para evitar el tipo de falla mostrado en la fig. 13.36*d*, el extremo de la placa de apoyo no se debe extender más allá del anclaje es decir, no debe de estar más próximo que 2 plg (50 mm) del extremo libre (fig. 13.37*b*) .

Cuando se desea resistir una tensión horizontal, la fuerza debe transferirse directamente al acero a flexión soldándolo a la placa de base (fig. 13.37*d*).

13.6.4 Otros tipos de ménsulas

También se pueden aplicar los principios de transmisión de carga mencionados en las secciones anteriores a ménsulas dobles. En la fig. 13.38 se comparan dos tipos de refuerzo, patrones de grietas y comportamiento para ménsulas dobles típicas. El espécimen con varillas horizontales soportó un 23% más de carga máxima. Al invertirse, se pueden considerar estas ménsulas como vigas de gran peralte simplemente soportadas; el diseño de éstas se estudia en la sección 13.7. El centro de rotación cerca de la falla (fig. 13.38*c*) indica la dirección de desplazamiento al nivel del refuerzo y nuevamente señala la ineficiencia de las varillas dobladas.

Ocasionalmente se introduce la carga concentrada en o próximo al borde inferior de la ménsula. El camino natural (es decir, el más corto) para las fuerzas de tensión será ahora la diagonal. En la fig. 13.39*a* se muestra la distribución apropiada del refuerzo para un caso típico.[13.16] La introducción de la carga cerca del borde inferior de la ménsula puede originarse en una ménsula doble, como en la fig. 13.39*b*, o en una trabe carril continua. En ambos casos las fuerzas reactivas (cortantes) requeridas para el miembro soportado por la ménsula se trasmiten principalmente por fuerzas internas de compresión diagonal que intersectan la ménsula cerca de su borde inferior. De esta zona se tiene que trasmitir la carga por tensión diagonal y compresión horizontal (fig. 13.39*a*).

Es casi inevitable que la falta de las ménsulas en el campo se deba a un mal detallado.[13.17]

Ejemplo 13.1

Diseño de una ménsula

Se desea que una ménsula, ilustrada en la fig. 13.37*b*, trasmita una carga máxima combinada viva más muerta de 135 kips (600 kN) a 18 plg (457 mm) de la cara de una columna de 16 plg (406 mm) de ancho. Un colchón elastomérico asegurará que no se introduzcan fuerzas horizontales a la ménsula. Se debe determinar la cantidad y arreglo del refuerzo utilizando $f_y = 60{,}000$ lb/plg² (414 N/mm²), $f'_c = 3000$ lb/plg²(20.7 N/mm²), y $\varphi = 0.85$.

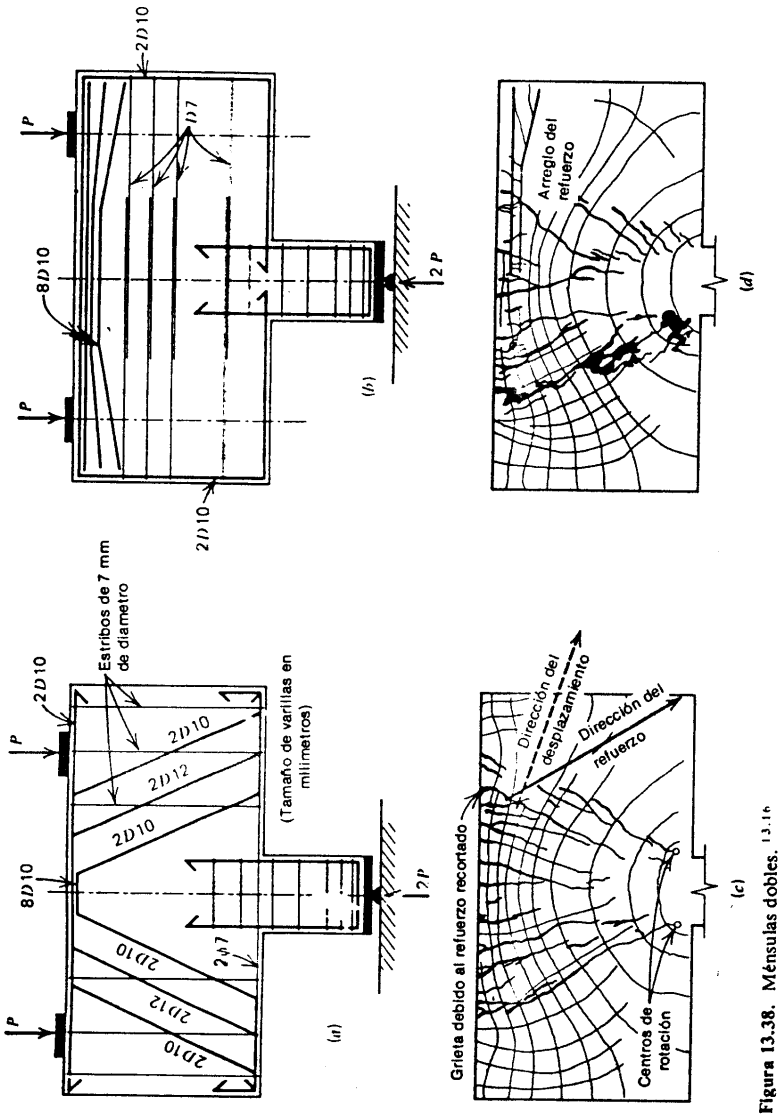


Figura 13.38. Ménsulas dobles.[13.16]

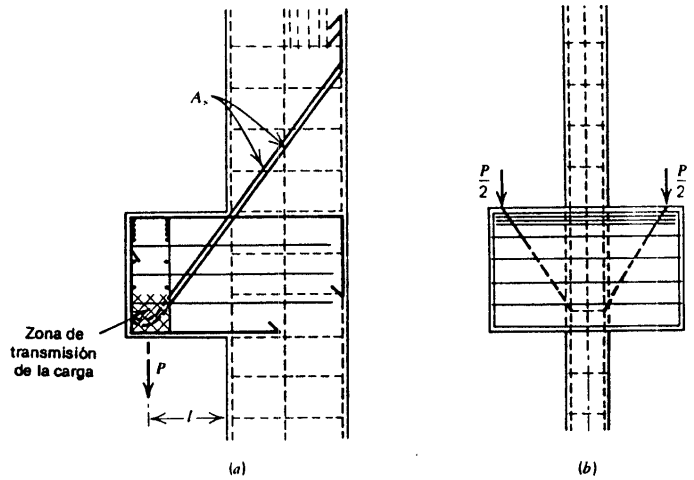


Figura 13.39. Introducción de carga en el fondo de una ménsula cuando esta es doble[13.16] (*a*) Vista lateral. (*b*) Vista frontal.

Cortante de diseño:

$$V_u = \frac{135}{0.85} = 159 \text{ Kips}$$

Suponiendo $l/d = 0.67$,

entonces $d = \dfrac{18}{0.67} = 27$ plg try $h = 30$ plg

Suponiendo $v_u = 10\sqrt{f'_c} = 550$ lb/plg², por tanto

$$b = \frac{V_u}{dv_u} = \frac{159{,}000}{550 \times 27} = 10.7 \text{ plg}$$

En consecuencia, supóngase $b = 12$ plg y $z = 0.85d = 23$ plg

De la ec. 13.8 se escribe

$$A_s = \frac{M}{zf_y} = \frac{18 \times 159}{23 \times 60} = 2.07 \text{plg}^2$$

y se hace

$$A_h = 0.5\, A_s = 1.03 \text{ plg}^2$$

Verifíquense estas cantidades utilizando los requerimientos del ACI

La ec. 13.11 da

$$\rho_v = \frac{A_s + A_h}{bd} = \frac{2.07 + 1.03}{12 \times 27} = 0.0096 < 0.20\frac{f'_c}{f_y} = \frac{0.2 \times 3}{60} = 0.01$$

La ec. 13.10 da

$$v_u = 6.5\left(1 - \frac{l}{2d}\right)(1 + 64\rho_v)\sqrt{f'_c}$$

$$= 6.5\left(1 - \frac{18}{2 \times 27}\right)(1 + 64 \times 0.0096)\sqrt{3000} = 383 \text{ lb/plg}^2$$

Compárese $v = 159{,}000/(12 \times 27) = 491 > 383$ lb/plg². No es satisfactorio.

Para un segundo intento, aumente d a aproximadamente $491/383 \times 27 = 34$ plg

Entonces supóngase $h = 36$, $d = 33$, $b = 12$ plg

Para el acero a flexión úsense dos núm. 6 y cuatro núm. 5; en consecuencia $A_s = 2.08$ plg².

Para los estribos horizontales úsense tres aros núm.4; por tanto $A_h = 1.18$ plg².

Nuevamente verifíquese:

$$\rho_v = \frac{2.08 + 1.18}{12 \times 33} = 0.0082 < 0.01 \qquad \text{(Ec. 13.11)}$$

$$v_u = 6.5\left(1 - \frac{18}{2 \times 33}\right)(1 + 64 \times 0.0082)\sqrt{3000} = 395 \text{ lb/plg}^2$$

(Ec. 13.10)

Compárese $v = 159{,}000/(12 \times 33) = 402 \approx 395$ lb/plg². Satisfactorio

En la fig. 13.37*b* se muestran detalles de este refuerzo.

Como alternativa, se pueden utilizar tres varillas núm. 8 para las varillas superiores con una varilla cruzada soldada en el extremo, que da el anclaje requerido. Esto aparece ilustrado en la fig. 13.37c.

13.7 VIGAS DE GRAN PERALTE

13.7.1 Introducción

Cuando la relación de claro a peralte de vigas simplemente apoyadas es menor que 2, o menor que 2.5 para cualquier claro de una viga continua se

acostumbra definir a éstas como vigas de gran peralte. Como con las ménsulas, los principios tradicionales del análisis de esfuerzos ni son adecuados ni convenientes para determinar la resistencia de vigas de gran peralte de concreto reforzado. Con frecuencia estas estructuras se encuentran en recipientes suspendidos rectangulares, tales como silos y tanques con alimentadores piramidales, en muros de cimentación que soportan cimentaciones corridas o losas, en muros de parapetos y en muros de cortante que resisten fuerzas laterales en las construcciones.

Se pueden determinar los esfuerzos en vigas de gran peralte homogéneas isotrópicas antes del agrietamiento utilizando análisis de elementos finitos o estudios de modelos fotoelásticos. Se encuentra que a menor relación de claro a peralte (v.gr., menor que 2.5), más pronunciada es la desviación del patrón de esfuerzos con respecto al de Bernoulli y Navier. A manera de ejemplo, la fig. 13.40 muestra la distribución de esfuerzos horizontales a flexión, a mitad del claro de vigas simplemente apoyadas, que tienen distintas relaciones de claro a peralte (l/h) cuando transmiten una carga uniformemente distribuida de intensidad w por longitud unitaria.[13.20] Ya que el momento a mitad del claro es $wl^2/8$, el esfuerzo de la fibra extrema usual a mitad del claro de un tablero cuadrado ($l/d = 1.0$) sería $f_t = f_c = 6M/bh^2 = 0.75w/b$. La fig. 13.40 indica que los esfuerzos de tensión en la fibra inferior son más del doble de esta intensidad. Para la distribución de esfuerzos cortantes ocurren desviaciones semejantes. Para la determinación de esfuerzos principales de tensión, los esfuerzos verticales son de gran importancia, especialmente en los puntos de apoyo del tablero.

Este tipo de estructura es muy sensible con respecto a la carga en los bordes. La longitud de los apoyos de la viga en la fig. 13.40 afectará los esfuerzos principales, los que pueden ser muy críticos en la proximidad inmediata de estos apoyos. En forma análoga, las costillas de atiesamiento, muros con cruces de rigidez o columnas extendidas en los apoyos influirán marcadamente en los patrones de esfuerzos. Uno de los aspectos más significativos del análisis de esfuerzos sería la manera de aplicación de la carga, que está distribuida uniformemente en el caso ilustrado en la fig. 13.40. La carga de gravedad podría estar en forma de presión de apoyo aplicada a la superficie superior del tablero, provocando esfuerzos verticales de compresión, que generalmente puede resistir el concreto sin dificultad. En otros casos puede ser necesario suspender el peso a soportar del borde inferior, creando con ello un patrón más adverso de esfuerzos en una viga de gran peralte de concreto reforzado, como sucede cuando se deben suspender los muros inclinados de una tolva o el fondo plano de un tanque rectangular de vigas de gran peralte que forman los muros laterales de la estructura. Es claro que para esos casos se requiere refuerzo adicional. Numerosos estudios han investigado la distribución de esfuerzos para esas variables, y los resultados se pueden utilizar colocando refuerzo

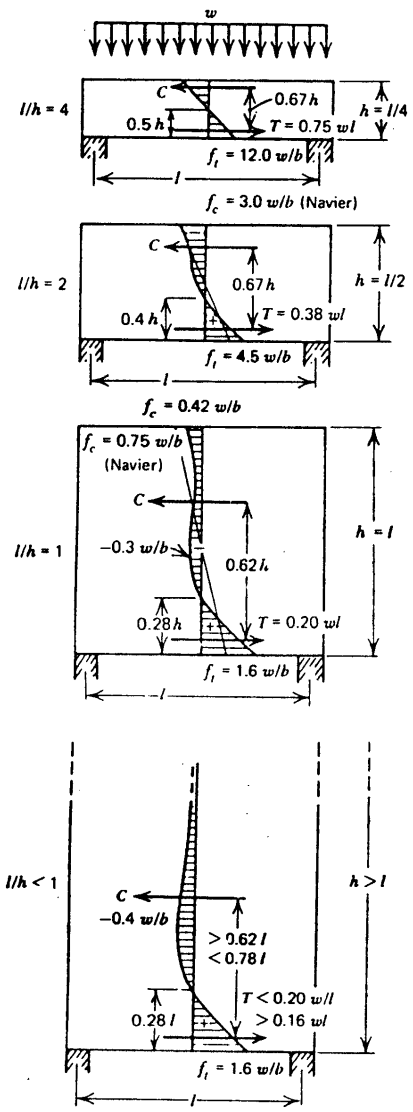


Figura 13.40. Distribución de esfuerzos de flexión en vigas homogéneas simplemente soportadas.[13.21]

que resista los refuerzos de tensión en el cuerpo homogéneo. Los esfuerzos de compresión del concreto rara vez son críticos. Sin embargo, ese tipo de soluciones no toma en cuenta los requerimientos de anclaje para el refuerzo, quizás el aspecto más importante del diseño de vigas de gran peralte, y el aumento considerable de esfuerzos de compresión diagonal cerca de los apoyos después del inicio del agrietamiento.

La demanda de acero rara vez es grande para estas estructuras, de manera que no se justifica un alto grado de exactitud para su determinación. Por este motivo se han desarrollado técnicas aproximadas de diseño que abarcan casi todas las condiciones de carga y borde, toman en cuenta el hecho de que el concreto se agrieta en las zonas a tensión y son más adecuadas a los requerimientos de construcción.

El fondo de las proposiciones siguientes es el punto principal de la investigación experimental de Leonhardt y Walther [13.21] en la Universidad de Stuttgart. El Comité Europeo del Concreto[13.22] también ha formulado recomendaciones basadas principalmente en los resultados anteriores. Los experimentos se diseñaron para explorar los requisitos de detallado y otros aspectos de las vigas de gran peralte. En esta sección sólo se examinan los efectos de las cargas de gravedad. En el capítulo 12 se estudiaron con mayor detalle los aspectos sísmicos, que pueden ser relevantes a las vigas de gran peralte.

El código del ACI[13.12] también hace algunas recomendaciones especiales para las vigas de gran peralte cargadas sólo en la parte superior o en la cara a compresión. En el código del ACI solamente se consideran los efectos en el alma, en términos de esfuerzos cortantes nominales y refuerzo por cortante. Las recomendaciones se refieren a vigas con una relación de claro libre a peralte l/n, hasta de 5. Para relaciones más elevadas de l/h, se aplican los principios de diseño de resistencia a cortante de vigas las ordinarias (también vease la sección 7.10)

13.7.2 Vigas simplemente apoyadas

Considerando una viga cuadrada ($l/h = 1.0$), se pueden hacer dos observaciones de la fig. 13.40. En primer lugar, la fuerza de tensión interna total para la viga de gran peralte homogénea simplemente apoyada se podría calcular utilizando el brazo de palanca interno, que es $z = 0.62h$. es interesante notar que esto es apoximadamente igual para todas las vigas en la fig. 13.40; es decir que no es afectado por la relación del claro a peralte, l/h. Para una viga esbelta $z = \frac{2}{3}h$. En segundo lugar, la zona a tensión en la parte inferior de la viga es relativamente pequeña (aproximadamente $0.25l$), lo que sugiere que se debe colocar el refuerzo principal a felxión en esta área.

No parece que el brazo interno de palanca para vigas muy peraltadas aumente considerablemente después del agrietamiento.[13.21] Para fines de

diseño se puede hacer la siguiente aproximación para el brazo z de palanca interno.[13.22]

$$z = 0.2(l + 2h) \quad \text{donde} \quad 1 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 2 \tag{13.12a}$$

o

$$z = 0.6l \quad \text{donde} \quad \frac{l}{h} < 1 \tag{13.12b}$$

Por conveniencia se pueden utilizar las curvas de la fig. 13.41. Es obvio que el área de acero así calculada no debe ser menor que la que se obtendría del análisis de flexión ordinario, como se explica en el capítulo 4.

En estas ecuaciones se debe tomar la distancia de centro a centro entre soportes, o 1.15 veces el claro libre, lo que sea menor, para el claro l.

El refuerzo a flexión calculado de esa manera se debe distribuir, utilizando varillas de tamaño relativamente pequeño, en una distancia vertical igual a $0.25h - 0.05l$, en que $h \leqslant l$. Esto se debe medir desde la cara inferior de la viga, como se indica en la fig. 13.42.

Del estudio de las ménsulas en la sección 13.6, también es evidente que una carga concentrada aplicada centralmente se transmite en forma primordial por acción de arco, lo que necesita de muy buenos anclajes y la extensión de todo el refuerzo a flexión a los apoyos. Se sugiere[13.22] que el anclaje debe desarrollar al menos 80% de la fuerza máxima calculada del acero en la cara interna de los apoyos. Evitar la falla del anclaje antes del logro de la resistencia requerida del refuerzo a flexión sólo puede lograrse si se utilizan varillas de diámetro pequeño o anclajes mecánicos. Las vigas antiguas de prueba que empleaban varillas lisas o dobladas (que reducen drásticamente la cantidad de refuerzo en los apoyos) normalmente fallaban en los anclajes a una carga relativamente baja. Se deben preferir los ganchos horizontales, sujetos a compresión transversal en los apoyos,

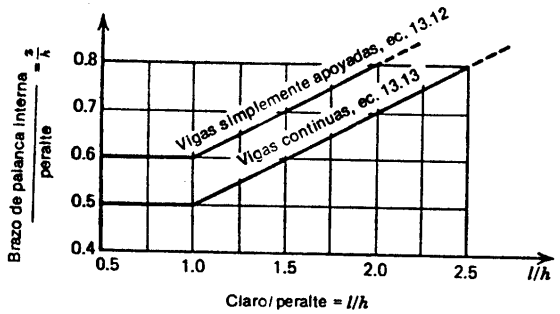


Figura 13.41. Brazo de palanca interna en vigas de gran peralte.

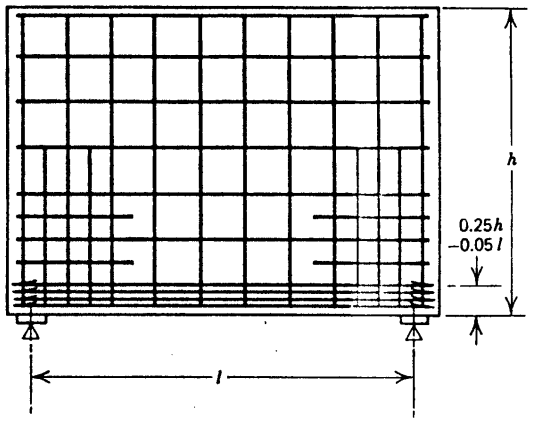


Figura 13.42. Refuerzo de una viga de gran peralte simplemente soportada.[13.22]

por sobre los verticales. En la fig. 13.43 se muestra una planta típica del refuerzo a flexión y del alma en el apoyo de una viga de gran peralte simplemente soportada.

13.7.3 Vigas continuas de gran peralte

La desviación del patrón lineal de los perfiles de esfuerzos a través de las secciones a mitad del claro y en los apoyos de una viga continua de gran peralte homogénea es todavía mayor que en el caso de vigas soportadas simplemente. El brazo de palanca interna de las resultantes de los esfuer-

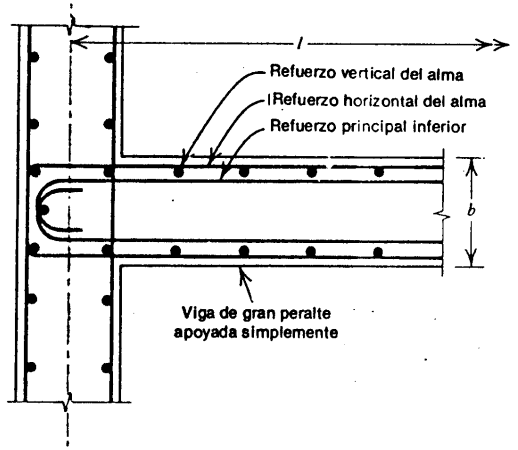


Figura 13.43. Vista de planta del refuerzo en el soporte de una viga de gran peralte simplemente soportada.[13.22]

zos disminuye rápidamente conforme la relación del claro a peralte de las vigas se aproxima a la unidad.[13.23] En especial, la fuerza de tensión sobre la región de apoyo (es decir, el momento negativo) puede estar más próxima al borde a compresión que al borde a tensión de las vigas. Esta característica de las vigas de gran peralte tendrá que tomarse en cuenta, aunque los brazos de palanca interna aumenten tanto en las zonas de momentos positivos y negativos después del agrietamiento, y especialmente cuando se ha iniciado la cedencia del acero a flexión.

Cuando se combinan con los esfuerzos verticales de compresión que se originan del apoyo en los soportes, los esfuerzos cortantes generan esfuerzos de compresión principales sumamente empinados, lo que sugiere que el cortante se transfiere principalmente por acción de arco.

Para simplificar los cálculos del acero a flexión, el *CEB* sugiere[13.22] que se calcule el brazo de palanca interna z tanto para momentos negativos como positivos, de las siguientes ecuaciones:

$$z = 0.2(l + 1.5h) \quad \text{cuando} \quad 1 \leqslant \frac{l}{h} \leqslant 2.5 \tag{13.13a}$$

o

$$z = 0.5l \quad \text{cuando} \quad \frac{l}{h} < 1 \tag{13.13b}$$

Nuevamente, por conveniencia, refiérase a la gráfica de la fig. 13.41.

Los momentos flexionantes se pueden calcular como para las vigas esbeltas, es decir, $wl^2/12$ y $wl^2/24$ para los momentos de soporte y mitad del claro respectivamente de los claros continuos. También, es probable que en una viga agrietada el brazo de palanca interna sea más pequeño sobre el soporte que a mitad del claro. La ec. 13.13 no lo muestra, aunque la discrepancia aparente se compensa debido a que los momentos actuales en los soportes son más pequeños que los que predice el análisis de costumbre. En forma correspondiente, el momento a mitad del claro para una viga agrietada es mayor que $wl^2/24$ lo que también se observó en las pruebas.[13.21]

Es necesario arreglar el refuerzo a mitad del claro (positivo) exactamente como para las vigas simplemente soportadas, anclando todas las varillas en los apoyos o pasando a través de ellos. La mitad del refuerzo negativo por sobre los soportes debe extenderse por sobre la longitud total de los claros adyacentes, en tanto que la otra mitad se puede terminar a una distancia de $0.4l$ ó $0.4h$, la que sea menor, del borde del soporte. El refuerzo del soporte (negativo) debe distribuirse uniformemente en dos bandas, como en la fig. 13.44.

1. En la banda superior, con un peralte de $0.2h$, el acero distribuido debe ser

$$A_{s1} = 0.5\left(\frac{l}{h} - 1\right)A_s \tag{13.14}$$

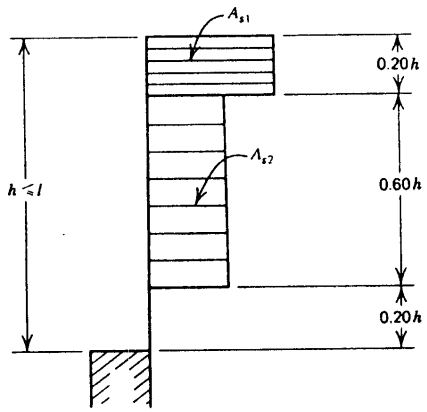


Figura 13.44. Distribución sugerida de refuerzo a flexión negativo en el apoyo de vigas de gran peralte continuas.[13.22]

2. El resto del acero, $A_{s2} = A_s - A_{s1}$, se debe colocar en la banda inferior con un peralte de $0.6h$.

El peralte a considerar no necesita ser mayor que el claro. En las vigas muros cuyo peralte es mayor que el claro, sólo se necesita colocar acero horizontal nominal en las partes superiores de la viga.

