
Cuarta edición
Aspectos fundamentales del
CONCRETO REFORZADO
González Cuevas
Robles Fernández
LIMUSA

Aspectos fundamentales del concreto reforzado

Aspectos fundamentales del concreto reforzado

CUARTA EDICIÓN

Óscar M. González Cuevas
Francisco Robles Fernández-Villegas †

Profesores de la
Universidad Autónoma Metropolitana
(Azcapotzalco)

LIMUSA
NORIEGA EDITORES
MÉXICO • España • Venezuela • Colombia

González, Óscar
Aspectos fundamentales de concreto reforzado / Óscar M. González Cuevas. -- 4a. ed. -- México : Limusa, 2005.
802 p. : il. ; 20 cm.
ISBN: 968-18-6446-8.
Rústica.
1.Concreto armado - Construcciones 2. Concreto preesforzado - Construcciones

I. Robles Fernández-Villegas, Francisco, coaut.

LC: TA681 Dewey: 624.1771 – dc21

LA PRESENTACIÓN Y DISPOSICIÓN EN CONJUNTO DE

ASPECTOS FUNDAMENTALES DEL CONCRETO REFORZADO

SON PROPIEDAD DEL EDITOR. NINGUNA PARTE DE ESTA OBRA PUEDE SER REPRODUCIDA O TRANSMITIDA, MEDIANTE NINGÚN SISTEMA O MÉTODO, ELECTRÓNICO O MECÁNICO (INCLUYENDO EL FOTOCOPIADO, LA GRABACIÓN O CUALQUIER SISTEMA DE RECUPERACIÓN Y ALMACENAMIENTO DE INFORMACIÓN), SIN CONSENTIMIENTO POR ESCRITO DEL EDITOR.

DERECHOS RESERVADOS:

© 2005, EDITORIAL LIMUSA, S.A. DE C.V.
GRUPO NORIEGA EDITORES
BALDERAS 95, MÉXICO, D.F.
C.P. 06040
(5)51-300-700
01(800)7-06-91-00
(5)512-29-03
limusa@noriega.com.mx
www.noriega.com.mx

CUARTA EDICIÓN
HECHO EN MÉXICO
ISBN 968-18-6446-8

Prólogo

En 1974 se publicó la primera edición de este libro, con el propósito de mostrar al lector cómo pueden establecerse procedimientos de diseño de miembros de concreto reforzado a partir de información fundamental obtenida por medio de experimentos y experiencias, utilizando conocimientos básicos de mecánica.

El libro se originó a partir de una serie de fascículos preparados por los autores de esta edición, con los doctores Roger Díaz de Cossío y Juan Casillas G. de L. Se contó con el patrocinio del Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, y fueron publicados por este organismo. Posteriormente, los cuatro autores revisaron y actualizaron el material en la Facultad de Ingeniería de la Universidad Nacional Autónoma de México y suscribieron la primera edición como libro en el año de 1974.

Numerosos profesores de la asignatura de Concreto Reforzado, o equivalentes en las escuelas de ingeniería de habla hispana, hicieron llegar a los autores comentarios favorables sobre el libro, así como valiosas observaciones para mejorar su contenido. Animados por esto, los autores prepararon una segunda edición en la que se incluyeron los avances de la tecnología del concreto reforzado y en la que se incorporaron, en lo posible, las observaciones recibidas. La segunda edición se publicó en el año de 1985.

Por motivo de sus actividades profesionales, los doctores Roger Díaz de Cossío y Juan Casillas G. de L. ya no participaron en la elaboración de la segunda edición. Sin embargo, se reconoció ampliamente su intervención en la concepción del material original y en la preparación de los fascículos iniciales y de la primera edición. Es más, el Dr. Casillas revisó una buena parte del material, incluyendo varios de los ejemplos, y aportó valiosos comentarios sobre el texto.

En el año de 1990, los autores estimaron que era conveniente preparar una nueva edición del libro. En el texto se utilizan con frecuencia las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento de Construcciones del Distrito Federal y el Reglamento del American Concrete Institute. Ambos reglamentos habían cambiado después de la publicación de la segunda edición, el primero de ellos con cambios importantes derivados de las experiencias obtenidas a partir de los sismos que ocurrieron en la Ciudad de México en septiembre de 1985. En 1994 salió a luz la tercera edición.

El American Concrete Institute publicó nuevas ediciones de su reglamento en los años de 1999 y de 2002, o sea, posteriores a la tercera edición del libro, y desde hace varios años se había venido trabajando en una nueva edición del Reglamento del D.F. y sus Normas Técnicas Complementarias, los cuales se publicaron durante 2004. Los cambios en estos reglamentos y los constantes avances en la tecnología del concreto reforzado hicieron recomendable la preparación de esta cuarta edición, con el fin de mantener actualizado el texto. Las modificaciones principales que se han hecho desde la primera edición pueden clasificarse en los cuatro grupos siguientes: a) se han adaptado el texto y los ejemplos a los nuevos reglamentos de construcciones; b) se ha introducido el sistema internacional de medidas SI, además del sistema usual MKS; c) se han estado incorporando avances recientes en la tecnología del concreto reforzado tratando de reflejar los resultados de las investigaciones más importantes sobre el tema; d) se ha tomado en cuenta el importante papel de las microcomputadoras en la práctica del diseño de estructuras de concreto.

Los cambios que han tenido los reglamentos de construcciones son de distinta índole. Van desde pequeñas modificaciones derivadas de la experiencia o de investigaciones recientes hasta variaciones importantes en el enfoque de los problemas. Aunque el texto hace énfasis en aspectos fundamentales, de carácter permanente, se ha tratado de reflejar el estado actual de los reglamentos.

Parece ser que el sistema de unidades que predomina en la práctica de la ingeniería en casi todos los países que han usado tradicionalmente el sistema métrico decimal es el metro-kilogramo-segundo (MKS) o Sistema de Ingeniería, por lo cual se conserva en este texto. Sin embargo, la globalización de la tecnología será una fuerza

importante para que en un futuro se tiendan a unificar los distintos sistemas de unidades usados actualmente y el sistema SI irá creciendo en popularidad. Por otra parte, las principales revistas técnicas de carácter internacional incluyen ya el sistema SI en sus artículos, ya sea en forma exclusiva o simultáneamente con el sistema usado tradicionalmente, y muchos libros de texto de asignaturas previas a la de Concreto Reforzado, como los de Estática o los de Mecánica de Materiales, están presentados en sistema SI. Debido a estas consideraciones, se ha juzgado conveniente incluir ambos sistemas. En el texto aparecen muchas ecuaciones no adimensionales cuyos coeficientes cambian al ser traducidas al sistema SI. Para distinguir claramente estas ecuaciones, se han identificado con el mismo número de las ecuaciones en sistema MKS seguido de las letras SI. Aquellas que están en sistema SI aparecen sombreadas para distinguirlas claramente. El lector deberá observar que en todas las ecuaciones no adimensionales, excepto si se establece expresamente de otra manera, los esfuerzos están en kg/cm^2 cuando se usa el sistema MKS y en N/mm^2 cuando se usa el sistema SI. En el Apéndice E se incluye una tabla de equivalencias entre los dos sistemas.

La investigación en el campo del concreto reforzado es abundante a nivel internacional. Regularmente se presentan los resultados de nuevos estudios sobre este material de construcción. Se ha seleccionado e incorporado un buen número de estas investigaciones, procurando su integración al contenido general de la obra y al mantenimiento de su propósito didáctico.

La gran disponibilidad de herramientas de cómputo electrónico, principalmente microcomputadoras, hace conveniente revisar algunos procedimientos de cálculo. Algunos métodos de análisis numérico por tanteos o por aproximaciones sucesivas que resultaban convenientes con calculadoras convencionales, se ven ahora superados por métodos que se basan en la resolución de ecuaciones o de sistemas de ecuaciones por complicados que sean, ya que pueden programarse una sola vez y resolverse velozmente con computadoras electrónicas.

El libro está dirigido a dos tipos de lectores: estudiantes de las carreras de ingeniería y arquitectura, que lo pueden utilizar como libro de texto, y profesionales de las mismas carreras, que lo pueden emplear como libro de consulta. Para los primeros, se incluyen ejemplos resueltos y se proponen ejercicios para que los resuelvan. Los ejemplos resueltos están presentados en forma semejante a como aparecerían en las hojas de cálculo usadas comúnmente en las oficinas de diseño estructural, aunque con más detalle para mayor claridad. Dentro del texto se hacen comentarios a los aspectos más importantes del procedimiento de cálculo.

Los profesionales podrán encontrar en el libro el origen de disposiciones reglamentarias recientes, así como explicaciones sobre su significado y la manera de utilizarlas. La bibliografía que acompaña cada capítulo les puede ayudar para estudiar con más detalle algún aspecto particular del diseño o para resolver problemas más complejos que los aquí tratados.

Numerosos alumnos han hecho llegar a los autores comentarios favorables sobre el libro en sus ediciones anteriores. Ésta ha sido nuestra mejor recompensa y lo que nos ha impulsado a mantenerlo actualizado. También se han recibido críticas constructivas y observaciones de varios profesores entre los que se desea mencionar de manera especial a Santiago Loera, quien ha revisado las ediciones anteriores con gran meticulosidad y ha hecho aclaraciones importantes a quien suscribe sobre las disposiciones de las Normas Técnicas Complementarias, a Carlos JavierMendoza y a JoséMaría Riobóo.

JesúsCano Licona y Alejandro Grande Vega, ayudantes de profesor del primer autor, participaron de manera importante en la elaboración de los diagramas de interacción que se incluyen en el Apéndice C. La Universidad Autónoma Metropolitana-Azcapotzalco, institución en la cual colaboró durante varios años el Ing. Francisco Robles y continúa prestando sus servicios quien suscribe, ha brindado todo el apoyo necesario para la elaboración de las tres últimas ediciones. La Editorial LIMUSA ha hecho un trabajo muy profesional en la producción y distribución de las ediciones anteriores y seguramente lo hará con la presente edición. A todas estas personas e instituciones, nuestro reconocimiento.

El Ing. Francisco Robles falleció en 1990 cuando iniciábamos los trabajos de preparación de la tercera edición, por lo que los cambios incluidos en la tercera y en la cuarta edición, respecto a la segunda, son responsabilidad exclusiva de quien suscribe este prólogo. Como en otras ocasiones, sea este libro un homenaje a nuestro inolvidable amigo y compañero.

Óscar M. González Cuevas
Azcapotzalco, D.F., marzo de 2005

Contenido

CAPÍTULO 1 **LAS ESTRUCTURAS DE CONCRETO** **13**

1.1 El diseño estructural 13
1.2 Las estructuras de concreto 16
1.3 Características acción-respuesta de elementos de concreto 17
1.4 Las acciones 21
1.5 El análisis de estructuras de concreto reforzado 22
1.6 El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado 23
1.7 Diseño por estados límite 24

CAPÍTULO 2 **CARACTERÍSTICAS GENERALES DEL CONCRETO Y DEL ACERO** **31**

2.1 Introducción 31
2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple 32
2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido 43
2.4 Fatiga 46
2.5 Módulos elásticos 47
2.6 Deformaciones por cambios de temperatura 48
2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo 48

CAPÍTULO 3 **ÍNDICES DE RESISTENCIA Y CONTROL DE CALIDAD** **53**

3.1 Introducción 53
3.2 índices de resistencia 54
3.3 Evaluación de datos 58
3.4 Control de calidad 61

CAPÍTULO 4 **ELEMENTOS SUJETOSA CARGA AXIAL** **65**

4.1 Introducción 65
4.2 Comportamiento, modos de falla y resistencia de elementos sujetos a compresión axial 65
4.3 Elementos sujetos a tensión axial 70
4.4 Ejemplos de cálculos de resistencia de columnas cortas bajo carga axial 70

CAPÍTULO 5 **FLEXIÓN SIMPLE** **79**

5.1 Introducción 79
5.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexión simple 79

	5.3	Resistencia de elementos sujetos a flexión simple	83
	5.4	Determinación de la relación balanceada	111
	5.5	Flexión asimétrica	119
	5.6	Procedimiento general y comentarios sobre las hipótesis simplificadoras para cálculos de resistencias	121
CAPÍTULO 6		**FLEXIÓN Y CARGA AXIAL**	**127**
	6.1	Introducción	127
	6.2	Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión	129
	6.3	Cálculo de resistencia	129
	6.4	Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera	148
	6.5	Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano culaquiera	152
	6.6	Flexotensión	152
CAPÍTULO 7		**ELEMENTOS SUJETOS A FUERZA CORTANTE**	**159**
	7.1	Introducción	159
	7.2	Comportamiento y modos de falla	163
	7.3	Mecanismos de falla por cortante	170
	7.4	Efectos de las variables en la carga de agrietamiento	176
	7.5	Efectos de las variables sobre la resistencia	178
	7.6	Expresiones para evaluar la resistencia a efectos de fuerza cortante	180
	7.7	Ejemplos	193
CAPÍTULO 8		**RESISTENCIA DE ELEMENTOS SUJETOS A TORSIÓN**	**215**
	8.1	Introducción	215
	8.2	Sistemas estructurales con efectos importantes de torsión	215
	8.3	Torsión simple	217
	8.4	Torsión y flexión	230
	8.5	Torsión y cortante	231
	8.6	Superficies de interacción torsión-flexión-cortante	233
	8.7	Torsión y carga axial	233
	8.8	Expresiones de los reglamentos para valuar la resistencia a efectos de torsión	235
	8.9	Ejemplos	239
CAPÍTULO 9		**ADHERENCIA Y ANCLAJE**	**261**
	9.1	Introducción	261
	9.2	Adherencia en anclaje	262
	9.3	Adherencia en flexión	263

9.4 Naturaleza de la adherencia 266
9.5 Estudios experimentales de adherencia. Longitudes de anclaje o desarrollo 268
9.6 Normas para longitudes de desarrollo 277
9.7 Ganchos estándar 279
9.8 Desarrollo del acero positivo en los apoyos libres de vigas y en los puntos de inflexión 282
9.9 Desarrollo del acero negativo en vigas empotradas y en vigas continuas 284
9.10 Empalme de barras 284
9.11 Corte y doblado de barras 288
9.12 Anclaje del refuerzo transversal 291
9.13 Ejemplos 291

CAPÍTULO 10 **AGRIETAMIENTO** **309**

10.1 Introducción 309
10.2 Formación y desarrollo de grietas 310
10.3 Mecanismos de agrietamiento 311
10.4 Expresiones para la predicción de agrietamiento 316
10.5 Agrietamiento en losas 320
10.6 Anchos permisibles de grietas 321
10.7 Sección transformada 323
10.8 Recomendaciones sobre agrietamiento de diversos reglamentos 325
10.9 Ejemplos 326

CAPÍTULO 11 **DEFLEXIONES** **339**

11.1 Introducción 339
11.2 Deflexiones bajo cargas de servicio de corta duración 341
11.3 Deflexiones bajo cargas de servicio de larga duración (deflexiones diferidas) 346
11.4 Deflexiones permisibles 349
11.5 Ejemplos de cálculos de deflexiones 352

CAPÍTULO 12 **MÉNSULAS Y VIGAS DE GRAN REMATE** **377**

12.1 Introducción 377
12.2 Ménsulas 377
12.3 Vigas de gran peralte 393

CAPÍTULO 13 **EFECTOS DE ESBELTEZ** **411**

13.1 Introducción 411
13.2 Comportamiento y variables principales 414

13.3 Métodos de dimensionamiento 417
13.4 Cálculo de los efectos de esbeltez 420
13.5 Ejemplos 426

CAPÍTULO 14 **DIMENSIONAMIENTO DE VIGAS** **439**

14.1 El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado 439
14.2 Recomendaciones generales para el dimensionamiento de vigas 443
14.3 Dimensionamiento de secciones sujetas a flexión 446
14.4 Dimensionamiento de vigas 480

CAPÍTULO 15 **DIMENSIONAMIENTO DE COLUMNAS** **521**

15.1 Introducción 521
15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas 521
15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas 525
15.4 Ejemplos 528

CAPÍTULO 16 **LOSAS EN UNA DIRECCIÓN** **547**

16.1 Introducción 547
16.2 Comportamiento y dimensionamiento 548
16.3 Ejemplo de diseño de una losa con carga uniformemente distribuida 552
16.4 Cargas concentradas 557
16.5 Ejemplo de diseño de una losa con carga distribuida y carga concentrada 558

CAPÍTULO 17 **LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE** **569**

17.1 Introducción 569
17.2 Comportamiento y modos de falla 569
17.3 Análisis de losas 571
17.4 Dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente 575
17.5 Ejemplo de diseño 580

CAPÍTULO 18 **LONAS PLANAS** **589**

18.1 Introducción y definiciones 589
18.2 Comportamiento y dimensionamiento 590
18.3 Ejemplo de dimensionamiento por el método de la estructura equivalente (NTC-04) 600

CAPÍTULO 19 **MÉTODO GENERALIZADO PARA EL DISEÑO DE LOSAS APOYADAS PERIMETRALMENTE Y DE LOSAS PLANAS** **633**

19.1 Introducción 633
19.2 Comportamiento de sistemas de piso. Variables principales 634
19.3 Método directo 638
19.4 Ejemplo de diseño con el método directo 653
19.5 Método de la estructura equivalente 676
19.6 Ejemplo de diseño con el método de la estructura equivalente 685
19.7 Comentarios sobre el método de la estructura equivalente 701

CAPÍTULO 20 **ASPECTOS PARTICULARES DEL DETALLADO DEL REFUERZO** **707**

20.1 Introducción 707
20.2 Cambios de dirección de las fuerzas internas 707
20.3 Detalles de esquina 708
20.4 Detalles especiales en estructuras expuestas a acciones sísmicas 709
20.5 Ejemplos 716

APÉNDICES **737**

ÍNDICE **799**

CAPÍTULO 1

Las estructuras de concreto

1.1 **El diseño estructural.** ***11.2*** **Las estructuras de concreto.** ***11.3*** **Características acción-respuesta de elementos de concreto.** ***11.4*** **Las acciones.** ***11.5*** **El análisis de estructuras de concreto reforzado.** ***11.6*** **El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado.** ***11.7*** **Diseño por estados límite.**

1.1 El diseño estructural

Una estructura puede concebirse como un sistema, es decir, como un conjunto de partes o componentes que se combinan en forma ordenada para cumplir una función dada. La función puede ser: salvar un claro, como en los puentes; encerrar un espacio, como sucede en los distintos tipos de edificios, o contener un empuje, como en los muros de contención, tanques o silos. La estructura debe cumplir la función a la que está destinada con un grado razonable de seguridad y de manera que tenga un comportamiento adecuado en las condiciones normales'de servicio. Además, deben satisfacerse otros requisitos, tales como mantener el costo dentro de límites económicos y satisfacer determinadas exigencias estéticas.

Un examen de las consideraciones anteriores hace patente la complejidad del diseño de sistemas estructurales. ¿Qué puede considerarse como seguridad razonable, o como resistencia adecuada? ¿Qué requisitos debe satisfacer una estructura para considerar que su comportamiento sea satisfactorio en condiciones de servicio? ¿Qué es un costo aceptable? ¿Qué vida útil debe preverse? ¿Es estéticamente aceptable la estructura?

Éstas son algunas de las preguntas que el proyectista tiene en mente al diseñar una estructura. El problema no es sencillo y en su solución usa su intuición y experiencia, basándose en el análisis y en la experimentación.

Si los problemas de diseño se contemplan en toda su complejidad, puede afirmarse que no suelen tener solución única, sino solución razonable. En efecto, la labor del ingeniero proyectista tiene algo de arte. Indudablemente, el ingeniero debe aprovechar el cúmulo de información y metodología científica disponible, pero además tiene que tomar en cuenta otros factores que están fuera del campo de las matemáticas y de la física.

El proceso que sigue el proyectista al diseñar una estructura es análogo al utilizado en el diseño de cualquier otro sistema [1.1-1.7, 1.15, 1.20, 1.31]. Por lo tanto, son aplicables los métodos que aporta la Ingeniería de Sistemas, ya que una de sus finalidades es la racionalización del proceso de diseño.

El proceso de diseño de un sistema principia con la formulación de los objetivos que se pretenden alcanzar y de las restricciones que deben tenerse en cuenta. El proceso es cíclico; se parte de consideraciones generales, que se afinan en aproximaciones sucesivas, a medida que se acumula la información sobre el problema.

En el diseño de estructuras, una vez planteado el problema, supuestas ciertas acciones razonables y definidas las dimensiones generales, es necesario ensayar diversas estructuraciones para resolverlo. En esta fase del diseño es donde la intuición y la experiencia del ingeniero desempeñan un papel primordial. La elección del tipo de es-

tructuración, sin duda es uno de los factores que más afecta el costo de un proyecto. Los refinamientos posteriores en el dimensionamiento de secciones son de mucha menor importancia.

La elección de una forma estructural dada implica la elección del material con que se piensa realizar la estructura. Al hacer esta elección, el proyectista debe tener en cuenta las características de la mano de obra y el equipo disponible, así como también el procedimiento de construcción más adecuado para el caso. Después de elegir provisionalmente una estructuración, se la idealiza para estudiar los efectos de las acciones o solicitaciones a las que puede estar sometida. Esta idealización es necesaria, porque el problema real siempre es más complejo que lo que es práctico analizar.

El análisis estructural, es decir, la determinación de las fuerzas internas en los elementos de la estructura, implica un conocimiento de las acciones que actúan sobre la misma y de las dimensiones de dichos elementos. Estos datos son imprecisos cuando se inicia el diseño, ya que sólo se conocen en forma aproximada las dimensiones que tendrán los elementos. Éstas influyen tanto en el valor del peso propio como en el comportamiento estructural del conjunto. En un proceso cíclico, el proyectista va ajustando los datos iniciales, a medida que afina el análisis. Solamente en la fase final de este proceso hace un cálculo numérico relativamente preciso. El grado de precisión que trata de obtener en este proceso depende de la importancia de la estructura y de la posibilidad de conocer las acciones que realmente actuarán sobre ella. Un vicio común es el exceso de minuciosidad cuando la importancia del problema no lo amerita, o el conocimiento de las acciones solamente es aproximado, y cuando no lo justifica el ahorro que pueda obtenerse gracias al refinamiento en el análisis.

La fase final del diseño consiste en comunicar los resultados del proceso descrito a las personas que van a ejecutar la obra. La comunicación de los datos necesarios para la realización del diseño se hace mediante planos y especificaciones. Este aspecto final no debe descuidarse, puesto que el disponer de planos claros y sencillos, y de especificaciones concretas, evita errores y confusiones a los constructores.

Idealmente, el objeto del diseño de un sistema es la optimización del sistema, es decir, la obtención de la mejor de todas las soluciones posibles [1.1-1.8, 1.15, 1.16, 1.18]. El lograr una solución óptima absoluta es prácticamente imposible. Lo que es óptimo en un conjunto de circunstancias, no lo es en otro; lo que es óptimo para un individuo, puede no serlo para otra persona. Tal como se dijo anteriormente, no existen soluciones únicas, sino solamente razonables.

Sin embargo, puede ser útil optimizar de acuerdo con determinado criterio, tal como el de peso o costo mínimos. Si el criterio puede expresarse analíticamente por medio de una función, generalmente llamada "función objetivo" o "función criterio", el problema puede resolverse matemáticamente.

Las técnicas de optimización todavía tienen aplicaciones limitadas en el diseño estructural, debido a las dificultades matemáticas que suelen implicar. Sin embargo, se supone que a medida que aumenten las aplicaciones de la computación electrónica, dichas técnicas se irán perfeccionando, de modo que cada vez se logre mayor grado de refinamiento. Los procesos de optimización en el diseño estructural han sido tratados por Spunt y otros [1.8, 1.10, 1.16].

Para mayor sencillez, en las consideraciones anteriores se han tratado los sistemas estructurales como sistemas independientes. De hecho, toda estructura no es sino un subsistema de algún sistema más complejo: un edificio, un complejo industrial, un sistema hidráulico, de caminos o de comunicación

urbana. En un edificio, por ejemplo, pueden distinguirse varios subsistemas, además del estructural: las instalaciones eléctricas, las de plomería y aire acondicionado, los elevadores, los acabados arquitectónicos, la ventanería, etc.

Según el enfoque de sistemas, en el diseño del sistema total debe tenerse en cuenta la interacción entre todos los subsistemas. De esta manera, en el diseño del subsistema estructural deben considerarse no solamente los aspectos de eficiencia estructural, sino también la relación de la estructura con los demás subsistemas. Por ejemplo, puede ser necesario prever pasos para instalaciones que impliquen mayor consumo de materiales que el estrictamente necesario desde el punto de vista estructural. Por otra parte, los enfoques globales o de conjunto, implícitos en la concepción de los edficios como sistemas, pueden conducir a soluciones de gran eficiencia en las que los componentes estructurales del sistema se diseñan de manera que realicen otras funciones, además de las estrictamente estructurales. Así, un muro de carga puede ser también un elemento arquitectónico de fachada y servir de elemento rigidizante.

En el diseño de los subsistemas estructurales para edificios, debe tenerse en cuenta su importancia relativa dentro del sistema general. Son ilustrativos los datos de las tablas 1.1 y 1.2, basadas en información proporcionada en las referencias 1.23, 1.25 y 1.38.

Se desprende de estos datos que la proporción del costo total correspondiente a la estructura es relativamente pequeña. Esto indica que en muchas ocasiones no se justifican refinamientos excesivos en el cálculo estructural, ya que las posibles economías de materiales resultan poco significativas. Lo importante, en efecto, es la optimización del sistema total, como ya se ha indicado, y no la de los subsistemas o componentes considerados individualmente.

Tabla 1.1 Distribución aproximada del costo de edificios altos en los Estados Unidos de América.

Concepto	Porcentaje
Excavación y cimientos	10
Estructura	25
Instalaciones diversas (electricidad, plomería, aire acondicionado)	30
Elevadores	10
Muros exteriores	12
Acabados diversos	13
	100

Tabla 1.2 Distribución aproximada del costo de edificios de mediana altura (10 a 12 pisos) en la Ciudad de México.

Concepto	Porcentajes	
	Caso A	Caso B
Excavación y cimientos	11	5
Estructura	14	18
Instalaciones diversas (electricidad, plomería)	25	34
Elevadores	3	5
Fachadas	20	9
Acabados diversos	27	29

Si la optimización de sistemas relativamente sencillos, como los sistemas estructurales, presenta ciertas dificultades, son aún más graves los problemas que ofrece la optimización rigurosa de sistemas complejos, como el de un edificio o una obra urbana, en los que intervienen gran número de variables, muchas de ellas de naturaleza psicológica o sociológica y, por lo tanto, difícilmente cuantificables. En efecto, la aplicación rigurosa de los métodos del enfoque de sistemas aún no es de uso común.

El interés por el enfoque de sistemas está produciendo entre los proyectistas un cambio de actitud frente al problema de diseño. Por una parte, se tiende a una racionalización creciente del proceso de diseño, lo

que conduce a manipulaciones matemáticas cada vez más refinadas. Por otra, el reconocimiento de la interdependencia entre los diversos subsistemas que integran una obra civil está llevando a un concepto interdisciplinario del diseño. Mientras que antes los diversos subsistemas se diseñaban independientemente, de manera que la coordinación entre ellos solía ser poco satisfactoria, ahora se tiende cada vez más al trabajo de equipo.

El enfoque de sistemas aporta herramientas de gran utilidad en el diseño. Sin embargo, no debe olvidarse que en el proceso de diseño seguirá siendo de gran importancia la intuición y la capacidad creativa e innovadora del proyectista.

En épocas recientes se han empezado a desarrollar los llamados sistemas expertos para apoyar en el proceso del diseño estructural. Los sistemas expertos son herramientas que se utilizan para resolver problemas un tanto indefinidos, o sea, que no pueden resolverse mediante la aplicación de un algoritmo determinístico, que es el caso del diseño estructural [1.36]. Generalmente son programas de computadora interactivos que incorporan la experiencia, el juicio, reglas empíricas e inclusive la intuición. Se diferencian de los programas tradicionales en que usan y representan elementos de conocimiento, y no sólo datos; los procesos son heurísticos o inferenciales, y no algorítmicos o repetitivos; están orientados a procesos simbólicos, y nd a procesos numéricos.

El uso de sistemas expertos para diseño estructural se propuso originalmente por Fenves y Norabhoompipat en 1978. A partir de entonces se han desarrollado algunos sistemas que están orientados más a la investigación que a la práctica comercial del diseño, y que se refieren a marcos tridimensionales, puentes, armaduras y muros de retención. En la referencia 1.36 se presenta un resumen de estos sistemas expertos.

1.2 Las estructuras de concreto

Las estructuras de concreto reforzado tienen ciertas características, derivadas de los procedimientos usados en su construcción, que las distinguen de las estructuras de otros materiales.

El concreto se fabrica en estado plástico, lo que obliga a utilizar moldes que lo sostengan mientras adquiere resistencia suficiente para que la estructura sea autosoportante. Esta característica impone ciertas restricciones, pero al mismo tiempo aporta algunas ventajas. Una de éstas es su "moldeabilidad", propiedad que brinda al proyectista gran libertad en la elección de formas. Gracias a ella, es posible construir estructuras, como los cascarones, que en otro material serían muy difíciles de obtener.

Otra característica importante es la facilidad con que puede lograrse la continuidad en la estructura, con todas las ventajas que esto supone. Mientras que en estructuras metálicas el logro de continuidad en las conexiones entre los elementos implica serios problemas en el diseño y en la ejecución, en las de concreto reforzado el monolitismo es consecuencia natural de las características de construcción.

Existen dos procedimientos principales para construir estructuras de concreto. Cuando los elementos estructurales se forman en su posición definitiva, se dice que la estructura ha sido colada *in situ* o colada en el lugar. Si se fabrican en un lugar distinto al de su posición definitiva en la estructura, el procedimiento recibe el nombre de prefabricación.

El primer procedimiento obliga a una secuencia determinada de operaciones, ya que para iniciar cada etapa es necesario esperar a que se haya concluido la anterior. Por ejemplo, no puede procederse a la construcción de un nivel en un edificio hasta que el nivel inferior haya adquirido la resistencia adecuada. Además, es necesario a me-

nudo construir obras falsas muy elaboradas y transportar el concreto fresco del lugar de fabricación a su posición definitiva, operaciones que influyen decisivamente en el costo.

Con el segundo procedimiento se economiza tanto en la obra falsa como en el transporte del concreto fresco, y se pueden realizar simultáneamente varias etapas de construcción. Por otra parte, este procedimiento presenta el inconveniente del costo adicional de montaje y transporte de los elementos prefabricados y, además, el problema de desarrollar conexiones efectivas entre los elementos.

El proyectista debe elegir entre estas dos alternativas, guiándose siempre por las ventajas económicas, constructivas y técnicas que pueden obtenerse en cada caso. Cualquiera que sea la alternativa que escoja, esta elección influye de manera importante en el tipo de estructuración que se adopte.