Las fuerzas de compresión debidas a la flexión rara vez son críticas en las vigas de gran peralte, aunque puede ser necesario examinar la posibilidad de pandeo lateral de la zona a compresión en vigas muros delgadas. Es más importante proteger la zona a compresión por sobre el apoyo, donde la compresión diagonal debida a la concentración de cortante puede ser crítica. La intensidad del esfuerzo cortante calculada como para las vigas normales no tiene significado físico; sin embargo, se puede esperar comportamiento satisfactorio si la fuerza máxima cortante se limita a

$$V_{\text{máx}} \leqslant 0.08\varphi b_w h f'_c \tag{13.15}$$

en que $h \leqslant l$ y $\varphi = 0.85$.

Varias recomendaciones del *CEB*[13.22] que se refieren a las vigas de gran peralte se originan de una consideración del control del ancho de grietas más que de la resistencia última.

En las vigas normales (esbeltas), la carga de agrietamiento diagonal fija el límite a la resistencia cortante utilizable en ausencia de refuerzo del alma. Cuando se introduce adecuadamente en una viga de gran peralte, se puede trasmitir una carga considerablemente mayor a la carga de agrietamiento diagonal, debido a la gran rigidez y resistencia del mecanismo de arco. Sin embargo, con el tiempo los anchos de las grietas se hacen ex-

cesivos y, por tanto, se deben limitar los esfuerzos cortantes nominales (ec. 13.15).

13.7.4 Refuerzo del alma en vigas de gran peralte

La carga de gravedad introducida a lo largo del borde superior de una viga muro se transmite principalmente por acción de arco. El acero a flexión falló en la viga de prueba mostrada en la fig. 13.45*a*, revelando que las grietas no atraviesan los estribos. La carga escoge naturalmente transmitirse a través del más rígido de dos sistemas posibles de resistencia, y en las vigas de gran peralte, el arco siempre es más rígido que el mecanismo de armadura. Por tanto, normalmente no se necesitan estribos. Basta un refuerzo mínimo de 0.2% en forma de varillas corrugadas de diámetro pequeño colocadas en ambas direcciones, como en los muros de concreto reforzado. En las vigas continuas, la mitad del refuerzo horizontal a flexión (negativo) puede ser parte de éste (véase la sección 13.7.3). Sin embargo, como lo indica la fig. 13.46*a* cerca de los soportes se deben introducir varillas adicionales del mismo tamaño al utilizado para el refuerzo del emparrillado.

El código del ACI de 1971[13.12] tiene provisiones por primera vez para evaluar la resistencia acortante de las vigas de gran peralte. Las recomendaciones están limitadas a vigas simplemente soportadas con una relación de claro libre (l_n) a peralte efectivo (d) menor que 5 si las vigas están cargadas en la cara superior y apoyadas en la cara inferior. El comité conjunto número 426 del ASCE-ACI describió el fondo del enfoque del diseño, semejante al utilizado para vigas normales, en 1973[13.24] Se postula que la capacidad a cortante de un miembro se obtiene por superposición de la capacidad del concreto y de la del refuerzo del alma. El reconocimiento de la capacidad a cortante de reserva de una viga de gran peralte sin refuerzo del alma condujo al desarrollo de la expresión semiempírica

$$v_c = \left(3.5 - 2.5\frac{M_u}{V_u d}\right)\left(1.9\sqrt{f'_c} + 2500\rho_w \frac{V_u d}{M_u}\right) \leq 6\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \quad (13.16)$$

El segundo término da el cortante de agrietamiento inclinado para vigas normales (véase la ec. 7.15), y el primer término representa el aumento en el cortante sobre el que provoca el agrietamiento. El valor del primer término no debe de exceder 2.5. Se pretende que la ecuación se aplique en las secciones críticas localizadas a la distancia $0.15l_n$ de la cara del soporte para vigas cargadas uniformemente, o un medio del claro a cortante, pero no más que el peralte efectivo d desde el soporte para vigas sujetas a cargas concentradas.

En el enfoque del ACI, la deducción de la contribución del refuerzo del alma a la resistencia a cortante se basa en el concepto de fricción a cortan-

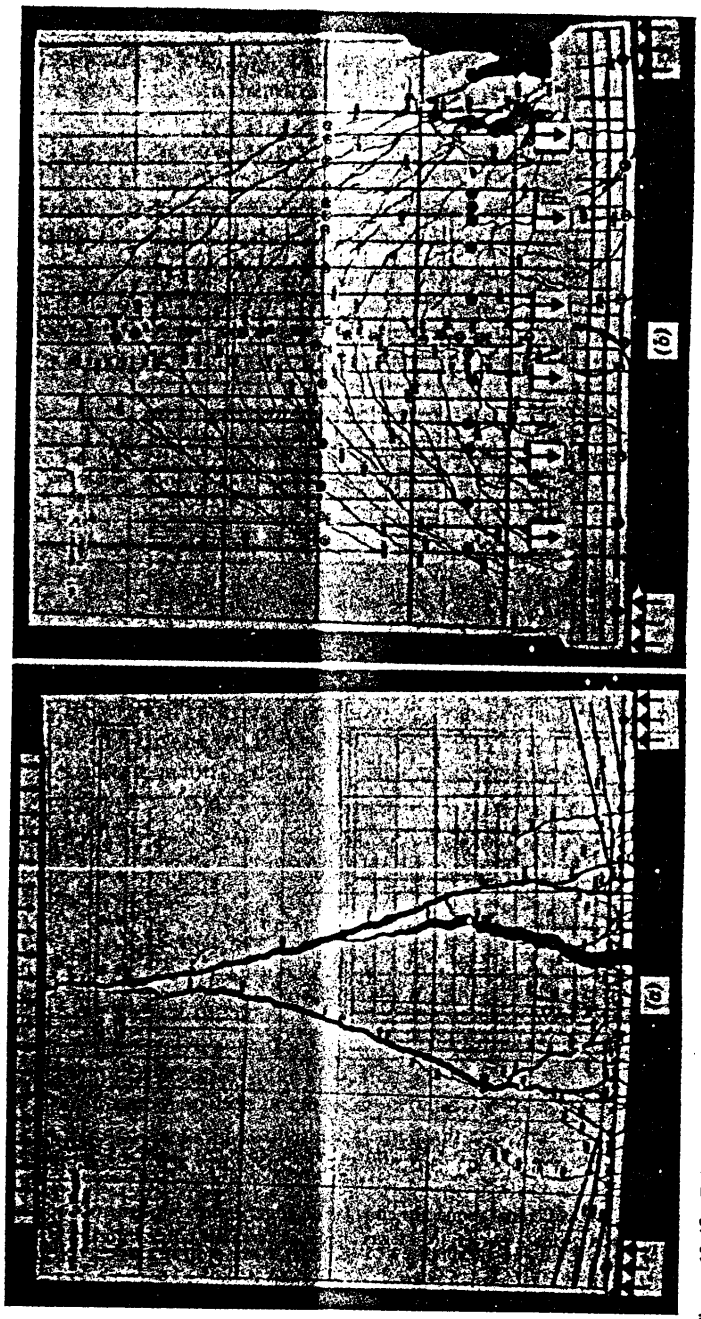


Figura 13.45. Falla de viga de gran peralte simplemente soportada.[13.21] Carga introducida en (*a*) borde superior, (*b*) borde inferior.

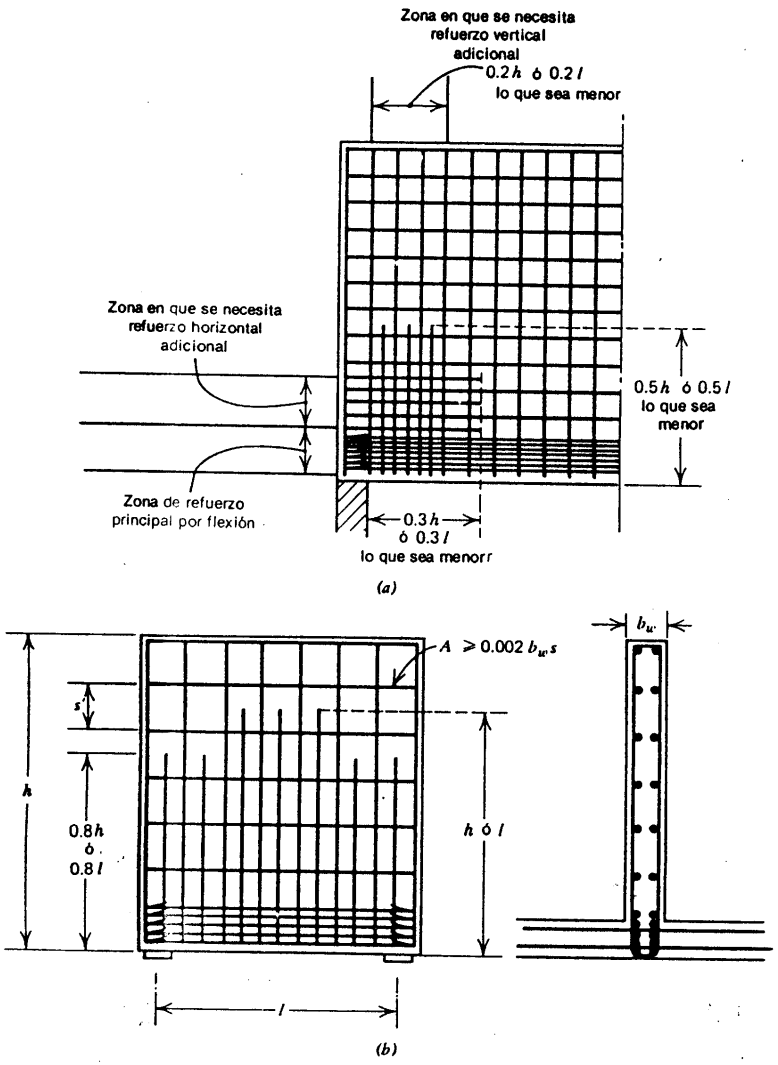


Figura 13.46. Refuerzo adicional requerido en vigas de gran peralte simplemente soportadas para (*a*) cortante cerca de los soportes, (*b*) cargas aplicadas cerca del borde inferior.[13.22]

te estudiado en la sección 7.8. Se supone que cuando se desarrolla una grieta diagonal muy empinada, tal como en la fig. 13.45*a*, ocurren desplazamientos a cortante. El aumento resultante en el ancho de la grieta activa completamente todo el refuerzo que cruza esa grieta. Entonces se puede suponer que la componente de la fuerza de cedencia, que actúa perpendicular a la grieta inclinada, suministra la fuerza de brida requerida para que opere el mecanismo de fricción a cortante. De esta manera el refuerzo horizontal del alma puede contribuir apreciablemente a la resistencia a cortante del alma, si el momento flexionante en la sección considerada es pequeño. De una deducción experimental de la relación entre la inclinación de la grieta diagonal y la relación de claro a peralte de l_n/d, y la aceptación de un coeficiente aparente de fricción de 1.0 a lo largo de la grieta de falla diagonal potencial, se demostró que[13.24]

$$v_s = v_u - v_c = \left[\frac{A_v}{12s}\left(1 + \frac{l_n}{d}\right) + \frac{A_{vh}}{12s_h}\left(11 - \frac{l_n}{d}\right)\right]\frac{f_y}{b_w} \qquad (13.17)$$

en que $v_u = V_u/b_w d$.

Así se puede determinar el refuerzo del alma. Se aplican las siguientes limitaciones:

1. El área del refuerzo a cortante A_v, perpendicular al refuerzo principal, no debe ser menor que $0.0015 b_w s$, en que b_w es el ancho del alma.
2. La separación de estos estribos s no debe exceder $d/5$.
3. El área del refuerzo a cortante A_{vh}, paralelo al refuerzo principal, no debe ser menor que $0.0025 b_w s$.
4. La separación s_h de esas varillas no debe exceder $d/3$ ó 18 plg (450 mm).
5. Cuando $l_n/d \leq 2$,

$$v_u \leq 8\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \qquad (13.18a)$$

6. Cuando $2 \leq l_n/d \leq 5$,

$$v_u \leq \frac{2}{3}\left(10 + \frac{l_n}{d}\right)\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2 \qquad (13.18b)$$

El valor equivalente del CEB,[13.22] dado por la ec. 13.15, es aproximadamente la mitad del que se obtiene de la ec. 13.18.

Cuando se suspende la carga de cerca del borde inferior de una viga de gran peralte, se debe transmitir principalmente por tensión vertical o inclinada hacia los soportes. Para permitir el desarrollo del arco a compresión, se debe transferir toda la carga suspendida por medio de refuerzo vertical a la zona a compresión de la viga, lo que debería lograrse sin exceder la resistencia a cedencia de los estribos (refuerzo de la suspensión), para proteger el refuerzo a flexión contra fisuración horizontal y asegurar el control satisfactorio de grietas en el alma durante la carga de servicio (es

decir, para $f_s < 30{,}000$ lb/plg^2 N/mm^2)]. *Una probeta de prueba reproducida en la fig. 13.45b* demuestra vividamente el comportamiento de una viga de ese tipo. La compresión diagonal en el soporte derecho del arco fue la causa de la falla de esta viga.

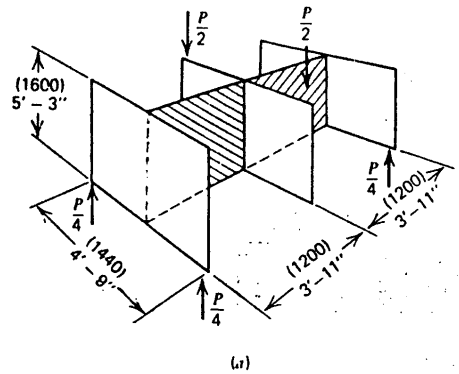
Los estribos de suspensión deben rodear completamente el refuerzo a flexión del fondo y extenderse a la zona a compresión de la viga muro, como en la fig. 13.46*b*. El espaciado de las barras verticales no debe exceder 6 plg (150 mm).

También se necesita una provisión especial cuando se introducen cargas o reacciones a lo largo de todo el peralte de una viga, por ejemplo, cuando vigas muros de gran peralte se soportan entre sí, como se ilustra en la fig. 13.47. Esta probeta[13.21] se utiliza en la discusión que sigue. La carga desde la viga transversal central se trasmite principalmente mediante compresión diagonal al fondo de la viga muro larga. De allí la carga debe llevarse a la parte superior de la viga muro principal, lo que permite que un arco lineal la envíe hacia el fondo de las vigas transversales de soporte. Por tanto, en la junta central se debe suministrar refuerzo de suspensión vertical para toda la fuerza P, el que debe rodear las varillas del fondo a flexión en la viga muro principal. Las varillas se deben extender verticalmente a una altura h ó l, la que sea menor; 4 pies 9 plg (1.44 m), en el caso de la estructura del ejemplo de la fig. 13.47. En forma análoga, en las vigas de soporte de los extremos se debe recibir la mitad de la carga por refuerzo de suspensión, de lo que se muestra en arreglo típico en la fig. 13.48*a*. Las pruebas han demostrado que las varillas diagonales dobladas a un radio grande en la junta de viga a viga también son efectivas, aunque su contribución a la carga no debe exceder el 60% de la carga total. En la fig. 13.48*b* se muestra un arreglo típico.

Las grietas diagonales formadas en la viga muro principal de la fig. 13.47*b* muestran claramente la inclinación de los puntales a compresión diagonal. Para permitir que estas fuerzas se descompongan en componentes verticales y horizontales, se requiere acero horizontal bien anclado en el soporte de los puntales. El CEB[13.22] recomienda que se suministre refuerzo de malla en el área de soporte, como en la fig. 13.46*a*, para resistir toda la fuerza de reacción vertical. Las varillas horizontales de esta malla que se deben extender en una distancia $0.3l$ ó $0.3h$ de la cara del soporte junto con aquéllas que corren a través del claro de la viga muro, deben poder resistir al menos 80% de la fuerza de reacción (máximo cortante). Las varillas verticales cortas de la malla se deben extender en $0.5l$ ó $0.5h$, lo que sea menor, por sobre el intradós o sofito de la viga.

13.7.5 Introducción de cargas concentradas

Es necesario examinar los esfuerzos de apoyo en las areas donde se introducen cargas concentradas, ya que las vigas de gran peralte pueden soportar fuerzas muy grandes con demanda relativamente pequeña de



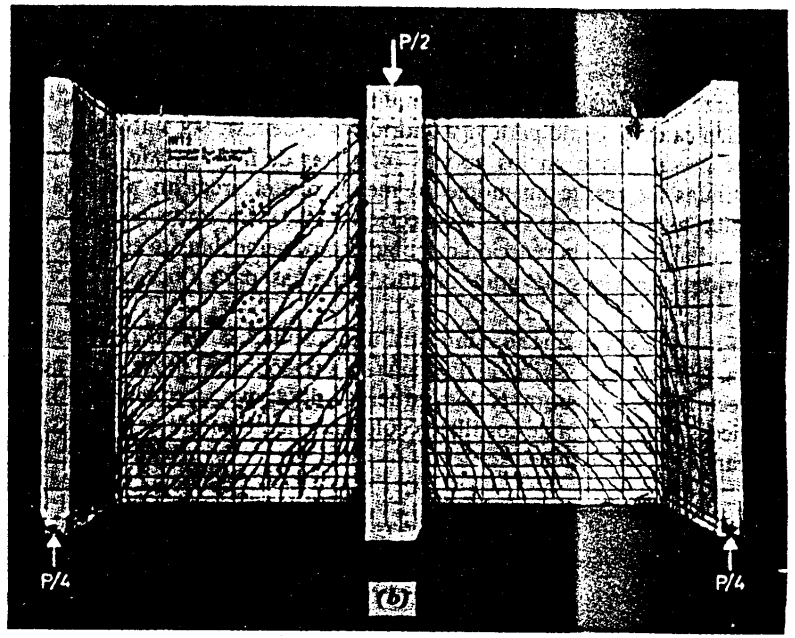


Figura 13.47. Viga de gran peralte soportada por vigas de gran peralte[13.21] (*a*) Dimensiones globales. (*b*) Patrón de grietas.

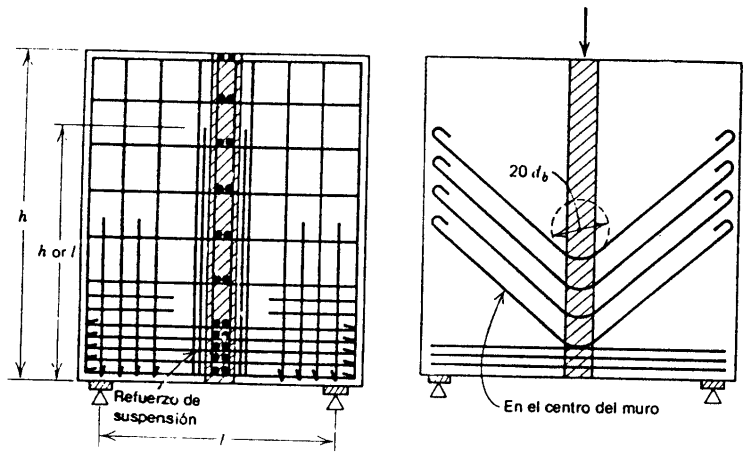


Figura 13.48. Refuerzo de suspensión que debe suministrarse en donde una viga de gran peralte soporta a otra viga igual[13.22] usando (*a*) distribución ortogonal o (*b*) varillas dobladas hacia arriba.

refuerzo. Los puntos de apoyo son dichos lugares. Las fuerzas reactivas se pueden calcular como para vigas normales (esbeltas). Sin embargo, se debe tener presente que en los apoyos interiores de las vigas de gran peralte continuas, se resiste un momento menor que el predicho por el análisis elástico acostumbrado (véase la sección 13.7.3). En consecuencia, se debe aumentar en 10% la reacción calculada convencionalmente en los soportes exteriores de vigas de gran peralte continuas para fines de diseño del apoyo.

En los casos en que se suministra una costilla o columna de atiesamiento a la viga, que agranda la viga en sus soportes sobre una porción apreciable de su altura h, los esfuerzos de apoyo normalmente no son críticos. En ausencia de costillas o columnas, la magnitud de la reacción en la carga última no debe exceder

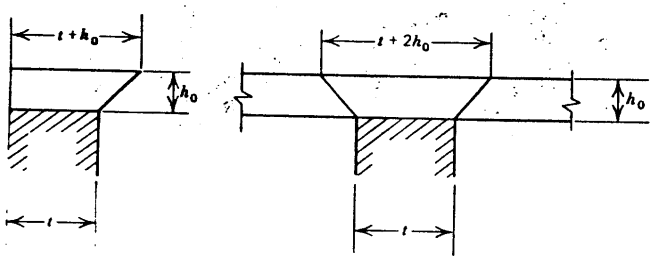


Figura 13.49. Distribución supuesta de esfuerzos de apoyo en los soportes de vigas de gran peralte[13.22]

$$0.60b(t + h_0)f'_c \qquad (13.19a)$$

en los apoyos exteriores y

$$0.90b(t + 2h_0)f'_c \qquad (13.19b)$$

en los soportes interiores,

en que b = ancho de la viga

h_0 = profundidad de una costilla o patín que puede atiesar la porción inferior de la viga

t = longitud del apoyo bajo consideración, que no debe exceder un quinto del más pequeño de los claros adyacentes

En la fig. 13.49 también están ilustradas estas dimensiones.

Debido, a su muy grande rigidez, las vigas de gran peralte son sumamente sensibles a las deformaciones impuestas. En consecuencia, se debe ejercer cuidado de asegurar que no ocurran desplazamientos de los soportes en las vigas de gran peralte continuas. De otra manera, se debe suministrar refuerzo adicional para dar cabida a cambios sustanciales en los momentos, debido al posible asentamiento de los soportes.

No es raro que se introduzcan elevadas cargas concentradas directamente por sobre los puntos de soporte de las vigas de gran peralte. Esta situación, que está ilustrada en la fig. 13.50, es semejante a la que se plan-

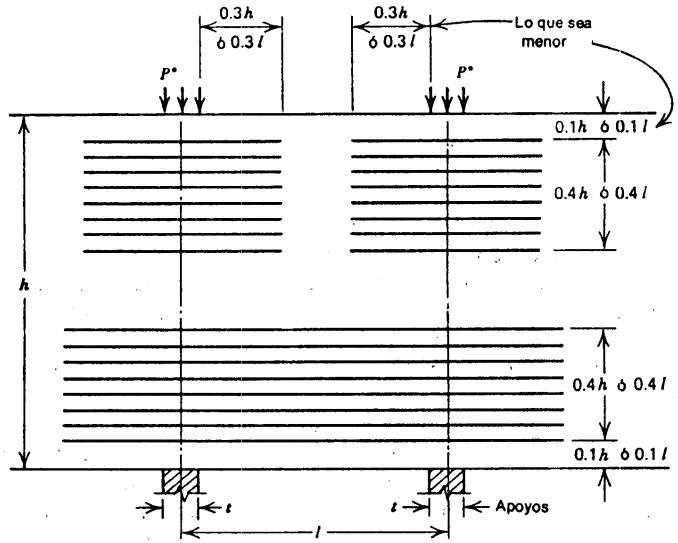


Figura 13.50. Distribución del refuerzo requerido para la transmisión de fuerzas concentradas a través de vigas continuas de gran peralte[13.22]

tea en el punto de anclaje de un cable de presforzado. Las fuerzas concentradas están dispersas en el alma de la viga, y a menos que se extienda una costilla vertical continua de atiesamiento entre el punto de carga y el soporte, se debe tener en cuenta esta dispersión. En consecuencia, el CEB-13.22 sugiere refuerzo suplementario horizontal en dos bandas, cada una capaz de resistir una fuerza de tensión igual a un cuarto de la carga aplicada.

En la evaluación de la capacidad a compresión diagonal o cortante del alma, de acuerdo con la ec. 13.15, el CEB recomienda que se dé margen a una fuerza cortante adicional de diseño de

$$\frac{P^*}{2}\left(\frac{l-2t}{l}\right) \quad \text{ó} \quad \frac{P^*}{2}\left(\frac{h-2t}{h}\right) \tag{13.20a}$$

en los soportes interiores

$$P^*\left(\frac{l-t}{l}\right) \quad \text{ó} \quad P^*\left(\frac{h-t}{h}\right) \tag{13.20b}$$

en los soportes exteriores, para compensar por los efectos de P^* introducida como se indica en la fig. 13.50. En cada caso, sólo se necesita considerar la menor de las dos expresiones.

13.8 JUNTAS DE VIGAS-COLUMNAS

13.8.1 Introducción

Es sorprendente que hasta hace poco se haya dado poca atención al diseño de juntas en estructuras de concreto reforzado. Parece que después de la evaluación de los esfuerzos de trabajo en los miembros adyacentes, normalmente la mayoría de los diseñadores suponían que las condiciones dentro de la junta, que con frecuencia tenía dimensiones algo mayores que los miembros unidos, no eran críticas. La adopción gradual del diseño por estados límites ha revelado la debilidad de esta suposición. Con frecuencia las juntas son los eslabones más débiles del sistema estructural, y apenas hasta fechas recientes se han empezado a realizar avances muy valiosos en esta área. Sin embargo, todavía requiere mejorarse mucho la comprensión que se tiene del comportamiento de las juntas y de la práctica actual de los detalles.

La siguiente sección trata de identificar los principales problemas en el comportamiento de las juntas, ilustrándolos cuando es posible con la cantidad limitada de evidencia experimental de que se disponía a la fecha de escritura de éste. Del considerable número de maneras posibles de unir miembros estructurales de concreto para satisfacer muchos tipos de cargas y combinaciones, sólo se pueden examinar unos cuantos dentro del alcance de este libro. Sin embargo, los ejemplos presentados deben ayudar en el

estudio de muchos otros casos. La clave del detallado exitoso es la identificación correcta del problema.

Se pueden resumir los requerimientos esenciales para el funcionamiento satisfactorio de una junta en una estructura de concreto reforzado como sigue:

1. Una junta debe exhibir un comportamiento bajo carga de servicio igual en calidad al de los miembros que une.
2. Una junta debe poseer una resistencia que corresponda al menos a las combinaciones más adversas de carga que podrían soportar los miembros adjuntos, varias veces de ser necesario.
3. Normalmente la resistencia de la junta no debe gobernar la de la estructura, y su comportamiento no debe impedir el desarrollo de toda la resistencia del miembro adjunto.
4. Otras características notables del diseño de la junta deben ser la facilidad de construcción y el acceso para depositar y compactar el concreto.

El tipo de carga afecta considerablemente la demanda estructural en las juntas; por tanto, puede ser apropiado utilizar procedimientos de diseño en que se reconozca la severidad de cada tipo de carga. En determinadas juntas, por ejemplo las de estructuras continuas de concreto reforzado sujetas sólo a carga de gravedad, el criterio de diseño es la resistencia bajo las cargas monotónicas sin inversión de esfuerzo. En otros casos no sólo la resistencia, sino la ductilidad de los miembros adjuntos bajo cargas alternas gobierna el diseño de las juntas: un marco rígido de niveles múltiples bajo cargas sísmicas representaría estas condiciones. Se puede esperar tener una cantidad apreciable de refuerzo de junta para el segundo caso, debido a que ocurrirá una degradación de resistencia del concreto bajo cargas alternadas repetidas.

13.8.2 Juntas de rodilla

En muchas estructuras es necesaria la continuidad entre dos miembros adyacentes, aunque los miembros se encuentren formando un ángulo. El ejemplo más común es la junta de esquina de un marco de portal. Las fuerzas internas generadas en ese tipo de junta de rodilla pueden provocar falla dentro de la junta antes de que se logre la resistencia de la viga o columna, la que sea más débil.

El tamaño relativo de los miembros y la magnitud de las acciones afectan no sólo el comportamiento sino también los límites prácticos del detallado. En una conexión de losa a muro es deseable omitir todo el refuerzo secundario. Por otra parte, en una junta apreciable de columna-viga, será necesario utilizar estribos adecuados, semejantes a los que se utilizan en los miembros adyacentes. En una junta que es larga en la dirección transversal (por ejemplo, entre una losa de puente y su muro de es-

tribo de soporte)*. Este tipo de restricción puede suprimir efectivamente las grietas de fisuración, que se pueden desarrollar en los anclajes dentro de la junta. Sin embargo, en un marco de portal, se dispone de poco confinamiento lateral cuando faltan miembros perpendiculares al marco en la región de la junta. No debe despreciarse el carácter tridimensional del mecanismo resistente en las juntas.

El sentido de la carga afecta fundamentalmente el comportamiento de la junta de esquina. Por este motivo se estudiará por separado esa rodilla para un momento que tiende a cerrar el ángulo recto y para otro que tiende a abrirlo.

Juntas de esquina bajo cargas que cierran

En la fig. 13.51 se muestra una junta típica de rodilla sujeta a un momento flexionante "de cierre" y las acciones correspondientes. Ya que las barras exteriores son continuas, tienen suficiente anclaje y suponiendo que no ocurre una falla de fisuración debido a elevada presión de apoyo dentro del doblez, normalmente se puede desarrollar toda la resistencia de esas barras. Debido al estado biaxial de esfuerzo en la esquina interior, se pueden soportar deformaciones a compresión considerablemente mayores que 0.003. Cuando para fines de resistencia no se confía en el acero a compresión, no parece importar cómo se anclen las varillas internas.[13.25]

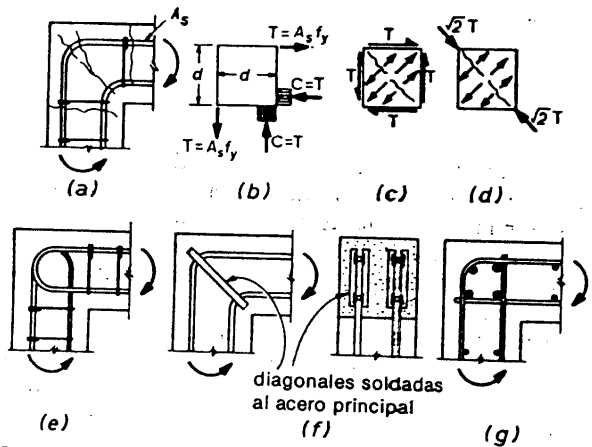


Figura 13.51. Acciones y detalles de juntas de rodilla sujetas a momentos que cierran. (*a*) Grietas típicas. (*b*) Fuerzas internas. (*c*) Grieta debida a cortante. (*d*) Grieta de fisuración. (*e*) Aros traslapados. (*f*) Atiesadores diagonales, (*g*) Varillas transversales de apoyo.

Las fuerzas generadas por la flexión y que actúan contra un cuerpo libre idealizado, que representa una junta de esquina cuadrada, se muestran en la fig. 13.51*b*. Se supone que estas fuerzas están introducidas al núcleo de la junta en forma de esfuerzos cortantes, uniformes resultados de adherencia de anclaje, como en la fig. 13.51*c*; entonces se puede esperar una grieta diagonal cuando el esfuerzo de tensión diagonal se aproxime a la resistencia a tensión f'_t del concreto

$$f'_t = \frac{T}{bd} = \frac{A_s f_y}{bd} = \rho f_y \approx 6\sqrt{f'_c}\ \text{lb/plg}^2$$

Esta condición limita el contenido del acero a flexión a

$$\rho \leqslant \frac{f'_t}{f_y} \qquad (13.21a)$$

La segunda alternativa de introducción de carga al núcleo de la junta (fig. 13.51*d*) corresponde mejor a las condiciones en la carga última. Aquí se combinan las fuerzas del acero y el concreto para producir una sola resultante de compresión diagonal, debido al deterioro de adherencia a lo largo de las varillas exteriores. Kemp y Mukherjee[13.26] han mostrado que al considerar la resistencia a tensión por rajadura del concreto f'_t, en este caso el contenido de acero límite es aproximadamente

$$\rho \leqslant 1.2\,\frac{f'_t}{f_y} \qquad (13.21b)$$

En efecto, en sus pruebas[13.26] se logró toda la capacidad a flexión de los miembros adjuntos en la cara de la junta, cuando el contenido del acero estuvo ligeramente por debajo de este límite. Para valores mayores de ρ, ocurrió una falla de fisuración frágil a menos que la resistencia total de los miembros adjuntos. En las pruebas realizadas en la Universidad de Nottingham,[13.25] se logró toda la capacidad del momento para una diversidad de distribuciones del acero, con $\rho = 0.75\%$. Por otra parte, las juntas que estudió Swann,[13.27] con $\rho = 3.0\%$, fallaron a una carga inferior al 80% de los valores últimos teóricos, deducidos de la capacidad a flexión de la sección adjunta.

Debido al tamaño pequeño de los miembros, en estas pruebas no se intentó controlar el desarrollo de la grieta diagonal crítica (véase la fig. 13.51*a*) por refuerzo y se observaron dos excepciones notables. Las varillas a flexión traslapadas que formaban aros, como en la fig. 13.51*e*, no se comportaron bien,[13.25] aunque se utilizó bajo contenido de acero. Sin embargo, cuando se resistió la compresión diagonal mediante refuerzo en forma semejante a la acción de una placa atiesadora diagonal en una junta de acero (véase la fig. 13.51*f*), se pudo desarrollar la capacidad a flexión de la sección adjunta, incluso con un elevado contenido de acero ($\rho = 3.0\%$)[13.27] En ambos casos se esperaría intuitivamente el comportamiento.

De lo anterior se puede concluir que para las juntas de rodilla de miembros pequeños, losas y muros en particular, se puede esperar resistencia adecuada sólo bajo las siguientes condiciones:

1. El acero a tensión es continuo alrededor de la esquina (es decir, que no está traslapado dentro de la junta).
2. Las varillas a tensión se doblan con un radio suficiente para impedir la falla por apoyo o fisuración bajo las varillas. Las varillas transversales colocadas bajo las varillas dobladas, como en la fig. 13.51*g*, son benéficas en este aspecto.
3. La cantidad de refuerzo a tensión está (conservadoramente) limitado a $\rho \leqslant 6\sqrt{f'_c}/f_y$, en que los esfuerzos están en unidades de libra por pulgada cuadrada.

Al utilizar mayores miembros estructurales con elevado contenido de refuerzo, se requiere refuerzo secundario para preservar la integridad del concreto dentro de la junta. La fig. 13.52 ilustra el propósito triple del acero con respecto a las siguientes cuestiones.

1. Las varillas perpendiculares a la grieta diagonal potencial deben impedir el crecimiento y ensanchamiento de las grietas, permitiendo con ello que se desarrolle la fuerza de compresión entre la esquina interior y el doblez del acero principal a tensión.
2. Los estribos rectangulares también deben rodear al acero a tensión dentro de la junta a impedir el ensanchamiento de las grietas de fisuración, si ocurren, en el plano de las varillas dobladas de tensión.
3. Se pueden utilizar las ramas transversales de los mismos estribos para suministrar confinamiento a la esquina interior, que está sujeta a compresión concentrada.

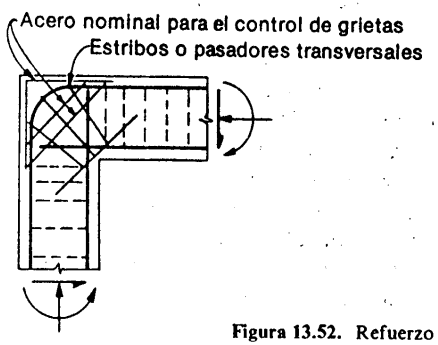


Figura 13.52. Refuerzo secundario en rodilla de marco de portal.

Juntas de esquinas bajo cargas que abren

La junta antes estudiada de esquina en ángulo recto está más seriamente afectada cuando los momentos aplicados tienden a abrir el ángulo. Las fuerzas resultantes están representadas en la fig. 13.53 para un detalle de junta comúnmente utilizado. Como lo indica la fig. 13.53*c*, las fuerzas de compresión cerca de la esquina exterior dan origen a una resultante que tiende a separar la porción triangular de la junta. Sólo una fuerza interna de tensión ($\sqrt{2}T$) podría resistir esta fuerza diagonal. Los patrones de grietas en las probetas de prueba, como las mostradas en la fig. 13.53*a*, verifican claramente este comportamiento.

Para juntas largas continuas, que ocurren en las estructuras ilustradas en la fig. 13.54, es probable que se requiera una cantidad relativamente pequeña de acero a flexión y para éstas rara vez se requiere refuerzo secundario.

En las pruebas realizadas en la Universidad de Nottingham,[13.25] se unieron miembros de aproximadamente 8 plg (203 mm) de peralte y se compararon ocho distintas distribuciones de detallado con un contenido de acero a flexión $\rho = 0.75\%$ ni una sola de las probetas logró más del 50% de la capacidad a flexión de los miembros unidos. En la mayoría de estas pruebas se utilizaron distribuciones semejantes a la mostrada en la fig. 13.51*a*. Como se esperara, las varillas interiores tienden a enderezarse. El detalle es un ejemplo de una solución totalmente insatisfactoria, que desafortunadamente se usa con frecuencia cuando las cargas abren una junta.

Los estribos diagonales en estos[13.25] pequeños miembros aumentaron la capacidad de la junta en un 10 a 20%. La contribución de los estribos cortos es muy sensible a la calidad del anclaje. Sólo cuando se doblan apretadamente alrededor del refuerzo principal es que pueden responder de inmediato a la carga, controlando con ello el crecimiento de las grietas.

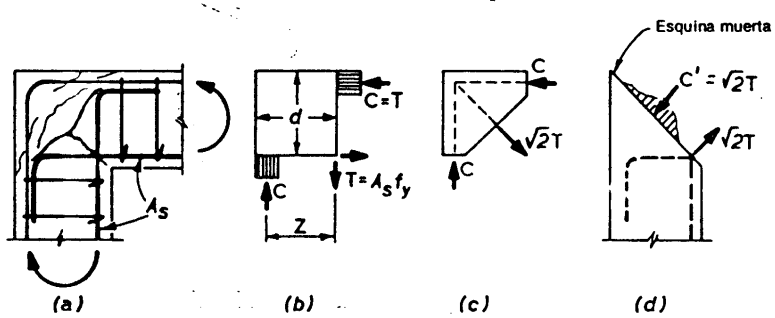


Figura 13.53. Acciones en juntas en ángulo recto que abren. (*a*) Grietas típicas. (*b*) Fuerzas internas. (*c*) Fuerzas que tienden a separar la esquina de la junta. (*d*) Fuerzas a lo largo de la diagonal de la junta.

Swann[13.27] comparó varias distribuciones de acero de junta en miembros de 6 plg (152 mm), de peralte, algunas de las cuales se utilizan comúnmente. También encontró que no se pudieron aproximar las capacidades de los miembros. Algunas de sus probetas, junto con las capacidades medidas de las juntas como un porcentaje de la resistencia computada del miembro, se muestran en la fig. 13.55. Los casos (a) y (b) son ejemplos de detallado extremadamente pobre. Se debe notar el comportamiento desilusionante del detalle (c) utilizado comúnmente. Las probetas (f) y (g) representan la mejor solución que se puede suministrar en pequeños miembros sin refuerzo secundario. Las probetas de Swann tenían un contenido de acero a flexión de 3% y se hubiera obtenido un mejor comportamiento si se hubiera utilizado un contenido más pequeño de refuerzo, lo que es evidente de la obra de Nilsson,[13.28] quien indicó que aun con un contenido de acero a flexión de apenas 0.5 a 0.8% y un anclaje semejante al de la fig. 13.55*f*, se logra apenas aproximadamente 80% de la capacidad a flexión. La investigación se motivó por las fallas observadas y agrietamiento excesivo en la unión de los muros aleros de estribos de puentes en Suecia (véase la fig. 13.54).

Es claro que no se puede evitar utilizar refuerzo secundario para resistir tensión diagonal en los miembros estructurales de marcos importantes. En ausencia de refuerzo secundario, será inminente la falla de la junta después del inicio prematuro del agrietamiento, como en las figs. 13.53*a* y 13.53*c*. Incluso en pequeñas juntas se observó notablemente mejoría[13.27, 13.29] cuando se utilizaron estribos apretados, semejantes a las diagonales de la fig. 13.51*f*.

En la fig. 13.56 se muestra una solución sugerida para una junta grande. Hasta que los estudios experimentales produzcan una técnica más

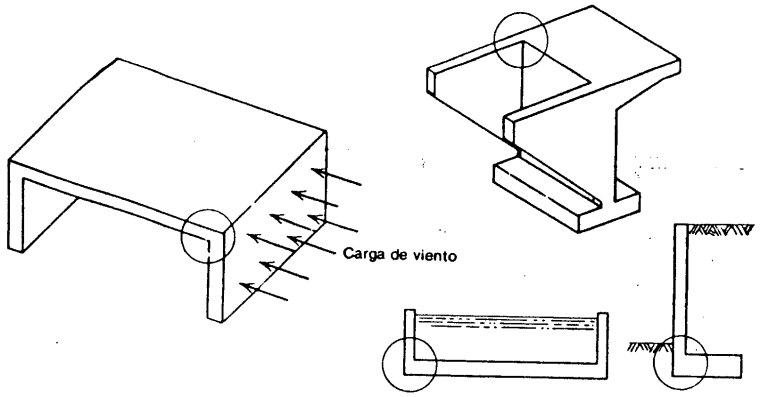


Figura 13.54. Ejemplos de esquinas continuas que pueden estar sujetas a cargas que las abren.

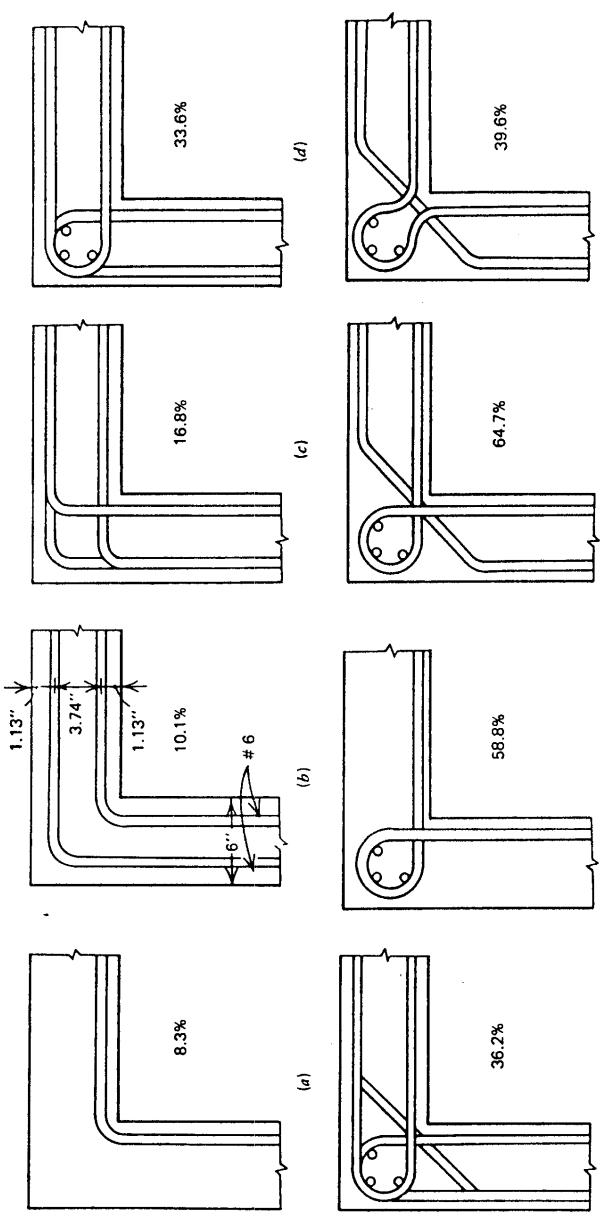


Figura 13.55. Juntas de esquinas que estudió Swann.[13.27] Los porcentajes indican $M_{\text{prueba}}/M_{\text{calculado}}$. (*a–h*) juntas insatisfactorias. (*c–e*) Detalles utilizados comúnmente. (*f–h*) arreglos usando aros.

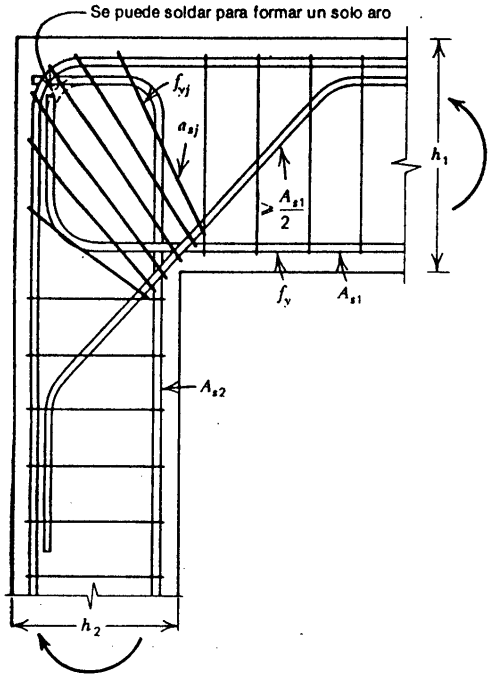


Figura 13.56. Detalles sugeridos para junta grande de rodilla que abre.

precisa de diseño, se sugiere que se suministren aros radiales para resistir toda la tensión diagonal a través de la esquina. Del modelo de la fig. 13.53*c* se puede estimar esta fuerza. De acuerdo con ésta, utilizando la notación de la fig. 13.56 el área de un aro radial es aproximadamente

$$a_{sj} = \left[\frac{f_y}{f_{yj}}\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}\right]\frac{A_{s1}}{n} \qquad (13.22a)$$

suponiendo que el acero del fondo de la viga A_{s1} limita la magnitud del momento que se puede aplicar a la junta, y que f_{yj} es la resistencia a cedencia de los aros radiales de los que se suministran n ramas.

El refuerzo principal diagonal a través de la esquina interior a tensión, igual o mayor que un medio[13.30] del acero necesario a flexión A_{s1}, impide una profunda penetración de la cedencia en el área de la junta a lo largo del acero a flexión y también suministra anclaje adecuado para los aros radiales (véase la fig. 13.56).

Cuando las varillas a tensión se forman en un aro continuo por soldadura o doblándolas, como lo indican las líneas punteadas de la fig. 13.56, se puede reducir la cantidad de aros radiales. La investigación de Nilsson[13.31] sugiere que el aro continuo del acero principal a flexión con

ciertas varillas grandes diagonales a través de la esquina interior, como en la fig. 13.56, suministra suficiente resistencia contra la falla a tensión diagonal, cuando el contenido de acero a flexión no es excesivo. De esa manera se propone que se suministren aros radiales, cuando el contenido de acero a flexión excede de 0.5%.

De acuerdo con ello, el área de un aro radial es

$$a_{sj}^* = \left(\frac{\rho - 0.005}{\rho}\right)\left\{\left[\frac{f_y}{f_{yj}}\sqrt{1 + \left(\frac{h_1}{h_2}\right)^2}\right]\frac{A_{s1}}{n}\right\} \qquad (13.22b)$$

en que $\rho = A_{s1}/bd_1$ en el miembro crítico y el segundo factor del lado derecho es la ec. 13.22*a*.

Una extensión de la esquina rentrante, que acomode un número considerable de varillas a flexión diagonal alejará la articulación plástica de la cara de la junta. Es probable que este corrimiento mejore el anclaje precario del refuerzo principal a tensión, donde éste entra a la junta. El mayor brazo de palanca interna dentro de la junta reduce la fuerza interna, por lo que la junta puede constituirse en un eslabón no crítico en el sistema estructural. Connor y Kaár demostraron este comportamiento en juntas con extensión en las esquinas de marcos precolados de concreto.[13.32]

Cuando participa un gran número de varillas en el tipo de juntas sugerido en la fig. 13.56, se pueden plantear problemas de construcción debido a la congestión en la esquina rentrante. En este caso puede ser más práctica una distribución de refuerzo ortogonal, como se estudia en la siguiente sección.

Cargas repetidas alternas en juntas de rodilla

El anterior estudio de las juntas de rodilla apuntó a la naturaleza de los esfuerzos en el concreto dentro de una junta. Con cargas alternas de alta intensidad, el concreto se puede agrietar en dos direcciones principales y es necesario anclar las varillas a flexión en esta región. Por lo general se deben doblar las varillas en el interior de la junta a 90° para lograr las longitudes requeridas de desarrollo. La cedencia repetida de las varillas a flexión en las caras internas de una junta de rodilla y en sus proximidades destruye progresivamente la adherencia en la porción recta de estas varillas, lo que encontraron Bertero y McClure,[13.33] quienes sujetaron marcos de portal de un solo claro a escala pequeña a cargas alternas laterales. Después de 10 ciclos de cargas se observaron muy grandes pérdidas de anclaje en la región de la junta a 78% de la capacidad última teórica. Sólo mediante anclajes mecánicos se pudieron sostener las resistencias de sus juntas. Otras pruebas a escala pequeña han mostrado que las juntas pobremente detalladas (véase por ejemplo la fig. 13.55*b*) ni siquiera permiten que se alcance la capacidad última en el primer ciclo de carga.[13.34]

Las juntas de rodilla sujetas a cargas alternas requieren considerable cuidado en el detallado. Ya que la junta recibe cargas que tienden a cerrar o abrir alternativamente el ángulo, se requieren ambos sistemas de refuerzo diagonal (figs. 13.52 y 13.56). En este caso sería más adecuado un emparrillado ortogonal de refuerzo. En ausencia de información experimental se sugiere que se suministren aros de juntas para resistir por separado las componentes horizontal y vertical de la fuerza principal a tensión diagonal que actúa a través de la grieta potencial de falla y tiende a separar el área de junta en dos triángulos. Usando los modelos dados para una junta de rodilla que se abre en la fig. 13.57*a* y para una junta que se cierra en la fig. 13.57*b* se puede obtener el acero secundario de la junta. Debido a que el concreto está totalmente agrietado en ambas direcciones, después de cargas cíclicas de alta intensidad y debido a que es muy dudoso el beneficio que se obtenga de cualquier compresión axial en los miembros de las juntas que se cierran, no se debe confiar en el concreto para resistir las fuerzas internas cortantes o de tensión. En la fig. 13.57*c* se ilustra una solución semejante que sugirió Hanson.

Sería optimista esperar que todos los estribos, especialmente los comprendidos en la zona a compresión de la junta, funcionen con igual eficiencia. Por eso sería prudente confiar sólo en los estribos que están ubicados a dos tercios del peralte y más próximos a las fuerzas que se deben resistir en tensión. Con esta modificación, de la fig. 13.57 se sigue que el área de un estribo es

$$a_{s1} = 1.5\frac{s_1}{d_1}A_{s1} \qquad (13.23a)$$

$$a_{s2} = 1.5\frac{s_2 d_1}{d_2^2}A_{s1} \qquad (13.23b)$$

suponiendo que $A_{s1} \leq (d_2/d_1)A_{s2}$ y que la resistencia a cedencia de todo el refuerzo es la misma, en que A_{s1} y A_{s2} son las áreas de acero requeridas para desarrollar las tensiones por flexión T_1 y T_2 en la fig. 13.57.