Otra característica peculiar de las estructuras de concreto reforzado es el agrietamiento, que debe tenerse en cuenta al estudiar su comportamiento bajo condiciones de servicio.

1.3 Características acción-respuesta de elementos de concreto

1.3.1 Conceptos generales

Se ha dicho que el objeto del diseño consiste en determinar las dimensiones y características de los elementos de una estructura para que ésta cumpla cierta función con un grado de seguridad razonable, comportándose además satisfactoriamente una vez en condiciones de servicio. Debido a estos requisitos, es preciso conocer las relaciones que existen entre las características de los elementos de una estructura (dimensiones, refuerzos, etc.), las solicitaciones que debe soportar y los efectos que dichas solicitaciones producen en la estructura. En otras palabras, es necesario conocer las características acción-respuesta de la estructura estudiada.

Las acciones en una estructura son las solicitaciones a que puede estar sometida. Entre éstas se encuentran, por ejemplo, el peso propio, las cargas vivas, las presiones por viento, las aceleraciones por sismo y los asentamientos. La respuesta de una estructura, o de un elemento, es su comportamiento bajo una acción determinada. Puede expresarse como deformación, agrietamiento, durabilidad, vibración. Desde luego, la respuesta es función de las características de la estructura, o del elemento estructural considerado.

Si se conocen las relaciones

ACCIÓN → ELEMENTOS DE CIERTAS
CARACTERÍSTICAS → RESPUESTA

para todas las combinaciones posibles de acciones y características de una estructura, se contará con una base racional para establecer un método de diseño. Éste tendrá por objeto determinar las características que deberá tener una estructura para que, al estar sometida a ciertas acciones, su comportamiento o respuesta sea aceptable desde los puntos de vista de seguridad frente a la falla y utilidad en condiciones de servicio.

El problema de la determinación de las relaciones acción-respuesta para estructuras con cualesquiera características, sometidas a toda la gama posible de acciones y combinaciones de estas acciones, es insoluble, ya que puede presentarse un número infinito de combinaciones.

Debido a esta situación, fue necesario desarrollar métodos que permitieran basar el estudio de una estructura en conjunto en estudios del comportamiento de sus distintas partes o elementos. Estos métodos, llamados de análisis, permiten determinar en cada uno de los miembros de una estructu-

ra, las acciones internas resultantes de la aplicación de las solicitaciones exteriores a la estructura total. Esta consideración reduce el problema de la determinación de las características acción-respuesta a dimensiones manejables.

Para establecer una base racional de diseño, será necesario entonces obtener las características acción-respuesta correspondientes a las acciones más frecuentes sobre los distintos elementos estructurales. Con esta información se puede delimitar el rango de las solicitaciones bajo las cuales el elemento se comportará satisfactoriamente una vez en condiciones de servicio. En otras palabras, es necesario establecer las relaciones entre los elementos siguientes:

Acciones interiores	Características del elemento	Respuestas
carga axial	tipo de concreto	deformación
flexión	tipo de refuerzo	agrietamiento
torsión	tamaño	durabilidad
cortante	forma	vibración
	restricción	

Al valuar la respuesta correspondiente a una acción determinada, es necesario tomar en cuenta el modo de aplicación de la misma, ya que este factor ejerce influencia muy importante en dicha respuesta. Es decir, la respuesta de una estructura a una acción determinada dependerá de si ésta es instantánea, de corta duración, sostenida, repetida, etc.

En los capítulos siguientes se estudian estas relaciones para las acciones más frecuentes en el caso de estructuras de concreto. La información relativa ha sido obtenida mediante experimento y experiencia adquirida con el tiempo.

En los procedimientos de diseño, el dimensionamiento se lleva a cabo normalmente a partir de las acciones interiores, calculadas por medio de un análisis de la estructura. Debe notarse que, para diseñar satisfactoriamente no siempre es necesario obtener las acciones interiores inducidas por las exteriores. Muchos diseños han sido desarrollados directamente a partir del estudio de modelos estructurales. En estos casos, los conjuntos de acciones exteriores, representativas de aquellas a las que en realidad estará sometido el prototipo, se aplican a un modelo a escala de la estructura por diseñar, y se miden las respuestas del mismo. Para satisfacer la condición de seguridad, el modelo a escala debe resistir acciones un tanto mayores que las que se estima deberá soportar la estructura en condiciones de servicio. Para satisfacer la condición de comportamiento satisfactorio bajo estas condiciones de servicio, las respuestas del modelo a estas acciones deberán estar comprendidas entre los valores considerados como límites de tolerancia. Si una de las dos condiciones no se satisface, se modifican las características del modelo y se repite el proceso.

La primera condición que debe satisfacer un diseño es que la estructura resultante sea lo suficientemente resistente. En términos de las características acción-respuesta, se puede definir la resistencia de una estructura o elemento a una acción determinada como el valor máximo que dicha acción puede alcanzar. Una vez determinada la resistencia a una cierta acción, se compara este valor máximo con el valor correspondiente bajo las condiciones de servicio. De esta comparación se origina el concepto de factor de seguridad o factor de carga. De un modo rudimentario, éste puede definirse como el cociente entre la resistencia y el valor estimado de la acción correspondiente en condiciones de servicio.

El diseño debe garantizar que la estructura tenga un factor de seguridad razonable. Mediante este factor, se trata de tomar en cuenta en el diseño la incertidumbre existente con respecto a los efectos de ciertas acciones y los valores usados en varias etapas

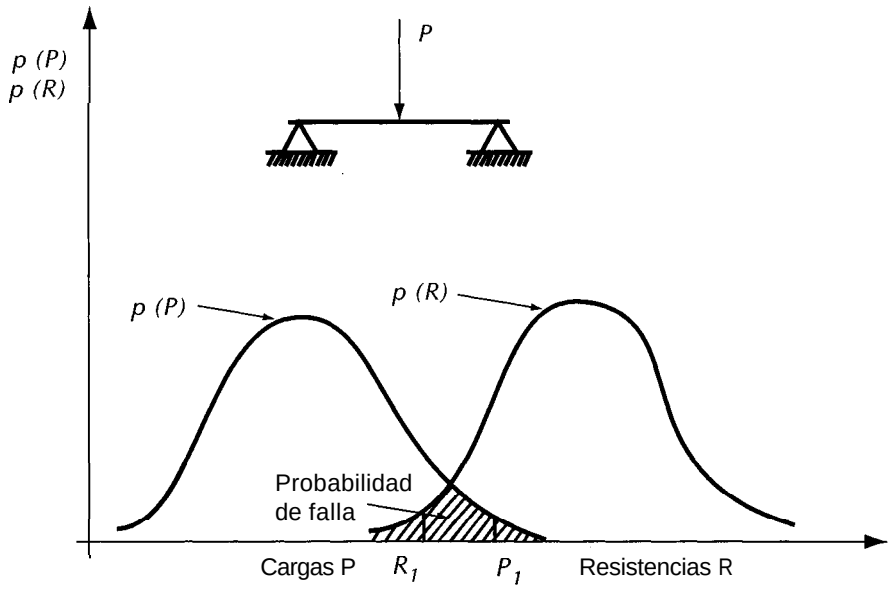


Figura 1.1 Concepto de probabilidad de falla.

del proceso. Entre las principales incertidumbres se pueden mencionar el desconocimiento de las acciones reales y su distribución, la validez de la hipótesis y simplificaciones utilizadas en el análisis, la diferencia entre el comportamiento real y el supuesto, y la discrepancia entre los valores reales de las dimensiones y de las propiedades de los materiales con las especificadas en el diseño.

La selección de un factor de seguridad adecuado no es problema sencillo, debido al gran número de variables y de condiciones que deben tomarse en cuenta. La dificultad principal reside en la naturaleza probabilista tanto de las acciones que obran sobre las estructuras como de las resistencias de éstas. Este carácter aleatorio de solicitaciones y resistencias hace que exista siempre cierta probabilidad de que se presenten combinaciones de valores en que la acción sea superior a la resistencia. Esto se ilustra en la figura 1.1, en la que se representan las distribuciones de frecuencias de solicitaciones y resistencias de un elemento estructural, por ejemplo una viga. Si la acción alcanza el valor P_1, y la resistencia el valor R_1, ocurrirá un evento de falla. El área sombreada es una medida de la probabilidad de falla de la estructura. La probabilidad de falla da una medida significativa del margen de seguridad real de la estructura. Puede expresarse en términos económicos, si se cuenta con los elementos necesarios para estimar el costo de las consecuencias de la falla. La estimación del costo de la falla, junto con el costo de la estructura, pueden servir de base para escoger una solución conveniente con un criterio racional que asigne un margen de seguridad, de acuerdo con la importancia de la obra. Obviamente, el factor de seguridad de una presa debe ser mayor que el de una bodega de chatarra.

Los criterios modernos de diseño están tendiendo a enfoques probabilistas como el descrito [1.17, 1.24, 1.33, 1.341, no obstante las dificultades que implican. Por una parte, todavía no se tiene suficiente información sobre la variabilidad tanto de las solicitaciones que deben considerarse, como de las resistencias de los materiales y elementos utilizados en las estructuras. Por otra parte, es difícil el problema de asignar precio o valor a las consecuencias de una falla, en términos de posible pérdida de vidas y de costo de reposición. A pesar de estas dificultades, el enfoque tiene indudable interés y ya existen proposiciones para formular reglamentos de construcción basados exclusivamente en conceptos probabilistas. De hecho, ciertos conceptos probabilistas ya han sido incorporados a algunos reglamentos en relación con la valuación de las características de los materiales y las acciones [1.9, 1.19, 1.24, 1.33, 1.341.

A semejanza del problema de resistencia, para garantizar que una estructura tenga un comportamiento aceptable bajo condiciones de servicio, se comparan los valores de las respuestas (deformaciones, agrietamiento, durabilidad) correspondientes a las acciones estimadas, con ciertos límites preestablecidos que la experiencia ha indicado son satisfactorios para el tipo de estructura de que se trata.

El problema es más difícil que cuando se trata de valuar la resistencia, ya que las deformaciones y el agrietamiento son función de las acciones reales que obran en la estructura, de la historia de carga y de todas aquellas variables que influyen en el comportamiento. El fijar límites razonables para las deformaciones y el agrietamiento de los distintos tipos de estructuras, es más complejo que establecer un factor de seguridad razonable. Los problemas de agrietamiento y deformaciones se tratarán con detalle en capítulos posteriores. Hasta la fecha, la mejor herramienta que posee el diseñador para establecer límites de tolerancia es su experiencia con estructuras semejantes, cuando actúan bajo condiciones similares.

1.3.2 Ilustración

Para fijar las ideas anteriores, éstas se aplicarán a un caso específico. Considérese el voladizo mostrado en la figura 1.2 sujeto a la acción de una carga vertical P, que varía desde un valor nulo hasta aquel que produce el colapso. La característica acción-respuesta más inmediata es la curva carga-deflexión presentada también en la figura.

En términos de esta característica es posible definir cuatro etapas en el comportamiento del voladizo:

a) Una etapa inicial elástica, en la que las cargas son proporcionales a las deformaciones. Es frecuente que bajo las condiciones permanentes de servicio (excluyendo las cargas de corta duración como viento o sismo), la estructura se encuentre en esta etapa. La carga de servicio se ha marcado en la figura como P_s y la deformación correspondiente como a,
b) Una etapa intermedia en la que la relación carga-deformación ya no es lineal, pero en la que la carga va creciendo.
c) Una etapa plástica, en la que se producen deformaciones relativamente grandes para incrementos pequeños o nulos de las cargas. La resistencia P_r se encuentra en esta etapa. Debido a la forma de la curva, es difícil establecer cuál es la deformación correspondiente a la resistencia.
d) Una etapa inestable, caracterizada por una rama descendente hasta el colapso, donde a mayores deformaciones la carga disminuye.

De la ilustración se puede definir el factor de seguridad como el cociente P_r/P_s. La

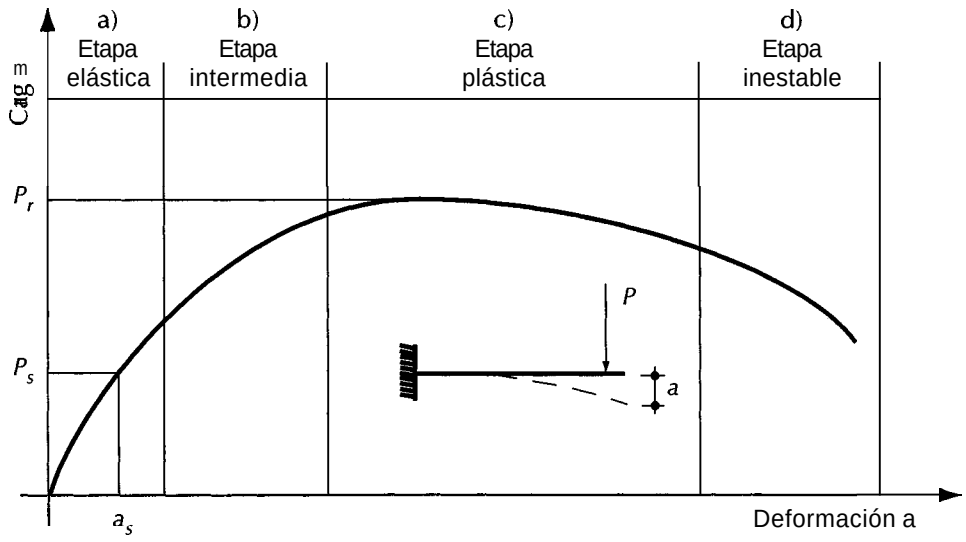


Figura 1.2 Gráfica carga-deformación.

estructura tendrá una resistencia adecuada, si este factor es mayor que un valor predeterminado considerado como aceptable.

Para investigar si el comportamiento bajo condiciones de servicio es satisfactorio, se deberá comparar el valor de la deformación correspondiente a P_s con ciertos valores preestablecidos que se estimen tolerables, de acuerdo con experiencias anteriores.

Es interesante hacer notar que, en la etapa plástica, a una variación muy pequeña de la carga corresponde una variación importante en la deformación de la estructura. Por lo tanto, si las acciones en esta etapa se determinan a partir de las deformaciones, entonces los errores importantes en la estimación de éstas sólo producirán variaciones insignificantes en el valor de la acción. Por el contrario, es difícil predecir en esta etapa el valor de la deformación que corresponderá a una carga determinada.

El ejemplo anterior muestra claramente que es necesario conocer las relaciones acción-respuesta correspondientes a una variación de P, desde un valor nulo hasta el que produce el colapso. Esta información permite conocer el grado de seguridad de la estructura y estimar el intervalo de carga bajo el cual el voladizo se comportará satisfactoriamente.

1.4 Las acciones

Las principales solicitaciones o acciones exteriores a que puede estar sujeta una estructura son: cargas estáticas debidas a peso propio, a cargas vivas y a cargas permanentes, así como cargas dinámicas impuestas por un sismo, por la presión de un viento o por la aplicación repetida de cargas vivas. También se consideran como solicitaciones las deformaciones de la estructura inducidas

por asentamiento, contracción, flujo plástico y cambios de temperatura.

Al estimar las acciones, es necesario prever las condiciones más desfavorables en que la estructura puede llegar a encontrarse, así como el tiempo que sufrirá estas condiciones desfavorables. Para hacer un análisis riguroso sería necesario conocer las variaciones probables en la intensidad y distribución de las cargas a lo largo de la vida útil de la estructura, cosa difícil de lograr.

Al tratar del diseño estructural se ha hecho hincapié en el desarrollo de métodos de análisis de estructuras, pero se han llevado a cabo estudios limitados sobre los valores probables de las cargas que actúan. Es aquí donde se pueden cometer los mayores errores y donde nuestro conocimiento es más exiguo.

La estimación de las cargas debidas al peso propio puede hacerse con relativa precisión: los errores no serán mayores del 20 por ciento, si se han evaluado con cuidado los volúmenes de los materiales y los pesos volumétricos.

En lo que respecta a carga viva, los errores en la estimación pueden ser del 100 por ciento o aun mayores. La carga viva está especificada comúnmente en los reglamentos de construcción como carga uniformemente repartida equivalente, con distintas intensidades de acuerdo con el uso considerado, o bien, si se trata de puentes o viaductos, como carga móvil idealizada. Estos valores equivalentes especificados se basan en estudios limitados. Los efectos de las cargas equivalentes en la estructura pueden ser muy diferentes de los efectos de las cargas reales.

La estimación de cargas laterales debidas a viento o sismo está sujeta aún a mayor incertidumbre. Fácilmente se cometen errores mucho mayores que los anteriores en la estimación de los efectos de estas acciones.

En el estado actual de nuestro conocimiento, puede esperarse solamente que, con base en la experiencia, se especifique un tipo de carga tal que, unido a procedimientos adecuados de diseño y construcción, proporcione una estructura que se comporte satisfactoriamente.

1.5 El análisis de estructuras de concreto reforzado

Para poder analizar una estructura es necesario idealizarla. Por ejemplo, una idealización frecuente en el análisis de edificios es considerar la estructura como formada por series de marcos planos en dos direcciones. De este modo se reduce el problema real tridimensional a uno de dos dimensiones. Se considera, además, que las propiedades mecánicas de los elementos en cada marco están concentradas a lo largo de sus ejes. Las acciones se aplican sobre esta estructura idealizada.

Las solicitaciones o acciones exteriores inducen acciones interiores (momentos, fuerzas) de intensidad variable. El propósito fundamental del análisis es valuar las acciones interiores en las distintas partes de la estructura. Para ello es necesario, salvo en estructuras o elementos isostáticos, conocer o suponer la relación entre fuerza y deformación o, en términos más generales, entre acción y respuesta.

La hipótesis más simple que puede hacerse para relacionar carga y deformación, es suponer una dependencia lineal; el análisis elástico de estructuras parte de esta hipótesis.

Otra hipótesis relativamente simple que se hace para el análisis de estructuras, es la de suponer que las acciones interiores, al llegar a cierto valor crítico de la acción, son independientes de las deformaciones; en esta hipótesis se basa el análisis límite. En él se tratan de obtener los valores de las acciones para los cuales la estructura se vuelve un mecanismo inestable.

Existen otros tipos de análisis más refinados, con hipótesis menos simples que las anteriores, que se aproximan más a la realidad. Debido a su mayor refinamiento, son más laboriosos, aunque con el empleo de computadoras se usarán cada vez más.

1.6 El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado

Se entiende por dimensionamiento la determinación de las propiedades geométricas de los elementos estructurales y de la cantidad y posición del acero de refuerzo.

El procedimiento de dimensionamiento tradicional, basado en esfuerzos de trabajo, consiste en determinar los esfuerzos correspondientes a acciones interiores obtenidas de un análisis elástico de la estructura, bajo sus supuestas acciones de servicio. Estos esfuerzos se comparan con esfuerzos permisibles, especificados como una fracción de las resistencias del concreto y del acero. Se supone que así se logra a la par, un comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio y un margen razonable de seguridad.

El factor de seguridad de los elementos de una estructura dimensionados por el método de esfuerzos de trabajo no es uniforme, ya que no puede medirse en todos los casos el factor de seguridad por la relación entre las resistencias de los materiales y los esfuerzos permisibles. En otras palabras, la relación entre la resistencia del material y los esfuerzos de trabajo no es siempre igual a la relación entre la resistencia del elemento y su solicitación de servicio.

El procedimiento más comúnmente utilizado en la actualidad es el denominado método plástico, de resistencia o de resistencia última, según el cual los elementos o secciones se dimensionan para que tengan una resistencia determinada.

El procedimiento consiste en definir las acciones interiores, correspondientes a las condiciones de servicio, mediante un análisis elástico, y multiplicarlas por un factor de carga, que puede ser constante o variable según los distintos elementos, para así obtener las resistencias de dimensionamiento. El factor de carga puede introducirse también incrementando las acciones exteriores y realizando después un análisis elástico de la estructura. El dimensionamiento se hace con la hipótesis de comportamiento inelástico.

El procedimiento de dimensionamiento plástico puede también aplicarse a los resultados de un análisis límite, del cual se obtienen directamente las acciones interiores correspondientes a la carga de falla que convierte la estructura en un mecanismo. El dimensionamiento a partir de un análisis límite no es todavía la aplicación práctica, debido a las incertidumbres que se tienen sobre mecanismos de colapso, la inestabilidad general de la estructura y la capacidad de rotación de los elementos de la misma.

El análisis límite no debe confundirse con el criterio general de dimensionamiento, denominado de estados límite, en el que están basadas las recomendaciones del Comité Euro-Internacional del Concreto [1.19] y los reglamentos ruso [1.9, 1.321 e inglés [1.22]. El enfoque de estados límite no es sino un formato en el que se consideran todos los aspectos del diseño en forma ordenada y racional y que permite la fácil incorporación de criterios probabilistas. De hecho, se trata de lograr que las características acción-respuesta de un elemento estructural o de una estructura estén dentro de límites que se consideran aceptables. Según este método, una estructura o un elemento estructural deja de ser útil cuando alcanza un estado, llamado estado límite, en el que deja de realizar la función para la cual fue diseñado.

A continuación se presenta con cierto detalle el procedimiento de diseño basado en el concepto de estados límite.

1.7 Diseño por estados límite

La mayoría de los reglamentos de construcción actuales, como el del Distrito Federal [1.11], el del Comité Euro-Internacional del Concreto [1.19], los Eurocódigos usados en los países de la Unión Europea [1.22] y el de Canadá [1.27], establecen disposiciones para el diseño de estructuras basadas en el concepto de estados límite. A continuación se presentan en forma resumida las disposiciones al respecto del Reglamento de las Construcciones para el Distrito Federal, y los criterios en los que están basadas. Al final de esta sección se presentan las disposiciones del Reglamento del American Concrete Institute [1.13], muy usado en América Latina, las cuales, aunque no están expresadas formalmente en términos de estados límite, siguen conceptos semejantes.

1.7.1 Reglamento del Distrito Federal

Los criterios de diseño estructural en que se basa este reglamento se presentan con detalle en la referencia 1.29. Se consideran dos categorías de estados límite: los de falla y los de servicio. Los de falla corresponden al agotamiento definitivo de la capacidad de carga de la estructura o de cualquiera de sus miembros, o al hecho de que la estructura, sin agotar su capacidad de carga, sufra daños irreversibles que afecten su resistencia ante nuevas aplicaciones de carga. Los estados límite de servicio tienen lugar cuando la estructura llega a estados de deformaciones, agrietamientos, vibraciones o daños que afecten su correcto funcionamiento, pero no su capacidad para soportar cargas. Para revisar los estados límite de falla, o sea, la seguridad de una estructura, se debe verificar que la resistencia de cada elemento estructural y de la estructura en su conjunto, sea mayor que las acciones que actúan sobre los elementos o sobre la estructura. Esta verificación se efectúa siguiendo el procedimiento que se expone a continuación.

a) Primero se determinan las acciones que obran sobre la estructura, las cuales se clasifican en permanentes, como la carga muerta; variables, como la carga viva; y accidentales, como el sismo y el viento.
b) Se calculan, mediante un análisis estructural, los efectos de las acciones sobre la estructura, o sea, los valores de las fuerzas axiales y cortantes y de los momentos flexionantes y torsionantes que actúan en distintas secciones de la estructura. Estos valores se denominan acciones o fuerzas internas S.
c) Las fuerzas internas se multiplican por factores de carga, F_c, para obtener las llamadas fuerzas internas de diseño. Cuando se usan métodos lineales de análisis estructural, se obtiene el mismo resultado multiplicando las acciones por los factores de carga antes de hacer el análisis. Más adelante se indican los factores de carga recomendados en el Reglamento del Distrito Federal.
d) Se calculan las resistencias nominales, R, de cada elemento de la estructura, y se multiplican por factores reductivos, F_R, para obtener las llamadas resistencias de diseño.
e) Se verifica que las resistencias de diseño, F_R R, sean iguales o mayores que las fuerzas internas de diseño, F_C S. Esta verificación, que constituye el criterio básico de comprobación de la seguridad de una estructura, según el Reglamento del Distrito Federal, puede ilustrarse esquemáticamente como sigue:

$$\underbrace{\text{Fuerza interna de diseño}}_{F_C\,S} \leq \underbrace{\text{Resistencia de diseño}}_{F_R\,R}$$

A continuación se explica con mayor detalle la forma de llevar a cabo cada una de las etapas anteriores.

Acciones. Se mencionó que en el Reglamento del Distrito Federal las acciones se clasifican en permanentes, variables y accidentales. Los criterios generales de determinación de estas acciones son los siguientes [1.29, 1.34].

Las acciones permanentes y variables tienen distribuciones de frecuencia como la indicada en forma aproximada en la figura 1.3. Si se trazan histogramas del peso volumétrico de diferentes muestras de concreto o de las mediciones de la carga viva en un número grande de edificios, se verá que tienen una forma similar a la de esta figura. Se han señalado en ella tres valores de las intensidades de las acciones: a) una intensidad nominal máxima, x_M, que es aquella cuya probabilidad de ser excedida es de dos por ciento, o sea, que es un valor máximo probable de la carga; b) una intensidad nominal mínima, x_m, que es aquella cuya probabilidad de no ser alcanzada es de dos por ciento, o sea, que es un valor mínimo probable de la carga; y c) la intensidad promedio, m_x. Como se ve, las intensidades nominales máxima y mínima pueden ser muy diferentes de la intensidad promedio.

El Reglamento del Distrito Federal utiliza estos conceptos de intensidad máxima e intensidad mínima para establecer las acciones de diseño permanentes y variables. En el caso de las permanentes, establece determinar un valor máximo probable de su intensidad tomando en cuenta la variabilidad de las dimensiones de los elementos, de los pesos volumétricos y de las otras propiedades relevantes de los materiales, excepto cuando el efecto de la acción permanente sea favorable a la estabilidad de la estructura, como en muros de gravedad; entonces debe usarse la intensidad mínima probable.

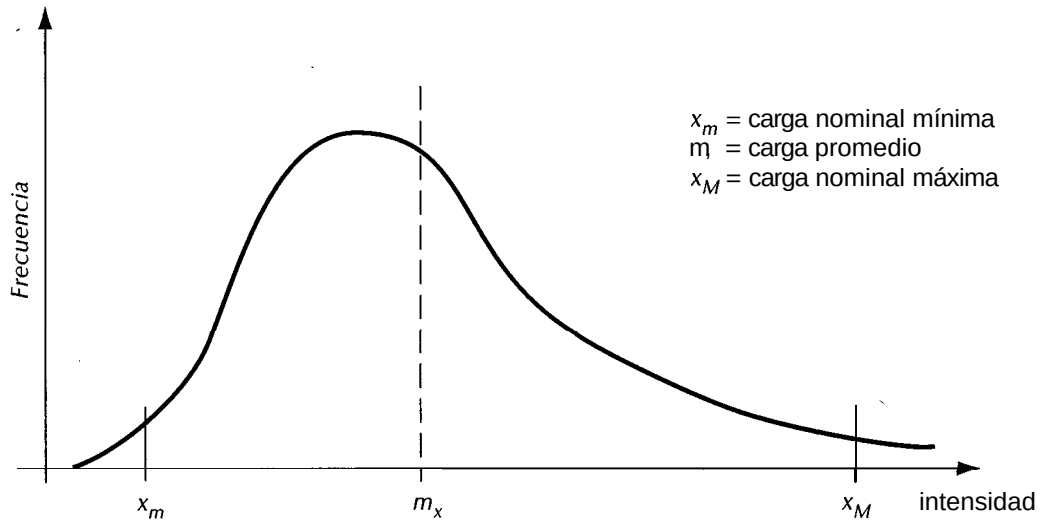


Figura 1.3 Distribución de frecuencias de las cargas.

Para acciones variables se establecen cuatro intensidades:

a) Una intensidad máxima probable que se utiliza para combinaciones de acciones permanentes y variables, y que es la equivalente de x_M en la figura 1.3.

b) Una intensidad mínima probable que debe utilizarse cuando el efecto de la acción sea favorable a la estabilidad de la estructura; es la equivalente a x_m en la figura 1.3, pero el reglamento especifica tomarla, en general, igual a cero.

c) Una intensidad media, equivalente a m, que se utiliza para estimar efectos a largo plazo, como hundimientos o deflexiones.

d) Una intensidad instantánea, que se utiliza en combinación con acciones accidentales, que es el valor máximo probable en el lapso en que pueda presentarse una acción accidental, como un sismo. Tiene valores comprendidos entre la intensidad media, m, y la intensidad máxima, x_M; figura 1.3. Al especificarse esta intensidad, se reconoce que es muy poco probable que al presentarse una acción accidental, la acción variable esté actuando con su intensidad máxima probable.

Por lo que se refiere a las acciones accidentales, como viento o sismo, el Reglamento del Distrito Federal se basa en el criterio de periodo de recurrencia, que se define como el tiempo promedio que debe transcurrir para que la acción exceda un valor x_p que tiene una probabilidad p de ser excedido en un año cualquiera. El Reglamento utiliza un periodo de recurrencia de 50 años, que para estructuras con vida útil de 50 o 100 años, conduce a probabilidades de excedencia muy superiores a las de las acciones permanentes y variables [1.34].

Otros reglamentos de construcción utilizan criterios similares a los descritos para la determinación de las acciones, pudiendo variar los valores de las probabilidades de exceder o de no alcanzar las acciones probables o los periodos de recurrencia.

Fuerzas internas. Las fuerzas internas, S, se determinan efectuando el análisis de la estructura sujeta a las distintas combinaciones de acciones que tengan una probabilidad no despreciable de ocurrir simultáneamente. Por ejemplo, se deberá efectuar el análisis estructural bajo carga muerta y viva, o bajo carga muerta, viva y sismo simultáneamente, para determinar cuál es la combinación más desfavorable. Los valores nominales de las cargas que se especifican en las Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones [1.35], varían según la combinación de acciones que se considere. En las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto del Reglamento del Distrito Federal [1.30], se permite que el análisis de estructuras de concreto reforzado se efectúe suponiendo que la estructura tiene un comportamiento lineal y elástico, y se permite también, bajo ciertas condiciones, utilizar análisis al límite.

Factores de carga. Se mencionó más arriba que las cargas nominales se multiplican por factores de carga antes de hacer el análisis estructural. Estos factores son números con los que se incrementan las cargas nominales máximas o se reducen las mínimas, de tal manera que con ellos se aumenta o se disminuye, respectivamente, la probabilidad de que las cargas sean excedidas o no sean alcanzadas. Los factores de carga toman en cuenta la posibilidad de que se presenten sobrecargas y las imprecisiones en los métodos de análisis estructural. La probabilidad de que varias acciones existan simultáneamente con su máxima intensidad es peque-

ña, por eso generalmente se especifican factores de carga menores para acciones combinadas. Así, el Reglamento del Distrito Federal [1.35] establece los siguientes factores de carga:

a) Para combinaciones que incluyan exclusivamente acciones permanentes y variables, el factor de carga, F_c, será de 1.4, excepto en estructuras que soporten pisos en los que pueda haber normalmente aglomeración de personas, o en construcciones que contengan equipo sumamente valioso, caso en el cual el factor de carga será de 1.5.
b) Para combinaciones de acciones que incluyan una accidental, como viento o sismo, además de las acciones permanentes y variables, el factor de carga, F_c, será de 1.1.
c) Para acciones cuyo efecto sea favorable a la resistencia o estabilidad de la estructura, se tomará un factor de carga, F_c, de 0.9. En estos casos, como ya se explicó anteriormente, se utiliza la carga nominal mínima.
d) En la revisión de estados límite de servicio, se tomará un factor de carga igual a uno.