13.8.3 Juntas exteriores de marcos planos de plantas múltiples

Aspectos críticos del comportamiento de las juntas

En determinadas juntas exteriores de vigas-columnas de marcos planos de plantas múltiples se puede plantear una condición especialmente crítica cuando se las sujeta a cargas sísmicas. La acción externa y las fuerzas correspondientes internas generadas alrededor de ese tipo de junta están indicadas en la fig. 13.58*a*. La siguiente notación se refiere a las resultantes de esfuerzos:

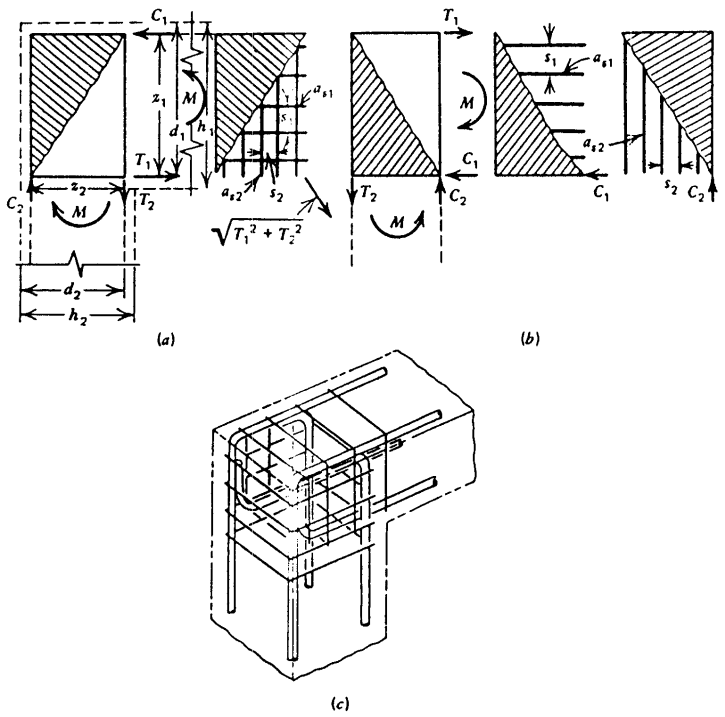


Figura 13.57. Refuerzo ortogonal en juntas de rodilla sujetas a cargas alternas. (*a*) Acciones en junta que se abre. (*b*) Acciones en junta que se cierra. (*c*) Estribos ortogonales.

C_c = compresión en el concreto
C_s = compresión en el refuerzo
T = fuerza de tensión en el refuerzo
V = suma de los esfuerzos cortantes

De la posición de las resultantes de esfuerzos es evidente que se inducen esfuerzos de tensión diagonal y compresión (f_c y f_t) en la zona de tablero de la junta. La tensión diagonal puede ser elevada cuando se desarrolla la capacidad última de los miembros adyacentes, lo que puede llevar a extenso agrietamiento diagonal. El contenido de acero a flexión y la magnitud de la carga de compresión axial en la columna pueden influir en la severidad de la tensión diagonal.

Hay dos preguntas relativas al comportamiento de la junta que merecen un estudio cuidadoso. Primero, ¿cómo afecta el estado del concreto circundante al comportamiento de adherencia de las varillas? Si ocurre deterioro de la adherencia, ¿cómo se puede desarrollar anclaje total dentro

de la junta para permitir que los miembros adyacentes mantengan sus capacidades a flexión durante varias inversiones de momento, de ser necesario?

En segundo lugar, si el concreto en el núcleo de la junta sufre agrietamiento transversal como en la fig. 13.59, y que por tanto pierde la resistencia a tensión, ¿cómo puede transferir las fuerzas requeridas de compresión y cortante?

De la fig. 13.58*b* se pueden examinar las condiciones de adherencia para distintos lugares de las varillas dentro de una junta. Del patrón de cargas de la fig. 13.58*a*, suponiendo que la compresión axial en la columna sea pequeña, se pueden hacer las siguientes observaciones.

1. Las condiciones de anclaje para las varillas superiores de la viga son sumamente desfavorables cuando entran a la junta. El concreto que las rodea está sujeto a sedimentación, y está expuesto a tensión transversal. Por lo general se forma una grieta de fisuración a lo largo de estas varillas en una etapa relativamente temprana de la carga. La carga repetida agrava el caso, y puede ocurrir una pérdida completa de adherencia hasta el inicio de la porción doblada de la varilla. En consecuencia, se pueden generar elevados esfuerzos de apoyo en el doblez que sólo se pueden tomar si el concreto circundante está en buenas condiciones. La porción vertical recta que sigue al doblez debe ser suficientemente larga para que se desarrolle la resistencia total de la varilla superior.

Se puede notar que doblar el acero superior hacia la junta induce fuerzas de aro en el concreto a lo largo de la dirección "correcta." (Las flechas pequeñas de la fig. 13.58*b* indican las fuerzas trasmitidas de las varillas al concreto por apoyo o adherencia.) Es muy probable que sea mucho menos efectiva una varilla superior doblada hacia arriba, lo que puede ser una proposición tentadora desde el punto de vista de construcción.

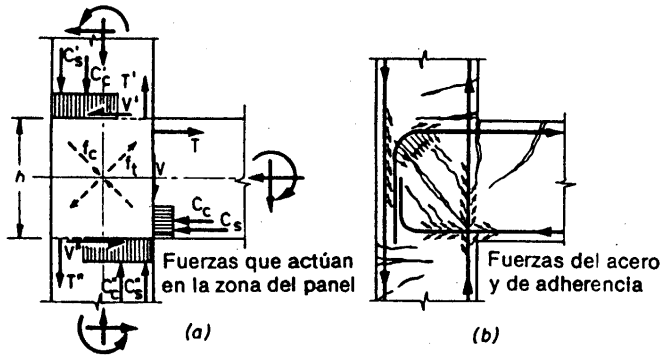


Figura 13.58. Acciones en junta de viga - columna exterior de un marco de niveles múltiples. (*a*) Resultantes de esfuerzo. (*b*) Patrón de grietas y fuerzas de adherencia.

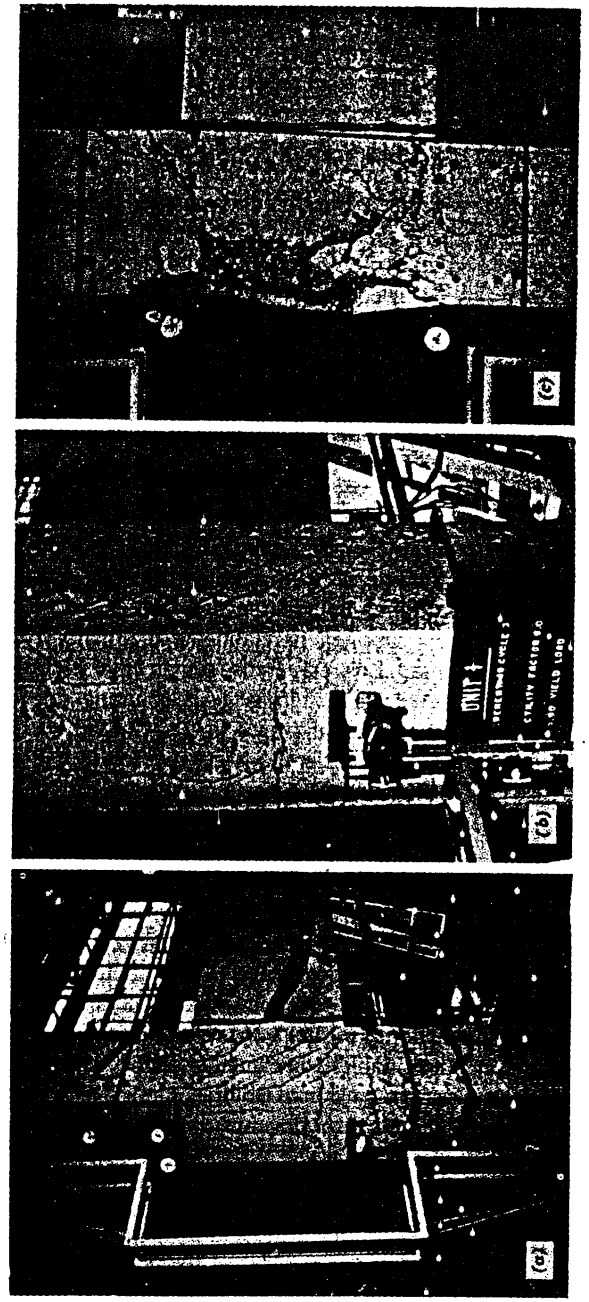


Figura 13.59. Junta de viga-columna exterior[13.36] (*a*) Agrietamiento diagonal a través de núcleo de la junta y grietas de fisuración a lo largo de las varillas exteriores de la columna (*b*) Agrietamiento extenso después de la carga cíclica, que afecta el anclaje de las varillas de las columnas. (*c*) Separación del recubrimiento de concreto.

2. Las varillas del fondo de la viga, en compresión, entran a la junta en una región de condiciones ideales de adherencia, ya que el concreto que las rodea también está en compresión transversalmente a las varillas. Sin embargo, debido a las cargas inversas y subsecuente cedencia posible a tensión de estas varillas, puede ocurrir también un severo deterioro de adherencia, como se describió en el artículo 1. La porción recta de las varillas más allá del doblez queda mayormente inefectivo para las cargas de compresión. En consecuencia, después de unos cuantos ciclos de cargas sísmicas inversas pueden ocurrir severas pérdidas de anclaje, especialmente cuando la viga se conecta en una columna poco peraltada.

3. Las varillas externas de la columna están sujetas quizás a las condiciones más severas de adherencia. A lo largo del peralte h de la viga es necesario transferir al concreto de la junta una fuerza total de adherencia de

$$C_s' + T'' \leqslant 2A_s f_y$$

en que A_s = área de las varillas externas de la columna, si se requiere soportar las fuerzas internas en las secciones críticas a través de la columna (fig. 13.58*a*). Para que se respeten las recomendaciones de los códigos, la longitud h disponible de anclaje es mayormente inadecuada. Más aun, se requiere transferir toda la fuerza de adherencia a la zona de tablero de la junta, y no, como se podría suponer, parcialmente al zuncho y parcialmente al núcleo de la junta. Los esfuerzos sumamente elevados de adherencia a lo largo de las varillas externas de la columna pueden ser motivo de grietas de fisuración vertical (véase la fig. 13.59*a*), las cuales podrían interconectarse y a su debido tiempo hacer que se desprendiera el recubrimiento (véase la fig. 13.59*c*). Desafortunadamente los planos de falla a lo largo de las grietas alrededor de estas varillas coinciden durante las cargas alternas.

La fig. 13.58*b* sugiere que las fuerzas cortantes y de compresión resultantes del patrón específico de cargas se transmiten primordialmente por un puntal diagonal a través de la junta. Como lo revela la fig. 13.59*a*, en realidad hay varios puntales separados entre sí por grietas diagonales. Sería demasiado optimista suponer que en estos puntales se pudiera alcanzar la resistencia total a compresión f_c'. No sólo están sujetos los puntales a excentricidades indeterminables, sino que también están expuestos a deformaciones transversales por tensión. Debido a este estado biaxial de esfuerzo, se produce una apreciable reducción de la resistencia a compresión.

Las cargas cíclicas en el concreto agrietado transversalmente producen una apertura y cierre repetido de las grietas. Debido al dominio de la acción cortante a través de la junta también ocurren movimientos paralelos a las grietas abiertas. Cuando las grietas se hacen grandes, debido a que ha cedido el refuerzo transversal, se inicia el proceso de trituración y fisuración progresiva debida a apoyo disparejo del concreto. Puede resultar una total desintegración del concreto dentro de la junta. Esto está asociado con un aumento drástico volumétrico del núcleo, a menos que se suministren elementos confinantes.

Comportamiento observado de las juntas exteriores

Hanson y Connor[13.37] emprendieron un estudio de juntas aisladas exteriores de vigas-columnas. Demostraron que una junta sin refuerzo transversal no podía soportar gran carga después del tercer ciclo moderado de cargas alternas. El concreto revienta y las varillas de la columna se pandean. En las juntas que contenían refuerzo de aro igual al requerido para el confinamiento en la columna arriba y abajo, los esfuerzos en el acero de los aros aumentaron durante las cargas cíclicas alternas hasta que ocurrió la cedencia. Esto mostró claramente el papel importante del refuerzo transversal de la junta para cargas de tipo sísmico. Bajo las condiciones más severas de carga, se impuso un factor de ductilidad rotacional de ± 5 en la articulación plástica de la viga, lo que es mucho menos de lo que podría esperarse en el mismo lugar durante un choque sísmico que impondría desplazamientos laterales en la construcción correspondientes a un factor de ductilidad de desplazamiento de 4. Para probar la adecuabilidad de la junta para soportar la carga impuesta de columna, después de carga cíclica de alta intensidad, se aplicó una compresión relativamente grande a las columnas de estas probetas de la PCA. Sin embargo, sólo aproximadamente un tercio de la capacidad a flexión de las columnas se utilizó cuando la viga de las probetas alcanzó la cedencia; en consecuencia se generaron pequeñas fuerzas de adherencia en las varillas de la columna. Por tanto, las observaciones hechas podrían ser optimistas al aplicarse a otros casos en que la demanda de ductilidad rotacional es mayor, las columnas son menos fuertes y la compresión benéfica a través de la junta está ausente.

La recomendación actual del código del ACI[13.12] con respecto a las juntas se basa en estas pruebas de la PCA.[13.37] Se apoya en las discutibles premisas de que el comportamiento de la junta está gobernado por cortante y que son aplicables los parámetros aceptados de la resistencia a cortante en las vigas. La acciones en la junta no deben reducir la capacidad a compresión de la columna, por lo que el refuerzo transversal dentro de la junta no debe ser menor que el requerido para la columna que soporta.

De acuerdo con ello se deduce el refuerzo requerido a cortante en la columna, considerando primero el cortante horizontal a través de la junta de la fig. 13.58*a*.

$$V_j = T - V' = A_s f_y - V' \qquad (13.24)$$

Se supone que mecanismos distintos al refuerzo del alma V_c y el refuerzo del alma V_s resisten este cortante. En el capítulo 7 se estudiaron ambas

componentes resistentes al cortante. En base a la analogía de la armadura a 45° se tiene

$$A_v = \frac{sV_s}{f_y d} = v_s \frac{sb_w}{f_y} \qquad (7.23a)$$

Las ecs. 7.34*b* y 7.35 evalúan la contribución del concreto (es decir, otros mecanismos V_c) con margen para el efecto benéfico de la compresión axial. El código no restringe explícitamente el límite superior del esfuerzo calculado nominal cortante dentro de la junta. Con frecuencia este esfuerzo cortante nominal $v_j = V_j/bd$, excede con mucho $10\sqrt{f'_c}$ a $11.5\sqrt{f'_c}$ (lb/plg²), que es el máximo valor recomendado para las vigas.

La versión de 1971 del código de la SEAOC[13.38] recomienda que cuando el esfuerzo de compresión axial calculado en la sección bruta de concreto es menor que $0.12f'_c$, se desprecie su efecto benéfico en la resistencia a cortante en la junta; es decir que todo el cortante V_j de la junta se asigne a los estribos ($V_s = V_j$).

De acuerdo con el código,[13.12] cuando hay vigas de aproximadamente igual peralte y ancho no menor a un medio del ancho de la columna que se conectan desde cuatro direcciones en la columna, el refuerzo transversal sólo necesita ser un medio del requerido por la ec. 7.23*a*, provisión que permite una considerable reducción en el acero transversal debida al mayor confinamiento supuesto del concreto dentro de la junta por efecto de las vigas circundantes.

Las pruebas en desarrollo en la Universidad de Canterbury[13.36, 13.39, 13.40–13.42] dan resultados menos favorables que las pruebas de la PCA.[13.37] Las probetas de Canterbury se sujetaron a poca o ninguna carga de columna, y los factores de ductilidad rotacional impuestos se aumentaron progresivamente desde 5 hasta 10 y 15 ó más, para ser más consistentes con los requerimientos típicos cuando se desea alcanzar un factor de ductilidad de desplazamiento de 4. En seguida se registra una diversidad de observaciones útiles al detallado, deducidas de las pruebas en Canterbury.

1. La falla del 13 probetas de juntas de vigas-columnas exteriores ocurrió en la junta más que en uno de los miembros adjuntos. Incluso en los conjuntos reforzados más severamente, no se pudo sostener la capacidad a flexión del miembro crítico después de una pocas excursiones sustanciales al rango inelástico debido al deterioro de la junta.

2. El refuerzo de la junta suministrado de acuerdo con las recomendaciones actuales del código del ACI, incluyendo un margen para la contribución de los mecanismos distintos al de los estribos (V_c), resultó ser inadecuado.[13.39] En ausencia de apreciable compresión axial en las columnas, parece que no se puede confiar en el concreto totalmente agrietado transversalmente (véase la fig. 13.59) para resistir las fuerzas cortantes.

3. En todas las probetas en que se suministró refuerzo a cortante completo o en exceso, de acuerdo con la analogía de la armadura a 45°, para resistir todo el cortante máximo teórico de la junta, también siguió falla de la junta[13.40] lo que sugiere que el modelo tradicional de armadura, que ha resultado tan útil para vigas y columnas, quizás no sea aplicable a este caso. En efecto, se encontró que un refuerzo a cortante transversal colocado en la junta a nivel con la zona a compresión de la viga no cede.[13.36]

La analogía convencional de la armadura está asociada con grietas a 45° que se observan más comúnmente en el claro a cortante de las vigas. Sólo en una junta de forma cuadrada se desarrolla la grieta crítica diagonal a lo largo de este ángulo. En otros casos una grieta de falla tiende a bisectar la junta a lo largo de una de sus diagonales (véase la fig. 13.62).

4. Cuando el refuerzo a cortante transversal a través de grietas diagonales de juntas comienza a ceder, se inicia la desintegración del concreto, por la repetida apertura y cierre de las grietas a lo largo de las cuales también ocurren desplazamientos a cortante. Bajo tales condiciones (véase la fig. 13.59*b*) no se puede mantener el anclaje de las varillas de vigas o columnas.

5. La forma de aro continuo del anclaje de varillas de vigas, mostrada en la fig. 13.60 para las probetas *R1*, *R2* y *R3* resultó ser considerablemente inferior en comparación con anclajes por separado de los refuerzos superior e inferior. Sin embargo, esto puede no ser el caso si la columna tiene peralte considerable.

6. En las pequeñas columnas utilizadas en las pruebas de Canterbury, no siempre fueron adecuadas las longitudes de anclaje calculadas desde la cara interior de las columnas. Las grietas de fisuración a lo largo de y grietas diagonales por sobre la porción horizontal recta de las varillas de la viga sugieren que sería prudente ignorar o reducir esta longitud al determinar la longitud de desarrollo (vease la fig. 13.59*c*).

7. Es imperativo el confinamiento de la región de la junta. Los estribos utilizados para el refuerzo a cortante no son efectivos para el confinamiento, excepto en las cuatro esquinas de la columna, donde se doblan alrededor de las varillas de columnas. Todas las pruebas mostraron considerable arqueo de los estribos en los tres lados libres de la junta, lo que permitió un aumento volumétrico del concreto en el núcleo de la junta, y por tanto la pérdida de capacidad a compresión diagonal. Los intentos por introducir acero adicional de confinamiento dieron resultados promisorios (vénse las figs. 13.60 y 13.63).

Anteriormente se señaló que para las varillas de columnas exteriores existen las condiciones más precarias de adherencia en una junta. En su proximidad inmediata están localizadas las varillas de viga dobladas a 90°, las que necesitan intercambiar fuerzas de adherencia con las varillas de la columna. Como resultado de ello se sujeta al concreto circundante a elevadas fuerzas cortantes que pueden tener que transferirse a través de grietas mediante traba de agregado (mecanismo de fricción a cortante) (véanse las figs. 13.59 y 13.61). Refuerzo adecuado que cruzara estas

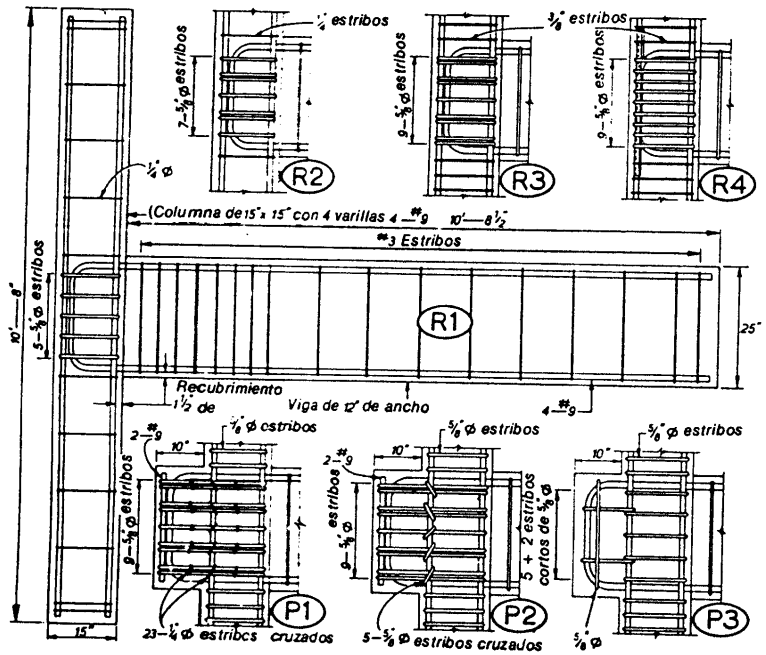


Figura 13.60. Probetas de juntas de viga de gran peralte - columna poco peraltada probadas en la Universidad de Canterbury[13.42]

grietas y colocado entre los estribos del perímetro podría asegurar que las grietas se mantuvieran pequeñas, permitiendo con ello la transferencia de fuerzas cortantes.

8. La geometría de la junta puede tener un efecto profundo en su comportamiento. La fig. 13.59 muestra una probeta de una serie[13.36] en que se hizo evidente la desventaja de conectar una viga muy peraltada a una columna con poco ancho, lo que se encuentra con relativa frecuencia en construcciones de dos a cuatro niveles. Los intentos sucesivos por aumentar la capacidad de la junta suministrando más refuerzo a cortante, como lo documentan las pruebas de la serie *R* de las figs. 13.60 y 13.63 no dieron comportamiento satisfactorio.

La fig. 13.63 muestra la carga soportada en términos de la resistencia computada de las probetas, como función del factor de ductilidad de desplazamiento cumulativo impuesto, medido por la deflexión de la punta de las vigas. De ninguna manera constituye esto una medida única de la capacidad de deformación de la estructura con respecto a cargas repetidas que llegan al rango plástico. Una sola carga que imponga una deformación plástica muy grande tiene efectos más perjudiciales al comportamiento posterior bajo cargas alternas que una diversidad de cargas que corresponden a factores de ductilidad cumulativas iguales a las asociadas con la carga sola. Las siete probetas mostradas en las figs. 13.60 y 13.63 se han sujetado a aproximadamente el mismo patrón de cargas cíclicas alternas; en consecuencia se eligió la ductilidad cumulativa como la manera de comparar su comportamiento. Las cuatro curvas inferiores (*R*1 a *R*4) representan probetas idénticas a las de la fig. 13.59, excepto por el contenido de estribos de juntas y la forma del anclaje del refuerzo de la viga. En forma demostrable, ninguna probeta logró la capacidad teórica a flexión; también se debe notar la degradación de resistencia. En la fig. 13.61 se muestra el comportamiento de un área de junta fuertemente reforzada (probeta *R*3) durante las cargas cíclicas. Se hizo evidente que un refuerzo a cortante adicional no tendría un propósito útil y que sólo un cambio radical en la geometría de la junta podría ofrecer mejora.

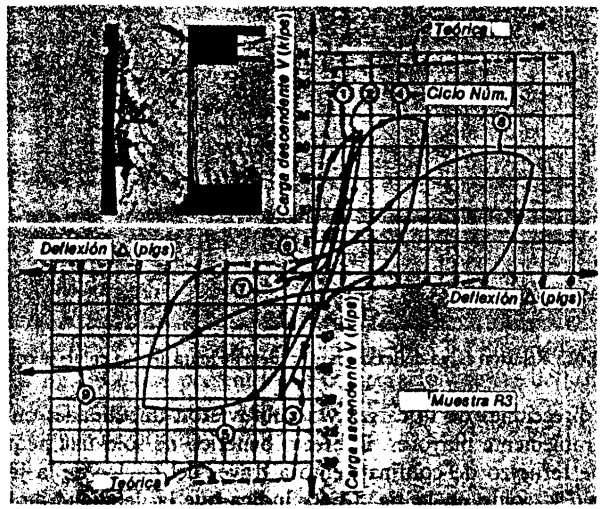


Figura 13.61. Relación carga - deflexión para una probeta de junta de viga-columna[13.36]

La distribución de la fig. 13.60 muestra cómo con la adición de una extensión en las pruebas de la serie *P*, se ha reubicado el anclaje efectivo del refuerzo a flexión desde el núcleo afectado a cortante de la junta hasta una zona relativamente no afectada.[13.41] En efecto, el patrón de grietas que aparece en la fig. 13.62, que se desarrolló durante varios ciclos de cargas alternas, sugiere que en la extensión deben existir condiciones satisfactorias de adherencia. Las curvas superiores de la fig. 13.63 evidencian el comportamiento superior de las probetas *P*1 a *P*3. En las tres pruebas se alcanzó toda la resistencia teórica de los miembros críticos en

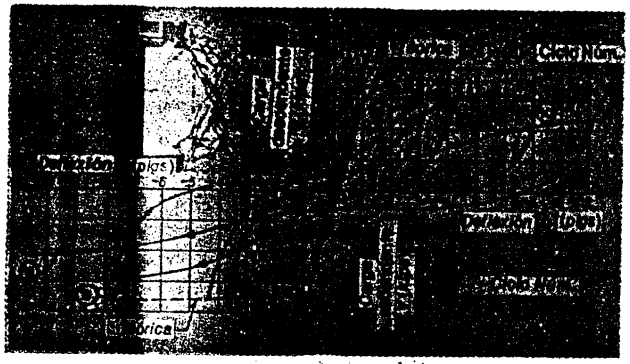


Figura 13.62. Relación carga-deflexión para probeta de junta de viga-columna con extensión. [13.41]

ambas direcciones de la carga, y se obtuvieron ductilidades cumulativas considerablemente mayores. El efecto benéfico de sólo una pequeña cantidad de refuerzo de confinamiento a través del núcleo de la junta de la probeta *P1*, como en la fig. 13.60, indica que la debilidad de una junta adecuadamente reforzada a cortante bajo cargas alternas es la dilatación transversal del concreto que se deteriora.