Resistencias. Se entiende por resistencia la magnitud de una acción, o de una combinación de acciones, que provocaría la aparición de un estado límite de falla en un elemento estructural o en una estructura. Por ejemplo, la resistencia a flexión de una viga es la magnitud del momento flexionante que provocaría su falla en flexión; su resistencia a cortante es la magnitud de la fuerza cortante que provocaría una falla de este tipo del elemento; la resistencia a flexocompresión de una columna es la magnitud del momento flexionante y de la carga axial que, combinadas, producen la falla del elemento.

La resistencia es también una variable probabilista. Para estimar la resistencia de muchos elementos estructurales, existen métodos probados experimentalmente o que han demostrado su validez a través de la experiencia. El valor calculado con estos métodos se denomina, en este texto, resistencia nominal, que es un término usado en versiones anteriores del Reglamento del Distrito Federal. Para elementos estructurales poco comunes, para los cuales no existen métodos de cálculo incluidos en el Reglamento, deberá recurrirse a métodos teóricos o a la determinación directa de la resistencia en forma experimental. El valor de la resistencia nominal en estos casos será tal, que la probabilidad de que no sea alcanzado sea relativamente pequeña; un valor de dos por ciento es recomendable (figura 1.4). Cuando en este texto se emplea el término resistencia, se debe entender que es equivalente al término resistencia nominal.

La mayor parte de este libro, del capítulo 4 al 9 y del 12 al 15, está dedicada a presentar métodos para el cálculo de las resistencias de elementos estructurales de concreto reforzado. En los ejemplos que se presentan se utilizan indistintamente el Reglamento del Distrito Federal o el del American Concrete Institute.

Las resistencias nominales deben multiplicarse por factores reductivos de resistencia, F_R, para tomar en cuenta la naturaleza aproximada de las fórmulas utilizadas para calcular las resistencias, errores en las dimensiones de los elementos, efectos adversos debidos a procedimientos inadecuados de colocación y curado del concreto e importancia relativa de distintos tipos de miembros estructurales. El valor de estos factores depende también del tipo de falla; la reducción es mayor para elementos de falla frágil que para elementos de falla dúctil. En capítulos siguientes se indican los factores de resistencia que especifica el Reglamento del Distrito Federal para distintos tipos de acciones.

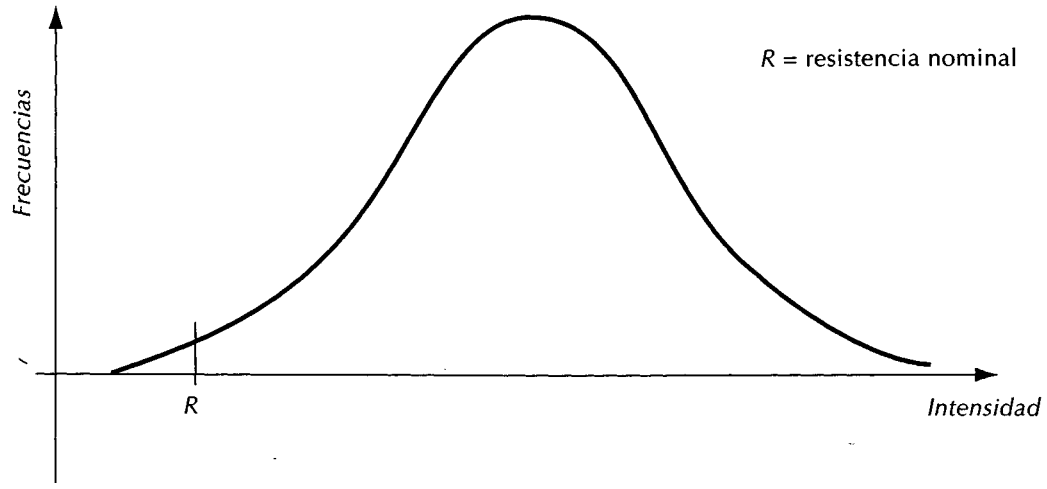


Figura 1.4 Distribución de frecuencias de las resistencias.

Revisión de la seguridad. La última etapa del procedimiento consiste en verificar que para todo estado límite de falla, la resistencia de diseño exceda a la fuerza interna actuante de diseño, o sea, que F_R R ≥ F_C S. Por ejemplo, la resistencia de diseño a flexión de una viga debe ser mayor que el momento flexionante de diseño.

Por lo que respecta a los estados límite de servicio, el Reglamento del Distrito Federal especifica calcular la magnitud de las respuestas, tales como deflexiones y vibraciones bajo la acción de las cargas nominales, sin incrementarlas o disminuirlas con factores de carga, y comparar estas magnitudes con valores especificados en el mismo Reglamento. En capítulos siguientes de este libro se presentan métodos para calcular las deflexiones y los agrietamientos de elementos estructurales de concreto reforzado. Estas respuestas son las más importantes para elementos de este material.

1.7.2 Reglamento del American Concrete *Institute* (ACI 318-02)

Este reglamento está diseñado para ser utilizado como parte integrante de reglamentos más generales en vigor en distintas localidades. No establece, por lo tanto, valores de las cargas que deben ser utilizadas en el diseño, como sí lo hace el Reglamento del Distrito Federal. Sin embargo, los factores de carga que se especifican a partir de la edición de 2002, así como los factores de reducción de resistencia denominados ϕ, están tomados de los que a su vez especifica la American Society of Civil Engineers junto con los valores de las cargas recomendadas [1.37]. Estas cargas y factores son válidos para cualquier tipo de material, lo cual tiene la ventaja de que se pueden usar para construcciones compuestas, por ejemplo estructuras de concreto y acero. Algunos ejemplos de cargas factorizadas, que en el Reglamento ACI se denominan *U,* son los siguientes:

a) Para combinaciones de carga muerta y carga viva,

$$U = 1.2\ D + 1.6\ L + 0.5\ L_r$$

Donde D es el valor de la carga muerta, L el valor de la carga viva en los pisos intermedios, y L_r el valor de la carga viva en azotea.

b) Para combinaciones de carga muerta, sismo y carga viva,

$$U = 1.2\ D + 1.4\ E + 1.0\ L$$

Donde E es la fuerza sísmica calculada a partir de cargas de servicio.

La revisión de la seguridad en el Reglamento ACI se plantea entonces como

ϕ (resistencia nominal) $\geq$ U.

Esta expresión es equivalente a la de $F_R R \geq F_C S$ del Reglamento del Distrito Federal.

El Reglamento ACI también incluye factores de carga para cargas producidas por empuje de tierra o de líquidos, para los efectos de cambios de temperatura, asentamientos diferenciales, flujo plástico y contracción del concreto, viento, lluvia y nieve.

En la referencia 1.33 se presenta un ejemplo de cómo pueden obtenerse factores de carga con el formato del reglamento ACI usando conceptos de enfoques probabilísticos de seguridad estructural.

Finalmente, los requisitos bajo condiciones de servicio, que equivalen a la revisión en estados límite de servicio del Reglamento del Distrito Federal, se revisan bajo la acción de las cargas nominales del reglamento más general.

Los diseños finales que se obtienen aplicando el Reglamento del Distrito Federal son semejantes a los obtenidos con el Reglamento ACI. Sin embargo, no se pueden comparar etapa por etapa del diseño. Los factores de carga del Reglamento ACI son menores que los del Distrito Federal, pero los factores de reducción de resistencias del ACI son más severos. El Reglamento del Distrito Federal incluye disposiciones que también son factores de seguridad, como considerar una resistencia reducida del concreto, f_c^*, o dimensiones reducidas para algunos miembros, lo que no hace el Reglamento ACI. Hay entonces variaciones entre ambos reglamentos sobre la forma de lograr que la resistencia de diseño sea igual o mayor que la fuerza interna de diseño. Pero ambos se sustentan en este criterio general de diseño.

Referencias

1.1 *Churchman, C. W. El enfoque de sistemas. México, Editorial Diana,* 1968.

1.2 *Hall, A. D. Ingeniería de sistemas. México, CECSA,* 1969.

1.3 *Chestnut, H. Systems Engineering Method. Nueva York, Wiley,* 1967.

1.4 Neufville, *R. de, y H. Stafford. Systems Analysis for Engineers and Managers. Nueva York, McGraw* Hill, 1971.

1.5 Aguilar, *R. J. Systems Analysis and Design in Engineering, Architecture, Construction and Planning. Englewood Cliffs, N. J., Prentice-Hall,* 1973.

1.6 *Cárdenas, M. A. Aplicaciones del análisis de sistemas. México. CECSA.* 1976.

1.7 Stark, R. M. y R. L. Nicholls. *Mathematical Foundations for Design; Civil Engineering Systems. Nueva York,* McGraw Hill, 1971.

1.8 *Khan, F. R. "Optimization of Building Structures", en Proceedings 1966 Illinois Structural Engineering Conference, Structural Engineering in Modern Building Design, University of Illinois Bulletin,* 1969.

1.9 *Baikov, V. N. y S. G. Strongin. Structural Design. Moscú, MIR Publishers,* 1982.

1.10 *Khachaturian, N., et al. Introduction to Structural Optimization. Waterloo, Ontario, Canadá,* Waterloo University.

1.11 *Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal, Gaceta Oficial del Distrito Federal, No. 8-ter, 29 de enero de* 2004.

1.12 *Robles* F. V., F. *"Concreto reforzado", Sección H del Manual de Diseño de Obras Civiles. México, Comisión Federal de Electricidad,* 1970.

1.13 Comité ACI 318. Building Code Requirements for Structural Concrete *(ACI* 318-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.

1.14 Comité ACI 318. Commentary on Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-*02),* Detroit, American Concrete Institute, 2002.

1.15 Krick, E. F. Introducción a la ingeniería y al diseño en la ingeniería, 2a. edición. México, Limusa, 1974.

1.16 Spunt, L. Optimum Structural Design. Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1971.

1.17 Ghiocel D., y D. Lungu. Wind, Snow, and Tem*perature* Effects Based on Probability. Turnbridge Wells, Kent, Inglaterra, Abacus Press, 1975.

1.18 Jauffred, F, F. A. Moreno Bonnet y J. Acosta F. Métodos de optimización; programación lineal gráfica. México, Representaciones y Servicios de Ingeniería, 1971.

1.19 CEB - FIP. Model Code for Concrete Structures. Wexham Springs, Slough, Inglaterra, Cement and Concrete Association, 1978.

1.20 Asimov, E. M. Introducción al proyecto. México, Herrero Hnos., 1968.

1.21 Wright, J. R. "Performance Criteria in Building". Scientific American, marzo 1971.

1.22 —*Eurocódigo* 2 - Proyecto de Estructuras de Hormigón. Asociación Española de Normalización y Certificación, Noviembre, 1993.

1.23 Robertson, L. E. "On Tall Building". En Proceed*ings* of a *Symposium* on *Tall* Buildings Held at the University of Southampton, April, 7966. Oxford, Pergamon Press, 1967.

1.24 —. Probabilistic Design of Reinforced Concrete Buildings, SP-31. Detroit, American Concrete Institute, 1972.

1.25 Gutiérrez Pérez, M. "Análisis estadístico de costos de edificios". Ingeniería Civil. México, No. 159, septiembre 1970.

1.26 Ferry Borges, J. y M. Castanheta. Structural Safety. Lisboa. Laboratorio Nacional de Engenharia Civil, 1971.

1.27 Canadian Standards Association. A23.3-94 De*sign* of Concrete Structures. Diciembre 1994.

1.28 Ang, A. y W. Tang. Probability Concepts in Engineering Planning and Design. Vol. 1 Nueva York, 1979.

1.29 Meli, R. "Bases para los criterios de diseño estructural del proyecto del Reglamento de Construcciones para el Distrito Federal". Revista Ingeniería, México, junio 1976.

1.30 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo I, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.

1.31 Merrit, F. S. Building, Engineering and Systems Design. Nueva York, Van Nostrand-Reinhold, 1979.

1.32 Baikov, V. y E. Sigalov. Reinforced Concrete Structures, *2* vols., Moscú, MIR Publishers, 1981.

1.33 Macgregor, J. C.: "Loads and Resistance Factors for Concrete Design", *Journal* of the American Concrete Institute, julio-agosto 1983.

1.34 Meli, R. Diseño Estructural, México, Limusa, 1985.

1.35 Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones. Gobierno del Distrito Federal, 2004.

1.36 Arockiasamy, M. "Expert Systems-Applications for Structural, Transportation, and Environmental Engineering", Boca Ratón, CRC Press, 1993.

1.37 "Minimum Design Loads for Buildings and Other Structures" (ASCE 7-98). American Society of Civil Engineers, Nueva York, 1998.

1.38 Riobóo, J. M. "La Ingeniería Estructural: una Especie en Extinción". Ingeniería Civil, México, febrero 2002.

CAPÍTULO 2

Características generales del concreto y del acero

2.1 Introducción. /2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple. /2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido. /2.4 Fatiga. /2.5 Módulos elásticos. /2.6 Deformaciones por cambios de temperatura. /2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo.

2.1 Introducción

El concreto es un material pétreo, artificial, obtenido de la mezcla, en proporciones determinadas, de cemento, agregados y agua. El cemento y el agua forman una pasta que rodea a los agregados, constituyendo un material heterogéneo. Algunas veces se añaden ciertas sustancias, llamadas aditivos o adicionantes, que mejoran o modifican algunas propiedades del concreto.

El peso volumétrico del concreto es elevado en comparación con el de otros materiales de construcción, y como los elementos estructurales de concreto son generalmente voluminosos, el peso es una característica que debe tomarse en cuenta. Su valor oscila entre 1.9 y 2.5 ton/m^3 dependiendo principalmente de los agregados pétreos que se empleen. Algunas de las otras características del concreto se ven influidas por su peso volumétrico, como se verá más adelante. Por esta razón, algunos reglamentos de construcción establecen disposiciones que dependen del peso volumétrico. El Reglamento de Construcciones del Distrito Federal, por ejemplo, define dos clases de concreto: clase 1, que tiene un peso volumétrico en estado fresco superior a 2.2 ton/m^3, y clase 2, cuyo peso volumétrico está comprendido entre 1.9 y 2.2 ton/m^3.

El concreto simple, sin refuerzo, es resistente a la compresión, pero es débil en tensión, lo que limita su aplicabilidad como material estructural. Para resistir tensiones se emplea refuerzo de acero, generalmente en forma de barras, colocado en las zonas donde se prevé que se desarrollarán tensiones bajo las acciones de servicio. El acero restringe el desarrollo de las grietas originadas por la poca resistencia a la tensión del concreto.

El uso del refuerzo no está limitado a la finalidad anterior. También se emplea en zonas de compresión para aumentar la resistencia del elemento reforzado, para reducir las deformaciones debidas a cargas de larga duración y para proporcionar confinamiento lateral al concreto, lo que indirectamente aumenta su resistencia a la compresión.

La combinación de concreto simple con refuerzo constituye lo que se llama *concreto reforzado.*

El concreto presforzado es una modalidad del concreto reforzado, en la que se crea un estado de refuerzos de compresión en el concreto antes de la aplicación de las acciones. De este modo, los esfuerzos de tensión producidos por las acciones quedan contrarrestados o reducidos. La manera más común de presforzar consiste en tensar el acero de refuerzo y anclarlo en los extremos del elemento.

Para dimensionar estructuras de concreto reforzado es necesario utilizar métodos que permitan combinar el concreto simple y el acero, de tal manera que se aprovechen en forma racional y económica las características especiales de cada uno de ellos. Esto implica el conocimiento de estas caracterís-

ticas; en las páginas siguientes se describirán algunas de las más importantes.

Existen otras características del concreto, tales como su durabilidad, permeabilidad, resistencia al fuego, a la abrasión, a la intemperie, etc., que no se tratarán, ya que no es necesario su conocimiento detallado para establecer métodos de dimensionamiento. El lector puede consultar a este respecto algún texto de tecnología del concreto, como los de Neville [2.2, 2.19], Troxell, Davis y Kelly [2.1], Orchard [2.3] o Popovics [2.20], recomendados al final de este capítulo. Un excelente tratamiento del tema se presenta en el Manual de Tecnología del Concreto de la Comisión Federal de Electricidad [2.29].

2.2 Características esfuerzo-deformación del concreto simple

Se ha indicado que el objeto principal del estudio del comportamiento del concreto es la obtención de las relaciones acción-respuesta del material, bajo la gama total de solicitaciones a que puede quedar sujeto. Estas características acción-respuesta pueden describirse claramente mediante curvas esfuerzo-deformación de especímenes ensayados bajo distintas condiciones.

En este caso, el esfuerzo es comúnmente una medida de la acción ejercida en el espécimen, y la deformación, una medida de la respuesta. Sin embargo, debe tenerse en cuenta que en algunos casos, como por ejemplo en asentamientos y contracciones, esta relación se invierte; es decir, las solicitaciones quedan medidas por la deformación y la respuesta está representada por los esfuerzos respectivos.

Para conocer el comportamiento del concreto simple es necesario determinar las curvas esfuerzo-deformación correspondientes a los distintos tipos de acciones a que puede estar sometido. En el caso más general, sería necesario analizar todas las combinaciones de acciones a que puede estar sujeto un elemento.

Para esto se han hecho estudios experimentales sobre el comportamiento del concreto sujeto a estados uniaxiales de compresión y tensión, a estados biaxiales de compresión y tensión, y a estados triaxiales de compresión. A partir de estos estudios se han obtenido expresiones para determinar las deformaciones que producen estados combinados de esfuerzos.

2.2.1 Modos de falla y características esfuerzo-deformación bajo compresión axial

MODOS DE FALLA

La figura 2.1 muestra un cilindro de concreto simple ensayado en compresión axial. En cilindros con relación de lado a diámetro igual a dos, como el que se muestra en la figura, la falla suele presentarse a través de planos inclinados con respecto a la dirección de la

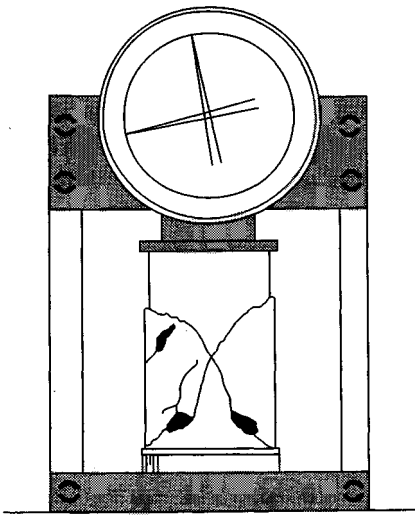


Figura 2.1 Falla en compresión de un cilindro de concreto.

carga. Esta inclinación es debida principalmente a la restricción que ofrecen las placas de apoyo de la máquina contra movimientos laterales. Si se engrasan los extremos del cilindro para reducir las fricciones, o si el espécimen es más esbelto, las grietas que se producen son aproximadamente paralelas a la dirección de aplicación de la carga. Al comprimir un prisma de concreto en estas condiciones, se desarrollan grietas en el sentido paralelo al de la compresión, porque el concreto se expande transversalmente.

Las grietas se presentan de ordinario en la pasta y muy frecuentemente entre el agregado y la pasta. En algunos casos también se llega a fracturar el agregado. Este microagrietamiento es irreversible y se desarrolla a medida que aumenta la carga, hasta que se produce el colapso.

CURVAS ESFUERZO-DEFORMACIÓN

Las curvas esfuerzo-deformación se obtienen del ensaye de prismas sujetos a carga axial repartida uniformemente en la sección transversal mediante una placa rígida. Los valores del esfuerzo resultan de dividir la carga total aplicada, P, entre el área de la sección transversal del prisma, A, y representan valores promedio obtenidos bajo la hipótesis de que la distribución de deformaciones es uniforme y de que las características esfuerzo-deformación del concreto son constantes en toda la masa. El valor de la deformación unitaria, ε, es la relación entre el acortamiento total, a, y la longitud de medición, ℓ (figura 2.2).

Puesto que el concreto es un material heterogéneo, lo anterior es una idealización del fenómeno. Según la distribución de la pasta y del agregado en la masa, los esfuerzos, considerados como la carga soportada en un área diferencial, variarán de un punto a otro de una misma sección. Sin embargo, esta variación no es significativa desde el punto de vista del diseño estructural.

CURVA TÍPICA BAJO CARGA DE CORTA DURACIÓN

La curva que se presenta en la figura 2.2 corresponde a un ensaye efectuado en un tiempo relativamente corto, del orden de unos cuantos minutos desde la iniciación hasta el colapso. Se puede apreciar que el concreto no es un material elástico y que la parte inicial de estas curvas no es rigurosamente recta. Sin embargo, sin gran error puede considerarse una porción recta hasta aproximadamente el 40 por ciento de la carga máxima. Se observa, además, que la curva llega a un máximo y después tiene una rama descendente. El colapso se produce comúnmente a una carga menor que la máxima.

En el ensaye de prismas o cilindros de concreto simple, la carga máxima se alcanza a una deformación unitaria del orden de 0.002, si la longitud de medición es del mismo orden de magnitud que el lado del espécimen. El colapso del prisma, que corresponde al extremo de la rama descendente, se presenta en ensayes de corta duración a deformaciones que varían entre 0.003 y 0.007, según las condiciones del espécimen y de la máquina de ensaye.

Se han propuesto varias ecuaciones para representar analíticamente la curva esfuerzo-deformación. El problema es complejo porque influyen muchas variables, algunas inclusive ajenas a las propiedades intrínsecas del material, como la rigidez relativa de la máquina de ensaye. Aunque para la mayoría de las aplicaciones prácticas no se requiere una ecuación que represente la gráfica completa, incluyendo la rama descendente, dicha ecuación es necesaria cuando se trata de determinar los esfuerzos de manera rigurosa utilizando técnicas como la del elemento finito. Por esta razón se han realizado investigaciones para obtener ecuaciones que consideren a la mayoría de las variables significativas. El lector interesado puede consultar, por ejemplo, la referencia 2.25.

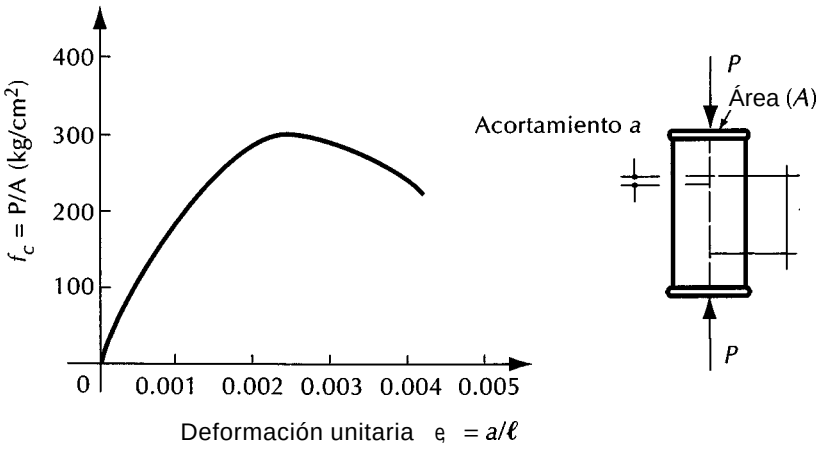


Figura 2.2 Curva esfuerzo-deformación en compresión axial de un espécimen sujeto a carga de corta duración.

EFECTO DE LA EDAD

Debido al proceso continuo de hidratación del cemento, el concreto aumenta su capacidad de carga con la edad. Este proceso de hidratación puede ser más o menos efectivo, según sean las condiciones de intercambio de agua con el ambiente, después del colado. Por lo tanto, el aumento de capacidad de carga del concreto depende de las condiciones de curado a través del tiempo.

La figura 2.3 muestra curvas esfuerzo-deformación de cilindros de 15 × 30 cm, fabricados de un mismo concreto y ensayados a distintas edades. Todos los cilindros fueron curados en las mismas condiciones hasta el

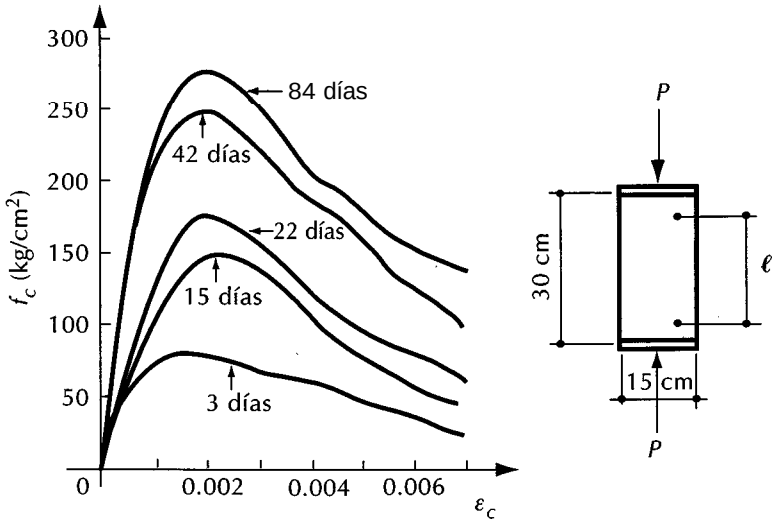


Figura 2.3 Efecto de la edad al ensayar en la resistencia.

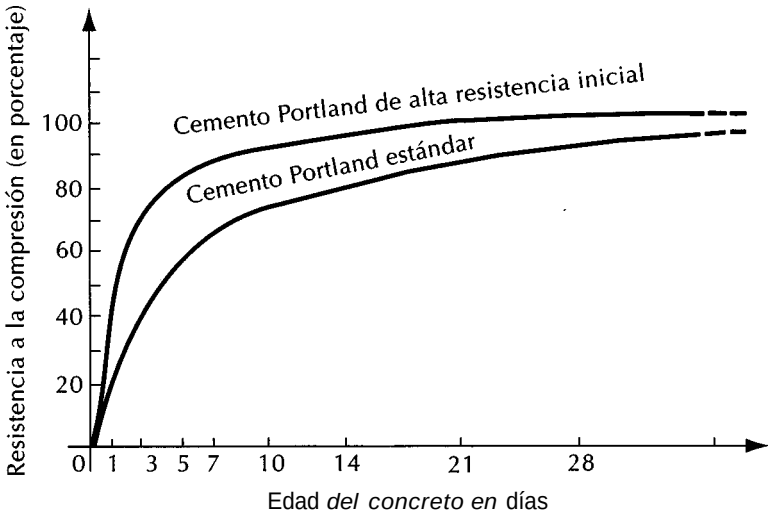


Figura 2.4 Variación de la resistencia con la edad.

día del ensaye. Las curvas se obtuvieron aplicando incrementos de deformación constantes. Se determinan así ramas descendentes más extendidas que las obtenidas comúnmente bajo incrementos constantes de carga. Se puede observar que la deformación unitaria para la carga máxima es del orden de 0.0015 a 0.0020.

El aumento de resistencia con la edad depende también del tipo de cemento, sobre todo a edades tempranas. La figura 2.4 muestra el aumento de resistencia con la edad para cilindros de 15 × 30 cm, hechos con cemento normal (tipo I), y de alta resistencia inicial (tipo III), que son los dos tipos más empleados en estructuras de concreto reforzado.

Después de los primeros tres meses, el aumento en resistencia es relativamente pequeño.

EFECTO DE LA RESISTENCIA

La curva mostrada en la figura 2.2 corresponde a concretos con una resistencia a la compresión comprendida entre 200 y 300 kg/cm^2, aproximadamente. En fechas recientes se han desarrollado concretos con resistencias mucho mayores, hasta de más de 1000 kg/cm^2, llamados concretos de muy alta resistencia. Aunque no existe una definición precisa, se puede considerar que si su resistencia sobrepasa los 400 kg/cm^2, un concreto ya es de muy alta resistencia. Estos concretos se han utilizado en edificios muy altos, puentes, torres y estructuras especiales. Algunos ejemplos conocidos son el Two Union Square Building en Seattle, en el que se usó un concreto de 1400 kg/cm^2, y las Torres de Kuala Lumpur, en Malasia. En México se han construido dos edificios con concretos de 600 kg/cm^2.

La forma de la curva esfuerzo-deformación varía con la resistencia del concreto. En la figura 2.5 se muestran curvas de concretos cuyas resistencias varían de 250 a 1200 kg/cm^2. Se puede ver que conforme aumenta la resistencia, las gráficas se vuelven más cercanas a una línea recta en la parte inicial y sus ramas descendentes se hacen más pronunciadas. La deformación última, ε_{cu}, disminuye significativamente, mientras que la deformación correspondiente al esfuerzo má-

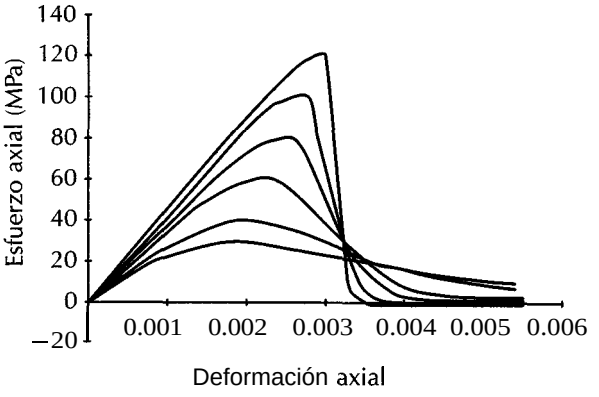


Figura 2.5 Efecto de la resistencia (Park [2.30]).

ximo va siendo mayor. Mientras mayor es la resistencia, el comportamiento es más frágil.

EFECTO DE LA VELOCIDAD DE CARGA

La figura 2.6 muestra resultados de ensayes de cilindros realizados a distintas velocidades de carga. En este tipo de ensayes se aplicó la carga a una velocidad constante y se

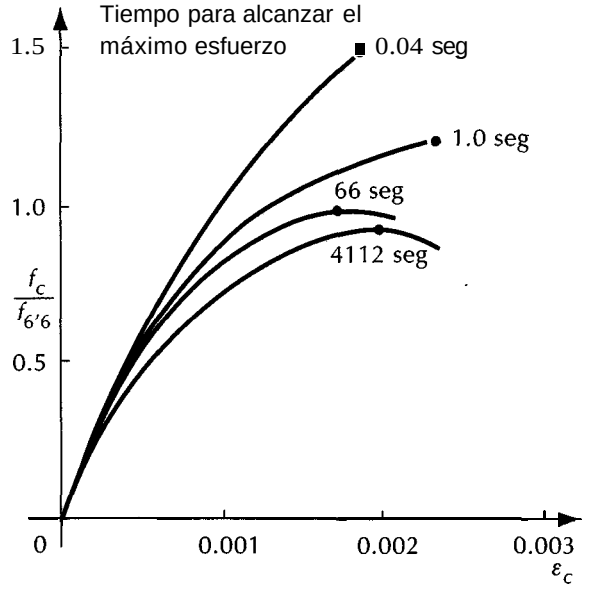


Figura 2.6 Efecto de la velocidad de carga (Hatano [2.4]).

midió el tiempo necesario para alcanzar la resistencia.

Se puede observar que la resistencia de un cilindro en el que la carga máxima se alcanza en centésimas de segundo es aproximadamente 50 por ciento mayor que la de uno que alcanzó su carga máxima en 66 segundos. Por otra parte, para un cilindro en que la carga máxima se alcanza en 69 minutos, la resistencia disminuye aproximadamente en 10 por ciento.

En ensayes a velocidad de carga constante, las ramas descendentes de las curvas esfuerzo-deformación no son muy extendidas, debido a que las características de las máquinas de ensaye hacen que el colapso ocurra súbitamente, una vez que se alcanza la carga máxima.

En la figura se muestra que las pendientes de las tangentes iniciales a las curvas crecen al aumentar la velocidad. No es posible determinar en todos los casos la rama descendente. Al igual que en otros tipos de ensaye, las deformaciones correspondientes a las cargas máximas son del orden de 0.002.

EFECTO DE LA VELOCIDAD DE DEFORMACIÓN

La figura 2.7 muestra curvas obtenidas ensayando cilindros a distintas velocidades de deformación, desde una milésima de deformación unitaria por minuto, hasta una milésima por cien días. En esta figura, $f_{c(0.001)}$ representa la resistencia obtenida cuando la velocidad de deformación unitaria en el ensaye es de 0.001 por minuto. Como puede apreciarse, esta variable tiene un efecto notable sobre las características de la curva esfuerzo-deformación, especialmente sobre la carga máxima. Si la velocidad de deformación es muy grande, la rama descendente es brusca, en tanto que si la deformación se aplica lentamente, la rama descendente es bastante suave. La deformación unitaria correspondiente a la carga máxima sigue siendo del orden de 0.002. Puede observarse que la resisten-

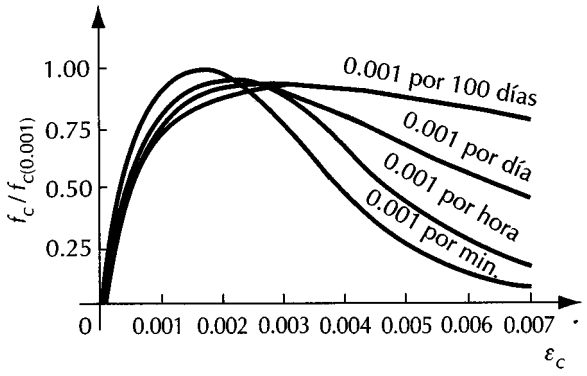


Figura 2.7 Efecto de la velocidad de deformación (Rüsch [2.5]).

cia disminuye muy poco con incrementos importantes en la duración del ensaye.

EFECTO DE LA ESBELTEZ Y DEL TAMAÑO DEL ESPÉCIMEN

El efecto de la relación de esbeltez sobre la resistencia a la compresión de un prisma se muestra de manera cualitativa en la figura 2.8, en la que arbitrariamente se ha tomado como 100 por ciento la resistencia de un espécimen con relación de esbeltez igual a dos. Como medida de la esbeltez se toma la relación entre la longitud, medida en dirección de la carga, y el lado menor de un prisma, o el diámetro de un cilindro.

Para esbelteces mayores que dos, la resistencia baja, hasta llegar al 85 por ciento, aproximadamente, para esbelteces de seis o más. Por el contrario, para especímenes de esbelteces menores que dos, la resistencia aumenta indefinidamente, y en teoría sería infinita para un espécimen de altura nula.

En especímenes geométricamente semejantes pero de distinto tamaño, la resistencia disminuye, dentro de ciertos límites, mientras mayor sea el espécimen. Esto es debido a que en materias frágiles, como el concreto, la probabilidad de que existan zonas de

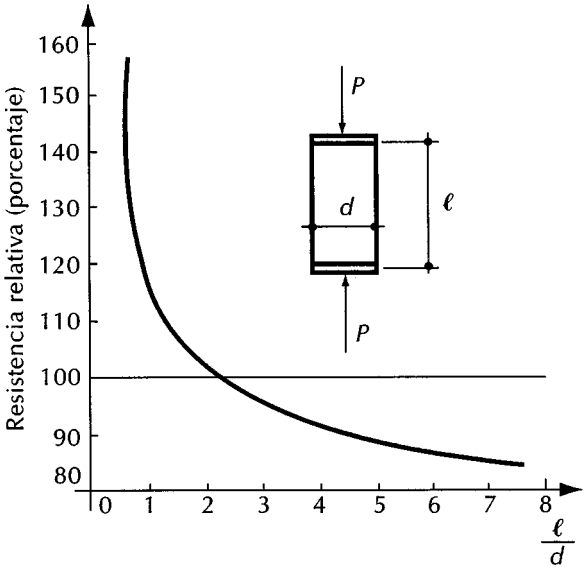


Figura 2.8 Efecto de la relación de esbeltez.

resistencia baja aumenta con el tamaño del espécimen. La figura 2.9 muestra el efecto del tamaño de un cilindro en su resistencia a la compresión.

2.2.2 Compresión triaxial

Los ensayes efectuados en cilindros de concreto bajo compresión triaxial muestran que la resistencia y la deformación unitaria co-

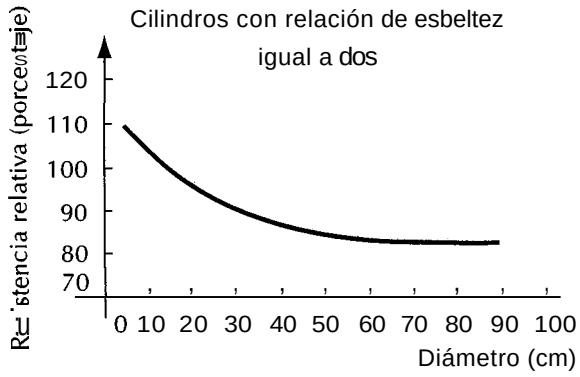


Figura 2.9 Efecto del tamaño.

rrespondiente crecen al aumentar la presión lateral de confinamiento. En estos ensayes, el estado triaxial de esfuerzos se crea rodeando el espécimen de aceite a cierta presión y aplicando una carga axial hasta la falla mediante dispositivos como el ilustrado esquemáticamente en la figura 2.10 (a).

En la figura 2.10 (b) se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de los ensayes realizados por Brandtzaeg [2.6]. Corresponden a distintas presiones de confinamiento lateral, desde 38 hasta 286 kg/cm^2. Se puede observar que el incremento de la resistencia es función directa del incremento de la presión de confinamiento. Con presiones de confinamiento adecuadas, pueden obtenerse resistencias de más de 1000 kg/cm^2.

El efecto de la presión lateral sobre la resistencia se ilustra en la figura 2.10 (c), donde se presenta una gráfica del esfuerzo axial, f_1, necesario para producir la falla del cilindro, contra la presión lateral, f_2. Los re-

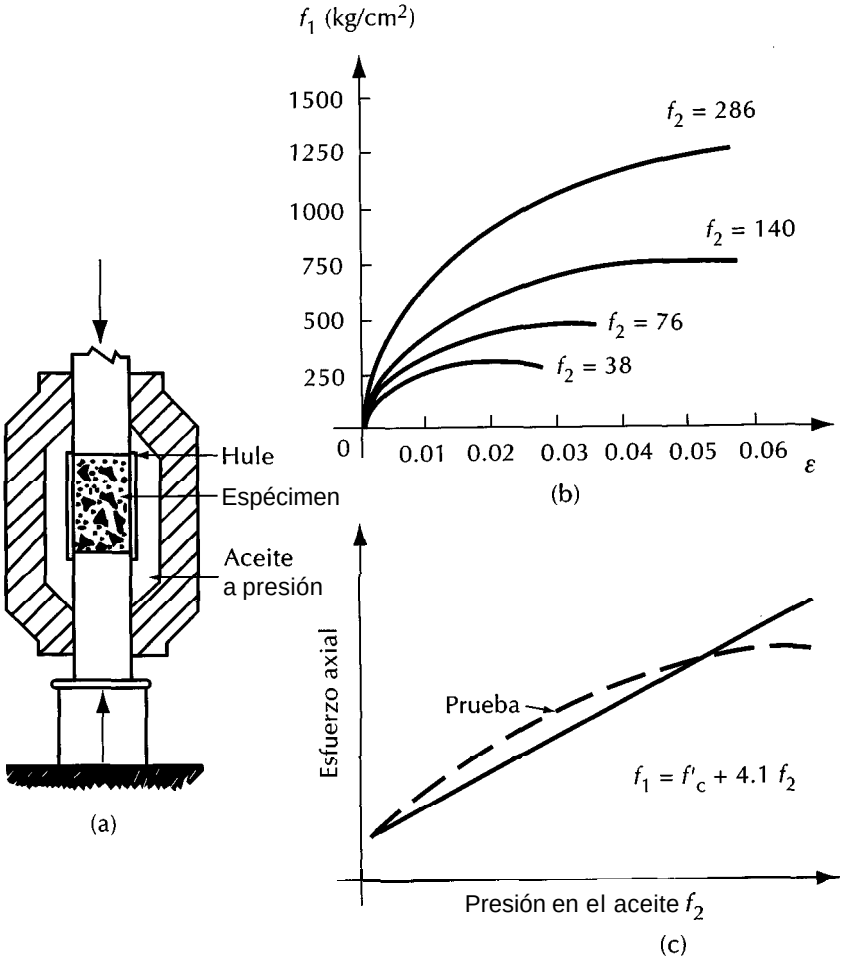


Figura 2.10 Compresión triaxial (Brandtzaeg [2.6]).

sultados obtenidos de los ensayes pueden representarse, aproximadamente, por medio de la expresión

$$f_1 = f'_c + 4.1 f_2 \qquad (2.1)$$

donde f'_c es la resistencia en compresión axial de un cilindro sin presión confinante. Es evidente que el efecto del confinamiento es muy importante; basta que se aplique una compresión lateral igual a la cuarta parte de la resistencia uniaxial para que ésta se duplique.

Debe notarse también el incremento notable en el valor de la deformación unitaria, correspondiente a la resistencia al incrementar la presión de confinamiento; con una presión de 38 kg/cm^2, la deformación unitaria correspondiente a la carga máxima aumenta diez veces con respecto a la de un cilindro sin confinar.

Los estudios de Brandtzaeg han sido confirmados más recientemente por Hobbs [2.21], quien obtuvo un coeficiente de 3.7 en vez de 4.1, pero la tendencia general es la misma.

2.2.3 Tensión

Es difícil encontrar una manera sencilla y reproducible de determinar la resistencia a tensión uniaxial. Siendo el concreto, bajo esta condición, un material frágil, es necesario que la sección transversal del espécimen varíe gradualmente, para evitar fallas prematuras debidas a concentraciones de esfuerzos. La curva esfuerzo-deformación de concreto en tensión representada en la figura 2.11 se obtuvo ensayando un espécimen de sección rectangular, variable a lo largo del mismo. Para fijarlo en la máquina de ensaye, se utilizaron placas pegadas con resina a los extremos del espécimen, las que a su vez fueron atornilladas a la máquina. Este tipo de ensaye requiere mucho cuidado para lograr resultados dignos de confianza.

Para concreto en tensión axial, tanto las resistencias como las deformaciones correspondientes son aproximadamente del orden de una décima parte de los valores respectivos en compresión axial. Sin embargo, la relación no es lineal para toda la escala de resistencias.

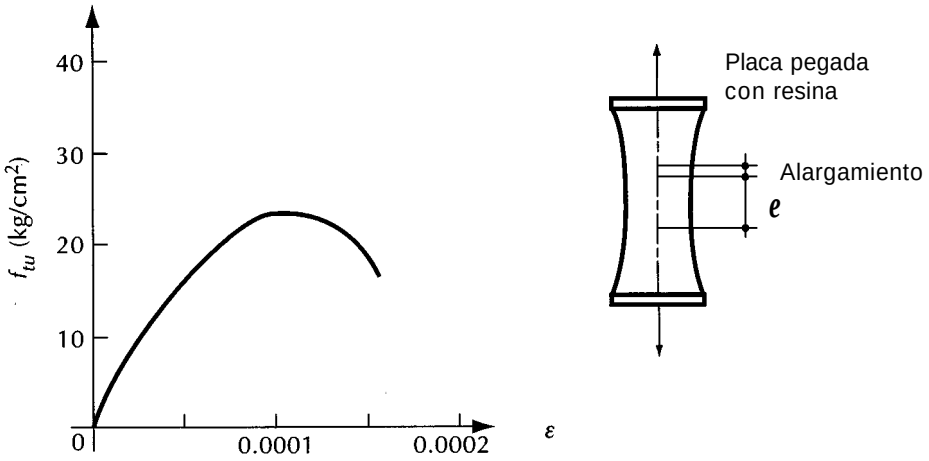


Figura 2.11 Curva esfuerzo-deformación en tensión uniaxial.

En 1948, Lobo Carneiro [2.7] en Brasil y, casi simultáneamente Akazawa [2.8] en Japón, idearon un procedimiento de ensaye indirecto en tensión, que se conoce como el *ensaye brasileño.* En esencia consiste en someter un cilindro a compresión lineal diametral, como se muestra en la figura 2.12 (a). La carga se aplica a través de un material relativamente suave, como triplay o corcho. Si el material fuera perfectamente elástico, se originarían esfuerzos de tensión uniformemente distribuidos en la mayor parte del plano diametral de carga, como se muestra en la figura 2.12 (b).

La resistencia en tensión se calcula con la fórmula:

$$(f_{tb})_{máx} = \frac{2P}{\pi d \ell} \qquad (2.2)$$

deducida de la teoría de la elasticidad (véase, por ejemplo, la referencia 2.9).

En la expresión (2.2):

P = carga máxima
d = diámetro del espécimen
ℓ = longitud del espécimen

En realidad, el concreto no es elástico y, además, la resistencia en tensión que se mide no es la resistencia en tensión uniaxial como la que se obtendría en el ensaye mostrado en la figura 2.11. Sin embargo, lo que se pretende es tener una medida de la resistencia del concreto a la tensión por medio de un ensaye fácil y reproducible por muchos operadores en distintas regiones. Esto se logra satisfactoriamente con el ensaye brasileño.

Para concretos fabricados con agregados de Santa Fe (Ciudad de México), la relación entre la resistencia a la compresión de un cilindro y su resistencia a la tensión, ob-

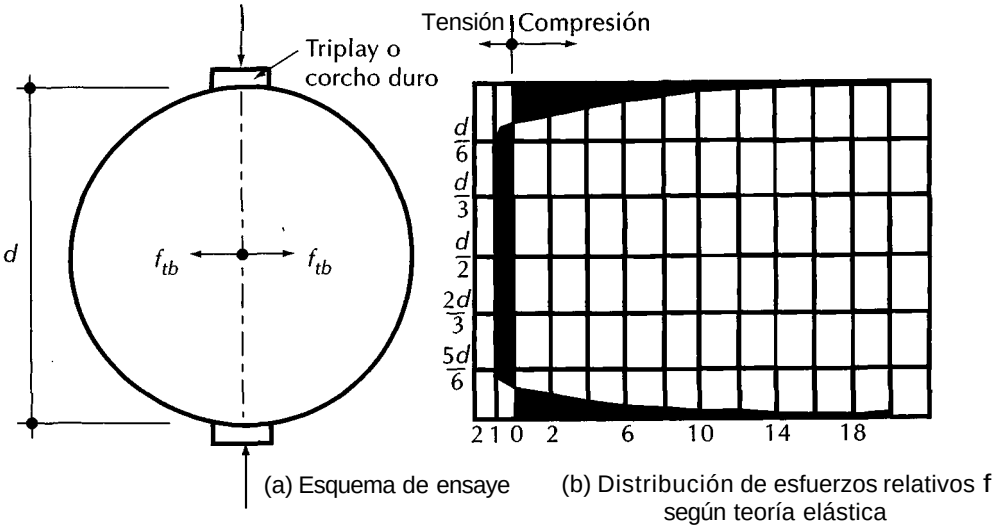


Figura 2.12 Distribución de esfuerzos y tipo de carga en tensión indirecta.

tenida del ensaye brasileño, está dada por las expresiones

$$(f_{tb}) = 1.5\ \sqrt{f'_c} \qquad (2.3)$$

$$(f_{tb}) = 0.5\ \sqrt{f'_c} \qquad (2.3\ \text{SI})^*$$

para concreto clase 1; y

$$(f_{tb}) = 1.2\ \sqrt{f'_c} \qquad (2.4)$$

$$(f_{tb}) = 0.4\ \sqrt{f'_c} \qquad (2.4\ \text{SI})$$

para concreto clase 2; donde

(f_{tb}) = resistencia en tensión del ensaye brasileño

f'_c = resistencia a la compresión simple de un cilindro de 15 × 30 cm.

Para concretos de resistencias mayores que 400 kg/cm^2, se obtiene una mejor aproximación si el coeficiente 1.5 de la ecuación 2.3 se sustituye por 1.75

Estas expresiones son solamente aproximadas y se presentan para dar una idea de los órdenes de magnitud relativos. Para valores bajos de f'_c, la resistencia en tensión es del orden de 0.10 f'_c, mientras que para valores altos disminuye a 0.07 f'_c.

El conocimiento de la resistencia a la tensión del concreto es importante para el diseño en tensión diagonal y para otros tipos de comportamiento, en donde la tensión es el fenómeno predominante.

2.2.4 Flexión

Para algunas aplicaciones, tales como pavimentos de concreto, es necesario conocer aproximadamente la resistencia a la flexión del concreto simple. Ésta se determina con frecuencia ensayando un prisma de concreto libremente apoyado, sujeto a una o dos cargas concentradas. La falla es brusca, con una grieta única que fractura el espécimen.

El esfuerzo teórico de tensión en la fibra inferior correspondiente a la rotura se calcula mediante la expresión

$$f_r = \frac{Mc}{I} \qquad (2.5)$$

en la que f_r es el módulo de rotura, M es el momento flexionante correspondiente a la carga máxima aplicada, c es el medio peralte, e I es el momento de inercia de la sección transversal del prisma.

Al aplicar la expresión (2.5) se supone que el concreto es elástico hasta la rotura, hipótesis que, como se ha indicado, no es correcta para toda la escala de carga.

Esta prueba proporciona una medida de la resistencia del concreto a flexión, o más bien, a la tensión debida a la flexión. Normalmente, el módulo de rotura es mayor que la resistencia a la tensión obtenida del ensaye brasileño.

Se ha observado que el esfuerzo máximo de rotura en flexión depende, entre otras variables, de la resistencia a la compresión, de la relación peralte a claro y de las condiciones de curado. Debido a que la medición de deformaciones es difícil de realizar, no existen muchos datos experimentales sobre las características esfuerzo-deformación de prismas sujetos a flexión simple.

El módulo de rotura como medida de la resistencia a la tensión, tiene varias desventajas. La principal es que el punto de tensión máxima se presenta en la superficie externa del espécimen, que está sujeta en forma importante a esfuerzos de contracción originados por cambios en el ambiente. Por esta razón, la dispersión de datos de ensayes de módulo de rotura es mayor que la dispersión obtenida en el ensaye brasileño, la que a su

*Las ecuaciones cuyo número está seguido de las letras SI están en el Sistema Internacional de Medidas. Véase el prólogo del libro.

vez es mayor que la dispersión de datos de pruebas en compresión. Es difícil establecer relaciones generales entre los valores de f_r y f'_c, ya que la relación depende del tipo de concreto.

Uno de los comités técnicos del American Concrete Institute [2.28] recomienda la siguiente ecuación para calcular la resistencia a flexión en términos de la resistencia a compresión:

$$f_r = g_r\,[w_c\,f'_c]^{1/2} \qquad (2.6)$$

donde w_c es el peso volumétrico del concreto en kg/m^3 y g_r es un factor que puede variar de 0.04 a 0.07 dependiendo del tipo de concreto (g_r varía de 0.012 a 0.021 para w_c en kg/m^3 y f_r y f'_c en MPa). Un valor usual aproximado es $f_r = 2\sqrt{f'_c}$.

2.2.5 Otras condiciones de esfuerzos

La determinación de la resistencia del concreto simple a un estado de esfuerzo cortante puro no tiene mucha importancia práctica, porque dicho estado implica siempre la presencia de tensiones principales de la misma magnitud que el esfuerzo cortante, las cuales originan la falla cuando el elemento podría aún soportar esfuerzos cortantes mayores. Algunos procedimientos indirectos indican que la resistencia al esfuerzo cortante es del orden del 20 por ciento de la resistencia a compresión.

También se han realizado ensayes en concreto simple sujetando especímenes de diversos tipos a otras combinaciones de esfuerzos. Entre éstos cabe mencionar las ensayes efectuados por McHenry [2.10], utilizando cilindros huecos sujetos a una presión interior y a una carga axial longitudinal, en los que se provoca un estado combinado de esfuerzos de tensión y compresión; los llevados a cabo por Bresler [2.11], sometiendo cilindros a combinaciones de esfuerzos de torsión y compresión axial, y los de Kupfer, Hilsdorf y Rüsch [2.12] en placas y prismas cargados a través de dispositivos especiales, para evitar alteraciones de los estados de esfuerzos estudiados.

La utilización del concreto reforzado en estructuras complejas, en las que se encuentra sometido a condiciones de esfuerzos combinados, ha propiciado el estudio de su comportamiento en estas condiciones. Así, se han llevado a cabo recientemente ensayes bajo esfuerzos de compresión biaxiales o esfuerzos de compresión en dos ejes y de tensión en el tercer eje [2.22, 2.23]. En general, las envolvente~ de falla tienen la forma mostrada en la figura 2.13, en donde se indican de

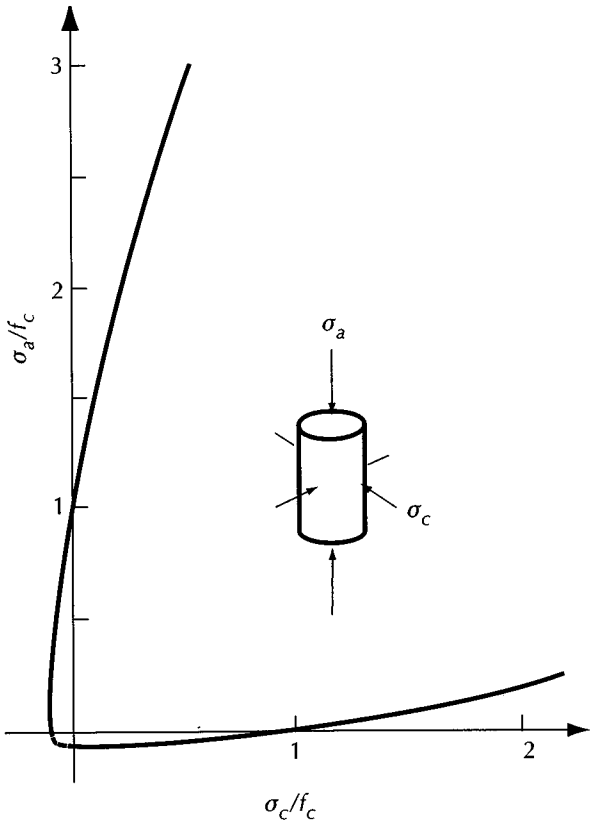


Figura 2.13 Envolvente típica de falla para concreto sujeto a esfuerzos triaxiales (referencia 2.24).

manera aproximada los incrementos o decrementos, con respecto a la resistencia en compresión uniaxial [2.24]. Es interesante observar que una presión confinante del orden de 10 por ciento de la resistencia uniaxial, incrementa esta resistencia en aproximadamente 50 por ciento, mientras que un esfuerzo de tensión pequeño, del orden de 5 por ciento de la resistencia a compresión uniaxial, reduce ésta en aproximadamente la mitad.

2.2.6 Criterio de falla

A pesar de los estudios que se han realizado, no se tiene todavía una teoría de falla sencilla y que permita predecir con precisión aceptable la resistencia del concreto simple. Se ha intentado hacer adaptaciones, entre otras, de las teorías de Mohr, de Coulomb, de esfuerzos cortantes y de deformaciones limitativas. K. Newman y J. Newman han utilizado con buenos resultados criterios de falla basados en teorías energéticas, las cuales parecen ser más adecuadas para el caso del concreto [2.13].

En la referencia 2.14 se presenta un resumen de varios estudios efectuados para determinar la resistencia del concreto bajo estados combinados de esfuerzos. El problema general de determinar los incrementos de deformaciones a lo largo de estos tres ejes principales cuando se incrementan los esfuerzos principales ha sido estudiado ampliamente por Gerstle y su grupo. (Véase por ejemplo la referencia 2.26.)

2.3 Efectos del tiempo en el concreto endurecido

2.3.1 Conceptos generales

Cuando se aplica una carga a un espécimen de concreto, éste adquiere una deformación inicial. Si la carga permanece aplicada, la deformación aumenta con el tiempo, aun cuando no se incremente la carga.

Las deformaciones que ocurren con el tiempo en el concreto se deben esencialmente a dos causas: contracción y flujo plástico.

La figura 2.14 muestra una curva típica deformación-tiempo de un espécimen de concreto bajo carga constante. La forma de la curva y las magnitudes relativas son aproximadamente las mismas, sea la acción de flexión, compresión, tensión o torsión. En el eje vertical se muestra la deformación, y en el horizontal el tiempo, ambas variables en escala aritmética.

Se puede ver que al aplicar la carga en un tiempo relativamente pequeño, el concreto sufre una deformación inicial, que para efectos prácticos se puede considerar como instantánea. Si se mantiene la carga, el concreto sigue deformándose, con una velocidad de deformación grande al principio, que disminuye gradualmente con el tiempo.

Aunque para efectos prácticos puede considerarse que la curva tiende a ser asintótica con respecto a una horizontal, se ha comprobado que la deformación sigue aumentando aún después de muchos años. Sin embargo, aproximadamente 90 por ciento de la deformación total ocurre durante el primer año de aplicación de la carga.

Si en cierto momento se descarga el espécimen, se produce una recuperación instantánea, seguida de una recuperación lenta. La recuperación nunca es total; siempre queda una deformación permanente.

En la figura 2.14, la curva de trazo continuo representa las deformaciones de un espécimen sujeto a una carga constante, la cual es retirada después de cierto tiempo. La línea de trazo interrumpido representa las deformaciones que produce el tiempo en un espécimen sin carga. Las ordenadas de esta curva son las deformaciones debidas a contracción.

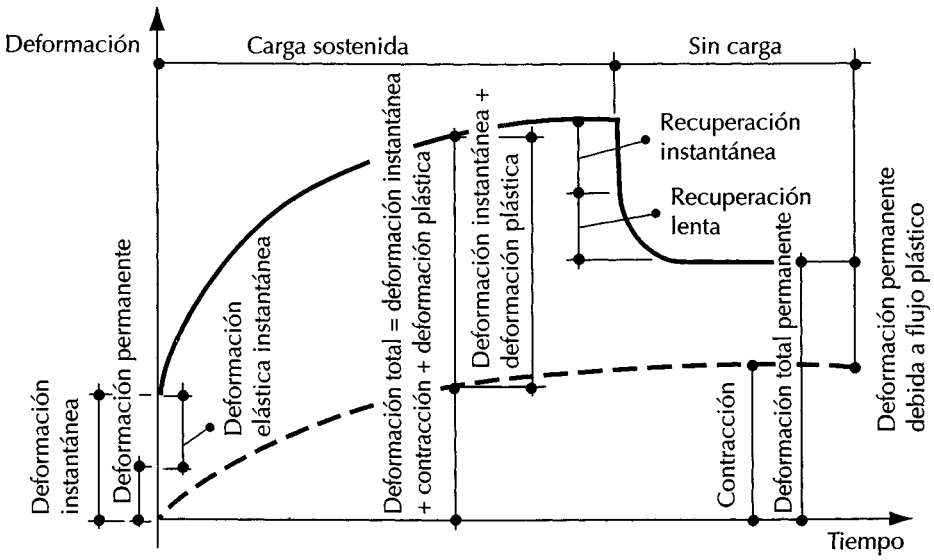


Figura 2.14 Curva típica deformación-tiempo, bajo condiciones ambientales constantes.

Para efectos de diseño estructural, no basta con conocer las deformaciones iniciales o instantáneas; en muchos casos interesa aún más estimar la magnitud de la deformación total, incluyendo los efectos del tiempo. En vigas sujetas a carga constante se han observado deflexiones totales de dos a cinco veces mayores que las medidas inmediatamente después de aplicada la carga.

2.3.2 Contracción

Las deformaciones por contracción se deben esencialmente a cambios en el contenido de agua del concreto a lo largo del tiempo. El agua de la mezcla se va evaporando e hidrata el cemento. Esto produce cambios volumétricos en la estructura interna del concreto, que a su vez producen deformaciones.

Los factores que más afectan la contracción son la cantidad original de agua en la mezcla y las condiciones ambientales especialmente a edades tempranas. Como generalmente un concreto de alta resistencia tiene menos agua que otro de baja resistencia, el primero se contraerá menos que el segundo. Asimismo, un concreto en ambiente húmedo se contraerá menos que en ambiente seco.

Para la misma relación agua/cemento, la contracción varía con la cantidad de pasta por unidad de volumen. Una mezcla rica en pasta (cemento más agua) se contraerá más que otra pobre.

La contracción tiende a producir esfuerzos debidos a las restricciones al libre desplazamiento del elemento que existen en general en la realidad. Si el concreto pudiera encogerse libremente, la contracción no produciría ni esfuerzos, ni grietas.

Si el curado inicial del concreto se hace muy cuidadosamente, disminuirá el efecto de la contracción. Se puede estimar que las deformaciones unitarias debidas a contracción varían entre 0.0002 y 0.0010. Normalmente, la mayor parte de la deformación por contracción ocurre en los primeros meses.

2.3.3 Flujo plástico

El flujo plástico es un fenómeno relacionado con la aplicación de una carga. Las teorías que se han desarrollado para explicarlo son complejas y caen fuera del alcance de este texto. Pueden consultarse a este respecto las referencias 2.15 *y* 2.27. Se trata esencialmente de un fenómeno de deformación bajo carga continua, debido a un reacomodo interno de las partículas que ocurre al mismo tiempo que la hidratación del cemento.

Las deformaciones por flujo plástico son proporcionales al nivel de carga, hasta niveles del orden del 50 por ciento de la resistencia. Para niveles mayores la relación ya no es proporcional.