9. El tamaño absoluto de una junta tiene efecto en su comportamiento. En las pequeñas juntas es mucho más difícil lograr condiciones ideales de adherencia y anclaje. Los intereses conflictivos del comportamiento estructural (v.gr., el uso de varillas de diámetro pequeño para mejorar la adherencia) y de la construcción (es decir, el uso de menos varillas grandes para evitar la congestión), se hacen evidentes como nunca al detallar las juntas.

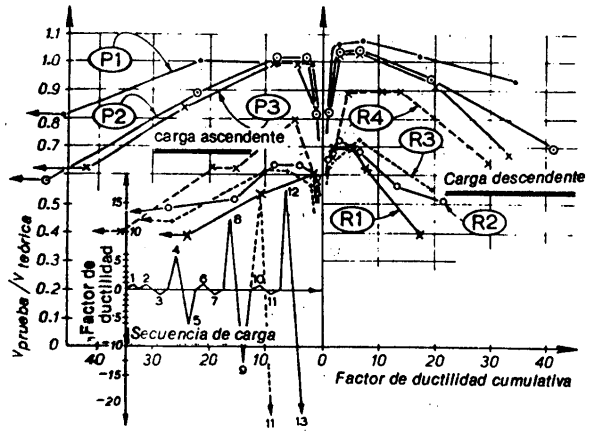


Figura 13.63. Degradación de la resistencia de probetas de juntas de vigas-columnas exteriores con ductilidad impuesta cumulativa. [13.42]

10. Las pruebas de la PCA[13.37] han demostrado convincentemente el efecto benéfico de la compresión axial en la columna en el comportamiento de las juntas. Que se pudiera predecir confiablemente este beneficio con el uso de la ecuación de la resistencia a cortante (ec. 7.35), desarrollada para vigas esbeltas sujetas a flexión, cortante y compresión sería una coincidencia sospechosa. La cuestión tendrá que esperar a que se reúna más evidencia experimental.

La distorsión conjunta después del desarrollo del agrietamiento en dos sentidos, que normalmente no se toma en cuenta en la evaluación de la respuesta de todo el marco de la construcción, puede contribuir considerablemente al desplazamiento lateral de la estructura. La pérdida de rigidez en los ciclos histéricos para las deflexiones de los extremos de la viga (figs. 13.61 y 13.62) se debe principalmente a las distorsiones de juntas. En la fig. 13.64 se presenta una comparación de las deformaciones calculada (con margen para el agrietamiento en los miembros) y observada en un espécimen de prueba.[13.36] La discrepancia se debe a las distorsiones en la junta.

13.8.4 Juntas interiores de marcos planos de plantas múltiples

Cuando se examina una junta interior de un marco plano, se deben agregar algunas observaciones a las de la sección anterior. En la fig. 13.65 se da la configuración de una junta interior típica de viga-columna. Características nuevas importantes de esta junta son el anclaje del refuerzo a flexión de la viga y el aumento de la fuerza cortante a través de la junta. De la fig. 13.65 es evidente que ahora la fuerza cortante total horizontal es

$$V_j = (f_s A_s)_1 + C_2 - V' = (f_s A_s)_1 + (f_s A_s)_2 - V' \qquad (13.25)$$

La fig. 13.65 ilustra una viga en que el área del refuerzo inferior es aproximadamente un medio del área del acero superior. Para este caso, bajo carga última se tiene

$$V_j \approx \tfrac{3}{2} f_y A_s - V'$$

En las vigas de fachada que sólo transmiten pequeñas cargas de gravedad, generalmente se suministran cantidades iguales de acero superior e inferior para la resistencia por carga lateral. En este caso $V_j \leqslant 2 f_y A_s - V'$. En consecuencia el cortante de junta podría ser aproximadamente el doble de la que se encuentra en una junta exterior que sólo conecte una viga.

La fuerza de adherencia que se debe tomar por medio de una de las varillas de las vigas superiores de la fig. 13.65 resulta de la fuerza neta que actúa en la varilla en las caras de la columna

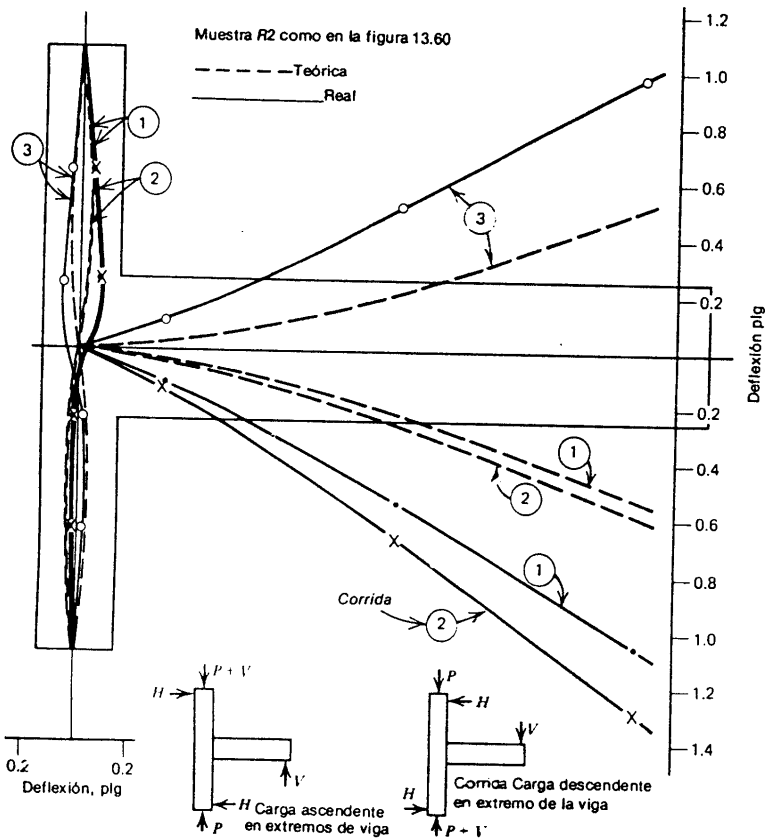


Figura 13.64. Perfiles deflexiones de unidad de prueba de junta de viga-columna en los máximos de las corridas de carga elástica [13.36]

$$\text{fuerza de adherencia} = \frac{\pi d_b^{\,2}}{4}(f_y + f'_s)$$

en que f'_s es el esfuerzo en el acero a compresión en la cara más retirada de la junta. Después de cargas repetidas alternas en las vigas de fachada (con igual acero superior e inferior) también puede ocurrir cedencia a compresión; por tanto la fuerza de adherencia puede aproximar la magnitud de $2A_s f_y$. En consecuencia, sólo se puede desarrollar la resistencia deseada a cedencia del refuerzo si puede tomarse esta fuerza de adherencia dentro de la junta. Nótese que en contraposición a las juntas exteriores de la fig. 13.60, los esfuerzos de adherencia deben desarrollar enteramente la fuerza de adherencia en las juntas interiores. Al calcularse, generalmente se encuentra que estos esfuerzos exceden bastante las magnitudes que recomiendan los códigos.

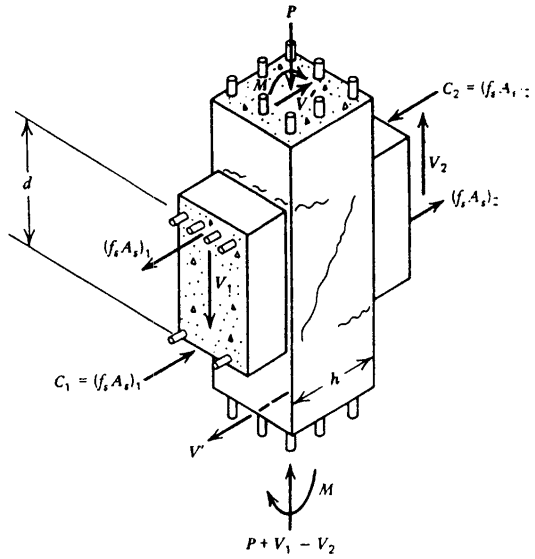


Figura 13.65. Acciones en junta interior de marco plano de niveles múltiples.

Interrelación de fuerzas en juntas interiores sujetas a momentos y cortante

En la serie de diagramas idealizados de la fig. 13.66 se ilustra la relación de fuerzas en las juntas asociadas con un comportamiento deseado de ellas. En la fig. 13.66*a* se muestran las fuerzas que ejercen los cuatro miembros de un marco plano contra la junta. Por simplicidad se supone que los momentos flexionantes introducidos son los mismos en los cuatro lados de la junta. La fuerza V_j, de junta que se obtiene de la ec. 13.25 puede ser la causa de extenso agrietamiento diagonal en el núcleo de la junta.

En este modelo se pueden identificar dos mecanismos capaces de trasmitir fuerzas cortantes de una cara de la junta a la otra. Se supone que la resistencia de estos dos sistemas que se examinará más adelante, es aditiva.

La fig. 13.66*b* sugiere que se podrían combinar todas las fuerzas de compresión que trasmite el concreto, equilibrándolas entre sí mediante un solo puntal ancho diagonal a través de la junta. Cuando ocurre la cedencia

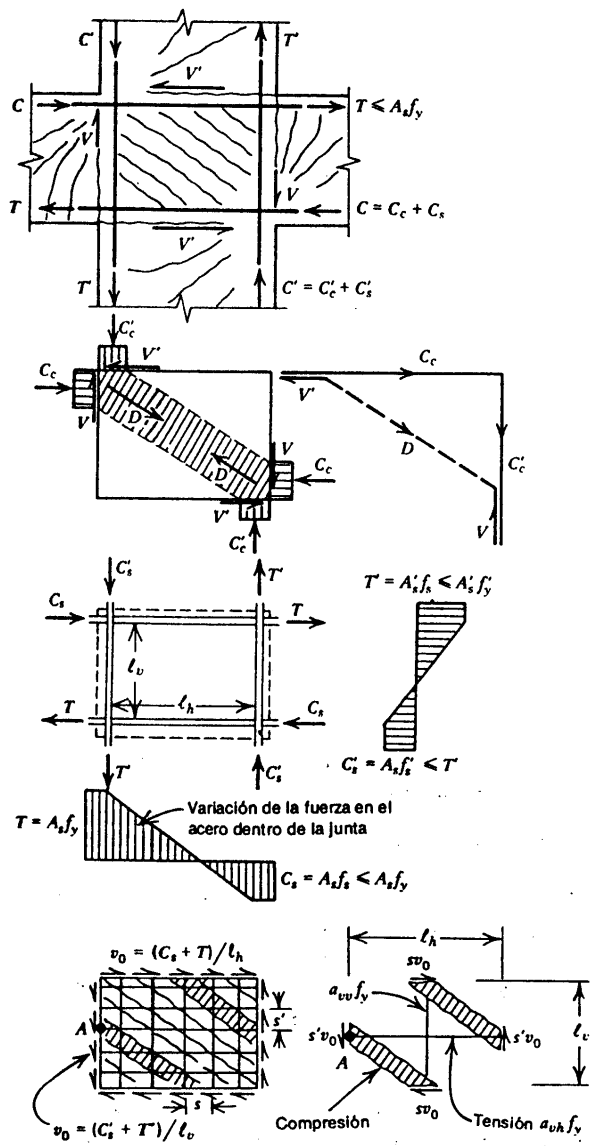


Figura 13.66. Comportamiento idealizado de juntas de viga-columnas interiores. (*a*) Acciones internas y patrón de grietas. (*b*) Transferencia de cortante por mecanismo de compresión. (*c*) Fuerzas sólo en el refuerzo. (*d*) Transferencia de cortante por mecanismo de armadura.

en el refuerzo a flexión, es apropiado suponer que toda la fuerza cortante en cada uno de los miembros adyacentes se introduce al núcleo de la junta a través de las zonas a compresión de concreto en las vigas y columnas. Las fuerzas de compresión C_c y C'_c y las fuerzas cortantes V y V' podrían balancearse entre sí por medio de una fuerza D a compresión diagonal sin ayuda de refuerzo. En términos de esfuerzos cortantes nominales y de las dimensiones dadas en la fig. 13.65, se puede expresar la capacidad de cortante de este mecanismo por medio de

$$v_c = \frac{C_c - V'}{bd} \tag{13.26}$$

Ahora se necesita evaluar la disposición de las fuerzas de acero dentro de la junta. En la fig. 13.66*c* se muestran las fuerzas relevantes aplicadas a los extremos de las varillas de refuerzo ahogadas en el concreto del núcleo de la junta. Si se supone que los esfuerzos de adherencia de intensidad uniforme absorben la fuerza de adherencia en cada varilla, entonces las fuerzas en la varilla cambian linealmente de tensión en un extremo a compresión en el otro, como lo ilustran los dos diagramas de la fig. 13.66*c*. De acuerdo con ello la fuerza de adherencia por longitud unitaria será $v_0 = (C_s + T)/\ell_h$ y $v_0 = (C'_s + T')/\ell_v$ a lo largo de los refuerzos de viga y columna respectivamente. El flujo v_0 cortante en términos de los esfuerzos cortantes nominales es aproximadamente

$$v_s = \frac{v_0}{b} \approx \frac{C_s + T}{bd} \tag{13.27}$$

en que b es el ancho de la columna.

La fig. 13.66*d* sugiere la manera como cada componente de fuerza de adherencia que actúa en una pequeña longitud necesita descomponerse en una fuerza diagonal de compresión y una fuerza horizontal o vertical de tensión, para que pueda formarse este mecanismo. Se puede considerar que toda la zona del tablero está constituida por elementos autoequilibrados, como se ilustra en la fig. 13.66*d*. Las fuerzas de compresión diagonal podrían suministrarse por medio de puntales de concreto formados entre las grietas diagonales. Las fuerzas de tensión requerirían un emparrillado o varillas horizontales y verticales bien ancladas, donde se introducen las fuerzas de adherencia. Entonces es evidente que para tomar las fuerzas v_0, deseadas de adherencia, la cantidad de "refuerzo a cortante" horizontal y vertical requeridos será

$$a_{vh} = \frac{(C_s + T)s'}{\ell_v f_y} \tag{13.28a}$$

$$a_{vv} = \frac{s}{s'} a_{vh} \tag{13.28b}$$

a la resistencia a cedencia, en donde a_{vh} = área de cada estribo horizontal y a_{vv} = área de cada estribo vertical. Se pueden deducir estas dos ecua-

ciones de los primeros principios y considerando el equilibrio de un punto en la zona de tablero, tal como el punto A de la fig. 13.66*d*.

Por similitud con el procedimiento de diseño utilizado para el cortante en vigas, se puede expresar la acción combinada de los dos mecanismos recien descritos en la siguiente manera:

$$v_j = v_c + v_s \tag{13.29}$$

en que el segundo término, la ec. 13.27, representa el cortante combinado que toma el refuerzo de malla.

Se espera que los estudios experimentales revelen en el futuro próximo hasta qué punto estos dos mecanismos permanecen efectivos durante las cargas cíclicas alternas de alta intensidad. En los capítulos anteriores se señaló repetidamente que el concreto en la zona a compresión de una viga se retrae de la participación, si se provocan elongaciones permanentes en el refuerzo por cedencia a tensión durante las cargas alternas anteriores. En las vigas de fachada que tienen iguales cantidades de acero superior e inferior, la compresión en el concreto puede disminuir tanto que la contribución del mecanismo de junta dado en la fig. 13.66*b* (es decir, v_c) puede hacerse insignificante. Entonces se necesitaría que todo el cortante de la junta se trasmitiera por refuerzo a cortante en la junta. Con esta base, en el diseño se debe de ignorar la contribución del concreto a la resistencia a cortante en el núcleo de la junta de estructuras resistentes a sismos.

La efectividad del refuerzo a cortante de la junta, modelada en la fig. 13.66*d*, depende de la habilidad del refuerzo a flexión y del concreto circundante de intercambiar fuerzas de adherencia de alta intensidad durante todo el procedimiento de carga. Cuando la severa carga alterna produce deterioro de adherencia, la distribución deseable de las fuerzas del acero (véase la fig. 13.65*c*) cambia radicalmente. No hay otro modo de anclar las varillas, como lo había en el caso de juntas exteriores donde se doblan las varillas. Hanson identificó esta pérdida de adherencia en sus experimentos[13.43] usando acero de grado 60 ($f_y = 414$ N/mm^2) A pesar de ello, en las pruebas de Hanson se sostuvo capacidad de resistencia total debido a que el acero a tensión que entra en la junta encontró anclaje en la viga en el lado lejano de la junta, lo que implica que después de unas pocas inversiones, el acero de la viga superior e inferior puede estar en tensión en ambos lados de la columna. Este fenómeno puede no tener consecuencias mayores en las vigas subreforzadas. Sin embargo, en los miembros reforzados mayormente, la pérdida completa de acero a compresión puede perjudicar severamente su ductilidad. No sólo falta un alivio en la capacidad de transmisión de carga de compresión del concreto, sino que se imponen mayores fuerzas de compresión en la sección crítica ante el propósito de la viga de balancear las mayores fuerzas internas de tensión. El fenómeno puede reducir la ductilidad de la sección adyacente a la columna. La labor

experimental limitada desarrollada hasta la fecha no ha aclarado este aspecto ni sugiere medidas de remedio. Debido a la naturaleza crítica de los esfuerzos de adherencia, es probable que las varillas de diámetro pequeño que pasen a través de la junta se desempeñen mejor que las varillas grandes. Las observaciones anteriores también tienen el propósito de atraer la atención una vez más a la relación íntima entre el comportamiento del nucleo de la junta y el esperado de los miembros adjuntos.

En la mayoría de las columnas de marcos resistentes a cargas sísmicas, el refuerzo principal, especialmente las varillas verticales no colocadas cerca de las fibras extremas de la sección afectada por los momentos, permanece bastante por debajo del nivel de cedencia, cuando se espera que se desarrollen articulaciones plásticas en las vigas próximas. Por este motivo se pueden esperar varillas de columnas intermedias, que pasen a través de un núcleo de junta, que remplacen la función de refuerzo a cortante vertical de junta en la fig. 13.66*d*. Sin embargo, el refuerzo vertical a cortante puede hacerse necesario cuando el refuerzo de la columna esté colocado sólo en las cuatro esquinas o a través de las caras afectadas por los momentos solamente.

Se puede remplazar el refuerzo ortogonal a cortante en el núcleo mediante acero diagonal. En la mayoría de los casos esto sería totalmente impráctico. Sin embargo, cuando la geometría de la junta lo permite, se puede doblar todo o parte del refuerzo a flexión de la parte superior de una viga a través de una junta inferior hacia el fondo de la otra viga, lo que aliviaría considerablemente al concreto del núcleo de la junta y eliminaría casi todas las fuerzas de adherencia. En ausencia de evidencia experimental, no se ofrecen aquí proposiciones de diseño.

Efecto de la compresión axial en el comportamiento de la junta

Se puede esperar que la compresión axial mejore el comportamiento de la junta y reduzca la demanda de refuerzo a cortante de la junta. El modelo simplificado (fig. 13.67) sugiere que se puede formar un puntal más empinado a compresión diagonal como resultado de un bloque a compresión más grande a través de la sección de la columna. La componente horizontal de la fuerza diagonal que toma este puntal, puede consistir en la fuerza C de compresión de la viga, menos el cortante V', de la columna y una fracción de la fuerza T de tensión de la viga. Es evidente que la fuerza de adherencia horizontal a lo largo de las varillas de la viga se puede tomar ahora más fácilmente dentro del puntal más grande a compresión diagonal. De acuerdo con este modelo, el refuerzo de acero del alma se requeriría sólo para permitir que se introdujeran las fuerzas de adherencia v_0 en la zona del núcleo fuera del área sombreada de la fig. 13.67. Así se aumenta la contribución aparente del concreto a la resistencia a cortante del núcleo v_c de la junta y se reduce la demanda de refuerzo v_s a cortante de acuerdo con la ec. 13.29. Todavía queda por desarrollar una evaluación

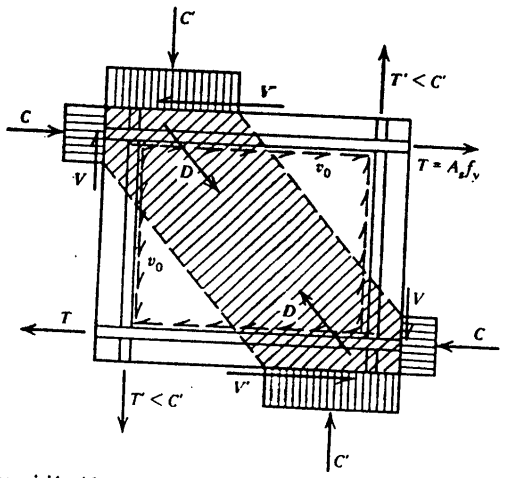


Figura 13.67. Disposición idealizada de fuerzas en el núcleo de la junta con carga de compresión en la columna.

cuantitativa del refuerzo a cortante de la junta en presencia de compresión en la columna.

Efecto de la falla del núcleo de la junta en las deformaciones del marco

En la fig. 13.68 se puede apreciar el comportamiento no satisfactorio de una junta interior típica de un marco plano,[13.44] en que la falla ha ocurrido principalmente en la junta. En la fig. 13.69 aparecen el sistema de carga y los detalles del armado, el que se había diseñado de acuerdo con los requerimientos del código del ACI[13.12] de 1971 para marcos dúctiles en zonas sísmicas. Las columnas, que eran más fuertes que las vigas, durante la prueba se sujetaron a una carga axial constante de $0.22 f'_c A_g$, en tanto que se sujetó a las vigas a cargas laterales alternas estáticas, como se muestra en la fig. 13.69*a*. En las figs. 13.69*b* a 13.69*d* se muestran los detalles de las vigas y columna. Nótese que el acero transversal en la junta consiste en aros del núm. 5 (16 mm de diámetro) con centros a 2 plg (51 mm). La fig. 13.70 muestra el comportamiento medido del momento - curvatura de la viga en la posición de articulación plástica próxima a la cara de la columna. Es evidente que ocurrió relativamente poca deformación plástica subsecuente en la viga después de las dos primeras rotaciones grandes a cedencia. Siguiendo el desarrollo de los momentos completos plásticos en las articulaciones de las vigas, las varillas de las vigas comenzaron a deslizarse dentro de la junta y se desarrollaron grandes grietas diagonales (vease la fig. 13.68*a*). De la relación medida: momento en la Viga en la cara de la columna a deflexión del extremo de la Viga (fig. 13.71), se ve que en ciclos posteriores de carga se impusieron deflexiones de la viga iguales a o mayores que los ocurridos al desarrollarse la máxima resistencia en cada dirección. La capacidad al igual que la rigidez del conjunto se deterioraron gradualmente durante la prueba. Una comparación entre las figs. 13.70 y 13.71 revela que las grandes deformaciones plásticas se deben principalmente a deformaciones de la zona del tablero de la junta. La junta estaba reforzada para una fuerza a cortante correspondiente a 106% de la capacidad del conjunto, utilizando el procedimiento[13.12] del código del ACI. El refuerzo a cortante en la zona del tablero de la junta comenzó a ceder cuando se alcanzó toda la capacidad teórica en la quinta corrida de carga (fig. 13.70). Park y Thompson-[13.44] observaron comportamiento satisfactorio de la junta en un conjunto que tenía la misma capacidad de carga, y en que la viga estaba completamente presforzada. Un tendón de presforzado a medio peralte a través del núcleo de la junta mantuvo el ancho de las grietas diagonales pequeño.