Como el flujo plástico se debe en gran parte a deformaciones de la pasta de cemento, la cantidad de ésta por unidad de volumen es una variable importante.

En la figura 2.14 se observa que la deformación debida al flujo plástico aumenta con la duración de la carga. También se ha observado que, para un mismo nivel de carga, las deformaciones disminuyen al aumentar la edad a que ésta se aplica.

Otros factores que afectan a las deformaciones por flujo plástico son las propiedades de los materiales constituyentes del concreto, las proporciones de la mezcla y la humedad ambiente.

Las deformaciones unitarias a largo plazo producidas por el flujo plástico, ε_{fl}, se pueden estimar a partir de las deformaciones elásticas instantáneas producidas por un cierto esfuerzo en el concreto, ε_{ci}, multiplicando estas últimas por un coeficiente, C_u, denominado coeficiente de flujo plástico, cuyo valor varía entre 2 y 4, con un valor promedio en condiciones comunes de 2.35.

Es interesante mencionar que, como el flujo plástico aumenta con el nivel de carga, este fenómeno tiende a aliviar las zonas de máximo esfuerzo y, por lo tanto, a uniformar los esfuerzos en un elemento.

2.3.4 Efecto de la permanencia de la carga

Es importante conocer el porcentaje de la resistencia que puede soportar una pieza de concreto en compresión sin fallar, cuando la carga se mantiene indefinidamente. En la figura 2.15 se muestra el efecto de la permanencia de una carga según los ensayes de Rüsch [2.5]. En el eje horizontal se presentan deformaciones unitarias, y en el eje vertical valores relativos, f_c/f'_c, de los esfuerzos aplicados con respecto a la resistencia en una prueba de corta duración (20 minutos aproximadamente).

Se presentan curvas esfuerzo-deformación obtenidas de especímenes sujetos a distintas velocidades de deformación, con lo que se produjeron fallas a diferentes edades. La línea de trazo continuo corresponde a un espécimen en el que la falla se produjo en 20 minutos. Las curvas de especímenes llevados a la falla en 100 minutos y siete días se presentan con trazo discontinuo.

Se muestran además dos envolventes: la inferior, llamada límite de deformación, y la superior, límite de falla. La primera muestra las deformaciones máximas que se obtienen al aplicar indefinidamente distintos porcentajes de la resistencia, inferiores a un cierto valor crítico. La segunda envolvente indica las deformaciones a la falla, correspondientes a porcentajes de carga superiores al valor crítico. La intersección entre estas dos envolventes indica, teóricamente, el porcentaje de la resistencia por debajo del cual el espécimen puede soportar la carga indefinidamente.

En la figura puede observarse que si se carga un espécimen al 80 por ciento de su resistencia de corta duración, se producirá la falla eventualmente a una deformación del orden de 0.0055. En cambio, si se le sujeta solamente al 40 por ciento de su resistencia de corta duración, el espécimen sufrirá una deformación del orden de 0.0025 después de un tiempo muy largo y mantendrá su carga indefinidamente.

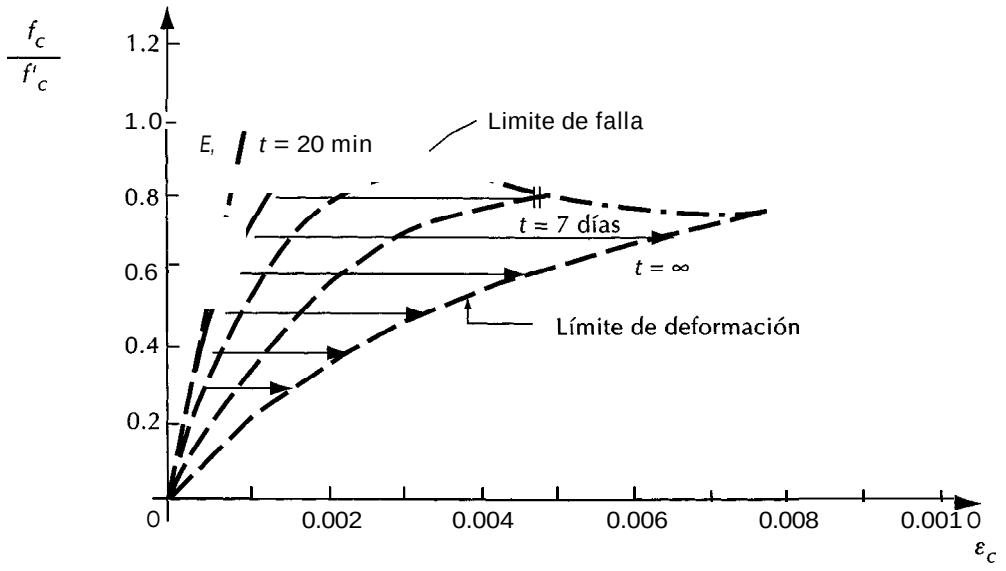


Figura 2.15 Efecto de la permanencia de la carga (Rüsch [2.5]).

Se puede decir, con cierto grado de seguridad, que el concreto puede tomar indefinidamente, sin fallar, cargas hasta del 60 por ciento de su capacidad. Cargas mayores que 70-80 por ciento, aplicadas de modo permanente, acaban siempre por provocar la falla del espécimen.

2.4 Fatiga

Se han hecho diversos estudios sobre elementos de concreto sujetos a repeticiones de carga. Cuando un elemento falla después de un número muy grande de repeticiones de carga, se dice que ha fallado por *fatiga.* Este tipo de solicitación tiene importancia práctica, ya que elementos como vigas de puente, durmientes de ferrocarril o cimentaciones de maquinaria están sujetos a muchas repeticiones de carga.

Se mencionó anteriormente que un elemento de concreto en compresión no puede soportar indefinidamente fracciones de su resistencia estática mayores que 70 por ciento. Cuando a un elemento de concreto se le aplican compresiones del orden de la mitad de su resistencia estática, falla después de aproximadamente diez millones de repeticiones de carga. Se ha encontrado también que si la carga se aplica intercalando periodos de reposo, el número de ciclos necesario para producir la falla aumenta considerablemente.

Los estudios experimentales se han hecho aplicando los ciclos de carga y descarga a velocidades bastante más rápidas que las que se presentan en la práctica y, por lo tanto, sus resultados en general son conservadores.

Se puede estimar que el concreto simple en compresión, toma diez millones o más de repeticiones de carga al 5 0 por ciento de su resistencia estática. En flexión, el mismo número de aplicaciones puede alcanzarse con ciclos de carga y descarga con valor máximo del orden de 35-50 por ciento de su resistencia estática. Se han hecho estudios limitados de fatiga en torsión, que tienen un interés práctico menor.

Para ciertos materiales, como el acero, se ha encontrado que, aplicando ciclos de carga y descarga y llevando el esfuerzo máximo hasta un cierto valor, existe un límite de este esfuerzo por debajo del cual se puede soportar un número indefinido de ciclos. En concreto, se han llevado los ensayes hasta diez millones de aplicaciones de carga, sin que se haya comprobado la existencia de límites semejantes. En las referencias 2.16 y 2.18 se trata ampliamente el tema de fatiga en el concreto.

2.5 Módulos elásticos

Para estimar deformaciones debidas a cargas de corta duración, donde se puede admitir un comportamiento elástico sin errores importantes, es necesario definir un valor del módulo de elasticidad. Del estudio de las curvas esfuerzo-deformación mostradas, resulta obvio que el concepto convencional de módulo de elasticidad no tiene sentido en concreto. Por lo tanto, es necesario recurrir a definiciones arbitrarias basadas en consideraciones empíricas. Así, se puede definir el módulo tangente inicial o tangente a un punto determinado de la curva esfuerzo-deformacióny el módulo secante entre dos puntos de la misma. Para tomar en cuenta los efectos de cargas de larga duración en una forma simple, se utilizan a veces módulos elásticos menores que los correspondientes a las definiciones mencionadas anteriormente.

El módulo secante se usa en ensayes de laboratorio para definir la deformabilidad de un concreto dado. La ASTM [2.17] recomienda la pendiente de la línea que une los puntos de la curva correspondiente a una deformación de 0.00005 y al 40 por ciento de la carga máxima.

Se ha observado que, después de varios ciclos de carga y descarga a esfuerzos relativamente pequeños, la relación esfuerzo-deformación tiende a convertirse en una relación prácticamente lineal. Como es difícil determinar el módulo tangente inicial de una manera reproducible, se recurre a veces a aplicaciones previas de carga y descarga, con objeto de rectificar la curva esfuerzo-deformación, y se considera la pendiente de la curva así obtenida como el módulo de elasticidad. El método para determinar el módulo tangente en esta forma se describe con detalle en la referencia 2.17. El módulo de elasticidad es función principalmente de la resistencia del concreto y de su peso volumétrico. Se han propuesto varias expresiones para predecir el módulo de elasticidad a partir de estas variables. Por ejemplo, el Reglamento ACI presenta la ecuación

$$E_c = w^{1.5}\ 4000\sqrt{f'_c} \qquad (2.7)$$

donde E_c es el módulo de elasticidad en kg/cm^2, w es el peso volumétrico del concreto en ton/m^3 y f'_c es la resistencia del concreto en kg/cm^2. El Reglamento del Distrito Federal, propone las ecuaciones

$$E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c} \qquad (2.8)$$

$$E_c = 4400\sqrt{f'_c} \qquad (2.8\ \text{SI})$$

para concreto clase 1 con agregados calizos,

$$E_c = 11{,}000\sqrt{f'_c} \qquad (2.9)$$

$$E_c = 3500\sqrt{f'_c} \qquad (2.9\ \text{SI})$$

para concreto clase 1 con agregados basálticos, y

$$E_c = 8000\sqrt{f'_c} \qquad (2.10)$$

$$E_c = 2500\sqrt{f'_c} \qquad (2.10\ \text{SI})$$

para concreto clase 2, que son aplicables únicamente a concretos fabricados con agregados típicos de la Ciudad de México. Las diferencias entre los valores reales y los calculados

con estas ecuaciones pueden ser muy grandes. Cuando se requieren estimaciones de cierta precisión, conviene determinar el módulo de elasticidad del concreto usado en particular.

Para concretos con resistencias a la compresión mayores que 400 kg/cm^2, las NTC especifican ecuaciones diferentes para estimar el módulo de elasticidad. Éstas son:

$$E_c = 8500\sqrt{f'_c} + 110{,}000 \qquad (2.11)$$

$$E_c = 2700\sqrt{f'_c} + 11{,}000 \qquad (2.11\ \text{SI})$$

para concretos con agregado grueso calizo, y

$$E_c = 8500\sqrt{f'_c} + 50{,}000 \qquad (2.12)$$

$$E_c = 2700\sqrt{f'_c} + 5000 \qquad (2.12\ \text{SI})$$

para concretos con agregado grueso basáltico.

En algunos análisis elásticos se suelen emplear G, el módulo de elasticidad al esfuerzo cortante, y μ, el coeficiente de Poisson. El primero se toma comúnmente como fracción del módulo de elasticidad que se usa en compresión, del orden de 0.4. Experimentalmente, se ha determinado que el segundo varía entre 0.12 y 0.20. Con frecuencia se supone μ igual a 0.18.

2.6 Deformaciones por cambios de temperatura

El concreto está sometido a cambios volumétricos por temperatura. Se han determinado algunos coeficientes térmicos que oscilan entre 0.000007 y 0.000011 de deformación unitaria por grado centígrado de cambio de temperatura. Los valores anteriores corresponden a concreto de peso volumétrico normal (del orden de 2.2 ton/m^3). Para concretos fabricados con agregados ligeros, los coeficientes pueden ser muy distintos de los mencionados.

2.7 Algunas características de los aceros de refuerzo

El acero para reforzar concreto se utiliza en distintas formas. La más común es la barra o varilla que se fabrica tanto de acero laminado en caliente como de acero trabajado en frío. En las figuras 2.16 y 2.17 se muestran curvas de ambos tipos de acero, típicas de barras europeas.

Los diámetros usuales de las barras producidas en México varían de 1/4 de pulg a 1 1/2 pulg. (Algunos productores han fabricado barras corrugadas de 5/16 de pulg, 5/32 de pulg y 3/16 de pulg.) En otros países se usan diámetros aun mayores.

Todas las barras, con excepción del alambrón de 1/4 de pulg, que generalmente es liso, tienen corrugaciones en la superficie, para mejorar su adherencia al concreto. La tabla 2.1 proporciona datos sobre las características principales de barras de refuerzo, así como la nomenclatura para identificarlas.

Generalmente el tipo de acero se caracteriza por el límite o esfuerzo de fluencia. Este límite se aprecia claramente en las curvas esfuerzo-deformación de barras laminadas en caliente como se ve en la figura 2.16. El acero trabajado en frío no tiene un límite de fluencia bien definido (figura 2.17). En este caso, el límite de fluencia suele definirse trazando una paralela a la parte recta de la curva esfuerzo-deformación desde un valor de la deformación unitaria de 0.0002; la intersección de esta paralela con la curva define el límite de fluencia.

En México se cuenta con una variedad relativamente grande de aceros de refuerzo. Las barras laminadas en caliente pueden obtenerse con límites de fluencia desde 2300 hasta 4200 kg/cm^2. El acero trabajado en frío

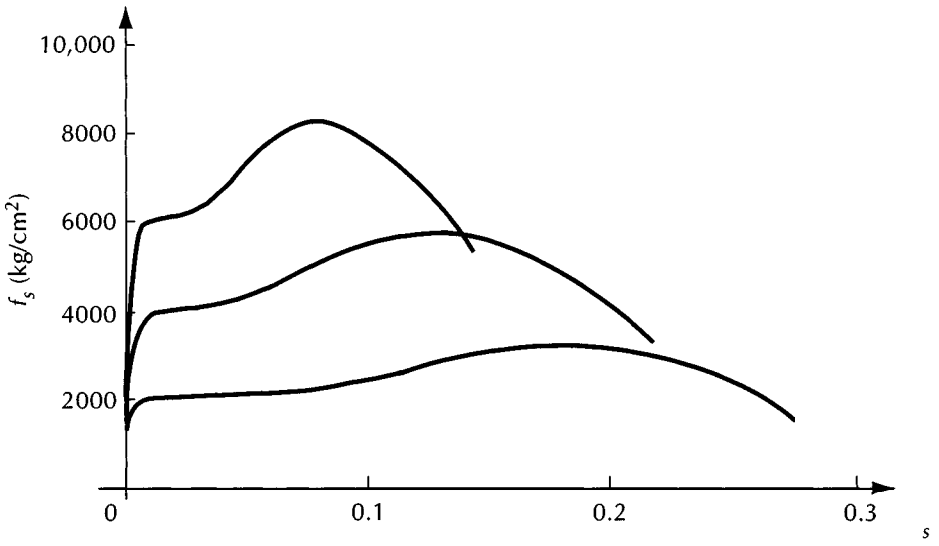


Figura 2.16 Curvas esfuerzo-deformación de aceros laminados en caliente para barras de refuerzo de fabricación europea.

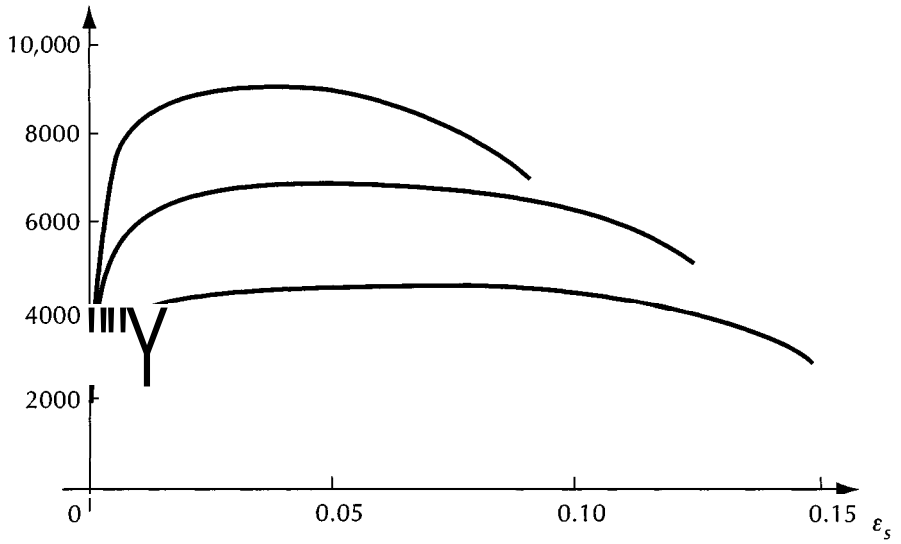


Figura 2.17 Curvas esfuerzo-deformación de aceros trabajados en frío para barras de refuerzo de fabricación europea.

alcanza límites de fluencia de 4000 a 6000 kg/cm^2. En la figura 2.18 se representa la gráfica esfuerzo-deformación de un acero trabajado en frío, fabricado en México. En los países escandinavos se usan barras con límites de fluencia de hasta 9000 kg/cm^2.

Tabla 2.1 Diámetros, pesos, áreas y perímetros de barras.

Barra Núm.	Diámetro *pulg*	Diámetro *mm*	Peso *kg/m*	Área cm^2	Perímetro cm
2	1/4	6.4	0.248	0.32	1.99
2.5	5/16	7.9	0.388	0.49	2.48
3	3/8	9.5	0.559	0.71	2.98
4	1/2	12.7	0.993	1.27	3.99
5	5/8	15.9	1.552	1.98	5.00
6	3/4	19.0	2.235	2.85	6.00
7	7/8	22.2	3.042	3.88	6.97
8	1	25.4	3.973	5.07	7.98
9	1-1/8	28.6	5.028	6.41	8.99
10	1-1/4	31.8	6.207	7.92	9.99
11	1-3/8	34.9	7.511	9.58	10.96
12	1-1/2	38.1	8.938	11.40	11.97

OBSERVACIONES

Los diámetros, áreas y pesos se ajustan a las normas del Organismo Nacional de Normalización y Certificación de la Construcción y Edificación (ONNCCE) (NMX-B-6, NMX-B-294 y NMX-B-457). Según estas normas, el diámetro nominal y el área de una barra corresponden a los que tendría una barra lisa, sin corrugaciones, del mismo peso por metro lineal; todas las barras, con excepción de la No. 2, están corrugadas.

Una propiedad importante que debe tenerse en cuenta en refuerzos con detalles soldados es la soldabilidad. La soldadura de aceros trabajados en frío debe hacerse con cuidado.

Otra propiedad importante es la facilidad de doblado, que es una medida indirecta de ductilidad y un índice de su trabajabilidad.

Se ha empezado a generalizar el uso de mallas como refuerzo de losas, muros y algunos elementos prefabricados. Estas mallas están formadas por alambres lisos unidos por puntos de soldadura en las intersecciones. El acero es del tipo trabajado en frío, con esfuerzos de fluencia del orden de 5000 kg/cm^2.

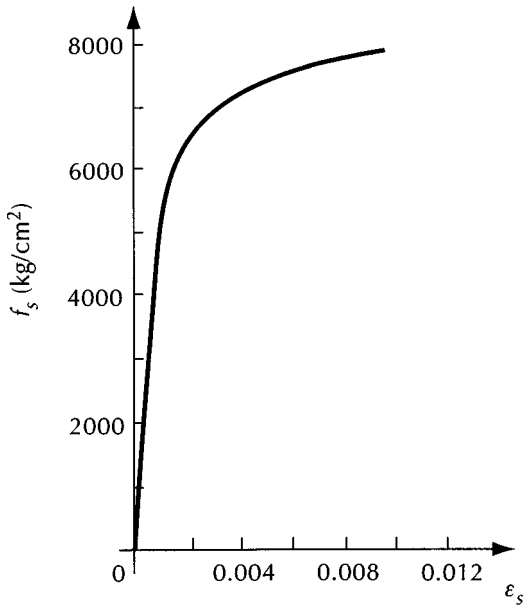


Figura 2.1 **8** Gráfica esfuerzo-deformación de un acero de alta resistencia, sin límite de fluencia definido, de fabricación nacional.

El espaciamiento de los alambres varía de 5 a 40 cm, y los diámetros de 2 a 7 mm, aproximadamente. En algunos países, en lugar de alambres lisos se usan alambres con algún tipo de irregularidad superficial, para mejorar la adherencia.

El acero que se emplea en estructuras presforzadas es de resistencia francamente superior a la de los aceros descritos anteriormente. Su resistencia última varía entre 14,000 y 22,000 kg/cm^2, y su límite de fluencia, definido por el esfuerzo correspondiente a una deformación permanente de 0.002, entre 12,000 y 19,000 kg/cm^2.

Como ilustración, en la figura 2.19 se presentan, atendiendo al grado de calidad, algunas curvas esfuerzo-deformación para distintos tipos de acero, y dos curvas esfuerzo-deformación para concreto con una resistencia de 250 kg/cm^2, correspondientes a cargas de corta y larga duración.

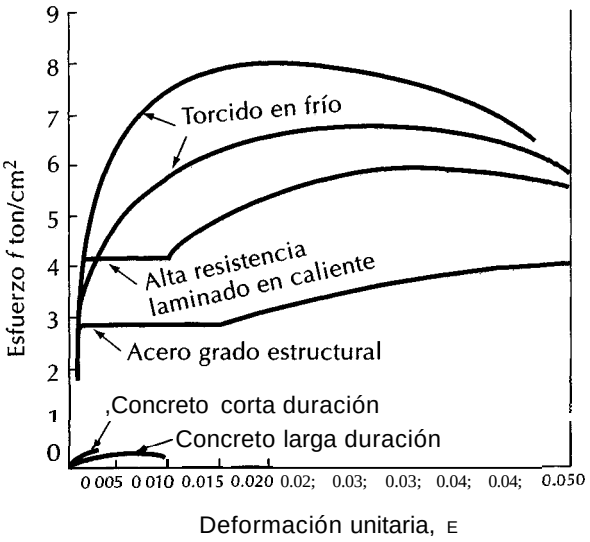


Figura ***2.19*** Curvas comparativas para acero y concreto.

El módulo de elasticidad de los distintos tipos de acero cambia muy poco. De la comparación de las curvas del acero y del concreto, se puede inferir que si ambos trabajan en un elemento de concreto reforzado sujeto a compresión axial, el colapso del conjunto estará regido por la deformación del concreto que, bajo cargas de larga duración, puede ser hasta de 0.010 o 0.012. Para esta deformación, el acero tendría apenas una deformación del orden correspondiente a su límite de fluencia.

Las características de adherencia de los distintos aceros, y su influencia en el diseño, se presentarán en el capítulo de Adherencia. Para lograr el trabajo en conjunto debe tenerse una adherencia suficiente entre concreto y acero, obtenida ya sea mecánicamente o por medio de la adhesión entre el concreto y el acero de refuerzo.

Para el diseño se supone que la curva esfuerzo-deformación del acero en compresión es idéntica a la curva esfuerzo-deformación en tensión. La curva en compresión es difícil de determinar en el caso de barras, debido a efectos de esbeltez.

Referencias

2.1 Troxell, G. E, H. E. Davis y J. W. Kelly. *Composition* and Properties of Concrete, segunda edición. Nueva York, McGraw Hill, 1968.

2.2 Neville, A. M. Properties of Concrete, cuarta edición. Nueva York, JohnWiley, 1996.

2.3 Orchard, D. F. Concrete Technology (3 volúmenes). Nueva York, Halsted Press. Vol. 1, 1973; Vol. 2, 1973; Vol. 3, 1976.

2.4 Hatano, T. y H. Tsutsumi. Dynarnical *Compressive* Deforrnation and *Failure* of Concrete under Earthquake *Load*. informe No. C 5904 del Laboratorio Técnico del Instituto Central de Investigaciones de la industria Eléctrica, Tokio, septiembre 1968. Véase también el Informe No. C 5906, por T. Hatano, Tokio, marzo 1960.

2.5 Rüsch, H. "Researches Toward a General Flexural Theory for Structural Concrete". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, julio 1960.

2.6 Richart, F. E, A. Brandtzaeg y R. L. Brown. "A Study of the Failure of Concrete under Combined Compressive Stresses". *Bulletin* No. 185, Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, noviembre 1928.

2.7 Lobo B. Carneiro, F. L. "Concrete Tensile Strength". Boletín *RILEM* No. 73, marzo 1953.

2.8 Akazawa, T. "Tension Test Method for Concrete". Boletín RILEM No. 16, noviembre 1953.

2.9 Timoshenko, S. P. y J. N. Goodier. Teoría de la elasticidad. Bilbao, URMO, 1968.

2.10 McHenry, D. y J. Karni. "Strength of Concrete under Combined Tensile and Compressive Stresses". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, abril 1958.

2.11 Bresler, B., y K. S. Pister. "Strength of Concrete under Combined Stresses". Journal of the *American* Concrete Institute, Detroit, septiembre 1958.

2.12 Kupfer, H., H. K. Hilsdorf y H. Rüsch. "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses". Journal of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, agosto 1969.

2.13 Newman, K., y J. B. Newman. "Failure Theory and Design Criteria for Plain Concrete". En la Memoria de la International Conference of *Structure, Solid* Mechanics and *Engineering Design* and Civil Engineering Materials. Southampton, 1969.

2.14 Jordá, R. Resistencia del concreto a esfuerzos combinados, tesis profesional. Puebla, México, Universidad Autónoma de Puebla, 1970.

2.15 —. Syrnposiurn on Creep of Concrete (SP-9). Detroit. American Concrete Institute, 1964.

2.16 Lloyd, J. P., J. L. Lott y C. E. Kesler. "Fatigue of Concrete". *Bulletin* No. *499.* Urbana, Ill., University of Illinois, Engineering Experiment Station, 1968.

2.17 —. Standard Method of Test of Static *Young's Modulus* of Elasticity ond Poissons Ratio *in Com*pression of Cylindrical Concrete Specirnens (ASTM C *469-65)*. Filadelfia, American Society for Testing and Materials, 1965.

2.18 Shah, S. P., editor. Fatigue of Concrete Structures (SP *75).* Detroit, American Concrete Institute, 1982.

2.19 Neville, A.M. Tecnología del concreto (2 volúmenes). México, Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto.

2.20 Popovics, S. Fundarnentals of Portland Cernent Concrete, Vol. 1: Fresh Concrete. Nueva York, John Wiley, 1982.

2.21 Hobbs, D.W., y C. D. Pomeroy. The Structural Engineer. V. 52 No. 5, mayo 1974.

2.22 Wang Chuan-zhi, Guo Zhen-hai y Zhang-Xiuquin. 'Experimental Investigation of Biaxial and Triaxial Compressive Concrete Strength', ACI Materials Journal, Detroit, marzo-abril 1987.

2.23 JiangLinhua, Huang Dahai y Xie Nianxiang. 'Behavior of Concrete under Triaxial Compressive-Compressive-Tensile Stresses'. *ACI* Materials Journal, Detroit, marzo-abril 1991.

2.24 Kotsovos, M.D. 'Consideratio'n of Triaxial Stress Conditions in Design: A Necessity'. *ACI Structu*ral Journal, Detroit, mayo-junio 1987.

2.25 Carreira, D. J., y Kuang-Han Chu. 'Stress-Strain Ralationship for Plain Concrete in Compression'. Journal of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, noviembre-diciembre 1985.

2.26 Stankowski T., y K. H. Gerstle. 'Simple Formulation of Concrete Behavior under Multiaxial Load Histories'. Journal of the Arnerican Concrete *Institute,* Detroit, marzo-abril 1985.

2.27 Neville, A. M., W. H. Dilger y J. J. Brooks. Creep of Plain and Structural Concrete. Londres y Nueva York, Longman, 1983.

2.28 Comité ACI 209 "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures". Detroit, 1992. Confirmado en 1997.

2.29 Mena Ferrer, M., C. J.Mendoza Escobedo, E. Zamudio Cíntora, R. Uribe Afif. Manual de Tecnología del Concreto. México, Comisión Federal de Electricidad, LIMUSA, Instituto de Ingeniería, 1994.

2.30 Park, R. "Design and Behavior of RC Columns Incorporating High Strength Materials". Concrete *International,* American Concrete Institute, noviembre, 1998.

CAPÍTULO 3

índices de resistencia y control de calidad

3.1 Introducción. /3.2 índices de resistencia. /3.3 Evaluación de datos. /3.4 Control de calidad.

3.1 Introducción

Para poder diseñar es necesario poder estimar la resistencia de una estructura. La forma más directa de obtenerla es realizando una prueba de carga, ya sea sobre toda la estructura, sobre una parte típica de la misma, o bien, sobre elementos construidos *ex profeso* para dicha prueba. Aunque este método es el que proporciona una información más fidedigna, no es desde luego el más práctico en todos los casos. Sin embargo, debe utilizarse ese procedimiento cuando se planea construir estructuras de tipos radicalmente distintos a los comúnmente usados en la práctica, o formados con elementos estructurales cuyas propiedades mecánicas no son bien conocidas. También puede resultar conveniente cuando se piensa fabricar muchos elementos o estructuras iguales.

Otro procedimiento para obtener el índice de resistencia de una estructura consiste en el ensaye de un modelo a escala, fabricado con los mismos materiales con que se construirá el prototipo. La resistencia del prototipo puede predecirse a partir de la resistencia medida en el modelo, y utilizando los principios de similitud. En la mayoría de los casos, no es necesario ensayar prototipos o modelos de estructuras que se quieren diseñar. Como se indicó en el capítulo 1, en el proceso de diseño seguido normalmente se analiza una estructura y se dimensionan los elementos de manera que puedan resistir las acciones internas determinadas en el análisis.

Como no es práctico determinar la resistencia de cada elemento estructural bajo distintos tipos de solicitaciones, se han relacionado características de resistencia y deformabilidad de elementos estructurales (vigas, columnas, losas) con las características de ciertos especímenes de control, representativos de las propiedades de los materiales. Estas correlaciones han sido establecidas mediante investigaciones experimentales sobre el comportamiento de miembros y conjuntos estructurales, refinándoselas con la observación del comportamiento de estructuras reales.

En el capítulo anterior se indicó que tanto el concreto como el acero tienen características distintas, según sea su composición y su forma de fabricación. Por lo tanto, es necesario tener un índice que relacione las características del material con el comportamiento que puede esperarse de él. Dicho índice debe reflejar las propiedades estructurales básicas del material en cuestión. Así, por ejemplo, el índice de resistencia más característico del concreto es su resistencia a la compresión, y el del acero, su resistencia a la tensión.

No es suficiente en todos los casos tener un solo índice de resistencia para definir cada uno de los materiales que forman el concreto reforzado. Puesto que las relaciones entre las resistencias de un material bajo distintas acciones o solicitaciones no son constantes para cualquier valor de la resistencia índice, no puede tomarse ésta como representativa de la resistencia del material

bajo cualquier condición de carga. Por ejemplo, la resistencia en tensión del concreto simple no sigue una relación lineal con la resistencia a la compresión, para toda la escala de esta última. Sin embargo, el índice da idea de las cualidades que pueden esperarse del material.