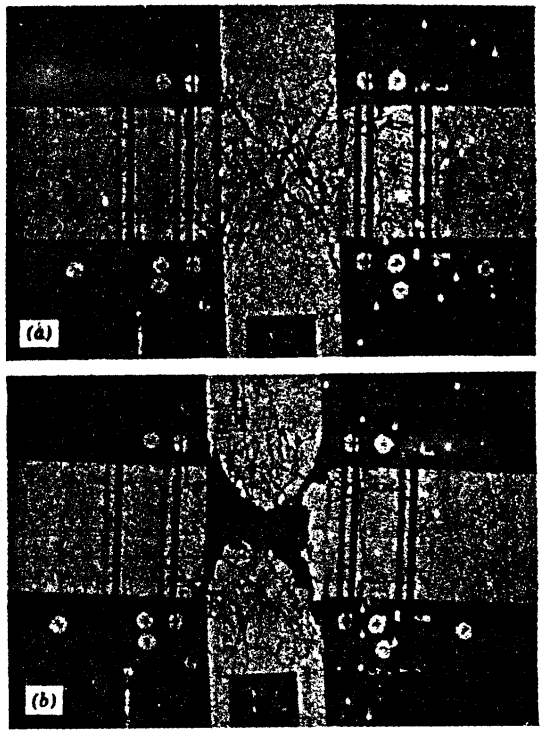


Figura 13.68. Patrones de grietas de junta de viga-columna interior[13.44] (*a*) En la aplicación del momento flexionante máximo. (*b*) Al final de la décima segunda corrida de carga.

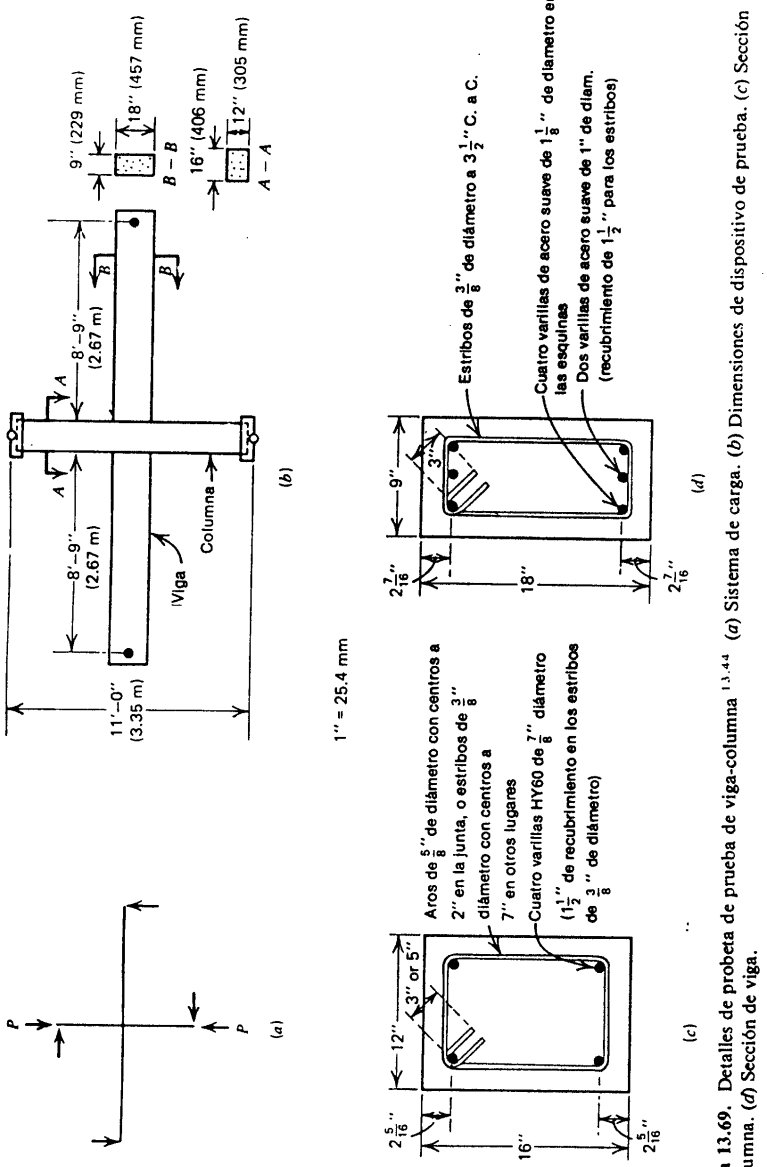


Figura 13.69. Detalles de probeta de prueba de viga-columna [13.44] (*a*) Sistema de carga. (*b*) Dimensiones de dispositivo de prueba. (*c*) Sección de columna. (*d*) Sección de viga.

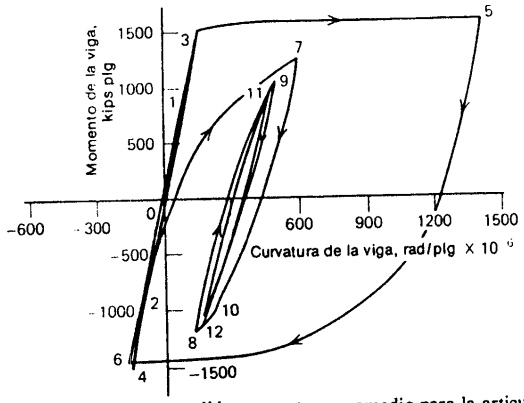


Figura 13.70. Relación momento medido - curvatura promedio para la articulación plástica en una viga.[13.44]

Debido a la elevada intensidad del esfuerzo cortante, y por tanto del esfuerzo de compresión diagonal, es inevitable utilizar refuerzo de confinamiento transversal espaciado estrechamente en las juntas. Ohsaki ha observado la naturaleza crítica de las juntas para cargas sísmicas, que hasta fechas recientes se ha ignorado, en pruebas con probetas de tamaño natural.[13.45]

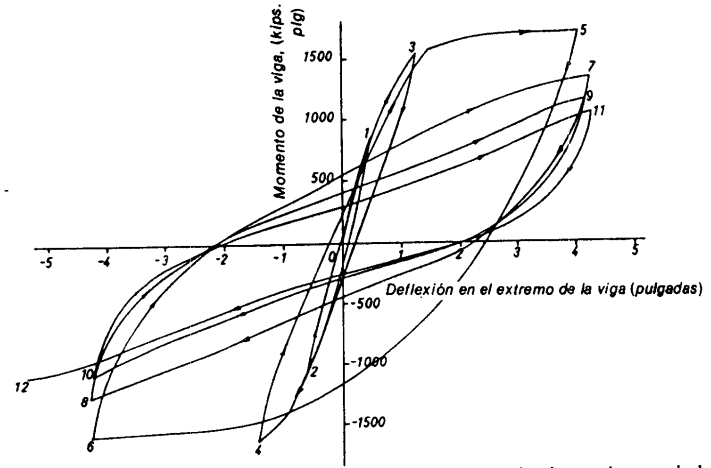


Figura 13.71. Deflexión de extremo de viga medida - momento de viga en la cara de la columna[13.44]

13.8.5 Sugerencias para detallar juntas

Se sugieren las siguientes recomendaciones con relación a los requerimientos de anclaje, cortante y confinamiento dentro de un núcleo de junta de estructuras resistentes a sismos.

Anclaje

Debido a la pérdida inevitable de adherencia en la cara interna de una junta exterior, se debe calcular la longitud de desarrollo del refuerzo de la viga a partir del principio del doblez a 90°, y no desde la cara de la columna (véase la fig. 13.72*a*). En las columnas anchas, cualquier posición de las varillas de la viga dentro del tercio exterior de la columna (13.72*b*) podría considerarse para calcular la longitud de desarrollo. Para columnas poco peraltadas, será imperativo utilizar extensiones, como en la fig. 13.72*b*. Una varilla de apoyo de diámetro grande ajustada a lo largo del doblez a 90° de las varillas de la viga debe ser benéfico para distribuir los esfuerzos de apoyo (véanse las figs. 13.72*a* y 13.75*c*).

En columnas peraltadas y dondequiera que se prefieran varillas rectas en vigas puden ser ventajosos los anclajes mecánicos, como en la fig. 13.72*c*. Se pueden soldar las varillas superiores de una viga que pasen a través de agujeros en una placa de apoyo a una placa de acero como en la fig. 13.73.

Los estribos de juntas deben arreglarse de tal manera que las varillas críticas de columnas exteriores y las porciones dobladas hacia abajo de las varillas de vigas se mantengan contra el núcleo de la junta.

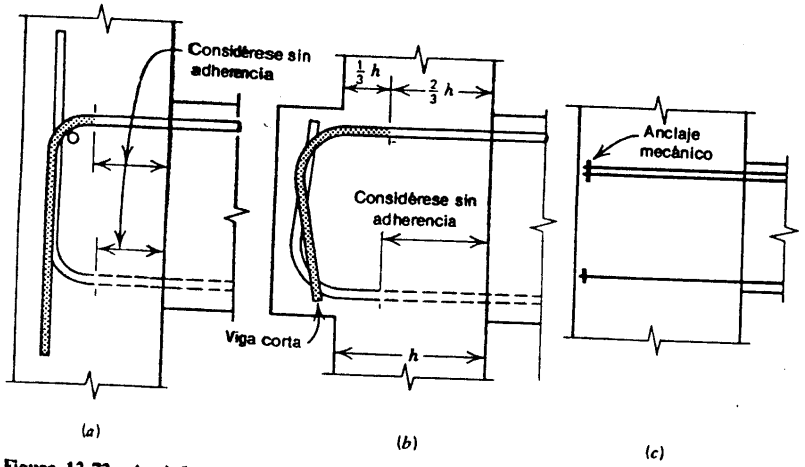


Figura 13.72. Anclaje de varillas de viga en columnas utilizando (*a*) varillas dobladas hacia arriba; (*b*) varillas dobladas hacia arriba en la extensión; (*c*) Anclaje mecánicos.

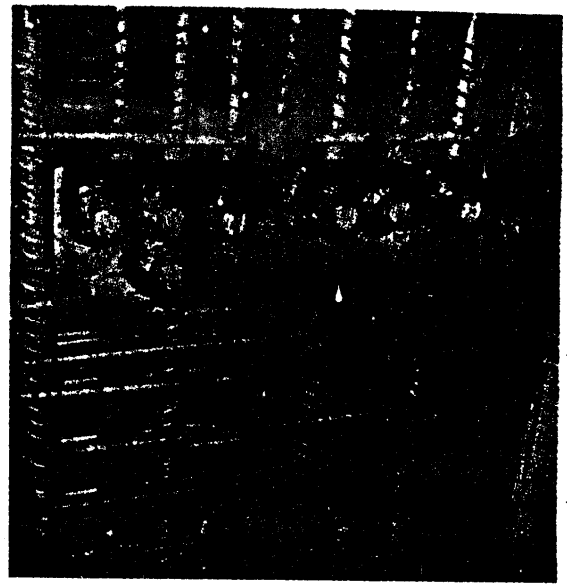


Figura 13.73. Placa de anclaje para varillas de viga en cara exterior de una columna exterior. (Cortesía de Lewis & Williamson, Consulting Engineers, Auckland, Nueva Zealand.)

Resistencia a cortante

Cuando la compresión axial computada en la columna es pequeña (es decir, cuando el esfuerzo promedio en el área bruta de concreto es menor que, por ejemplo $0.12f'_c$, incluyendo el margen para la aceleración vertical generada por los sismos), se debe ignorar la contribución de la resistencia a cortante del concreto y suministrar refuerzo a cortante[13.38] para toda la fuerza cortante de la junta, $V_s = V_j$. En las juntas exteriores sólo se debe considerar que son efectivos los estribos situados en los dos tercios exteriores de la longitud de la grieta de falla diagonal potencial, que ocurre de esquina a esquina de la junta (véase la fig. 13.74). De acuerdo con ello, de la fig. 13.74 se tiene que si V_s es el cortante de la junta que deben transmitir los estribos,

$$A_v = \frac{1.5V_s s}{df_y} \tag{13.30}$$

en que A_v = área total de las ramas de los estribos en un conjunto que constituye una capa de refuerzo a cortante y d = peralte efectivo de la viga. Para dar margen a las cargas alternas, la ecuación correspondiente determina el refuerzo a cortante de la junta en los dos tercios inferiores de la junta, proposición que es más severa que cualquier requerimiento exis-

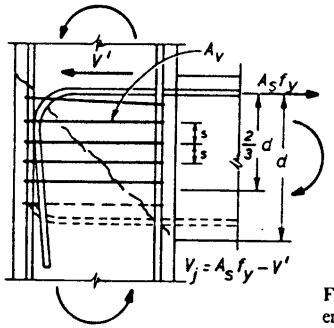


Figura 13.74. Estribos efectivos que resisten cortante en una junta de viga-columna exterior.

tente de los códigos, a la fecha de escritura de este libro, para juntas en que la relación del peralte de la viga al de la columna es menor que aproximadamente 1.5. De acuerdo con el criterio de diseño descrito en el capítulo 11 para construcciones de niveles múltiples, se debe considerar a la junta como parte de la columna; en consecuencia se debe de dar cabida a la sobrerresistencia posible de la viga al calcular el valor del cortante V_j de la junta para determinar $V_s = V_j - V_c$.

Debido a que la mayor parte de la fuerza cortante se introduce a una junta interior mediante fuerza de adherencia a lo largo del refuerzo superior e inferior, como se ilustra en la fig. 13.66*c*, más que por esfuerzos de apoyo como en la fig. 13.58*b*, es probable que todos los estribos del núcleo de la junta participen en la resistencia a cortante. En consecuencia se puede modificar la ec. 13.30 como sigue

$$A_v = \frac{V_s s}{(d - d')f_y} \tag{13.31}$$

en que $(d - d')$ es la distancia entre los centroides del refuerzo superior e inferior de la viga.

Para proteger el concreto del núcleo contra excesiva compresión diagonal, se debe establecer un límite superior para el cortante de la junta, normalmente expresado en términos de un esfuerzo cortante nominal. Se requiere investigación adicional para determinar este valor que bien puede ser bastante mayor al valor correspondiente sugerido para las vigas es decir, $10\sqrt{f'_c}$ a $11.5\sqrt{f'_c}$ (lb/plg²) debido al confinamiento.

Confinamiento

Anteriormente se señaló que los esfuerzos nominales cortantes, y por tanto los esfuerzos de compresión diagonal dentro de la junta, pueden hacerse grandes. Estos esfuerzos de compresión causan la destrucción eventual del núcleo de concreto cuando se aplica carga cíclica de alta intensidad, es-

pecialmente si se permite que ceda el refuerzo a cortante. En consecuencia es imperativo el confinamiento efectivo en cualquier junta. No hay suficiente evidencia experimental a mano que permita determinar la cantidad de refuerzo de confinamiento requerido en una junta, aunque se sugiere que se suministre no menos que el utilizado en las columnas (ecs. 11.5 y 11.56), sin importar la intensidad de la carga axial en las columnas.

El refuerzo a cortante sólo confina las zonas de las esquinas de la junta y las ramas de estribos horizontales no son suficientemente efectivas para dar restricción contra el aumento volumétrico del concreto del núcleo. En consecuencia se deben suministrar varillas adicionales de confinamiento perpendiculares al refuerzo a cortante. No se deben colocar estas varillas a más de 6 plg (150 mm) entre sí. En la fig. 13.75 se muestran distribuciones sugeridas del refuerzo de junta horizontal para una junta de viga-columna exterior. Se debe prestar especial atención al confinamiento de la cara exterior de la junta, opuesta a la varilla, donde se deben desarrollar fuerzas muy elevadas de adherencia. Aquí se pueden combinar los papeles de los estribos y el acero de confinamiento. La capacidad a cortante de una junta sólo puede desarrollarse con un confinamiento efectivo.

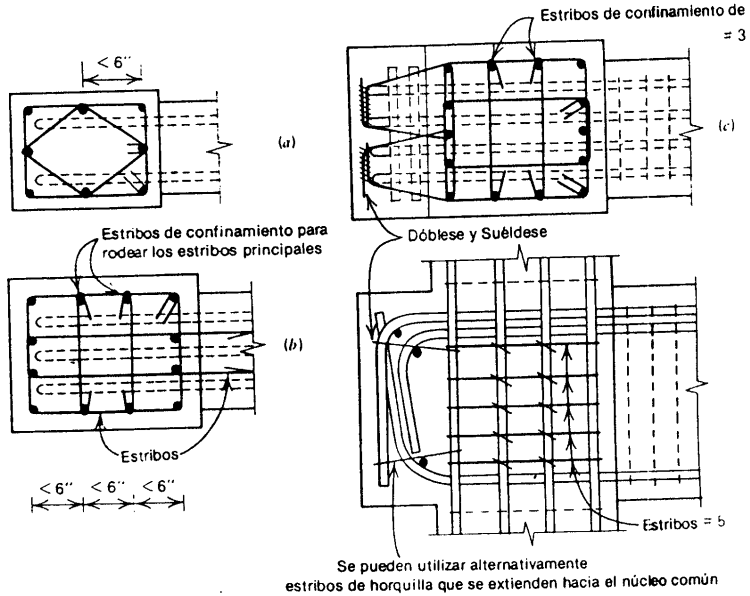


Figura 13.75. Distribución sugerida de estribos de junta y estribos para junta de viga-columna exterior en (*a*) una columna pequeña; (*b*) una columna de tamaño mediano; (*c*) una columna con viga de extensión.

13.8.6 Juntas de marcos espaciales de plantas múltiples

La junta más común ocurre en el interior de un sistema de marcos de plantas múltiples en que se encuentran cuatro vigas, generalmente perpendiculares entre sí, en una columna continua. Cuando una perturbación sísmica importante impone condiciones alternas de cedencia a lo largo de uno de los ejes principales de la construcción, generando con ello esfuerzos cortantes críticos a través del núcleo de la junta, como se describiera en la sección 13.8.4, las vigas perpendiculares al plano de los marcos afectados por el sismo suministran confinamiento contra la dilatación lateral de la junta. El acero a flexión, que no cede en estas vigas que cruzan la junta transversalmente, puede ofrecer considerable restricción.

Hanson[13.43] y Connor,[13.37] quienes simularon esta condición con extensiones coladas perpendiculares a las probetas de vigas - columnas, encontraron una notable mejora en el comportamiento de la junta con respecto a los marcos que sólo tienen vigas en un plano. Las recomendaciones actuales del ACI[13.12] se basan en sus resultados. De acuerdo con ellos, se necesita suministrar sólo la mitad del refuerzo a cortante, calculado de las ecs. 13.25 y 7.23*a*, si se conectan a los cuatro lados de la columna vigas de no menos de la mitad del ancho de la columna y no menos de tres cuartos del peralte de la viga más peraltada.

Problemas todavía no conocidos podrían revelarse por una investigación más extensa en las juntas con vigas en cuatro lados, en que las demandas de ductilidad impuestas son más severas que las aplicadas en las pruebas de la PCA:[13.37, 13.43]

Cuando no coinciden los ejes de las vigas y de las columnas, se generan acciones secundarias tales como la torsión. El comportamiento de la junta se hace más complejo y en ausencia de estudios experimentales sólo se pueden dar provisiones aproximadas para estas condiciones de carga. Dichas juntas deben evitarse en las estructuras afectadas por sismos. La torsión introducida de esta manera provocó severos daños en los edificios durante el terremoto de 1968 en Tokachioki.[13.46]

Por comodidad, generalmente se considera que las acciones sísmicas o del viento actúan independientemente a lo largo de uno de los dos ejes principales de un marco rectangular de construcción. Anteriormente se señaló que la máxima amplitud de las aceleraciones, velocidades y desplazamientos del terreno podrían ocurrir a un ángulo con respecto a ambos ejes principales, produciendo un efecto flexionante inclinado global. Esta ocurrencia podría movilizar toda la resistencia de las cuatro vigas que se conectan a una columna, imponiendo con ello condiciones de carga extrema en la junta. La fig. 13.76 ilustra las dificultades de construcción involucradas en suministrar refuerzos de junta en una columna donde se consideró la articulación plástica concurrente de tres vigas que entran a la junta. El caso puede ser especialmente crítico en columnas de esquinas donde se suman las fuerzas axiales inducidas en las columnas por las cargas inclinadas laterales.

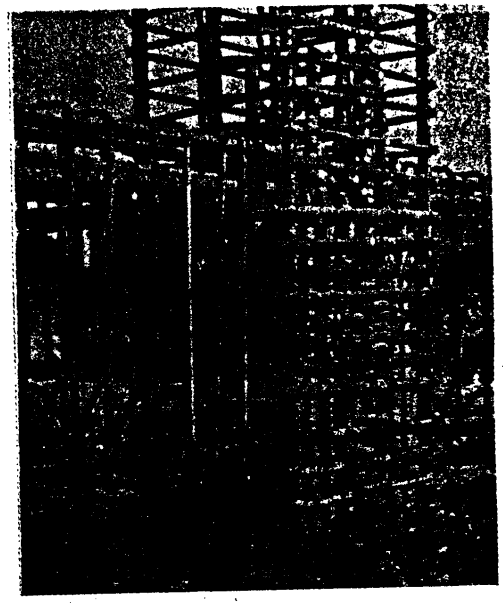


Figura 13.76. Refuerzo de junta en una columna exterior donde se consideró articulación concurrente de tres vigas. (Cortesía del Ministerio de Obras de Nueva Zelandia.)

Incluso bajo aplicación de carga unidireccional, coincidente con uno de los ejes principales de un marco espacial, rectilíneo, de plantas múltiples, pueden ocurrir efectos secundarios perpendiculares en las vigas, que podrían provocar considerable daño estructural. Las grandes rotaciones de juntas en un marco plano pueden introducir torsión en las vigas que entren a juntas, perpendicular al plano de acción debido a la presencia de la losa del piso, colado monolíticamente con las vigas. La torcedura impuesta puede provocar agrietamiento diagonal excesivo en las vigas no sujetas a flexión, lo que puede afectar su comportamiento cuando se desea resistir la carga lateral a lo largo de la otra dirección principal del edificio.

La fig. 13.77 muestra distintas vistas de una junta de esquina en un marco de concreto reforzado de seis plantas a escala pequeña que se sujetó a cargas sísmicas unidireccionales simuladas.[13.47] (En las figs. 11.42 a 11.45 se proporcionan detalles del marco.) Son evidentes los efectos torsionales, indicados por flechas, en la esquina de la losa y en la viga que se conecta perpendicularmente al plano de la carga.

El uso de refuerzo de fibra de acero en las áreas de las juntas parece prometer mejorar el comportamiento en virtud de la mayor resistencia a tensión del núcleo de concreto.[13.48]

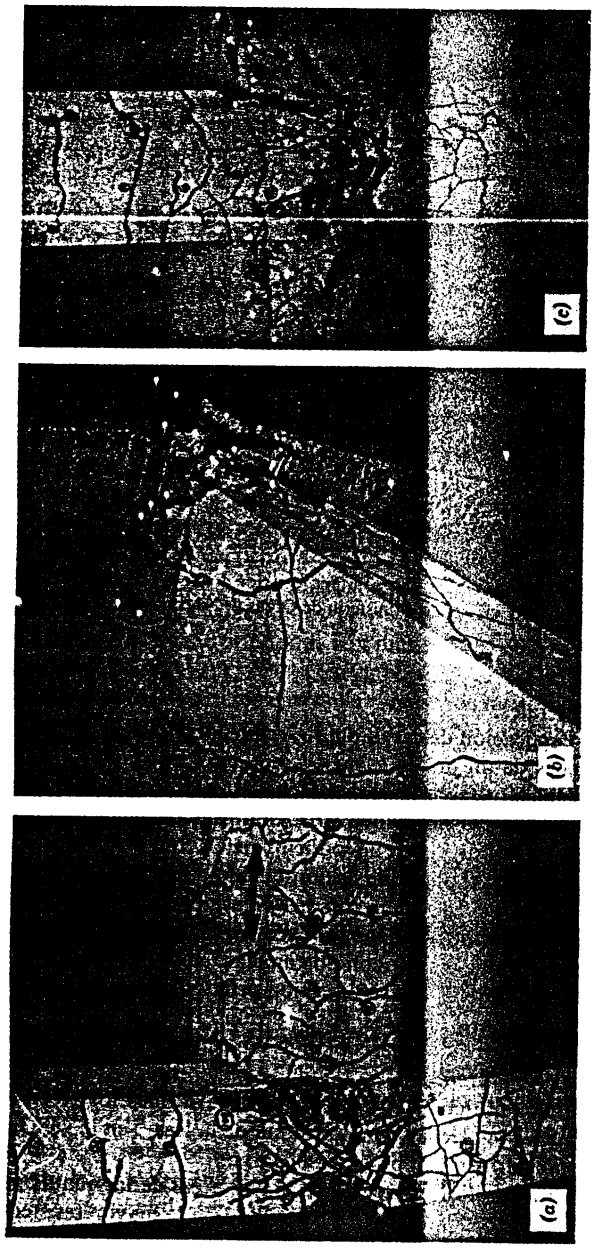


Figura 13.77. Junta de esquina en primer nivel de marco de modelo de concreto reforzado cargado lateralmente.[13.47] (*a*) Articulación plástica en viga y columna y agrietamiento extenso del núcleo de la junta. (*b*) Agrietamiento diagonal a través de la esquina de la losa del piso. (*c*) Agrietamiento diagonal provocado por torcedura en la viga perpendicular a la mostrada en (*a*), y descontramiento en la parte posterior de la junta.

Ejemplo 13.2

Una viga de 25 plg × 18 plg (610 mm × 457 mm). Se conecta con una columna cuadrada exterior de 20 plg (508 mm). Hay tres varillas superiores del núm. 10 (32 mm) y tres varillas inferiores del núm. 8 (25 mm) que entran a la junta desde la viga. La columna está reforzada por varillas del núm. 8 (25 mm). La resistencia a cedencia del refuerzo de la viga es de 40,000 lb/plg² (276 N/mm²) y la del acero de la columna es de 60,000 lb/plg² (414 N/mm²). La resistencia de cilindro del concreto es de 3600 lb/plg² (17.9 N/mm²), y hay un recubrimiento de 2 plg (50 mm) para todas las varillas principales. El factor de reducción de capacidad es $\varphi = 0.85$.