Debe ser posible determinar los índices de resistencia por procedimientos de ensaye sencillos y relativamente baratos y que proporcionen resultados reproducibles. Este último requisito es fundamental. Además, conviene que los índices de resistencia estén estandarizados para que sean comparables. Es decir, las características de los ensayes y de los especímenes deben fijarse con la mayor precisión posible, de tal modo que se reduzcan a un mínimo los efectos de las variables secundarias que afectan los resultados de ensayes. La estandarización de los índices permite especificar con precisión la calidad de los materiales que se van a emplear o que se requerirán.

Los índices de resistencia no sirven sólo para caracterizar las propiedades de los materiales, sino también para controlar la calidad durante su fabricación. Si un material fuese perfectamente uniforme, bastaría un solo ensaye para definir el índice seleccionado. Pero todos los materiales tienen características variables y son esencialmente heterogéneos. Debido a esto, es necesario conocer el grado de uniformidad del material empleado. Esto se hace estudiando la variación de los resultados de ensayes de muestras representativas. Debe tenerse en cuenta que el valor del índice determinado en un ensaye tiene implícitas las variaciones naturales que existen en cualquier proceso de ensaye, ya que todas las mediciones están sujetas a errores.

Una vez establecido el grado de uniformidad de las propiedades del material, es posible especificar racionalmente, a través del índice de resistencia, la calidad de los materiales requeridos. Durante la construcción será necesario comprobar que la calidad y uniformidad de los materiales es la especificada; esto es un problema de control de calidad.

En este capítulo se describen brevemente los índices de resistencia que se usan comúnmente para el concreto y el acero. A continuación se ofrecen algunas nociones sobre los métodos estadísticos empleados en la evaluación objetiva de datos. Finalmente, se incluye una sección sobre control de calidad, donde se aplican algunos de los conceptos estadísticos presentados a la interpretación de datos sobre ensayes de concreto y acero, y se mencionan brevemente los requisitos de ciertas normas europeas y americanas.

3.2 índices de resistencia

3.2.1 Concreto

CONCEPTOS GENERALES

El índice de resistencia más común en el caso del concreto es el obtenido del ensaye de especímenes a compresión simple. Esto se debe a que este ensaye es relativamente sencillo, y a que mide una característica fundamental del concreto. Otro factor que contribuye en forma importante a su uso continuado es el hecho de que, a través de los años, se ha correlacionado esta propiedad con la resistencia de elementos estructurales de diversos tipos, sujetos a distintas solicitaciones.

El índice mencionado anteriormente evalúa la resistencia del concreto tal como es producido. Comúnmente se considera este índice como indicativo de la resistencia del concreto en la estructura. Sin embargo, esta última puede ser muy diferente de la resistencia de los especímenes de control, ya que depende de los métodos de transporte,

colocación y curado, así como del tipo de elemento al que está destinado el concreto en cuestión. Para estimar la resistencia del concreto en una estructura pueden ensayarse especímenes cilíndricos extraídos mediante taladros especiales, o pueden efectuarse ensayes no destructivos [3.1, 3.10].

Idealmente, el índice de resistencia debe ser representativo del fenómeno que se quiere cuantificar. Así, en estructuras de concreto donde el trabajo predominante sea la compresión, la resistencia de un espécimen sometido a compresión simple será índice satisfactorio. Pero el concreto queda sujeto frecuentemente a otras solicitaciones en las que la compresión no es el fenómeno esencial. Por ejemplo, en el caso de secciones sometidas a fuerza cortante, la característica predominante es la resistencia a la tensión diagonal.

Por esta razón ha surgido recientemente la tendencia a considerar otros índices de resistencia. Así se está tratando de desarrollar un índice de resistencia a la tensión. En pavimentos de concreto se usa un prisma de concreto simple ensayado en flexión, como índice de la resistencia deseable del concreto.

Debe tenerse en cuenta siempre que frecuentemente se da demasiada importancia al valor de la resistencia a la compresión de un espécimen de concreto. Si no se posee la debida perspectiva, se puede llegar a pensar erróneamente que la resistencia a la compresión de un espécimen de concreto representa la resistencia del concreto en la estructura ante cualquier combinación de solicitaciones.

RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN

No existe una convención aceptada universalmente sobre qué tipo de espécimen es el mejor para realizar ensayes en compresión. Por lo común se usan especímenes de tres tipos: cilindros, cubos y prismas.

En nuestro medio, y en numerosos países del mundo, se usan cilindros con una relación de esbeltez igual a dos. En estructuras de concreto reforzado, el espécimen usual es el cilindro de 15 × 30 cm. En estructuras construidas con concreto en masa, donde se emplean agregados de gran tamaño (10 a 15 cm), se usan cilindros de 30 × 60 cm o de 60 × 120 cm. Generalmente, las resistencias se determinan a los 28 días de edad del concreto o a la edad en que el concreto vaya a recibir su carga de servicio. Recientemente se han propuesto diversos procedimientos para obtener índices de resistencia a edades más tempranas con el fin de poder tomar medidas correctivas con mayor oportunidad, en caso necesario [3.2].

En muchos países de Europa se usan cubos para obtener un índice de resistencia del concreto a la compresión. Las dimensiones de los cubos varían entre 10 y 30 cm de lado, según los países. Algunas veces se utilizan también prismas de concreto simple, ensayados con la dirección de la carga paralela al eje longitudinal del prisma.

Tanto cilindros como cubos y prismas tienen ventajas y desventajas, pero la tendencia actual parece inclinarse hacia el uso del cilindro. Inclusive el Eurocódigo de 1993 especifica probetas cilíndricas y menciona el uso de probetas cúbicas como método alternativo para verificar o no la aceptación del concreto [3.11]. Para lograr una prueba aceptable a la compresión, es necesario que las cabezas de la máquina de ensaye estén totalmente en contacto con las superficies del espécimen en ambos extremos, de manera que la presión ejercida sea lo más uniforme posible. Esto se logra fácilmente si el espécimen es un cubo o un prisma y se ha fabricado en un molde de acero con las caras pulidas y a escuadra. Las caras del espécimen que están en contacto con las del molde son suficientemente planas para lograr una distribución satisfactoria de compresiones, sin necesidad de ningún artificio

adicional. Otra ventaja del uso de cubos y prismas es su facilidad de almacenamiento, problema que llega a ser importante cuando el número de especímenes es muy grande.

Por otra parte, los cilindros se fabrican por lo general en moldes de acero apoyados en una placa en su cara inferior y libres en su parte superior, donde es necesario dar un acabado manualmente. Éste queda con frecuencia demasiado rugoso para que pueda apoyarse directamente la cabeza de la máquina de ensaye. Salvo en casos en que se ha tenido mucho cuidado y se ha alisado el extremo del concreto fresco con una placa de acero, o bien se ha pulido la superficie rugosa, es necesario dar una preparación a los extremos del cilindro para poder asegurar que la presión queda uniformemente distribuida y que la dirección de carga es paralela al eje del cilindro. Esta operación, llamada *cabeceado* y que consiste en aplicar un cierto material, generalmente azufre o pasta de cemento, a los extremos del cilindro para producir una superficie lisa de apoyo, prolonga el tiempo necesario para la preparación del ensaye e introduce una variable adicional en los resultados: el material y la forma del cabeceado.

Debido a la simetría del espécimen con respecto a cualquier plano diametral, si el contacto entre la máquina y el cilindro es adecuado, la distribución de compresiones en la sección transversal de un cilindro es más uniforme que en la sección transversal de un cubo o de un prisma. Además, estos últimos se ensayan con la dirección de la carga perpendicular a la dirección del colado, lo que algunos autores consideran que es poco representativo del trabajo del concreto en columnas en una estructura real.

Otra ventaja importante de los cilindros sobre los cubos es la disminución del efecto de confinamiento y de la restricción al desplazamiento lateral debida a la fricción de los extremos contra la máquina. Por su mayor relación de esbeltez, estos efectos son mucho menores que en los cubos, ya que las secciones medias del cilindro están menos afectadas por las condiciones en los extremos.

Una vez seleccionado el tipo de espécimen, es necesario fijar con gran detalle las condiciones de muestreo, fabricación, curado y ensaye. Entre estas últimas tiene particular importancia la velocidad de carga. En nuestro medio, las normas usuales son las del Organismo Nacional de Normalización y Certificación de la Construcción y Edificación (ONNCCE) (Normas NMX) y las del American Society for Testing and Materials (Normas ASTM).

Aun cuando se sigan las especificaciones cuidadosamente y el proceso lo realicen operadores experimentados, los resultados que se obtengan no serán uniformes. Siempre existirá dispersión en los datos, como en cualquier proceso de medición. Estas dispersiones pueden ser inherentes al tipo de ensaye, por errores accidentales o porque no hubo uniformidad en el material ensayado.

Las condiciones del curado influyen en forma importante en la resistencia aparente a la compresión de un espécimen de control. El proceso de curado está especificado en las normas. Sin embargo, según sea el propósito del índice de resistencia, se pueden aplicar condiciones distintas de curado. En general, son válidos dos criterios. En el primero, empleado para comparar distintos concretos a lo largo del tiempo, por un número determinado de días se especifica un curado de laboratorio en un cuarto húmedo en que la temperatura y la humedad se mantienen dentro de ciertos límites. Pero si se quiere tener idea de la resistencia a la compresión del concreto tal y como está expuesto en la estructura, se someten los especímenes al mismo tipo de curado y ambiente al que está expuesta la estructura.

En la tabla 3.1, tomada de la referencia 3.3, se presentan factores de corrección para

Tabla 3.1 Factores de equivalencia para ensayes a la compresión.

Espécimen	*Dimensiones/cm*	*Factores por los que se deben multiplicar las resistencias de un espécimen para obtener las equivalencias de un cilindro de 15 × 30 cm.*	
		Variación normal	*Valor medio aceptable*
Cilindro	15 × 30	–	1.00
	10 × 20	0.94 – 1.00	0.97
	25 × 50	1.00 – 1.10	1.05
Cubo	10	0.70 – 0.90	0.80
	15	0.70 – 0.90	0.80
	20	0.75 – 0.90	0.83
	30	0.80 – 1.00	0.90
Prisma	15 × 15 × 45	0.90 – 1.2	1.05
	20 × 20 × 60	0.90 – 1.20	1.05

obtener la resistencia de un cilindro de 15 × 30 cm, a partir de la obtenida con un espécimen de otra forma o dimensiones, para concretos fabricados con cemento normal y ensayados a los 28 días. Estos factores dan una idea de las equivalencias entre diversos tipos de especímenes, a falta de ensayes específicos para el caso particular de que se trate.

FLEXIÓN

El índice de resistencia a la flexión del concreto simple se obtiene del ensaye de vigas de sección cuadrada, simplemente apoyadas y sujetas a una o dos cargas concentradas. Como en el caso de los índices de resistencia a la compresión, se especifica también el modo de muestreo, el curado y las condiciones del ensaye (Normas NMX y ASTM).

La resistencia a la flexión se usa como índice de la resistencia de pavimentos de concreto simple. Como se dijo en el capítulo 2, el prisma de concreto simple se emplea también para medir la resistencia del concreto en tensión originada por flexión. En este caso, los valores que se obtienen son mayores que los obtenidos de ensayes en tensión uniaxial.

La resistencia en flexión es mayor en especímenes sujetos a una carga concentrada que en aquellos sometidos a dos cargas simétricas, porque en el segundo caso la zona de esfuerzos máximos se presenta en una porción mayor del espécimen, lo que aumenta las probabilidades de que en dicha zona se encuentre una región de menor resistencia que la promedio.

TENSIÓN

En el capítulo anterior se mencionaron las dificultades que existen para realizar un ensaye en tensión uniaxial. El inconveniente principal es que el tipo de ensaye es difícil de realizar y los resultados son poco reproducibles. Por lo tanto, este ensaye no satisface las características básicas para obtener índices de resistencia.

Las normas NMX y ASTM proponen una prueba indirecta de concreto en tensión llamada ensaye brasileño. Esta prueba está basada en los principios expuestos en la figura 2.12. Las condiciones de fabricación y curado del espécimen son las mismas que las de los cilindros para pruebas en compresión.

3.2.2 Acero

El índice de resistencia utilizado en el caso del acero, es un esfuerzo de fluencia, f_y, definido como se mencionó en el capítulo anterior. Éste se determina en una prueba de tensión, a una velocidad de carga especificada, midiendo además deformaciones, generalmente en una longitud de 20 cm. El esfuerzo de fluencia se calcula sobre la base del área nominal.

Para aceros con curva esfuerzo-deformación sin una zona de fluencia definida, como los aceros utilizados para presfuerzo o los torcidos en frío, se toma a veces como índice de resistencia el esfuerzo máximo.

Se acostumbra aceptar que las características del acero a la compresión son las mismas que a la tensión. Interesa, además, tener una idea de la deformabilidad del acero. Un índice de esta propiedad es el porcentaje de elongación en 20 cm correspondiente a la fractura.

Las normas NMX y ASTM también presentan pautas para realizar los ensayes estándar de acero.

3.3 Evaluación de datos

Todos los datos que se obtienen de ensayes están sujetos a variaciones. Para gran número de datos, existen ciertas medidas que indican la uniformidad del producto que se está ensayando y el cuidado con que se han hecho los ensayes. La medida más común de la tendencia central de un conjunto de datos es el promedio, y las más comunes del grado de uniformidad son la desviación estándar y el coeficiente de variación. Mediante un ejemplo se verá cómo se pueden obtener estas cantidades y cuál es su significado.

En la tabla 3.2 se muestran los resultados del ensaye a la compresión de un grupo de 100 cilindros de concreto normal. Los cilindros se ensayaron con propósitos de control y representan la variación real de la resistencia de un concreto fabricado en planta para una obra determinada, durante un periodo de dos meses y medio. El concreto del que se extrajeron las muestras fue fabricado para dar una determinada resistencia nominal.

Para representar gráficamente datos como los mostrados en la tabla 3.2, se usa un histograma, como el que se presenta en la figura 3.1. Éste se construye llevando a escala en el eje de las ordenadas el número de datos comprendidos en intervalos iguales, los que se indican en el eje de las abscisas. En el ejemplo, los datos (valores f'_c) se agruparon en intervalos de 29 kg/cm^2. Así, en la figura 3.1 se puede ver que 23 cilindros tuvieron resistencias entre 251 y 270 kg/cm^2, y en cambio sólo uno tuvo una resistencia entre 171 y 190 kg/cm^2. El promedio de los datos de la tabla 3.2, es decir, la suma de los valores de los datos dividida entre el número de datos, es 247 kg/cm^2.

Se puede suponer que si el número de datos es muy grande y el intervalo que se escoge es suficientemente pequeño, un histograma como el ilustrado en la figura 3.1 se acercará a la forma mostrada por la línea de trazo continuo. Un gran número de resultados de mediciones queda representado por medio de distribuciones como las de la figura 3.2, que son simétricas con respecto al promedio. Para efectos de control y evaluación se supone en general que las resistencias de concreto y acero se distribuyen simétricamente. A veces se presentan distribuciones asimétricas, como en la figura 3.3.

Las áreas bajo las curvas de la figura 3.2 son iguales, si ambas representan el mismo

Tabla 3.2 Resistencia de cilindros de concreto (resistencia a los 28 días de cilindros de 15 × 30 cm).

No.	Resistencia kg/cm^2	No.	Resistencia kg/cm^2	No.	Resistencia kg/crn^2	No.	Resistencia kg/cm^2
1	247	26	265	51	236	76	204
2	249	27	279	52	236	77	208
3	241	28	314	53	211	78	203
4	197	29	308	54	261	79	208
5	252	30	293	55	243	80	198
6	252	31	283	56	243	81	277
7	241	32	239	57	249	82	253
8	197	33	246	58	251	83	253
9	304	34	288	59	261	84	251
10	276	35	300	60	247	85	224
11	249	36	286	61	233	86	268
12	322	37	281	62	249	87	271
13	348	38	288	63	249	88	216
14	241	39	277	64	267	89	216
15	249	40	268	65	211	90	251
16	194	41	267	66	238	91	203
17	236	42	257	67	253	92	229
18	233	43	267	68	241	93	217
19	208	44	227	69	246	94	227
20	231	45	236	70	246	95	193
21	261	46	257	71	253	96	204
22	304	47	273	72	211	97	193
23	288	48	268	73	217	98	204
24	308	49	257	74	213	99	187
25	281	50	270	75	224	100	193

Promedio $\bar{X} = 247$ kg/cm^2
Desviación estándar $o = 32.7$ kg/cm^2
Coeficiente de variación $V = 32.71247 = 0.132 = 13.2\%$

número de datos. Se puede apreciar que en la curva A la mayor parte de los datos está más cerca del promedio que en la curva B.

Interesa evaluar la dispersión de los datos con respecto al promedio. Una medida tosca de esta dispersión es la diferencia entre el valor mínimo y el máximo, la que sin embargo no da idea de la distribución. Para medir la dispersión de datos se utiliza frecuentemente la desviación estándar, representada por el símbolo o, que se puede considerar como el radio de giro de los datos con respecto al promedio. En efecto, si se designa como X al valor de un dato cualquiera, su diferencia con respecto al promedio, $\bar{X}$, será: $(X - \bar{X})$. Estas diferencias se llaman desviaciones. Considerando cada valor representado por un área unitaria concentrada en un punto, el momento de inercia de un valor cualquiera con respecto al valor medio será: $1(X - \bar{X})^2$, valor que es siempre positivo. El área total será igual al

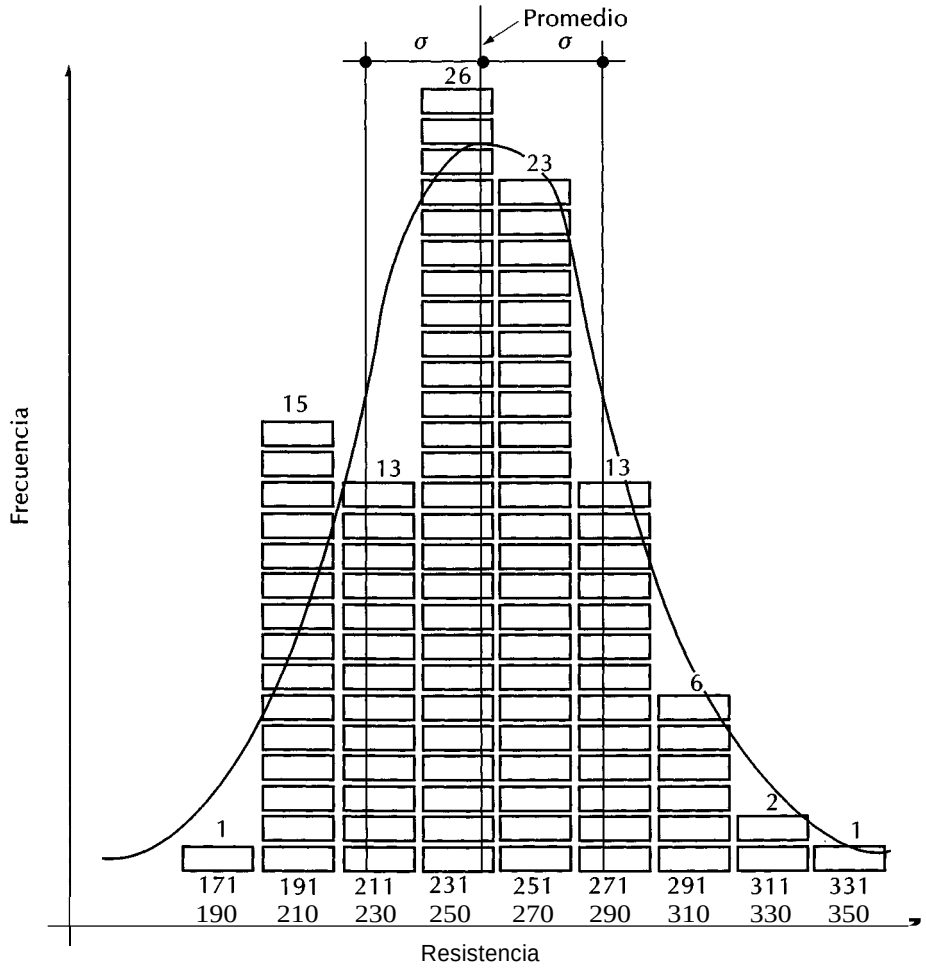


Figura 3.1 Histograma de los datos de la tabla 3.2.

número de datos, n, y por lo tanto el radio de giro al cuadrado será igual a la suma de los momentos de inercia entre el área total. El radio de giro al cuadrado, σ^2, se denomina *variancia*. Finalmente, la desviación estándar (radio de giro) será

$$\sigma = \sqrt{\frac{\Sigma\left(X - \bar{X}\right)^2}{n}} \qquad (3.1)$$

La desviación estándar tiene las mismas unidades que los valores originales, kg/cm^2 para el ejemplo.

En la tabla 3.2 se muestran los valores del promedio y la desviación estándar de los 100 datos de resistencias de concreto, calculados según lo antes mencionado.

En la figura 3.1 se han trazado dos líneas verticales a una distancia del promedio igual a la desviación estándar. Se puede demostrar que en una curva de distribución simétrica los valores comprendidos entre esas dos líneas representan un porcentaje fijo de los datos de la muestra. Por esta razón, la desviación estándar es una buena medida de la dispersión de los datos con respecto al promedio: a mayor desviación estándar, el

intervalo que comprende el mismo porcentaje de datos es más grande. Se puede ver que la desviación estándar de la curva A de la figura 3.2 es mucho menor que la de la curva B.

Para un número pequeño de datos (30 o menos), en lugar de dividir entre n en la ecuación (3.1), se divide entre n−1.* Para muestras grandes no hay mucha diferencia. En el ejemplo habría sido prácticamente igual dividir entre 100, que entre 99.

Para hacer comparaciones válidas entre las dispersiones de dos conjuntos de datos, deben relacionarse las desviaciones estándar con los valores promedio correspondientes. Así, por ejemplo, una desviación estándar de 20 kg/cm^2 en un concreto de 150 kg/cm^2 de resistencia promedio representa una dispersión mayor que la misma desviación en otro de 400 kg/cm^2. Se define entonces el coeficiente de variación, que es el resultado de dividir la desviación estándar entre el promedio

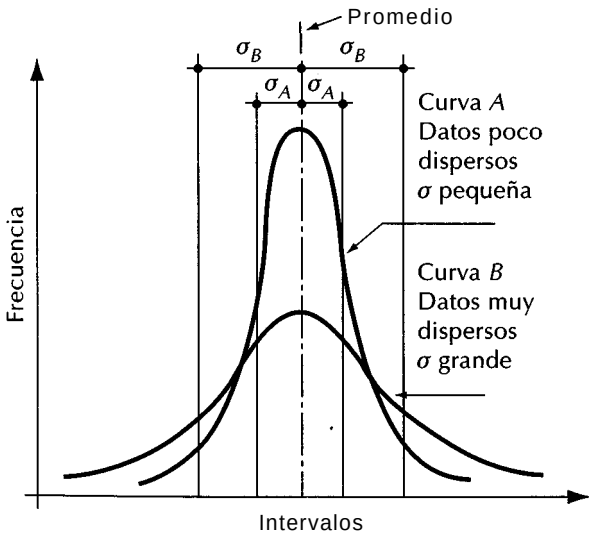


Figura 3.2 Distribuciones simétricas.

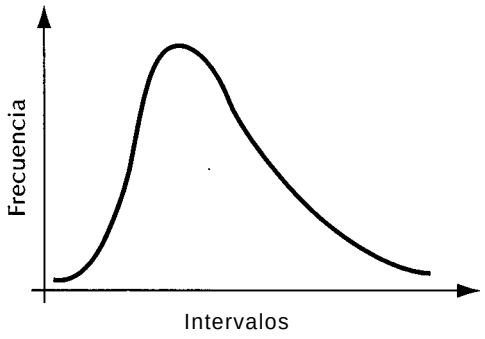


Figura 3.3 Distribución asimétrica.

$$V = \frac{\sigma}{\bar{X}} \qquad (3.2)$$

El coeficiente de variación es adimensional, se expresa generalmente en tanto por ciento y proporciona una comparación válida entre conjuntos de datos de distintos órdenes de magnitud.

Se acostumbra evaluar los resultados de ensayes de concreto tomando como base sus coeficientes de variación. En acero de refuerzo la práctica no es tan frecuente, aunque sería aconsejable.

3.4 Control de calidad

3.4.1 Conceptos generales

El control de calidad tiene por objeto verificar que los requisitos especificados para cierto producto se cumplan dentro de tolerancias previamente establecidas.

Para estructuras de concreto es necesario controlar tanto la calidad de los materiales

*Se demuestra en estadística que dividiendo entre *n−1* se obtiene una medida más representativa de la dispersión de los datos en este caso. Véanse por ejemplo las referencias 3.4 y 3.5.

como la ejecución de la obra, especialmente en lo que se refiere a dimensiones, recubrimiento~,detalles del refuerzo, etc. En este capítulo se describirán solamente los procedimientos de control de calidad del concreto y del acero.

En el diseño es necesario especificar en alguna forma la calidad de los materiales. Debido a la variabilidad natural de los mismos, debe especificarse tanto el valor promedio como un valor que dé idea de la dispersión. Por ejemplo, pueden especificarse el promedio y la desviación estándar, o el promedio y el coeficiente de variación: El inconveniente de especificar la desviación estándar o el coeficiente de variación como medidas de dispersión radica en que se necesita hacer un buen número de ensayes antes de obtener valores confiables de dichas medidas. Por esta razón, la medida de dispersión de resultados suele especificarse de maneras equivalentes, pero más fáciles de aplicar en la práctica.

El Reglamento ACI 318-02 establece que el promedio de las resistencias de tres muestras consecutivas cualesquiera sea por lo menos igual a la resistencia especificada, y que la resistencia de ninguna muestra individual sea menor que la resistencia especificada menos 35 kg/cm^2, si f'_c es igual o menor que 350 kg/cm^2, o menor que 0.10 f'_c si f'_c es mayor que 350 kg/cm^2. La resistencia de una muestra debe entenderse como el promedio de las resistencias de dos cilindros tomados de la misma mezcla de concreto. Puede suceder ocasionalmente que un concreto con buena resistencia y uniformidad no cumpla con estas especificaciones. La probabilidad correspondiente es aproximadamente de uno en cien.

Las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del Distrito Federal de 2004 (3.7) señalan para los concretos clase 1 (ver la sección 2.1 de este texto), los cuales deben tener una resistencia especificada igual o mayor que 250 kg/cm^2, el mismo requisito establecido en el Reglamento ACI para concretos con f'_c igual o menor que 350 kg/cm^2. Para los concretos clase 2, que deben tener una resistencia especificada menor que 250 kg/cm^2, la resistencia promedio de tres muestras concecutivas cualesquiera no debe ser menor que la resistencia especificada menos 17 kg/cm^2, y la resistencia de cualquier muestra no debe ser inferior a la resistencia especificada menos 50 kg/cm^2.

Para comprobar que lo especificado se cumple, es necesario llevar a cabo un muestreo representativo. Estas muestras se someten a ensaye o medición, y los resultados deben analizarse estadísticamente. Decidir qué requisitos debe reunir una muestra para que sea representativa, es un problema complejo que depende de la variabilidad del producto y de las condiciones de fabricación. En cada caso se recomienda un procedimiento específico de muestreo.

De estudios estadísticos y de la experiencia obtenida se han llegado a establecer ciertos valores de los coeficientes de variación que indican el tipo de control que se tiene.

3.4.2 Concreto

Existen diversas opiniones sobre cuáles deben ser los valores de los coeficientes de variación que corresponden a un cierto tipo de control [3.1]. Algunos autores recomiendan porcentajes determinados para cada tipo de control, en tanto que otros hacen variar estos porcentajes con el valor de la resistencia promedio.

La tabla 3.3 permite estimar previamente el coeficiente de variación que puede esperarse, según sea el procedimiento de fabricación. Es de notarse que el coeficiente de variación de datos de ensayes continuos a lo largo de la fabricación del concreto depende mucho del grado de supervisión.

Conviene también tener una idea de la variación de los datos con el tiempo. Esto puede lograrse, por ejemplo, obteniendo

el coeficiente de variación de los últimos cinco ensayes realizados, que pueden ser de uno o más especímenes promediados [3.6].

En el caso de que un grupo consecutivo de cilindros obtenidos de cierto concreto tenga una resistencia menor que la establecida, es necesario investigar la resistencia de la estructura mediante pruebas de carga, ensayes de corazones u otros procedimientos no destructivos [3.1, 3.10].

Para diseñar una mezcla de concreto de tal modo que no más de un cilindro entre 10, o un cilindro entre 20, tenga una resistencia menor que la resistencia nominal prestablecida, se tiene que proporcionar la mezcla para una resistencia promedio mayor [3.6]. Esto se puede lograr aprovechando la experiencia previa. Para una primera aproximación puede utilizarse la expresión

$$f_p = \frac{f'_c}{1 - tV} \qquad (3.3)$$

en donde:

f_p = resistencia promedio necesaria;
f'_c = resistencia nominal especificada;
t = constante que depende del porcentaje de datos que pueden ser menores que el valor especificado y del número de muestras necesario para establecer V;
V = coeficiente de variación previsto según el grado de control, expresado en forma decimal.

Los valores de t se obtienen de las propiedades de una distribución simétrica [3.6]. Para probabilidades de uno entre 10 y de uno entre 20 de que un espécimen tenga una resistencia menor que la especificada, los valores de t son 1.28 y 1.64, respectivamente, si como base para la variación se consideran más de 30 datos.

Tabla 3.3 Coeficientes de variación del concreto, correspondientes a distintos grados de control en la fabricación.

Condiciones de mezclado y colocación	Control	Coeficiente de variación V por ciento
Agregados secos, granulometría precisa, relación exacta agua/cemento y temperatura controlada de curado. Supervisión continua.	De laboratorio	5 – 6
Pesado de todos los materiales, control de la granulometría y del agua, tomando en cuenta la humedad de los agregados en el peso de la grava y la arena, y en la cantidad de agua. Supervisión continua.	Excelente	7 – 9
Pesado de todos los materiales, control de la granulometría y de la humedad de los agregados. Supervisión continua.	Alto	10 – 12
Pesado de los agregados, control de la granulometría y del agua. Supervisión frecuente.	Muy bueno	13 – 15
Pesado de los materiales. Contenido de agua verificado a menudo. Verificación de la trabajabilidad. Supervisión intermitente.	Bueno	16 – 18
Proporcionamiento por volumen, considerando el cambio en volumen de la arena por la humedad. Cemento pesado. Contenido de agua verificado en la mezcla. Supervisión intermitente.	Regular	20
Proporcionamiento por volumen de todos los materiales. Poca o ninguna supervisión.	Pobre	25

En las Normas Técnicas Complementarias (NTC 04) del Reglamento del Distrito Federal (3.7) se especifica que las mezclas de concreto se diseñen para una resistencia promedio en kg/cm^2 mayor que la resistencia nominal especificada f_c'. Aunque estas Normas no presentan ningún método para hacer este diseño, puede usarse también la ecuación 3.3 y verificar que se cumplan las especificaciones para el control de las mezclas señaladas anteriormente.