La columna trasmite una compresión axial de 360 kips (1600 kN) cuando el acero superior de la viga está a tensión y 180 kips (800 kN) cuando el acero del fondo está en tensión. Se puede suponer que la columna tiene un punto de inflexión a 5 pies (1524 mm) arriba y abajo del eje de la viga durante la traslación lateral.

El refuerzo de confinamiento requerido en la columna consiste en aros rectangulares del núm. (12.7 mm) con un estribo cruzado suplementario central del núm. 4 en ambas direcciones, todos espaciado a 4 plg (102 mm) entre centros. Determinar el refuerzo de la junta por cortante de acuerdo con (1) los requerimientos del ACI 318-71, (2) las recomendaciones contenidas en la sección 13.8.5.

Solución

1. *Requerimiento del ACI* 318-71[13.12]

tensión en las varillas superiores

$$A_s f_y = 3 \times 1.23 \times 40 = 147.6 \text{ kips}$$

profundidad del bloque a compresión en la viga si se desprecia el acero a compresión

$$a = \frac{147.6}{0.85 \times 3.6 \times 18} = 2.68 \text{ plg}$$

profundidad efectiva para el acero superior

$$d = 24 - 2 - 0.5 \times 1.25 = 21.4 \text{ plg}$$

para la fuerza de compresión del concreto

$$j = 1 - \frac{a}{2d} = 1 - \frac{2.68}{2 \times 21.4} = 0.94$$

profundidad efectiva para el acero inferior

$$d = 24 - 2 - 0.5 \times 1 = 21.5 \text{ plg}$$

para el acero a compresión

$$j = \frac{d - d'}{d} = \frac{21.4 - 2.5}{21.4} = 0.883 < 0.94$$

El momento ideal para la viga es aproximadamente $0.883 \times 21.4 \times 147.6 = 2790$ kip/plg. Suponiendo que se debe resistir este momento en proporciones iguales por debajo y arriba de la junta, el cortante en la columna es aproximadamente

$$V_{col} = \frac{0.5 \times 2790}{5 \times 12} = 23.2 \approx 23 \text{ kips}$$

De la ec. 13.24 se tiene $V_j = 147.6 - 23 = 124.6$ kips

$$\therefore \quad v_u = \frac{V_j}{\varphi bd} = \frac{124{,}600}{0.85 \times 20 \times 17.5} = 419 \text{ lb/plg}^2 (2.89 \text{ N/mm}^2)$$

De la ec. 7.35*b* se tiene

$$v_c = 3.5\sqrt{3600}\sqrt{1 + 0.002 \times 360{,}000/400} = 351 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad v_s = 419 - 351 = 68 \text{ lb/plg}^2$$

Con $s = 4$ plg, la ec. 7.23*a* da $A_v = 68 \times 4 \times 20/60{,}000 =$ plg^2. Este valor es menor que el acero de confinamiento requerido y no gobierna el diseño. Nótese que de acuerdo con las recomendaciones del ACI, se asignó al concreto aproximadamente 84% del cortante total, v_c.

para el momento inverso

$$A_s f_y = 3 \times 0.785 \times 40 = 94.2 \text{ kips}$$

capacidad a flexión de la viga

$$\approx 0.883 \times 21.5 \times 94.2 = 1790 \text{ kip} \cdot \text{lb/plg}^2$$

el cortante de la columna es aproximadamente

$$V_{col} = 0.5 \times \frac{1790}{60} = 14.9 \text{ kips}$$

el cortante de la junta

$$V_j = 94.2 - 14.9 = 79.3 \text{ kips}$$

$$\therefore \quad v_u = \frac{79{,}300}{0.85 \times 20 \times 17.5} = 267 \text{ lb/plg}^2$$

La ec. 7.35*b* da

$$v_c = 3.5\sqrt{3600}\sqrt{1 + 0.002 \times 180{,}000/400} = 289 \text{ lb/plg}^2$$

Por tanto no se requiere refuerzo a cortante de la junta para este caso.

2. *Recomendaciones contenidas en la sección* 13.8.5

Al evaluar la capacidad a flexión de la viga, se da un margen de 25% de sobrerresistencia, lo que da

$$A_s f_y = 1.25 \times 147.6 = 184.5 \text{ kips}$$

el cortante de la columna para la sección 1

$$V_{col} = 1.25 \times 23.2 = 29.0 \text{ kips}$$

cortante de la junta

$$V_j = 184.5 - 29.0 = 155.5 \text{ kips}$$

$$v_u = \frac{155{,}500}{0.85 \times 20 \times 17.5} = 521 \text{ psi } (3.59 \text{ N/mm}^2)$$

Cuando $v_c = 0$, $v_s = 521$ lb/plg^2 y $s = 4$ plg La ec. 13.30 da

$$A_v = \frac{1.5 \times 155.5 \times 4}{0.85 \times 21.5 \times 60} = 0.871 \text{lb/plg}^2$$

Un estribo rectangular del núm. 5 (16 mm) y una sola rama suplementaria central del núm. 5 proporcionaría 0.915 plg^2 cada 4 plg, lo que es más que los requerimientos del acero de confinamiento.

Es evidente que la cantidad de refuerzo a cortante de la junta depende primordialmente del grado en que la compresión axial en las columnas afecta la resistencia a cortante del núcleo.

Por ejemplo, si se supone que la resistencia a cortante se beneficia del esfuerzo de compresión axial que excede $0.12f'_c$, como lo implican las recomendaciones[13.38] de SEAOC, el refuerzo a cortante de la junta se reduce como sigue:

compresión axial en la columna

$360{,}000/4000 = 900 \text{ lb/plg}^2 = 0.25f'_c \text{ lb/plg}^2$

para evaluar la resistencia a cortante considérese sólo

$(0.25 - 0.12)f'_c = 0.13 \times 3600 = 468$ a compresión

La ec. 7.35*b* da

$$v_c = 3.5\sqrt{3600}\sqrt{1 + 0.002 \times 468} = 292 \text{ lb/plg}^2$$

En consecuencia, por proporción el área de los estribos colocados con centros a 4 plg es

$$\frac{521 - 292}{521} \times 0.871 = 0.383 \text{ lb/plg}^2$$

El acero de confinamiento suministrado es mayor que este valor.

Ejemplo 13.3

Una viga de fachada de 22 plg x 16 plg (559 x 406 mm) pasa en forma continua a través de la misma columna cuadrada de 20 plg (508 mm) descrita en el ejemplo 13.2. Esta viga, situada perpendicular a la del ejemplo 13.2 está reforzada con tres varillas del núm. 10 (32 mm) en la parte superior, con recubrimiento de $3\frac{1}{4}$ plg (83 mm) y tres varillas del núm. 8 (25 mm) en el fondo con recubrimiento de 2 plg (50 mm) Para cortantes inducidos por carga lateral en esta dirección, la carga axial mínima en la columna a considerar es de 270 kips (1200 kN). Las propiedades de resistencia son como en el ejemplo anterior.
Determinar el refuerzo a cortante de la junta de acuerdo con (1) los requerimientos[13.12] del ACI 318-71, y (2) con las recomendaciones de la sección 13.8.5.

Solución

1. *Requerimientos de ACI* 318-71

Se tiene una junta interior semejante a la de la fig. 13.65. La fuerza de tensión en el acero superior es de $3.69 \times 40 = 147.6$ y la fuerza es de $2.36 \times 40 = 94.4$ kips. en el acero interior. La capacidad aproximada a flexión del acero superior es Tjd, en que

$$jd \approx 22 - 3.25 - 0.5 \times 1.25 - 2 - 0.5 \times 1 = 15.6 \text{ plg} = d - d'$$

por tanto $M_{u,\,sup} \approx 147.6 \times 15.6 \approx 2300$ kip.plg. Se puede suponer el mismo brzo de palanca interna para el acero del fondo, lo que da

$$M_{u,\,\text{inferior}} = 94.4 \times 15.6 = 1470 \text{ kip} \cdot \text{plg}$$

Por tanto el cortante en la columna es aproximadamente

$$V_{col} = \frac{0.5(2300 + 1470)}{5 \times 12} = 31.4 \text{ kips}$$

De la ec. 13.25 se tiene $V_j = 147.6 + 94.4 - 31.4 = 210.6$ kips

$$\therefore \quad v_u = \frac{210.600}{0.85 \times 20 \times 17.5} = 708 \text{ lb/plg}^2 \text{ (4.88 N/mm}^2\text{)}$$

De la ec. 7.35 se tiene

$$v_c = 3.5\sqrt{3600}\sqrt{1 + 0.002 \times 270{,}000/400} = 322 \text{ lb/plg}^2$$

$$\therefore \quad v_s = 708 - 322 = 386 \text{ lb/plg}^2$$

Con $s = 4$ plg, la ec. 7.23*a* da

$$A_v = 386 \times 4 \times 20/60{,}000 = 0.515 \text{ plg}^2$$

Del ejemplo 13.2, se requiriirieron tres ramas del núm. 4 (12 mm) para el confinamiento, lo que da 0.588 plg^2. Esto es adecuado para el cortante de la junta.

2. *Recomendación contenida en la sección* 13.8.5

Al evaluar la capacidad a flexión de la viga, se considera una sobrerresistencia de 25%, con lo que se tiene

$$V_j = 1.25 \times 210.6 = 263.3 \text{ kips}$$

$$v_u = \frac{263{,}300}{0.85 \times 20 \times 17.5} = 854 \text{ lb/plg}^2 \text{ (6.1 N/mm}^2\text{)}$$

Nótese que esto es $14.73\sqrt{f'_c}$ (lb/plg^2). Supóngase $v_c = 0$; por tanto los estribos deben resistir todo el cortante de acuerdo con la ec. 13.31.

$$A_v = \frac{263.3 \times 4}{0.85 \times 15.6 \times 60} = 1.33 \text{ plg}^2$$

Si se utilizan aros periféricos del núm. 6 (18.8 mm) y una rama interior del núm. 5 (16 mm) el espaciado entre estribos tendría que ser

$$(2 \times 0.44 + 0.305) \times 4/1.33 = 3.56 \approx 3\tfrac{1}{2} \text{ plg (90 mm)}$$

13.9 CONCLUSION

Los estudios anteriores trataron de ilustrar mediante unos cuantos ejemplos que un conocimiento amplio del comportamiento estructural se debe manifestar en un detallado razonado. Sólo una estructura bien detallada puede lograr la calidad deseada de comportamiento, cuya predicción es el propósito de este libro. No se puede exagerar la importancia del detallado eficiente, especialmente para las estructuras en un país sísmico. El extenso daño y las fallas de las construcciones en ciudades que sufren sismos intensos se pueden atribuir directamente al detallado inferior al estándar o incluso negligente, destrucción que debe servir como recordatorio de que el detallado sólido es de primordial importancia en el proceso general del diseño de las estructuras.

BIBLIOGRAFIA

13.1 F. Leonhardt, "Uber die Kunst des Bewehrens von Stahlbetontragwerken," *Beton-und Stahlbetonbau*, Vol. 60, 1965, No. 8, págs. 181-192; No. 9, págs. 212-220.

13.2 *Manual of Standard Practice for Detailing Reinforced Concrete Structures*, revisión propuesta al ACI 315-65, American Concrete Institute, 5a. ed., 1970.

13.3 "The Detailing of Reinforced Concrete," A technical report of the Joint Committee of the Concrete Society and the Institution of Structural Engineers, Londres, 1968.

13.4 ACI Committee 315, "Seismic Details for Special Ductile Frames," *Journal ACI*, Vol. 67, No. 5, mayo de 1970, págs. 374-379.

13.5 F. Leonhardt, "Das Bewehren von Stahlbetontragwerken," *Beton- Kalender 1971*, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín, parte II, págs. 303-398.

13.6 R. E. Untrauer y R. L. Henry, "Influence of Normal Presure on Bond Strength," *Journal ACI*, Vol. 62, No. 5, mayo de 1965, págs 577-586.

13.7 G. Waestlund, "Use of High-Strength Steel in Reinforced Concrete," *Journal ACI*, Vol. 30, No. 12 junio de 1959, págs 1237-1250.

13.8 P. E. Regan, "Behaviour of Reinforced and Prestressed Concrete Subjected to Shear Forces," *Proceedings of the Institution of Civil Engineers*, Suplemento XVII, 1971, publicación 744IS, págs. 337-364.

13.9 F. Leonhardt, "Reducing the Shear Reinforcement in Reinforced Concrete Beams and Slabs," *Magazine of Concrete Research*, Vol. 17, No. 53, diciembre de 1965, págs. 187-198.

13.10 M. P. Collins y P. Lampert, "Redistribution of Moments at Cracking—The Key to Simpler Torsion Design," Publicación 71-21, Departament of Civil Engineering, University of Toronto, 1971, pág. 51.

13.11 T. Baumann y H. Rüsch, "Schubversuche mit indirekter Krafteinleitung," Deutcher Ausschuss für Stahlbeton, Bulletin No. 210, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín, 1970, págs 1-41.

13.12 "Bulding Code Requirements for Reinforced Concrete ACI 318-71," American Concrete Institute, Detroit, 1971, pág. 78.

13.13 P. M. Ferguson y S. I. Husain, "Strength Effect of Cutting Off Tension Bars in Concrete Beams," Research Report, 80-IF, University of Texas, Austin, 1967.

13.14 F. Leonhardt y K.-T. Teichen, "Druck-Stösse von Bewehrungsstäben," *Deutscher Ausschuss für Stahlbeton*, Bulletin No. 222, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín, 1972, págs. 1—53.

13.15 B. Bresler y P. H. Gilbert, "Tie Requirements for Reinforced Concrete Columns," *Journal ACI*, Vol. 58, No. 5, noviembre de 1961, págs. 555-570.

13.16 G. Franz y H. Niedenhoff, *The Reinforcement of Brackets and Short Deep Beams*, Cement and Concrete Association, Library Translation No. 114, Londres, 1963.

13.17 L. B. Kriz y C. H. Raths, "Connections in Precast Concrete Structures —Strength of Corbels", *Journal of the Prestressed Concrete Institute*, Vol. 10, No. 1, febrero de 1965, págs. 16-61.

13.18 "Neubearbeitung von DIN 4224, Bemessung im Beton-und Stahlbetonbau," Deutcher Ausschuss für Stahlbeton, 1968.

13.19 A. Mehmel y W. Freitag, "Trafähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen," *Der Bauingenieur*, Vol. 42, No. 10, octubre de 1967, págs. 362-369.

13.20 F. Dischinger, *Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des Wandartigen Balkens*, Vol. 1, International Association for Bridge and Structural Engineering, Zurich, 1932.

13.21 F. Leonhardt y R. Walther, "Wandartiger Träger", Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, Bulletin No. 178, Wilhelm Ernst & Sohn, Berlín, 1966, pág 159.

13.22 Comité Européen du Béton-Federation Internationale de la Précontrainte, *International Recommendations for the Design and Construction of Concrete Structures*, apéndice 3, *la* edic., junio de 1970. publicado por la Cement and Concrete Association, Londres.

13.23 R. Thon, "Beitrag zur Berechnung und Bemessung durchlaufender Wandartiger Träger," *Beton-und Stahlbetonbau*, Vol. 53, No. 12, diciembre de 1958, págs. 297-306.

13.24 Joint ASCE-ACI Task Committee 426, "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members," *Journal of the Structural Division, ASCE*, Vol. 99, ST6, junio de 1973, págs 1091-1187.

13.25 B. Mayfield, F. K. Kong, A. Bennison, y J. C. D. T. Davies, "Corner Joint Details in Structural Lightweight Concrete", *Journal ACI*, Vol. 68, No. 5, mayo 1971, págs. 366-372.

13.26 E. L. Kemp y P. R. Mukherjee, "Inelastic Behaviour of Concrete Knee Joints," *The Consulting Engineer*, octubre de 1968, págs. 44-48.

13.27 R. A. Swann, "Flexural Strength of Corners of Reinforced Concrete Portal Frames," Technical Report, TRA 434, Cement and Concrete Association, Londres, noviembre de 1969. pág. 14.

13.28 I. H. E. Nilsson, "Ramhorn av Armerad Betong med Positivt Moment," Forsokrapporter 1-4, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1968.

13.29 G. Somerville y H. P. J. Taylor, "The Influence of Reinforcement Detailing on the Strenght of Concrete Structures," *The Structural Engineer*, Vol. 50, No. 1, enero de 1972, págs 7-19.

13.30 I. H. E. Nilsson, y A. Losberg, A discussion of the paper "Opportunities in Bond Research" by ACI Committee 408, *Proceedings ACI Journal*, Vol. 68, No. 5, mayo de 1971, págs. 393-396.

13.31 I. H. E. Nilsson, "Ramhorn av Armerad Betong med Positivt Moment. Konstruktiv utformming av ramhorn med dragen insida," Report 68:2, Chalmers University of Technology, Göteborg, 1968, pág 39.

13.32 H. W. Conner y P. H. Kaar, "Precast Rigid Frame Buildings—Component Tests," Bulletin D123, Portland Cement Association, Development Department, 1967, págs. 12.

13.13 V. V. Bertero y G. McClure, "Behaviour of Reinforced Concrete Frames Subjected to Repeated Reversible Loads," *Journal ACI*, Vol. 61, No. 10, octubre de 1964, pp. 1305-1330.

13.34 F. Beaufait y R. R. Williams, "Experimental Study of Reinforced Concrete Frames Subjected to Alternating Sway Forces," *Journal ACI*, Vol. 65, No. 11, noviembre de 1968, págs. 980-984.

13.35 N. W. Hanson, Discussion of Ref. 13.34, *Journal ACI*, Vol. 66, No. 5, mayo de 1969, págs. 442-443.

13.36 G. W. Renton, "The Behaviour of Reinforced Concrete Beam-Column Joints Under Cyclic Loading," Master of Engineering thesis, University of Canterbury, Cristchurch, Nueva Zelandia, 1972, págs 181.

13.37 N. W. Hanson y H. W. Conner, "Seismic Resistance of Reinforced Concrete Beam-Column Joints," *Proceedings Structural Division ASCE*, Vol. 93, ST5, octubre de 1967, págs. 533-560.

13.38 "Recommended Lateral Force Requirements and Commentary," Seismology Committee, Structural Engineers Association of California, 1969, revisiones de 1970 y 1971.
13.39 L. M. Megget, "Anchorage of Beam Reinforcement in Seismic Resistant Reinforced Concrete Frames." Master of Engineering report, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia, 1971, págs 85.
13.40 B. J. Smith, "Exterior Reinforced Concrete Joints With Low Axial Load Under Seismic Loading," Master of Engineering report, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia, 1972, págs 103.
13.41 R. N. Patton, "Behaviour Under Seismic Loading of Reinforced Concrete Beam-Column Joints With Anchorage Blocks," Master of Engineering report, University of Canterbury, Christchurch, Nueva Zelandia, 1972, pág 103.
13.42 R. Park y T. Paulay, "Behaviour of Reinforced Concrete External Beam-Column Joints Under Cyclic Loading," Vol. I., Paper 88, *Proceedings, Fifth World Conference on Earthquake Engineering*, Roma. 1973, pág. 10.
13.43 N. W. Hanson, "Seismic Resistance of Concrete Frames With Grade 60 Reinforcement," *Journal of the Structural Division ASCE*, Vol. 93, ST5, octubre de 1971, págs. 533-560.
13.44 R. Park y K. J. Thompson, "Behaviour of Prestressed, Partially Prestressed and Reinforced Concrete Interior Beam-Column Assemblies under Cyclic Loading: Test Results of Units 1 to 7," Research Report 74-9, Department of Civil Engineering, University of Canterbury, 1974, pág 42.
13.45 Y. Ohsaki, M. Watabe, y Y. Matsushima. "Experimental Study on Five-Storey Full Size Apartment House of Reinforced Concrete Walled Frames," *Proceedings of the U. S.-Japan Seminar on Earthquake Engineering With Emphasis on the Safety of School Buildings*, septiembre de 1970, págs. 240-266.
13.46 K. Ogura, "Outline of Damage to Reinforced Concrete Structures". Ref. 13.45, págs. 38-48.
13.47 G. K. Wilby, "Response of Reinforced Concrete Structures to Earthquake Motions." tesis doctoral en preparación, 1974, University of Canterbury, Nueva Zelandia.
13.48 C. H. Henager, "A Steel Fibrous, Ductile Concrete Joint for Seismic-Resistant Structures," Symposium on Reinforced Concrete Structures in Seismic Zones, ACI Annual Convention, San Francisco, 1974. pág. 23.

Indice

Aberturas en muros de cortante, 658-659
Acción de arco, 294-295
Acción de viga, 288-289
Acero de compresión en las vigas, 83-84, 87-88, 444-445, 453-454, 459-460, 603-605
Acero transversal especial, 603-607, 609-610, 641-642
Acero, *véase* Refuerzo
Adherencia a flexión, 315-317, 430-431
Adherencia (anclaje):
  adherencia a flexión, 407-408, 430-431
  anclaje o longitud de desarrollo, 406-407, 694-696
  anclaje recto
    en compresión, 429-430, 773-774
  carga cíclica y repetida, 417-419, 598-599
  empalmes:
    a compresión, 435-436, 711-712
    a tensión, 433-435
    mecánicos o de contacto, 437-438
  en tensión, 423-424, 773-774
  falla de fisura, 416-417
  ganchos, 424-425
  naturaleza de la resistencia de adherencia, 407-408
  resistencia utilizable, 420-421
Adherencia de anclaje, 406-407, 694-696, 773-774.
Agrietado del concreto:
  anchos permisibles, 493-494, 507-508
  causas del, 494-495
  control de los anchos de grietas de flexión, 507-508
  mecanismo del agrietamiento por flexión:
    enfoque estadístico. 189-192
    enfoque general, 501-504
    teoría clásica, 496-497
    teoría del no-deslizamiento, 499-500
Alineación, gráficas para la longitud efectiva de, 193
Análisis del momento completo, 521-522
Análisis dinámico, 567-568, 585-586
Anclaje, 406-407
Anclajes rectos, en compresión, 429-430
  en tensión, 423-424
Ancho efectivo de las secciones T, 103-104

Bloque de esfuerzo rectangular equivalente, 55-56, 59-62, 233-234
Bloque de esfuerzos de compresión del concreto, 55-56, 59-62, 231-233
Cambios de dirección de las fuerzas, 691-692
Centroide plástico de las columnas, 132-133

Columnas:
c rgadas axialmente, 123-124, 466
cargadas excéntricamente, 128-130, 468-469
centroide plástico, 132-133
con aros, 603-604, 609-610, 613-614, 713-714
cortas, 123-124, 128-130, 159-160, 466
cuantía máxima del refuerzo, 148-150
cuantía mínima del refuerzo, 148-150
hélices, 124-125, 603-605, 713-714
ductilidad de curvatura de las secciones, 224, 228-229, 239-240, 521-522
esbeltas, *véase* Columnas esbeltas
resistencia a flexión biaxial de secciones:
gráficas de diseño, 167-168-169
métodos aproximados, 163-164
teoría general, 159-160
teoría elástica para esfuerzos directos y de flexión, 466, 468-469
empalmes de 433-438, 711-712
712
con estribos, 124-125. 713-714
falla a tensión, 133-134, 141-143, 154-155
resistencia a cortante, 302-303, 320, 603-604-605, 612-613
resistencia a flexión uniaxial de las secciones:
falla a compresión, 131-132, 134-135, 143-144, 154-156
falla balanceada, 132-133
sección circular de columna, 153-154
gráficas de diseño, 158-159
suposiciones de la teoría, 51-52
secciones con varillas en arreglo circular, 153-154
secciones rectangulares con varillas en las cuatro caras, 148-150
secciones rectangulares con varillas en una o dos caras:
análisis de, 130-131
diseño de, 140-141
Columnas cargadas axialmente:
análisis y diseño, 123-124, 468-469
carga axial combinada con flexión, 128-130, 468-469
Columnas cargadas excéntricamente, 128-130, 468-469
Columnas con estribos, 124-125
Columnas con hélices, 124-125, 603-605, 609-610
Columnas cortas, 123-124, 128-130, 159-160, 466
Columnas de estribos, 603-605, 609-610, 613-614
Columnas esbeltas:
comportamiento, 178-179
definición de, 178-179
diseño aproximado mediante el método amplificador del momento, 186
diseño "exacto", 184-185
homogramas para el cálculo de la longitud efectiva, 193
longitud efectiva, 189-192
momentos adicionales en, 178-179
momentos secundarios, 179-180
rigidez a flexión, 189-192
Columnas largas, *véase* Columnas esbeltas
Comportamiento bajo cargas cíclicas de los miembros:
a flexión, 262-263, 592-593
adherencia, 417-419, 592-593
cortante, 340-343, 592-593
Comportamiento bajo carga de servicio, 441
Comportamiento del concreto bajo esfuerzos combinados, 19-20
Comportamiento bajo carga repetida, *véase* Comportamiento bajo carga cíclica
Comportamiento cíclico esfuerzo - deformación
en el acero, 43-45
en el concreto, 16-17
Comportamiento esfuerzo - deformación:
en el acero, 40-41, 43-45
en el concreto, 13-14, 16-17
Comportamiento monotónico esfuerzo - deformación:
en el acero, 40-41
en el concreto, 13-14
Concreto:
bloque de esfuerzos de compresión, 55-56, 59-62, 231-233
comportamiento bajo esfuerzos combinados, 19-20
comportamiento cíclico esfuerzo - deformación, 16-17
comportamiento monotónico esfuerzo - deformación, 13-14
Condiciones de falla balanceada a flexión:
sección de viga T, 101-102
sección rectangular de columna, 132-133
sección rectangular de viga, 69-70, 90-91
rectangulares, 22-25, 28-30, 228-229 231-233, 236-237, 603-605 609-610, 613-614, 713-714

confinamiento mediante hélices, 22-25, 27-28, 228-229, 603-605, 609-610
contracción, 35-36, 473-474
confinamiento mediante aros
deformación máxima en la resistencia a flexión, 57-58, 228-229, 231-233, 256-258
flujo plástico, 31-33, 491-492
módulo de elasticidad, 14-16, 442-443
módulo de ruptura, 17-18
relación de Poisson, 19-20
resistencia a compresión, 11
resistencia a tensión, 17-18
Construcción, Juntas de 335-339, 639-640
Control de deflexiones, 479-480
Control de los anchos de grietas de flexión, 507-508
Confinamiento del concreto:
mediante hélices, 22-25, 27-28, 228-229, 603-605, 609-610
por estribos rectangulares, 22-25, 28-30, 228-229, 231-233, 236-237, 603-605, 609-610, 613-614, 713-714
Contracción del concreto, 35-36, 473-474
Contenido (o cuantía) de refuerzo máximo:
columnas, 73-74, 91-92, 100-101, 602-603,
de vigas, 605-606-607
Contenido mínimo de refuerzo:
en columnas, 148-150, 603-605
en vigas, 79-80, 602-603
Cortante acoplados, muros de
análisis de la teoría clásica laminar, 662-663
análisis elastoplástico, 665-666
principios de diseño, 682-683
refuerzo diagonal, 676-677
resistencia a cortante, 679-681
resistencia a flexión, 679-681
resistencia de vigas de acoplamiento, 669-670
Cortante en la entrecara:
entrecaras no agrietadas del concreto, 330-331
entrecaras preagrietadas del concreto, 330-332
juntas de construcción, 335-339, 639-640
Cubierta protectora, 493-494
Curvatura de un miembro, 202-203, 483-484