3.4.3 Acero

Así como existe mucha información publicada sobre la variación de resistencia de concreto, existen menos datos semejantes sobre acero.

Algunos estudios indican que los valores de f_y del acero de barras de refuerzo, pueden tener coeficientes de variación del orden de 10 a 15 por ciento 13.91.

Referencias

3.1 Jones, R. Non-Destructive Testing of Concrete. Cambridge, University Press, 1962.

3.2 —. Accelerated Strength Testing (SP-56). Detroit, American Concrete Institute, 1978.

3.3 Comité Européen du Béton. Recommandations pratiques *unifiées* pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton armé, tomo I. Madrid, Comité Européen du Béton, 1964.

3.4 Benjamin, J. R., y C. A. Cornell. Probability, *Statistics*, and Decision for Civil Engineers. Nueva York, McGraw Hill, 1970.

3.5 Moreno, A., y F. Jauffred. Elementos de Probabilidad y Estadística. México, Representaciones de Ingeniería, 1969.

3.6 Comité ACI 214. Recommended Practice for *Evaluation* of Strength Tests of Concrete. Detroit, American Concrete Institute, 1977 (confirmado en 1997).

3.7 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo 1 6 de octubre de 2004.

3.8 Wadell, J. J. Practica1 *Quality* Control for Concrete. Huntington, N. Y., Robert E. Kreiger Publishing Co., 1978.

3.9 Robles, F. "Strength Factors: Material and geometrical Aspects". En ASCE-IABSE International Conference on Planning and Design of *Tall* Building (*Lehigh* University) Preprints: Reports Vol. 111-26. Bethlehem, Pennsylvania, agosto 1972.

3.10 Comité ACI 228. Nondestructive Tests Methods for Evaluation of Concrete in Structures. Detroit, American Concrete Institute, 1998.

3.11 —. Eurocódigo 2-Proyecto de Estructuras de Hormigón. Asociación Española de Normalización y Certificación. Noviembre, 1993.

Ejercicios

3.1 ¿Cuál debe ser la resistencia promedio de un concreto para que no más de un cilindro entre diez tenga una resistencia menor que 200 kg/cm^2? Supóngase que el coeficiente de variación es de 18 por ciento. Usar el método del Comité ACI 214.

3.2 Calcular el promedio y el coeficiente de variación del siguiente conjunto de esfuerzos de fluencia de barras de acero (véase tabla a la derecha).

3.3 Calcular la resistencia promedio para la que debe diseñarse una mezcla de concreto, si la resistencia de diseño, f'_c, es 250 kg/cm^2 y la desviación estándar de las resistencias a compresión es de 45 kg/cm^2. Usar las especificaciones de las NTC 04 del Reglamento del Distrito Federal.

No.	Esfuerzo de fluencia *(kg/cm^2)*	No.	Esfuerzo de fluencia *(kg/cm^2)*
1	4820	13	6450
2	4900	14	5020
3	4420	15	5220
4	4570	16	5100
5	4800	17	4700
6	5650	18	5150
7	5100	19	5000
8	4750	20	4750
9	4470	21	4720
10	4550	22	4700
11	4650	23	4850
12	5400	24	5220

CAPÍTULO 4

Elementos sujetos a carga axial

4.1 Introducción. /4.2 Comportamiento, modos de falla y resistencia de elementos sujetos a compresión axial. /4.3 Elementos sujetos a tensión axial. /4.4 Ejemplos de cálculos de resistencias de columnas cortas bajo carga axial.

4.1 Introducción

No es común que los elementos de concreto reforzado de estructuras reales se encuentren sujetos únicamente a carga axial. Debido a que casi siempre las estructuras son continuas, la carga axial se encuentra actuando simultáneamente con momento flexionante; aun en elementos isostáticos, las excentricidades accidentales en la colocación de la carga o los pequeños defectos constructivos introducen momentos flexionantes. Por esta razón, los reglamentos de construcción recomiendan considerar siempre la existencia de momentos flexionantes, aun cuando el análisis indique que no hay dichos momentos.

Sin embargo, el estudio del comportamiento bajo carga axial pura es importante para comprender muchos aspectos del funcionamiento de diversos tipos de elementos de concreto reforzado, y porque el valor de la resistencia a carga axial se utiliza para calcular la resistencia de elementos sujetos a carga axial combinada con otras acciones.

4.2 Comportamiento, modos de falla y resistencia de elementos sujetos a compresión axial

4.2.1 Conceptos básicos

En la figura 4.1 se representan curvas carga-deformación unitaria para tres tipos de elementos de concreto sujetos a compresión axial. Las curvas son típicas de las que se obtienen de ensayes de columnas relativamente cortas. Si las columnas fueran muy esbeltas, la resistencia estaría afectada en forma importante por los efectos de la deflexión lateral debida a excentricidades accidentales en la aplicación de la carga. Este problema se trata en el capítulo 13.

La curva A, correspondiente a un espécimen de concreto simple, representa la característica carga-deformación de una columna con relación de esbeltez mayor que dos pero menor que 10 o 12. Como en el caso de cilindros de control, la carga máxima se alcanza cuando se llega a Üna deformación unitaria del orden de 0.002. En el capítulo 2 se describieron las características carga-deformación de prismas de concreto simple sujetos a compresión axial. Se indicó que la resistencia de un prisma disminuye al aumentar la relación de esbeltez, hasta llegar a un valor mínimo aproximadamente igual a 85 por ciento de la resistencia de un prisma con relación de esbeltez igual a dos. Por consiguiente, la resistencia de un elemento de concreto simple sujeto a compresión axial puede estimarse como el producto del 85 por ciento del esfuerzo medido en un cilindro de control (f'_c), ensayado en las mismas condiciones, por el área de la sección transversal del elemento. Este factor de reducción, 0.85, es sólo un promedio de resultados de ensayes en miembros colocados verticalmente. Se han encontrado valores para este factor desde 0.69 hasta 0.95 [4.1]. En elementos colados horizontalmente, este factor se acerca a la unidad.

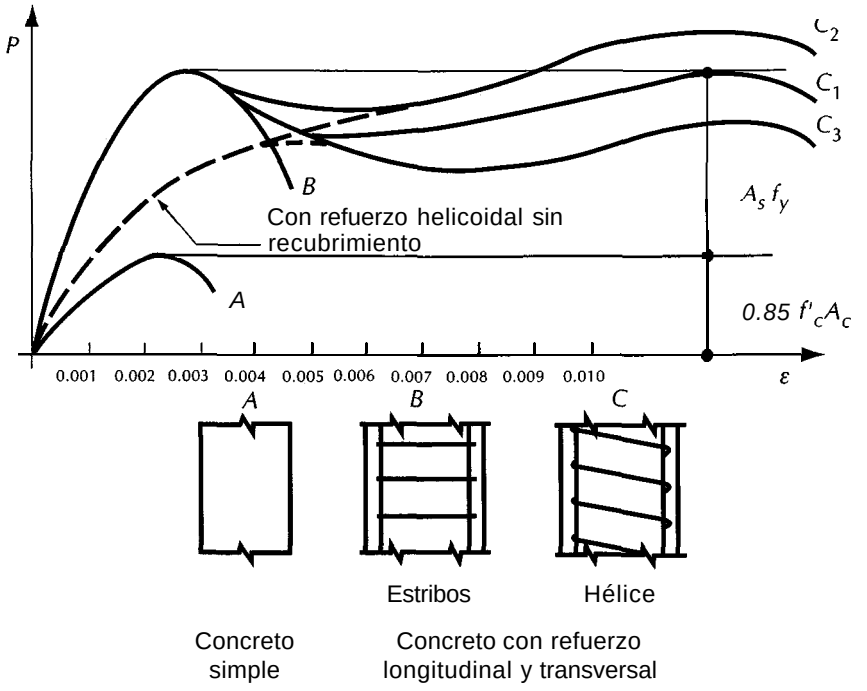


Figura 4.1 Curvas carga-deformación unitaria de columnas cortas bajo compresión axial.

Si se adiciona refuerzo longitudinal a un espécimen de concreto simple y se utiliza el refuerzo transversal necesario para mantener las barras longitudinales en su posición durante el colado, la carga máxima se obtiene bajo las mismas condiciones que en un prisma de concreto simple, es decir, a una deformación unitaria del orden de 0.002. La falla, como en el caso anterior, se produce a una deformación unitaria de 0.003 o 0.004, si el ensaye es de corta duración. A esa deformación, el concreto se agrieta longitudinalmente, o según planos con una inclinación aproximada de 45°, dependiendo de las restricciones en los extremos del espécimen, y las barras longitudinales se pandean entre estribos, al faltarles el soporte lateral del concreto.

Conviene hacer hincapié en que el término "falla" suele usarse de un modo confuso. En unos casos indica la resistencia y en otros el colapso final que ocurre a una carga generalmente menor que la resistencia. En este texto se utilizará para indicar el colapso final.

La característica acción-respuesta de un espécimen con refuerzo longitudinal es una curva como la B de la figura 4.1. La resistencia adicional sobre la de un prisma de concreto simple es debida a la contribución del refuerzo longitudinal en compresión. Se puede estimar esta contribución como el producto del área de acero por el esfuerzo de fluencia, f_y. Por lo tanto, la resistencia o carga máxima que un prisma de concreto con refuerzo longitudinal y estribos transversales es capaz de alcanzar, está dada por la expresión

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y \qquad (4.1)$$

En ella, A_g representa el área total de concreto, sin descontar el área ocupada por las barras. En rigor debe descontarse esta área, pero como normalmente es pequeña, el error que se comete al no hacerlo también es pequeño. Para porcentajes altos, del orden de 5 por ciento o más del área de la sección, vale la pena descontar el área de las barras.

Si el elemento, además de refuerzo longitudinal, tiene refuerzo helicoidal continuo a todo lo largo, su comportamiento bajo carga queda representado por las curvas C de la figura 4.1. Inicialmente su comportamiento es similar al de un prisma con estribos, hasta llegar al primer máximo, a una deformación unitaria del orden de 0.002. Aproximadamente a esta deformación, el recubrimiento de la hélice o zuncho empieza a desprenderse y, por tanto, la capacidad de carga del elemento disminuye. Al deformarse lateralmente el concreto en forma apreciable por el efecto de Poisson, la hélice se alarga, produciendo como reacción una presión confinante en el núcleo de concreto limitado por el zuncho. De acuerdo con las características de la hélice, la recuperación en capacidad de carga del espécimen será mayor o menor. Si el confinamiento proporcionado por el zuncho es suficiente, puede alcanzarse una segunda carga máxima superior a la alcanzada inicialmente, pero a deformaciones considerablemente mayores, como muestra la curva C_2. Por el contrario, si el confinamiento no es suficiente, nunca se alcanzará una carga como la del primer máximo (C_3). Si se ensaya un espécimen con hélice y refuerzo longitudinal, pero sin recubrimiento, la etapa inicial quedará representada por la línea de trazo interrumpido con una pendiente menor que la del espécimen con recubrimiento, ya que el área de concreto es menor. La parte final de ambas curvas será igual, puesto que el espécimen con recubrimiento lo habrá perdido a estas deformaciones.

Se puede considerar, entonces, que la resistencia en compresión axial de un elemento de concreto reforzado se obtiene de la contribución de cuatro factores: el concreto del núcleo, el acero longitudinal, el concreto del recubrimiento y el refuerzo helicoidal. Estas dos últimas contribuciones no pueden existir simultáneamente, ya que, como se ha visto, el refuerzo helicoidal actúa en forma apreciable sólo cuando la deformación longitudinal del elemento es igual o mayor que la que produce la caída del recubrimiento.

La contribución a la resistencia aportada por el concreto, tanto el del núcleo como el del recubrimiento, puede valuarse como el producto del 85 por ciento de la resistencia de un cilindro de control por el área correspondiente, y la contribución del acero longitudinal, como el producto del esfuerzo de fluencia por el área de acero (ecuación 4.1). Para evaluar la contribución del refuerzo helicoidal, puede utilizarse la información presentada en el capítulo 2 sobre el comportamiento de prismas de concreto sujetos a compresión triaxial.

Es posible evaluar la contribución de la hélice o espiral en función de las propiedades mecánicas del acero y del porcentaje volumétrico de refuerzo helicoidal. Este último se define como

$$\rho_s = \frac{\textit{volumen del acero en un paso de hélice}}{\textit{volumen del núcleo de concreto en un paso de hélice}}$$

Denominando d al diámetro del núcleo, centro a centro de la hélice, A_e al área del alambre helicoidal, y s al paso, se tiene

$$\rho_s = \frac{\pi d A_e}{\frac{\pi d^2}{4} s} = \frac{4 A_e}{sd} \qquad (4.2)$$

La presión confinante se puede expresar en función de la tensión del refuerzo helicoidal, partiendo de las condiciones de equilibrio del cuerpo libre mostrado en la figura 4.2.

Por sencillez, se supone que la hélice está contenida en un plano normal al eje del elemento. También se supone que el esfuerzo en la hélice ha alcanzado el límite de fluencia, lo cual se ha comprobado experimentalmente.

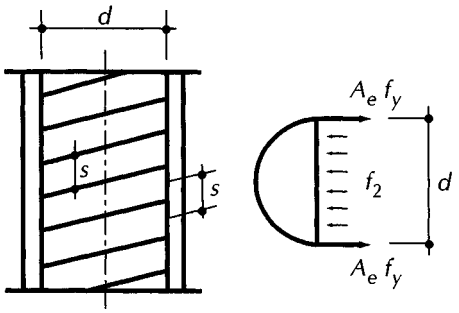


Figura 4.2 Diagramas de cuerpo libre de una sección con hélice.

Del equilibrio de las fuerzas mostradas se tiene

$$2A_e f_y = f_2 sd \tag{4.3}$$

donde f_y representa el esfuerzo de la hélice, y f_2 la presión confinante que actúa en el plano medio del elemento. Usando la definición de ρ_s de la ecuación (4.2) resulta

$$f_2 = \frac{\rho_s f_y}{2} \tag{4.4}$$

El efecto de la presión confinante de una hélice es comparable al de la presión de aceite en un ensaye de compresión triaxial, como se ha comprobado experimentalmente en ensayes de prismas con refuerzo helicoidal sin recubrimiento [4.2]. De acuerdo con la expresión (2.1), el esfuerzo máximo que un espécimen de concreto simple es capaz de soportar es igual al esfuerzo máximo sin presión confinante más 4.1 veces el esfuerzo confinante, f_2. Por consiguiente, la contribución de la hélice será aproximadamente 4.1 $f_2 A_c$, es decir, 2.05 $\rho_s f_y A_c$, donde A_c es el área del núcleo.

La validez de este coeficiente fue comprobada en forma aproximada en la investigación ACI sobre columnas [4.1]. En lo sucesivo, el coeficiente 2.05 se redondeará a 2.0. En la demostración anterior se ha medido el diámetro, d, centro a centro de la hélice. Sin embargo, en los reglamentos de construcción suele medirse entre los paños exteriores, y tanto la cuantía ρ_s como el área del núcleo, A_c, se calculan con base en dicho diámetro. Los resultados numéricos varían muy poco.

Se mencionó anteriormente, con referencia a la figura 4.1, que el segundo máximo de la curva carga-deformación de una columna con refuerzo helicoidal podía ser mayor, igual o menor que el primer máximo. En la práctica, conviene que sea por lo menos ligeramente mayor, ya que de esta manera se desarrolla la curva completa y el elemento tiene mayor ductilidad, lo cual es muy conveniente desde el punto de vista estructural. Para que esto suceda, la contribución de la hélice, $2\rho_s f_y A_c$, debe ser ligeramente mayor que la contribución del recubrimiento de concreto que se desprende al alcanzarse el primer máximo. Esta condición puede lograrse haciendo que el porcentaje de refuerzo helicoidal, p, sea suficientemente grande.

En la tabla 4.1 se resumen las expresiones utilizadas para estimar la resistencia de elementos sujetos a compresión axial. En las secciones siguientes se presenta el cálculo de las resistencias de columnas con carga axial de acuerdo con los reglamentos del Distrito Federal y del ACI.

Tabla 4.1 Resistencia de elementos sujetos a compresión axial.

Notación

A_g = área total de la sección
A_c = área del núcleo de concreto confinado por el refuerzo helicoidal
f'_c = resistencia de los cilindros de control de 15 × 30 cm
f_y = esfuerzo de fluencia del acero
A_s = área de acero del refuerzo longitudinal
ρ_s = cuantía volumétrica de refuerzo helicoidal

1. Concreto simple

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g$$

2. Concreto con refuerzo longitudinal y recubrimiento

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s f_y$$

3. Concreto simple con refuerzo helicoidal sin recubrimiento

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_c + 2\rho_s\, f_y\, A_c$$

4. Concreto con refuerzo longitudinal y helicoidal con recubrimiento

$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + \mathbf{A},\, f_y$ (Primer máximo)
$P_o = 0.85\, f'_c\, \mathbf{A},\, + A_s f_y + 2\rho_s\, f_y\, \mathbf{A},$ (Segundo máximo)

(La resistencia en este caso será el valor máximo de las dos expresiones anteriores.)

4.2.2 Normas Técnicas Complementarias (NTC-04) del Reglamento del Distrito Federal

La resistencia nominal, P_{ro}, se calcula con la ecuación general 4.1. Sin embargo, en esta ecuación es necesario hacer una modificación en el valor de f'_c derivada de la manera en que se incorporan los factores de seguridad en estas Normas Técnicas. Además de los factores de carga, F_c, y de los factores reductivos de resistencia, F_R, mencionados en la sección 1.7.1 de este texto, la Norma Técnica de Concreto especifica que para el cálculo de resistencias se utilice una resistencia reducida a la compresión del concreto denominada f^*_c, cuyo valor es:

$$f^*_c = 0.8\, f'_c \qquad (4.5)$$

El término f^*_c toma en cuenta que la resistencia del concreto en la estructura es, por lo general, menor que la de los cilindros de control, y que existe una cierta probabilidad de que el concreto utilizado no alcance la resistencia de diseño f'_c. El factor 0.8 de la ecuación 4.5 se estableció para que la probabilidad de que la resistencia del concreto en la estructura sea menor que f'_c resulte de 2 por ciento. La ecuación 4.1 se transforma entonces a:

$$P_{ro} = 0.85\, f^*_c\, A_c + A_s f_y \qquad (4.6)$$

El término $0.85\, f^*_c$ se denomina f''_c en las Normas Técnicas Complementarias. Usando esta notación, la resistencia nominal se expresa como:

$$P_{ro} = f''_c\, A_c + A_s f_y \qquad (4.7)$$

La relación de refuerzo helicoidal, ρ_s, no debe ser menor que:

$$0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_y}, \text{ ni que } 0.12\,\frac{f'_c}{f_y} \qquad (4.8)$$

con lo cual se logra que el segundo máximo de la gráfica carga-deformación sea ligeramente mayor que el primero (figura 4.1). También se especifica que el claro libre de la hélice no sea mayor de 7 cm.

La resistencia calculada con la ecuación 4.7 es la resistencia nominal. La resistencia de diseño, P_{RO}, o sea, la que debe usarse para el diseño final de los elementos estructurales, se obtiene multiplicando la re-

sistencia nominal por el factor reductivo, F_R (sección 1.7.1), que para el caso de columnas con carga axial tiene un valor de 0.70 para columnas con estribos y de 0.80 para columnas con refuerzo helicoidal o con estribos que cumplan requisitos especiales en cuanto a su separación y diámetro.

4.2.3 Reglamento ACI

La resistencia nominal se calcula también con la ecuación 4.1, pero este reglamento especifica que se debe descontar del área de concreto, el área transversal de las barras longitudinales de refuerzo. Por lo tanto, la ecuación queda en la forma:

$$P_o = 0.85\ f'_c\ (A_g - A)\ + A_s f_y \qquad (4.9)$$

Para calcular la resistencia de diseño, la resistencia nominal calculada con la ecuación 4.9 debe multiplicarse por dos factores. Uno es el factor de reducción de resistencia ϕ, que vale 0.70 cuando se usa refuerzo helicoidal, y 0.65 cuando se usan estribos. El segundo factor vale 0.85 para refuerzo helicoidal y 0.80 para estribos; este factor se introduce en el Reglamento ACI con el fin de tomar en cuenta que las columnas reales están sujetas a una excentricidad mínima, por lo que no deben diseñarse columnas con carga axial pura. (En versiones anteriores del Reglamento ACI se especificaba el valor de la excentricidad mínima y no se incluía el segundo factor.) La resistencia de diseño se calcula entonces con las siguientes ecuaciones:

$$P_{u,\text{máx}} = 0.85\phi[0.85f'_c\ (A_g - A_s) + A_s f_y] \quad (4.10)$$

para columnas con refuerzo helicoidal, y

$$P_{u,\text{máx}} = 0.80\phi[0.85f'_c(A_g - A_s) + A_s f_y] \quad (4.11)$$

para columnas con estribos. Obsérvese que las expresiones comprendidas dentro de los paréntesis rectangulares representan la resistencia nominal.

En cuanto al refuerzo helicoidal, se especifica que su cuantía no sea menor que

$$0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_y} \qquad (4.12)$$

y que el espaciamiento libre de hélice no sea menor de 2.5 cm ni mayor de 7.5 cm; las barras de la hélice deben ser por lo menos del No. 3.

4.3 Elementos sujetos a tensión axial

Debido a que el concreto es un material sumamente débil a esfuerzos de tensión, es muy raro que se utilicen elementos de concreto reforzado sujetos a tensión. Sin embargo, en algunos casos sucede que elementos que trabajan normalmente a compresión, tienen que resistir ocasionalmente fuerzas de tensión, como por ejemplo, las diagonales de contraventeo de marcos sujetos a acciones sísmicas o de viento.

La resistencia a tensión axial de un elemento de concreto reforzado es únicamente la resistencia del acero de refuerzo, o sea, $A_s f_y$, ya que el concreto se agrieta y no contribuye a la resistencia. Debe tenerse en cuenta que, generalmente, la fuerza de tensión que puede aplicarse a un elemento está determinada por el agrietamiento y no por la resistencia. Un ejemplo típico es el de los tensores que se usan en puentes y en algunas otras estructuras. El aspecto de agrietamiento se estudia en el capítulo 10 de este texto.

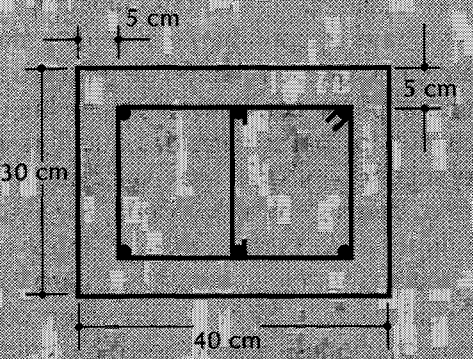
4.4 Ejemplos de cálculos de resistencias de columnas cortas bajo carga axial

4.4.1 Utilizando los conceptos básicos

En el ejemplo 4.1 se ilustra el cálculo de la resistencia a carga axial de una columna rec-

EJEMPLO 4.1 ***Cálculo de la resistencia de una columna de estribos con carga axial.***

DATOS



$f'_c = 300$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 6$ barras No. 8 $= 30$ cm^2

$$\rho = \frac{A_s}{bh} = \frac{30}{30 \times 40} = 0.025$$

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

a) Sin descontar el área de las barras

$$P_o = 0.85 f'_c A_g + A_s f_y$$
$$A_g = 30 \times 40 = 1200 \text{ cm}^2$$
$$P_o = 0.85 \times 300 \times 1200 + 30 \times 4200$$
$$P_o = 306{,}000 + 126{,}000 = 432{,}000 \text{ kg}$$

$$\boxed{P_o = 432 \text{ ton}}$$

b) Descontando el área de las barras

$$\text{Área neta} = A_n = A_g - A_s = 1200 - 30 = 1170 \text{ cm}^2$$
$$P_o = 0.85 f'_c A_n + A_s f_y$$
$$P_o = 0.85 \times 300 \times 1170 + 30 \times 4200$$
$$P_o = 298{,}000 + 126{,}000 = 424{,}000 \text{ kg}$$

$$\boxed{P_o = 424 \text{ ton}}$$

tangular utilizando los conceptos básicos. En los datos del problema no se hace referencia a la separación de los estribos, ya que el detalle de colocación de dichos estribos se estudia en el capítulo 15. La cuantía de refuerzo longitudinal, ρ, tiene un valor similar a los usados comúnmente en la práctica.

La resistencia se ha calculado usando la ecuación 4.1. Como se indicó anteriormente, esta ecuación expresa que la resistencia es la

suma de las contribuciones del concreto y del acero. En el ejemplo se ha calculado primero la resistencia, usando el área total de la sección de concreto, A_g, o sea, sin descontar el área ocupada por las barras de refuerzo y, después usando el área neta, que es el área total menos el área de las barras. Como se puede ver, los resultados son semejantes.

El ejemplo 4.2 ilustra el cálculo de la resistencia de una columna con refuerzo helicoidal. El diámetro y el paso de la hélice cumplen con las recomendaciones del Reglamento ACI 318-02. Como se ha mencionado anteriormente, la gráfica carga-deformación de una columna de este tipo tiene dos máximos (figura 4.1). Para determinar la resistencia o carga máxima que puede resistir la columna es necesario calcular los dos máximos, ya que la resistencia será el mayor de ellos.

El primer máximo es la suma de las resistencias del área total de la sección de concreto y del refuerzo longitudinal. Su valor en el ejemplo es de 330 ton. El segundo máximo es la suma de las resistencias del núcleo de concreto confinado por la hélice, del refuerzo longitudinal y de la resistencia adicional del núcleo debida al efecto de confinamiento de la hélice. Su valor en el ejemplo es de 388 ton. Esto indica que el segundo máximo es mayor que el primero, o sea, que se desarrolla la curva completa carga-deformación. El área del núcleo se calculó usando el diámetro medido entre los bordes exteriores de la hélice. Para comprobar que la resistencia varía muy poco, se puede calcular tomando el diámetro centro a centro de la hélice.

4.4.2 Utilizando las Normas Técnicas Complementarias (NTC-04) 14.31

En el ejemplo 4.3 se calcula la resistencia de la misma columna con refuerzo helicoidal del ejemplo 4.2, usando en esta ocasión las Normas Técnicas Complementarias (NTC-04) del Reglamento del Distrito Federal. La resistencia del concreto en la estructura, f^*_c, resulta de 200 kg/cm^2, y f''_c de 170 kg/cm^2.

En las NTC-O4 no se presentan métodos para calcular el segundo máximo. Por lo tanto, en el ejemplo se calculó únicamente la resistencia correspondiente al primer máximo y se verificó que la relación de refuerzo helicoidal cumpliese con lo señalado en la ecuación 4.8, con lo cual se garantiza que la resistencia del segundo máximo sea mayor que la del primero. La resistencia de diseño, P_{RO}, se obtuvo multiplicando la resistencia, P_{ro}, por el factor de reducción, F_R, que para este caso vale 0.80 (sección 4.2.2). Si no se hubiesen cumplido las restricciones sobre refuerzo helicoidal de la ecuación 4.8, se tendría que haber usado un valor de 0.70 para el factor F_R, que es el que corresponde a columnas de estribos.