Deflexiones:
carga de primera cedencia, 573-577
bajo carga de servicio:
bajo carga última:
cálculo de, 480-481-482, 486-487
cálculos más exactos, 486-487
cargas cíclicas, 262-263
control de, 479-480
debido a la contracción del concreto, 484-485, 488-489
permisibles, 477-478, 479-480-481
rotación de articulación plástica, 252-253
suma de las rotaciones discretas en las grietas, 258-259
teoría, 242-243-244, 245, 325-326, 483-484, 488-489, 491-492
teoría, 242-243-244, 245, 249-250, 258-260-261, 265-266
Deformación en el concreto:
en la curvatura última, 59-60, 211-212, 228-229, 231-233, 256-258, 536, 601-602
en la resistencia a flexión, 57-58, 2228-229, 231-233, 256-258
Deformación máxima en el concreto:
a la resistencia a flexión, 57-58, 228-229, 231-233, 293-294, 298
en la curvatura última, 59-60, 228-229, 231-233, 256-258
Deformaciones, *véase* Deflexiones
Detallado:
cambios de dirección de las fuerzas, 690-691
columnas:
empalmes de, 711-712
refuerzo transversal, 713-714
de vigas:
anclajes, 683-685
interacción del refuerzo de flexión y de cortante, 699-702
puntos de apoyo y de carga, 706
juntas (conexiones) de rodilla viga - columna:
carga repetida en, 750-751
que abren, 746-747
que cierran, 743-744
juntas (conexiones) de viga - columna de marcos de pisos múltiples
a cortante, 605-606, 612-613, 774-775
anclaje, 773-774
compresión axial, 769-770
confinamiento, 776-777
de marcos espaciales, 605-606, 612-613, 777-778
deformación del núcleo, 769-771

exteriores, 605-606, 612-613, 752-753, 773-774
interiores, 605-606, 612-613, 763-764
ménsulas:
comportamiento de, 715-716
dimensionamiento de, 720
mecanismos de falla, 717-718
objetivos del, 689-690
propósito del refuerzo, 690-691
vigas de gran peralte:
continuas, 726-727, 730-732
introducción de cargas concentradas, 738-740-741
refuerzo del alma, 726-727
simplemente apoyadas, 726-727, 729-730
Diseño al límite:
cálculo de rotaciones de articulaciones plásticas requeridas, 515-516, 535-536, 541-542
comentarios al, 564-565
de esfuerzos y deflexiones de la carga de
distribución de momentos a flexión, 531-532, 534-535
métodos de, 534-535, 538-539
servicio, 537, 549-550
Diseño dúctil para cargas sísmicas:
de marcos, 5-6, 57-58, 585-586, 591-592, 599-600, 602-603, 605-607, 613-614, 622-623
de muros de cortante, 634-635, 641-642, 650-651, 665-666, 682-683
Diseño por capacidad, 622-623
Diseño por cortante, *véase* Resistencia a cortante
Diseño por flexión, *véase* Resistencia a flexión de las secciones; Método alterno de diseño
Diseño por servicio y resistencia, 3-4
Diseño resistentes contra sismo, *véase* Diseño sísmico
Diseño sísmico:
acero transversal especial, 603-605, 609-610, 713-714
análisis dinámicos, 567-568, 585-586
carga, 565-566
conceptos básicos del, 565-566
conexiones de vigas - columna, 605-606, 612-613, 773-774
de columnas:
ductilidad, 603-605, 609-610, 613-614
614
forma de evitar articulaciones plásticas, 603-605, 607-608
resistencia a cortante, 603-604-605, 612-613
de vigas:
ductilidad de curvatura, 602-603, 605-607
pandeo del refuerzo, 603-607
resistencia a cortante, 603-604, 607-608, 682-683
diseño por capacidad:
determinación de la carga axial para columnas, 626-627
resistencia a cortante de columnas, 629
resistencia a cortante de vigas, 603, 604
resistencia a flexión de columnas, 624-625
disipación de energía mediante dispositivos especiales, 621-622
efectos de carga cíclica, 591-592
efectos de la carga biaxial, 599-600
efectos de la velocidad de carga, 590-591
efectos de las cargas alternas, *véase* Efectos de carga cíclicas
mecanismos de colapso estático:
mecanismo de columna, 578-580
mecanismo de viga, 580-581
muros de cortante, 634-635, 641-642, 650-651, 665-666, 682-683
provisiones especiales del ACI 318-71, 602-603
requerimientos de ductilidad de curvatura, 573-576, 585-586
586
requerimientos de ductilidad de desplazamiento, 567-568
Disipación de energía mediante dispositivos especiales, 621-622
Ductilidad:
factor de ductilidad de curvatura, 212-213
factor de ductilidad de desplazamiento, 567-568
gráficas para el factor de ductilidad de curvatura de vigas, 215-218
previsiones para 7-8, 222-223
secciones con concreto confinado, 218
secciones no confinadas de columna, 224
secciones no confinada de viga, 209-210
Ductilidad de curvatura:
cálculo de la requerida, 515-516, 538-539, 541-542, 573-576, 585-586, 605-607, 613-614

Efecto del pandeo en columnas esbeltas, 187-188
Efectos de las cargas alternas, *véase* Comportamiento bajo carga cíclica,
Efectos de la longitud de columnas, *véase* Columnas esbeltas
Efectos de la velocidad de carga, 588-591
Efectos del tamaño en la resistencia a cortante, 296-297
Empalmes:
a compresión, 435-436, 711-712
a tensión, 433-435, 603-605
mecánicos o de contacto, 437-438
Esfuerzos de contracción:
secciones asimétricas, 475-476
secciones simétricas, 473-474
Esfuerzo permisible, 2-3, 456-457
Esfuerzos principales, 281
Estribos, *véase* Refuerzo del alma
Factor de ductilidad de desplazamiento, 567-568
Factores de carga, 4-5
Factor de reducción de capacidad, 5-6
Falla (en flexión) a compresión:
secciones de columna, 131-132, 134-135, 143-144, 154-156
secciones de viga, 68-69, 85-86
Falla a tensión (por flexión):
secciones de columnas, 133-134, 141-143, 154-155
secciones de vigas, 66-67, 85-86
Falla por fisuras, 479-480
Flexión biaxial:
columnas, 159-160, 167-169
vigas, 110-111
Flexión combinada con carga axial, 128-130, 468-469
Flujo plástico del concreto, 31-33, 180-181
Fricción cortante, 330-332, 335-339

Ganchos de anclaje, 424-425
Gráficas y tablas de diseño:
de columnas, 158-159, 167-169
de vigas, 75-79

Inestabilidad lateral de las vigas, 117-118
Interacción carga axial - momento:
en columnas, 128-130, 157-159
en muros de cortante, 652-653
Interacción cortante - torsión, 370-371, 382-383
Interacción de muros de cortante con marcos, 657-658
Interacción de muros de cortante con otros muros de cortante, 654-655
Interacción flexión - cortante, 310-311
Interacción flexión - cortante - fuerza axial, 320
Interacción flexión - torsión, 368-369, 389-390
Interacción torsión - cortante, 370-371, 382-383

Juntas de construcción, 335-339, 639-640
Juntas (conexiones) de rodilla de vigas - columnas:
carga repetida, 750-751
que abren, 746-747
que cierran, 743-744
Juntas (conexiones) de viga - columna de marcos de pisos múltiples:
compresión axial, 769-770
deformación del núcleo, 769-771
diseño:
anclaje, 773-774
confinamiento, 776-777
cortante, 605-606, 612-613, 774-775
exterior, 605-606, 612-613, 752-753, 773-774
interior, 605-606, 612-613, 763-764
marcos espaciales, 605-606, 612-613, 777-778

Longitud de desarrollo, 423-424,
Longitud de la articulación plástica, 251-252, 256-259
Longitud efectiva de las columnas, 189-192

Marcos:
análisis del momento completo en, 521-522
diseño al límite, 531-532, 534-535
diseño dúctil por cargas sísmicas, 575-576, 585-586, 591-592, 599-600, 602-603, 605-607, 613-614, 622-623
momentos a flexión de la teoría elástica, 524-525
redistribución de momentos, 515-516, 526-527
véase también Vigas; Juntas de vigas-columnas; *y* Columnas
Mecanismo de armadura, 302-304
Mecanismo de formación de grietas a flexión, 496-497

Mecanismos de colapso estático, 515-516, 531-532, 534-535, 578-581
Ménsulas
  comportamiento de, 715-716
  dimensionamiento de, 720
  mecanismos de falla, 717-718
Método de diseño del esfuerzo de trabajo, 1-2, 456-457
Método de la amplificación de momentos para columnas, 186
Métodos de diseño, 1-2
Miembros a flexión, *véase* Vigas
Miembros con flexión, *véase* Vigas
Miembros con flexión y carga axial, *véase* Columnas
Módulo de elasticidad:
  del concreto, 14-16, 442-443
  del acero, 40-41
Módulo efectivo de elasticidad del concreto, 442-443
Módulo efectivo de las columnas, 189-192
Módulo de ruptura del concreto, 17-18
Momento de agrietamiento, 483-484
Momento de enercia, 204, 245-247, 453-454, 483-484
Momentos adicionales en las columnas, 178-179
Momentos flexionantes
  análisis completo, 521-522
  diseño al límite, 531-532, 534-535
Momentos secundarios en columnas, 179-180
Muros bajos de cortante con secciones rectangulares, 641-642
Muros de cortante:
  abertura, 658-659
  diseño dúctil para carga sísmica, 634-635, 641-642, 650-651, 665-666, 682-683
  interacción con marcos, 657-658
  interacción con otros muros, 654-655
  interacción momento - carga axial, 652-653
  muros acoplados:
    análisis de la teoría elástica laminar, 662-663
    análisis elastoplástico, 665-666
    principios de diseño, 682-683
    refuerzo diagonal, 676-677
    resistencia a cortante, 679-681
    resistencia a flexión, 679-681
    resistencia de vigas de acoplamiento, 669-670
  muros altos con secciones rectangulares:
  muros con patines, 650-651
  muros cortos con secciones rectangulares, 641-642
  muros voladizos, 634-635
Muros de cortante altos con secciones rectangulares, 634-635
Muros de cortante con patines, 650-651
Muros en voladizo, *véase* Muros de cortante
Muros, *véase* Muros de cortante

Objetivos del detallado, 689-690
Otro método de diseño:
  secciones rectangulares de vigas doblemente reforzadas, 461-462
  general, 1-2, 4-5, 456-457
  secciones de vigas T, 463-464
  secciones rectangulares de vigas simplemente reforzadas, 457-458
  véase también Teoría elástica para los esfuerzos a flexión en vigas; Método de diseño del esfuerzo de trabajo

Peralte variable del miembro, 283-284
Punto de cedencia, 40-41

Redistribución de momentos, 515-516, 526-527
Redistribución de momentos, 515-516, 526-527
Refuerzo (acero de):
  anclaje, *véase* Adherencia
  comportamiento cíclico esfuerzo - deformación, 43-45
  comportamiento monotónico esfuerzo - deformación, 40-41
  corrugado, 39-40
  módulo de elasticidad, 40-41
  pesos y dimensiones de las varillas corrugadas, 40-41
Refuerzo de varillas corrugadas, 39-40
Refuerzo diagonal por cortante, 676-677
Relación de Poisson del concreto, 19-20
Relaciones momento - curvatura, 202-203, 205-206, 209-210, 224, 228-229, 262-263, 301-302
Resistencia:
  confiable, 5-6, 8-9, 623-626
  diseño de, 3-4
  ideal, 601, 603, 5-6, 8-9, 623-626

  probable, 8-9, 625-626
  sobrerresistencia, 9-11, 623-624
Refuerzo del alma:
  a cortante, 302-303, 603-608, 612-613, 638-639, 669-670
  a torsión, 372-373, 382-383
Resistencia a compresión del concreto, 13-14
Resistencia a cortante:
  acción de arco, 294-295
  acción de viga, 288-289
  cargas cíclicas y repetidas, 340-343, 603-608, 612-613
  cortante en la entrecara:
    entrecaras no agrietadas, 330-321
    entrecaras preagrietadas del concreto, 330-332
  diseño, 299-302, 307-309, 320, 603-605 607-608, 612-613, 638-639, 641-642, 679-681
  efecto en las articulaciones plásticas, 315-317
  efecto en los requerimientos del acero a flexión, 311-312
  efectos del tamaño, 296-297
  esfuerzos principales, 281
  interacción cortante-flexión-fuerza axial, 320
  interacción flexión - cortante, 310-311
  juntas de construcción, 335-339, 639-640
  mecanismo de armadura, 302-304
  mecanismo de resistencia:
  juntas de construcción, 335-339, 639-640
  columnas, 320
  vigas con refuerzo del alma, 302-303
  vigas sin refuerzo del alma, 285
  refuerzo del alma, 302-303, 603-605, 607-608, 612-613
  peralte variable del miembro, 283-284
  refuerzo diagonal, 676-677
Resistencia a flexión de las secciones:
  flexión biaxial, 110-111, 159-160
  sección rectangular de columna, 130-131, 140-141, 148-150, 635-636
  sección rectangular de viga, 65-66, 73-74, 83-84, 87-88, 669-670
  secciones que tienen varillas a distintos niveles o acero que no tiene una resistencia de cedencia bien definida, 105-106, 148-150, 153-154
  secciones T e I de vigas, 92, 95-97 99-100
  suposiciones de la teoría 51-52
Resistencia a la cedencia, 40-41
Resistencia a tensión del concreto, 17-18
Resistencia a torsión:
  del concreto simple:
  interacción flexión - torsión, 368-369, 389-390
    comportamiento elástico, 359-361
    comportamiento plástico, 362-363
  interacción torsión - cortante, 370-371, 382-383
  refuerzo del alma, 372-373, 382-383
    secciones tubulares, 365-366
  torsión primaria, 357-358
  torsión secundaria, 357-358
Resistencia confiable, 5, 6, 8-9, 623-626
Resistencia de diseño, 3-4
Resistencia Ideal, 5-6, 8-9, 623-626 625-626
Resistencia probable, 8-9, 625-626
Rigidez a cortante, 325-327
Rigidez a flexión:
  efectiva, 245-247, 483-484
  en secciones no agrietadas, 452-454, 482-482
Rotación de la articulación plástica:
  cálculo de la requerida, 515-516, 541-542, 573-574, 578-580, 585-586
Rigidez efectiva a flexión, 245-247, 483-484
Sección circular de columna, 153-154
Sección rectangular de columnas, 130-131, 140-141, 148-150, 153-154, 159-160, 464-465
Sección rectangular de viga:
  doblemente reforzadas, 83-84, 87-88, 110-111, 444-445, 451-452, 461-462, 602-603, 669-670
  simplemente reforzadas, 65-66, 73-74, 444-445, 451-452, 457-458
Sección transformada, 451-452, 468-469
Secciones comprimidas no rectangulares, 59-60
Secciones de viga doblemente reforzadas, 83-84, 87-88, 110-111, 444-445, 451-452, 461-462, 602-603, 669-670
Secciones de viga T:
  análisis por flexión, 96-97, 447-448
  ancho efectivo, 103-104, 368-369
  diseño por flexión, 99-100, 463-464
Secciones de vigas reforzadas simplemente, 65-66, 73-74, 444-445, 451-452, 457-458
Secciones tubulares, 365-366

Servicio, *véase también* Agrietado; Deflexiones
Sobrerresistencia, 9-11, 623-624

Teoría elástica para los esfuerzos a flexión en las vigas:
diseño, 456-457, 457-458, 463-464
esfuerzos de contracción, 473-474
método de la sección transformada, 451-452
método del par interno, 444-445
suposición, 443-4444
Teoría elástica para los esfuerzos directos y a flexión en las columnas, 466, 468-469
Torsión en estructuras estáticamente
Teoría elástica para los esfuerzos a flexión: indeterminadas, 398-399
Torsión primaria, 357-358
Torsión secundaria, 357-358

Varillas dobladas hacia arriba para refuerzo a cortante, *véase* Refuerzo del alma
Varillas, *véase* Refuerzo
Vigas:
anclajes de, 694-696
cuantía máxima de refuerzo, 73-74, 91-92, 100-101, 602-603, 605-607
cuantía mínima de refuerzo, 79-80, 602-603
ductilidad de curvatura de las secciones, 209-210, 228-229, 585-586,
empalmes, 433-436
inestabilidad lateral, 117-118
interacción del refuerzo de cortante y de flexión, 699-702
pandeo de varillas a compresión, 603-607, 713-714
puntos de apoyo y de carga, 706
recorte del refuerzo a flexión, 710-711, 575-576, 605-607
resistencia a cortante:
con refuerzo del alma, 307-309, 607-608
sin refuerzo del alma, 299-302
resistencia a flexión de las secciones:
falla a compresión, 68-69, 85-86
falla a la tensión, 66-67, 85-86
falla balanceada, 69-70, 90-91
flexión biaxial, 110-11
gráficas y tablas de diseño, 75-78, 78-79
secciones con varillas a distintos niveles o acero sin una resistencia bien definida de cedencia 105-106
secciones rectangulares doblemente reforzadas:
análisis 83-84
diseño, 87-88
secciones rectangulares simplemente reforzadas:
análisis, 65-66
diseño, 73-74
secciones T e I:
análisis, 96-97
diseño, 99-100
teoría elástica para los esfuerzos de flexión
diseño, 456-457, 463-464
esfuerzos de contracción, 473-474
método de la sección transformada, 451-452
método del par interno, 444-445
suposición, 443-444
vigas de acoplamiento de muros de cortante, 669-670
vigas de gran peralte:
continuas, 726-727, 730-732
introducción de cargas concentradas, 738-741
refuerzo del alma, 733-734,
simplemente soportadas, 726-727

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 22 DE ABRIL DE 1988, EN LOS TALLERES DE PROGRAMAS EDUCATIVOS, S. A. DE C. V. CHABACANO NUM. 65, LOCAL "A" MEXICO 8, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 1,000 EJEMPLARES Y SOBRANTES PARA REPOSICION

Obra afín:

DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO
Arthur H. Nilson

Esta es una obra muy completa que ofrece una clara explicación de la mecánica y del comportamiento de las estructuras de concreto presforzado, y al mismo tiempo profundiza en los métodos y prácticas del diseño. El autor dedica especial atención a la teoría y diseño de los miembros precolados del concreto pretensado. El material del texto refleja las metodologías que se usan y se están desarrollando actualmente en la construcción de miembros y sus conexiones, haciendo énfasis en los detalles de las uniones precoladas.

El contenido de este libro agrupa los siguientes temas: Conceptos básicos, Materiales, Análisis por flexión, Diseño de vigas, Cortante y torsión, Pérdida parcial de la fuerza de presforzado, Vigas compuestas, Vigas continuas y pórticos, Deflexiones, Losas, Miembros cargados axialmente, Construcción precolada y Aplicaciones. Además tiene Apéndices sobre Ayudas para el diseño, Herrajes para el postensado y Factores de conversión del SI y Ecuaciones equivalentes del diseño en SI.

La obra tiene numerosas ilustraciones que facilitan la explicación de los conceptos fundamentales y los procedimientos del diseño y además diversos problemas tomados de la práctica. Debido a ello y a lo didáctico es un buen libro de texto para estudiantes y profesores de esta materia en las carreras de Ingeniería Civil y Arquitectura. También es una valiosa obra para profesionistas de esta especialidad.

Servicio, *véase también* Agrietado; Deflexiones
Sobrerresistencia, 9-11, 623-624

Teoría elástica para los esfuerzos a flexión en las vigas:
diseño, 456-457, 457-458, 463-464
esfuerzos de contracción, 473-474
método de la sección transformada, 451-452
método del par interno, 444-445
suposición, 443-4444
Teoría elástica para los esfuerzos directos y a flexión en las columnas, 466, 468-469
Torsión en estructuras estáticamente
Teoría elástica para los esfuerzos a flexión: indeterminadas, 398-399
Torsión primaria, 357-358
Torsión secundaria, 357-358

Varillas dobladas hacia arriba para refuerzo a cortante, *véase* Refuerzo del alma
Varillas, *véase* Refuerzo
Vigas:
anclajes de, 694-696
cuantía máxima de refuerzo, 73-74, 91-92, 100-101, 602-603, 605-607
cuantía mínima de refuerzo, 79-80, 602-603
ductilidad de curvatura de las secciones, 209-210, 228-229, 585-586,
empalmes, 433-436
inestabilidad lateral, 117-118
interacción del refuerzo de cortante y de flexión, 699-702
pandeo de varillas a compresión, 603-607, 713-714
puntos de apoyo y de carga, 706
recorte del refuerzo a flexión, 710-711, 575-576, 605-607
resistencia a cortante:
con refuerzo del alma, 307-309, 607-608
sin refuerzo del alma, 299-302
resistencia a flexión de las secciones:
falla a compresión, 68-69, 85-86
falla a la tensión, 66-67, 85-86
falla balanceada, 69-70, 90-91
flexión biaxial, 110-11
gráficas y tablas de diseño, 75-78, 78-79
secciones con varillas a distintos niveles o acero sin una resistencia bien definida de cedencia 105-106
secciones rectangulares doblemente reforzadas:
análisis 83-84
diseño, 87-88
secciones rectangulares simplemente reforzadas:
análisis, 65-66
diseño, 73-74
secciones T e I:
análisis, 96-97
diseño, 99-100
teoría elástica para los esfuerzos de flexión
diseño, 456-457, 463-464
esfuerzos de contracción, 473-474
método de la sección transformada, 451-452
método del par interno, 444-445
suposición, 443-444
vigas de acoplamiento de muros de cortante, 669-670
vigas de gran peralte:
continuas, 726-727, 730-732
introducción de cargas concentradas, 738-741
refuerzo del alma, 733-734,
simplemente soportadas, 726-727

ESTA OBRA SE TERMINO DE IMPRIMIR EL DIA 22 DE ABRIL DE 1988, EN LOS TALLERES DE PROGRAMAS EDUCATIVOS, S. A. DE C. V. CHABACANO NUM. 65, LOCAL "A" MEXICO 8, D. F.

LA EDICION CONSTA DE 1,000 EJEMPLARES Y SOBRANTES PARA REPOSICION

Obra afín:

DISEÑO DE ESTRUCTURAS DE CONCRETO REFORZADO
Arthur H. Nilson

Esta es una obra muy completa que ofrece una clara explicación de la mecánica y del comportamiento de las estructuras de concreto presforzado, y al mismo tiempo profundiza en los métodos y prácticas del diseño. El autor dedica especial atención a la teoría y diseño de los miembros precolados del concreto pretensado. El material del texto refleja las metodologías que se usan y se están desarrollando actualmente en la construcción de miembros y sus conexiones, haciendo énfasis en los detalles de las uniones precoladas.

El contenido de este libro agrupa los siguientes temas: Conceptos básicos, Materiales, Análisis por flexión, Diseño de vigas, Cortante y torsión, Pérdida parcial de la fuerza de presforzado, Vigas compuestas, Vigas continuas y pórticos, Deflexiones, Losas, Miembros cargados axialmente, Construcción precolada y Aplicaciones. Además tiene Apéndices sobre Ayudas para el diseño, Herrajes para el postensado y Factores de conversión del SI y Ecuaciones equivalentes del diseño en SI.

La obra tiene numerosas ilustraciones que facilitan la explicación de los conceptos fundamentales y los procedimientos del diseño y además diversos problemas tomados de la práctica. Debido a ello y a lo didáctico es un buen libro de texto para estudiantes y profesores de esta materia en las carreras de Ingeniería Civil y Arquitectura. También es una valiosa obra para profesionistas de esta especialidad.