4.4.3 Utilizando el Reglamento ACI 318-02 14.41

El procedimiento consiste también en calcular la resistencia correspondiente al primer máximo únicamente y verificar que el refuerzo helicoidal cumpla, en este caso, con las restricciones de la sección 4.2.3. La resistencia del primer máximo se calcula con la ecuación 4.9, con la que se obtiene el siguiente valor:

$$P_o = 0.85 \times 250(962 - 30) + 30 \times 4200 = 324{,}050 \text{ kg}$$

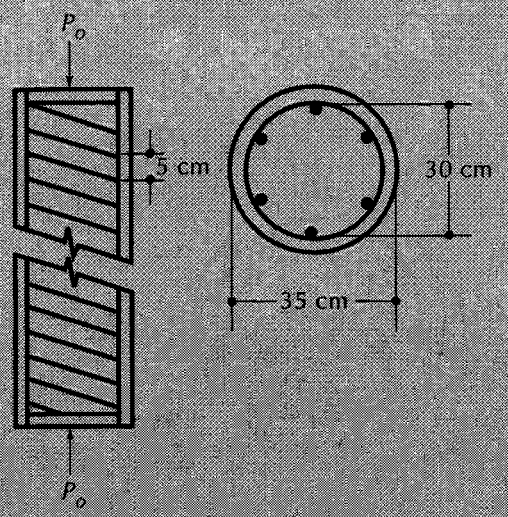
De acuerdo con la sección 4.2.3, el factor de reducción por excentricidad mínima vale 0.85 y el factor de reducción, ϕ, resulta de 0.70, por lo que la resistencia de diseño, calculada con la ecuación 4.10, es:

$$P_{u,\text{máx}} = 0.85 \times 0.70 \times 324{,}050 = 192{,}810 \text{ kg} = 193 \text{ ton}$$

4.4.4 Comparación entre las resistencias obtenidas

La resistencia nominal calculada con las NTC-04 resultó menor en este caso que la calcu-

EJEMPLO 4.2 ***Cálculo de la resistencia de una columna con refuerzo helicoidal.***



$f'_c = 250$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 6$ barras No. 8 = 30 cm^2

recubrimiento libre = 2.5 cm

paso de la hélice = 5 cm

hélice del No.3

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

a) Primer máximo

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y$$

$$A_g = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 35^2}{4} = 962 \text{ cm}^2$$

$$P_o = 0.85 \times 250 \times 962 + 30 \times 4200$$

$$P_o = 204{,}000 + 126{,}000 = 330{,}000 \text{ kg}$$

$P_o = 330$ ton

b) Segundo máximo

$$P_o = 0.85\, f'_c\, A_c + A_s\, f_y + 2\rho_s\, f_y\, A_c$$

$$A_c = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{\pi \times 30^2}{4} = 707 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = \frac{4A_e}{sd}$$

A_e = Área barra helicoidal = 0.71 cm^2 (barra No. 3)

$$\rho_s = \frac{4 \times 0.71}{5 \times 30} = 0.0189$$

$$P_o = 0.85 \times 250 \times 707 + 30 \times 4200 + 2 \times 0.0189 \times 4200 \times 707$$

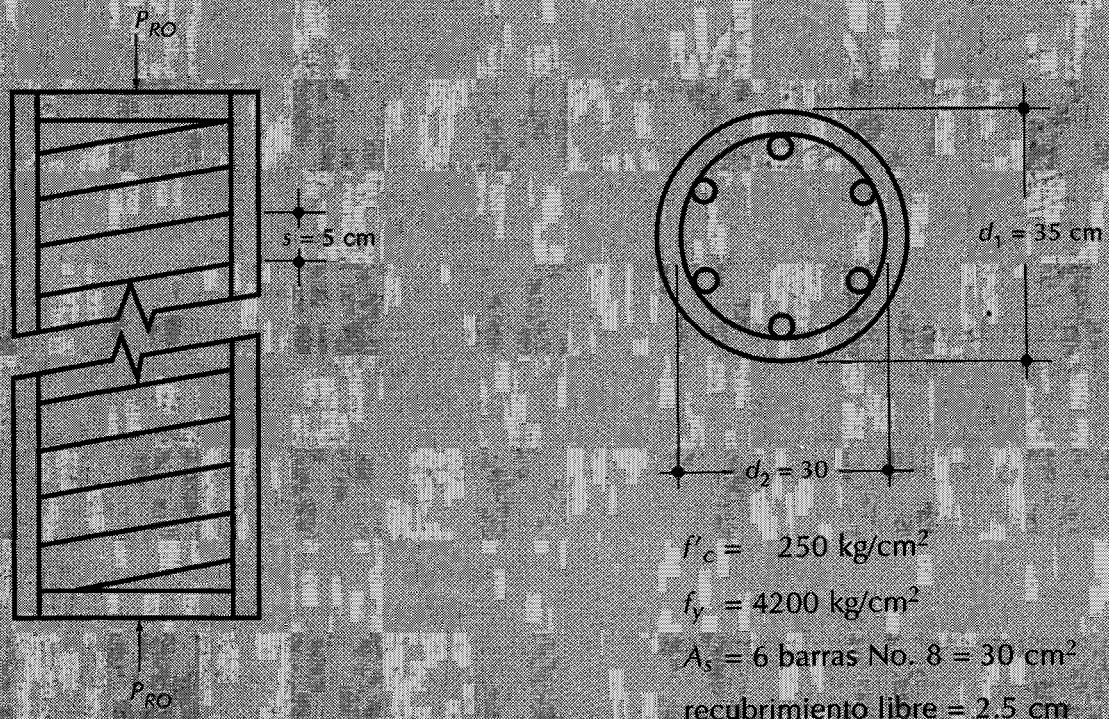
$$P_o = 150{,}000 + 126{,}000 + 112{,}000 = 388{,}000 \text{ kg}$$

$P_o = 388$ ton

Resistencia = 388 ton

EJEMPLO 4.3 ***Cálculo de la resistencia de una columna con refuerzo helicoidal, usando las Normas Técnicas Complementarias (NTC-04).***

DATOS



$f'_c = 250$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 6$ barras No. 8 $= 30$ cm^2

recubrimiento libre $= 2.5$ cm

paso de la hélice $= 5$ cm

hélice del No.3

$A_e = 0.71$ cm^2

CONSTANTES

$f^*_c = 0.8 \quad f'_c = 0.8 \times 250 = 200$ kg/cm^2 (ecuación 4.5)

$f''_c = 0.85 \quad f^*_c = 0.85 \times 200 = 170$ kg/cm^2 (ecuación 4.6)

$$A_g = \frac{\pi d_1^2}{4} = \frac{\pi \times 35^2}{4} = 962 \text{ cm}^2$$

$$A_c = \frac{\pi d_2^2}{4} = \frac{\pi \times 30^2}{4} = 707 \text{ cm}^2$$

$$\rho_s = \frac{4 A_e}{s\, d_2} = \frac{4 \times 0.71}{5 \times 30} = 0.0189$$

EJEMPLO 4.3 *(continuación)*

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

a) Primer máximo

$$P_{ro} = f''_c A_c + A_s f_y \qquad \text{(ecuación 4.7)}$$

$$= 170 \times 962 + 30 \times 4200 = 290{,}000 \text{ kg}$$

$$\boxed{P_{ro} = 290 \text{ ton}}$$

b) Revisión del refuerzo helicoidal:

$$0.45\left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right)\frac{f'_c}{f_y} = 0.45\left(\frac{962}{707} - 1\right)\frac{250}{4200} = 0.0097$$

Además: $0.12\,\dfrac{f'_c}{f_y} = 0.12\,\dfrac{250}{4200} = 0.0071 < 0.0097$

$\rho_s > 0.0097 \therefore$ correcto

$s = 5 \text{ cm} < 7 \text{ cm} \therefore$ correcto

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA DE DISEÑO

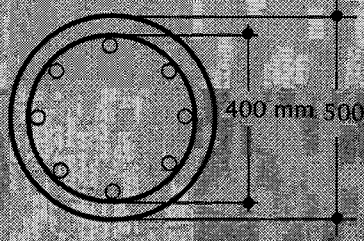
$$P_{RO} = F_R P_{ro}$$

$$P_{RO} = 0.80 \times 290 = 232 \text{ ton}$$

$$\boxed{P_{RO} = 232 \text{ ton}}$$

EJEMPLO 4.4 ***Cálculo de la resistencia de una columna circular con carga axial (SI).***

DATOS



$f'_c = 30\ MPa$

$f_y = 420\ MPa$

$A_s = 8$ barras No. 8 $= 4000\ mm^2$

$$\rho = \frac{A_s}{\pi d^2/4} = \frac{4000}{\pi \times 500^2/4} = 0.020$$

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

a) Sin descontar el área de las barras:

$P_o = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s\, f_y$

$$A_g = \frac{\pi d^2}{4} = 1.96 \times 10^5\ mm^2$$

$P_o = 0.85 \times 30 \times 1.96 \times 10^5 + 4000 \times 420$

$P_o = (50.0 + 16.8)10^5 = 66.8 \times 10^5\ N$

$$\boxed{P_o = 6.68\ MN}$$

b) Descontando el área de las barras:

Área neta $= A_n = A_g - A_s = (1.96 - 0.04)10^5 = 1.92 \times 10^5\ mm^2$

$P_o = 0.85\, f'_c\, A_n + A_s\, f_y$

$P_o = 0.85 \times 30 \times 1.92 \times 10^5 + 4000 \times 420$

$P_o = (49.0 + 16.8)\ 10^5 = 65.8 \times 10^5\ N$

$$\boxed{P_o = 6.58\ MN}$$

lada con el Reglamento ACI 318-02, mientras que las resistencias de diseño resultaron prácticamente iguales. Sin embargo, no puede concluirse a partir únicamente de unos ejemplos que un reglamento sea más conservador o menos que el otro. Sería necesario comparar diseños completos de varias estructuras, para llegar a una conclusión de este tipo.

Además, recuérdese que las cargas de diseño y los factores de carga que deben utilizarse según cada uno de los reglamentos son diferentes.

4.4.5 Utilizando el sistema internacional de medidas SI

En el ejemplo 4.4 se ilustra la utilización del sistema SI. Cabe hacer notar que los valores de f'_c y de f_y no coinciden totalmente con los valores utilizados en la práctica, ya que en el ejemplo se han usado valores redondeados. Así, el valor de f'_c de 30 megapascales corresponde a un concreto de 306 kg/cm^2, y el valor de f_y de 420 megapascales corresponde a un acero de 4284 kg/cm^2 de limite de fluencia (ver tabla de equivalencias en Apéndice E). Sin embargo, en todos los ejemplos de este texto en los que se utilice el sistema SI, se usarán los valores redondeados más cercanos a los valores usados en la práctica o comercialmente. El ejemplo 4.4 se ha resuelto utilizando los conceptos básicos, por lo que los comentarios son los mismos que los de la sección 4.4.1.

Referencias

4.1 Investigación ACI sobre columnas. Reporte de la mayoría, F. E. Richart; Reporte de la minoría, R.L. Bertin e Inge Lyse. *Journal* of the American *Concrete* Institute. Detroit, febrero 1933.

4.2 Richart, F. E, et al. The Effect of Eccentric Loads, *Protective* Shells and Other Variables in Reinforced *Concrete* Columns, Boletín 368. Urbana, Ill. Engineering Experiment Station, University of Illinois, 1951.

4.3 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo I, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.

4.4 Comité ACI 318. Building Code Requirements for Structural Concrete (ACI 318-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.

Ejercicios

4.1 Calcular la resistencia a carga axial de una columna de estribos de 40 × 70 cm. Considérese que la resistencia del concreto, f'_c, es de 300 kg/cm^2, que el esfuerzo de fluencia del acero, f_y, es de 4200 kg/cm^2 y que el refuerzo longitudinal está constituido por diez barras del No. 8. Usar el Reglamento ACI 318-02.

4.2 Calcular la resistencia a carga axial de una columna circular de 50 cm de diámetro, con refuerzo helicoidal del No. 3 con 4 cm de paso y ocho barras del No. 8 como refuerzo longitudinal. El concreto tiene una resistencia de 200 kg/cm^2, y el acero un límite de fluencia de 2800 kg/cm^2. El recubrimiento libre de la hélice es de 3 cm. Usar las Normas Técnicas Complementarias del Reglamento del Distrito Federal.

4.3 Suponiendo que los demás datos son iguales, calcular el refuerzo helicoidal de la columna del problema anterior, para que cumpla con los requisitos del Reglamento ACI 318-02. Calcular la resistencia correspondiente.

4.4 Calcular la resistencia de un tensor de 30 × 30 cm con cuatro barras del No. 6 de 4200 kg/cm^2 de esfuerzo de fluencia.

CAPÍTULO 5

Flexión simple

5.1 Introducción. /5.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexión simple. /5.3 Resistencia de elementos sujetos a flexión simple. /5.4 Determinación de la relación balanceada. / 5.5 Flexión asimétrica. /5.6 Procedimiento general y comentarios sobre las hipótesis simplificadoras para cálculos de resistencias.

5.1 Introducción

Son frecuentes los elementos estructurales sujetos a flexión, tales como vigas o losas que trabajan en una sola dirección. Generalmente, la flexión se presenta acompañada de fuerza cortante. Sin embargo, la resistencia a flexión puede estimarse con suficiente precisión despreciando el efecto de la fuerza cortante. En este capítulo se describen el comportamiento de elementos sujetos a flexión y el efecto de las principales variables, y se presentan métodos para calcular la resistencia.

5.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexión simple

Se ha llevado a cabo gran número de ensayes en flexión utilizando vigas simplemente apoyadas, sometidas a dos cargas concentradas de modo simétrico, en las que existe una zona sujeta sólo a momento flexionante (figura 5.1).

Por simplicidad se describirá exclusivamente el comportamiento de un elemento de concreto con refuerzo de tensión. La figura 5.2 muestra la gráfica carga-deflexión de un elemento con un porcentaje de acero

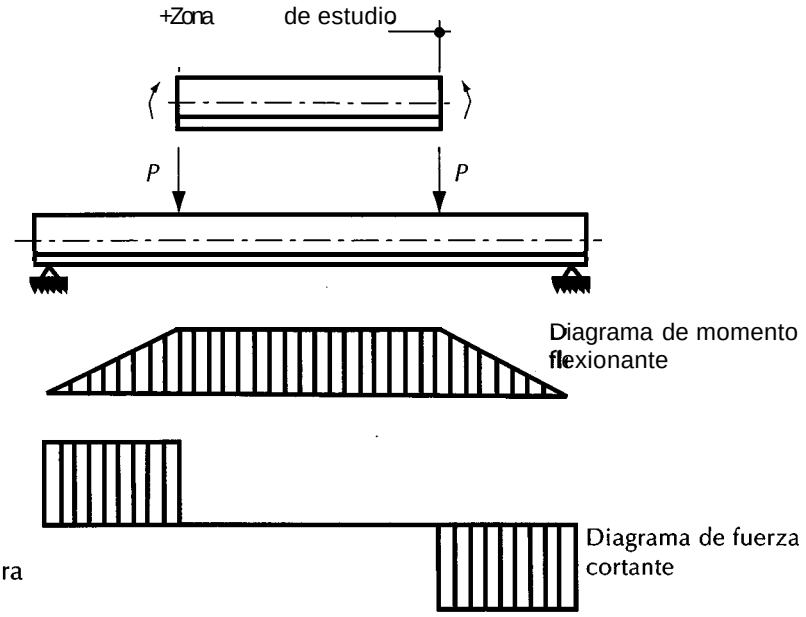


Figura 5.1 Espécimen típico para estudio de flexión simple.

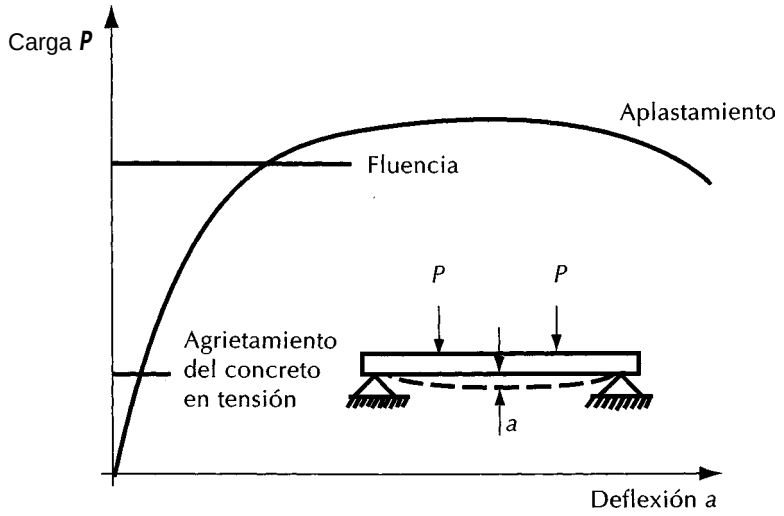
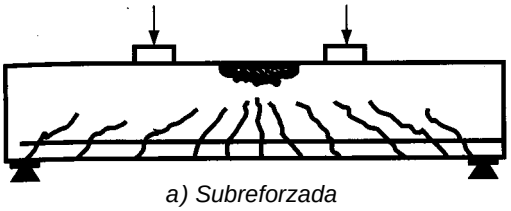


Figura 5.2 Gráfica carga-deflexión de un elemento, con un porcentaje usual de acero de tensión.

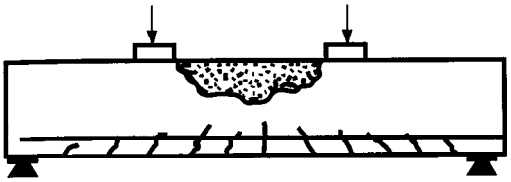
usual en la práctica. Al empezar a cargar, el comportamiento de la pieza es esencialmente elástico y toda la sección contribuye a resistir el momento exterior. Cuando la tensión en la fibra más esforzada de alguna sección excede la resistencia del concreto a la tensión, empiezan a aparecer grietas. A medida que se incrementa la carga, estas grietas aumentan en número, en longitud y en abertura. Se puede observar muy claramente la zona de la pieza sujeta a tensión, en la que se presentan las grietas, y la zona sujeta a compresión.

A partir de la aparición de las primeras grietas, el comportamiento del espécimen ya no es elástico y las deflexiones no son proporcionales a las cargas. En las regiones agrietadas, el acero toma prácticamente toda la tensión. En esta etapa, el esfuerzo en el acero aumenta hasta que alcanza su valor de fluencia. Desde el momento en que el acero empieza a fluir, la deflexión crece en forma considerable, sin que apenas aumente la carga. Esto es, la resistencia del elemento es sólo ligeramente mayor que la carga que produce la fluencia del acero. Los primeros síntomas de la fluencia del acero son un incremento notable en la abertura y longitud de las grietas y un quiebre marcado en la curva carga-deflexión. A medida que aumenta la longitud de las grietas, la zona de compresión se va reduciendo, hasta que el concreto en esta zona es incapaz de tomar la compresión y se aplasta. El primer indicio del aplastamiento es el desprendimiento de escamas en la zona de compresión. Cuando esto ocurre, la carga disminuye con mayor o menor rapidez, dependiendo de la rigidez del sistema de aplicación de la carga, hasta que se produce el colapso final.

Según la cantidad de acero longitudinal con que está reforzada la pieza, éste puede fluir o no antes de que se alcance la carga máxima. Cuando el acero fluye, el comportamiento del miembro es dúctil; es decir, se producen deflexiones considerables antes del colapso final, como se muestra en la figura 5.2. En este caso se dice que el elemento es subreforzado. Por otra parte, si la cantidad de acero longitudinal de tensión es grande, éste no fluye antes del aplastamiento y se dice entonces que el elemento es sobrerreforzado. Puede suceder que el elemento alcance su resistencia precisamente cuando el acero empieza a fluir. En este caso se dice que el elemento es balanceado.



a) Subreforzada



b) Sobrerreforzada

Figura 5.3 Agrietamiento en la falla de vigas sujetas a flexión.

Los términos sobrerreforzado y *subre*-forzado, aplicados al caso de elementos con acero sin un límite de fluencia bien marcado, no tienen más sentido que el de indicar el grado de ductilidad. En este caso la condición balanceada no está claramente definida.

En la figura 5.3 se presentan los esquemas de agrietamiento correspondientes a vigas con diferentes porcentajes de acero. En el caso de un elemento sobrerreforzado, la zona de aplastamiento del concreto es mayor que en el caso de otro subreforzado, y, a la falla, las grietas del primero son de longitud y abertura menores.

La figura 5.4 muestra la variación en el comportamiento de elementos que tienen distintos porcentajes de acero. Cada curva de trazo lleno representa la gráfica carga-deflexión de un elemento reforzado con una cantidad diferente de acero de tensión, desde una viga de concreto simple hasta otra con porcentaje muy alto de acero, del orden del 7 por ciento. Se puede observar de inmediato el efecto de la cantidad y distribución del acero longitudinal.

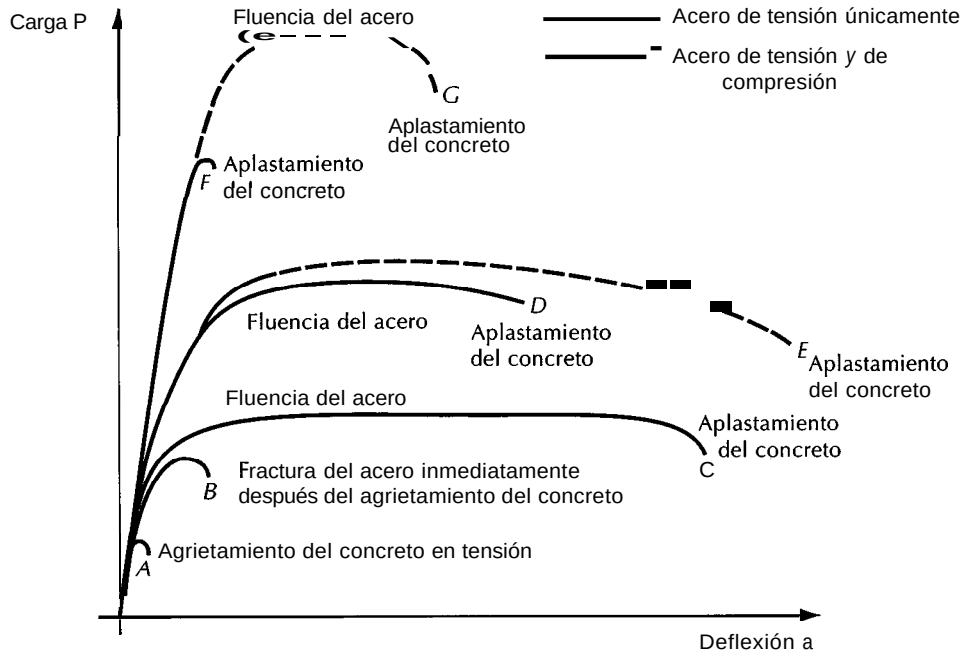


Figura 5.4 Gráficas carga-deflexión de elementos con porcentajes variables de acero (sección, f'_c y f_y constantes) sujetos a flexión simple.

Un elemento de concreto simple (curva A) alcanza su resistencia y falla al agrietarse el concreto en la fibra más tensada, con una deflexión muy pequeña. La falla es repentina, de tipo frágil.

Adicionar refuerzo longitudinal en cantidades muy pequeñas, hace que la capacidad del miembro aumente al mismo tiempo que su deflexión en la falla (curva B). En las primeras etapas de carga, el comportamiento es muy parecido al de un elemento de concreto simple. Una vez agrietado el concreto, la tensión en el acero se incrementa rápidamente al aumentar la carga, hasta que el refuerzo se fractura. Este tipo de falla ocurre en elementos con porcentajes muy pequeños de acero, del orden de 0.1 por ciento o menos. La falla es frágil y se produce a una deflexión pequeña.

Las curvas C y D son típicas de elementos con porcentajes usuales de acero de tensión (de 0.5 a 2 por ciento). Se puede observar que la resistencia y la deflexión son sustancialmente mayores que en las curvas A y B.

Si se aumenta apreciablemente el porcentaje de acero, el elemento se convierte en sobrerreforzado, como muestra la curva F. La resistencia aumenta, pero la deflexión a la falla disminuye.

Si además de acero de tensión, existe acero longitudinal en la zona de campresión, su efecto en las gráficas carga-deflexión del elemento se muestra en la figura 5.4 con líneas de trazo interrumpido para dos casos. El efecto principal del acero de compresión es aumentar notablemente la ductilidad; la adición de acero de compresión en cantidad suficiente a un elemento sobrerreforzado puede hacer que éste se convierta en subreforzado, aumentando su ductilidad y resistencia, al lograr que el acero de tensión desarrolle su esfuerzo de fluencia. Este efecto se muestra cualitativamente en las curvas F y G de la figura 5.4.

La adición de refuerzo de compresión a un elemento subreforzado aumenta su ductilidad, pero su resistencia permanece prácticamente constante, ya que está regida por la tensión en el acero (curvas D y E).

Es importante recalcar que la ductilidad que se puede lograr con la adición de acero de compresión, no se obtiene si éste no está adecuadamente restringido por medio de refuerzo transversal, ya que de otro modo, para compresiones muy altas y cuando hay poco recubrimiento, el acero de compresión puede pandearse, lo que causaría un colapso súbita.

En la figura 5.4 se ha presentado de un modo cualitativo la variación de las características carga-deflexión de elementos sujetos a deflexión pura, en función del porcentaje de acero, suponiendo que los índices de resistencia de los materiales, f'_c y f_y, permanecen constantes. Las caracterfsticas carga-deflexión son también función de las propiedades mecánicas de los materiales, expresadas por sus índices de resistencia. Un incremento en el valor del esfuerzo de fluencia, o en el valor del porcentaje de acero de tensión, tiende a aumentar la capacidad en tensión del elemento. Por otra parte, un incremento en el valor de f'_c aumenta la capacidad en compresión. El comportamiento de un elemento depende de la relación entre su capacidad en tensión y su capacidad en compresión. Esta relación puede medirse por medio del parámetro $\omega = \rho f_y/f'_c$, según la notación ACI 318-04, el cual suele llamarse *índice de refuerzo.* (Según las NTC-04, el parámetro equivalente es $q = p\, f_y/f''_c$.)

Se pueden definir, entonces, elementos subreforzados y sobrerreforzados para valores bajos y altos de ω, respectivamente, tal y como se hizo para valores bajos y altos del porcentaje de acero.

Para elementos con refuerzo longitudinal de tensión y de compresión, el índice de refuerzo es $\omega = (\rho - \rho') f_y/f'_c$, donde ρ' representa el porcentaje de acero longitudinal en compresión.

Tabla 5.1 Características de elementos con distintos índices de refuerzo.

Curva *típica* correspondiente de la figura 5.4	Porcentaje de acero		*Índice* de refuerzo	Tipo de elemento	Modo de falla	*Grado* de ductilidad
	de tensión ρ	*de compresión* ρ'	ω			
A	Nulo	Nulo	Nulo	Concreto simple	Concreto en tensión	Frágil
B	Muy pequeño	Nulo	Muy pequeño	Muy subreforzado	Fractura del acero, frágil	Poco dúctil
C	Normal bajo	Nulo	Normal bajo	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Muy dúctil
D	Normal alto	Nulo	Normal alto	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Dúctil
E	Normal alto	Del orden del de tensión	Normal bajo	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Muy dúctil
F	Muy alto	Nulo	Muy alto	Sobrerreforzado	Aplastamiento sin fluencia del acero	Frágil
G	Muy alto	Del orden del de tensión	Normal bajo	Subreforzado	Aplastamiento después de la fluencia	Dúctil

Como resumen de lo expuesto anteriormente, se presenta la tabla 5.1, que complementa la figura 5.4.

Otro aspecto importante del comportamiento de elementos sujetos a flexión simple, es la distribución de deformaciones en el peralte. Las mediciones hechas en el laboratorio indican que en una sección normal al eje de la pieza, la distribución de deformaciones longitudinales es aproximadamente lineal para casi todos los niveles de carga, Normalmente se miden deformaciones en el concreto, en la zona de compresión, y en el acero. La presencia de grietas dificulta la medición de deformaciones en el concreto en zona's de tensión. A pesar de esto, cuarido se han usado procedimientos minuciosos, se ha comprobado que las deformaciones del concreto en tensión y del acero colocado al mismo nivel coinciden sensiblemente si se usan barras con corrugación adecuada para garantizar la adherencia entre cohcreto y acero.

5.3 Resistencia de elementos sujetos a flexión simple

5.3.1 Hipótesis generales

La resistencia de elementos sujetos a flexión simple puede determinarse a partir de una serie de hipótesis simplificadoras ligadas al comportamiento básico y al mecanismo acción-respuesta descritos anteriormente. Las hipótesis que se hacen comúnmente son las siguientes:

a) *La distribución de deformaciones unitarias en la sección transversal de un elemento es plana.* Esta hipótesis ha sido verificada mediante mediciones y es correcta, excepto para longitudes de medición muy pequeñas y en la rama descendente de la gráfica carga-deflexión (sección 5.2).

b) *Se conoce la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del elemento.* En la sección 5.5 se estudia la influencia de esta distribución de esfuerzos en la resistencia. Los reglamentos de construcción presentan distribuciones simplistas, con las cuales se obtienen valores de la resistencia suficientemente aproximados. En la sección 5.3.2 se exponen las hipótesis de algunos reglamentos.

c) *No existen corrimientos relativos de consideración entre el acero y el concreto que lo rodea.* Para concreto reforzado con barras corrugadas, la hipótesis es bastante realista. Es decir, se puede suponer que la deformación unitaria es la misma en el acero y en el concreto que se encuentra al mismo nivel (sección 5.2).

d) *El concreto no resiste esfuerzos de tensión longitudinales.* Despreciar la magnitud de estos esfuerzos no influye apreciablemente en las resistencias calculadas.

e) *El elemento alcanza su resistencia a una cierta deformación unitaria máxima útil del concreto,* ε_{cu}. En la sección 5.5 se justifica que, para un intervalo relativamente amplio del valor de la deformación unitaria en la fibra extrema en compresión, el momento flexionante permanece constante prácticamente. Esto indica la validez de esta hipótesis. Los reglamentos recomiendan valores de ε_{cu} que varían de 0.003 a 0.004.

5.3.2 *Hipótesis de algunos reglamentos de construcción*

En la figura 5.5 se muestran los estados de deformaciones y esfuerzos en la sección transversal de una viga sujeta a flexión. Se puede apreciar que la forma del diagrama de esfuerzos de compresión es similar a la curva esfuerzo-deformación de un espécimen ensayado a compresión. El área del diagrama de esfuerzos de compresión y la posición de la resultante de compresión, pueden determinarse a partir de tres parámetros adimensionales, β_1, β_2 y β_3. El parámetro β_3 relaciona el esfuerzo máximo en flexión con la resistencia de los cilindros de control. El parámetro β_1 indica la relación entre el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo en la zona de compresión, y el parámetro β_2 indica la posición de la resultante de compresión. El

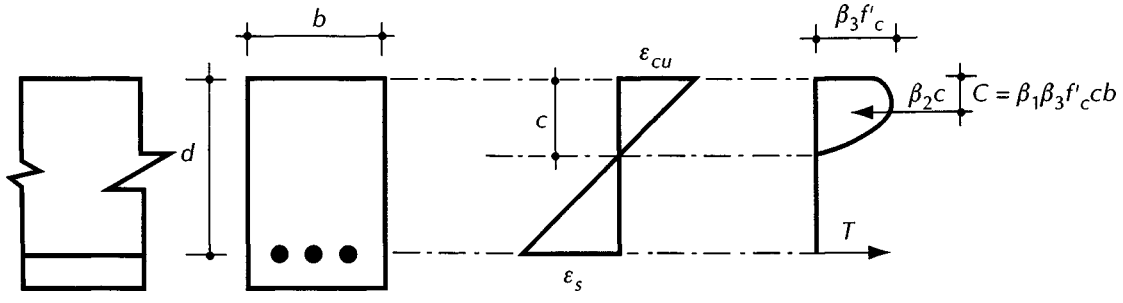


Figura 5.5 Distribuciones de deformaciones y esfuerzos en una sección sujeta a flexión.

área del diagrama de compresiones y la posición de la resultante pueden definirse también estableciendo expresiones matemáticas que permiten idealizar el diagrama de esfuerzos de compresión.

Se han propuesto numerosos valores para los parámetros β_1, β_2 y β_3, así como diversas configuraciones del diagrama de esfuerzos de compresión. En la referencia 5.1 hay un resumen de distintas proposiciones y en las referencias 5.5 y 5.6 se presentan algunos tratamientos más rigurosos del problema de flexión. En fecha reciente se han empezado a utilizar los llamados concretos de muy alta resistencia, con valores de f'_c mayores a 400 kg/cm^2. Investigaciones llevadas a cabo para determinar las características estructurales de estos concretos indican que los parámetros mencionados, especialmente β_3, quizá deban revisarse cuando se apliquen a estos concretos [5.8, 5.9].

Con el objeto de desarrollar métodos sencillos de cálculo, los reglamentos de construcción recurren a hipótesis simplificadoras en las cuales se fija un valor de la deformación unitaria máxima útil del concreto, ε_{cu}, y donde se definen diagramas idealizados de los esfuerzos de compresión, de tal manera que el área del diagrama de esfuerzos y la posición de la resultante de compresión sean semejantes a las que corresponderían a una distribución real.

HIPÓTESIS ACI

El Reglamento del Instituto Americano del Concreto (ACI 318-02) utiliza las hipótesis simplificadoras que se resumen en la figura 5.6. En lugar de la distribución real de esfuerzos, se propone una distribución rectangular, con una profundidad igual a β_1 veces la del eje neutro. Se acepta que el elemento alcanza su resistencia a una deformación unitaria máxima útil del concreto en compresión igual a 0.003, con una distribución lineal de deformaciones unitarias.

El parámetro β_1 se hace depender de la resistencia nominal f'_c, de acuerdo con la ecuación mostrada en la figura 5.6. El valor de β_1 es constante e igual a 0.85 para $f'_c \leq 280$ kg/cm^2. Esta variación tiene por objeto tomar en cuenta el cambio en la forma de la curva esfuerzo-deformación del concreto al incrementar su resistencia (figura 2.5), ya que el área del rectángulo equivalente debe ser aproximadamente igual al área bajo la curva esfuerzo-deformación. La hipótesis del bloque equivalente de esfuerzos es aplicable a secciones de cualquier forma [5.2, 5.3].

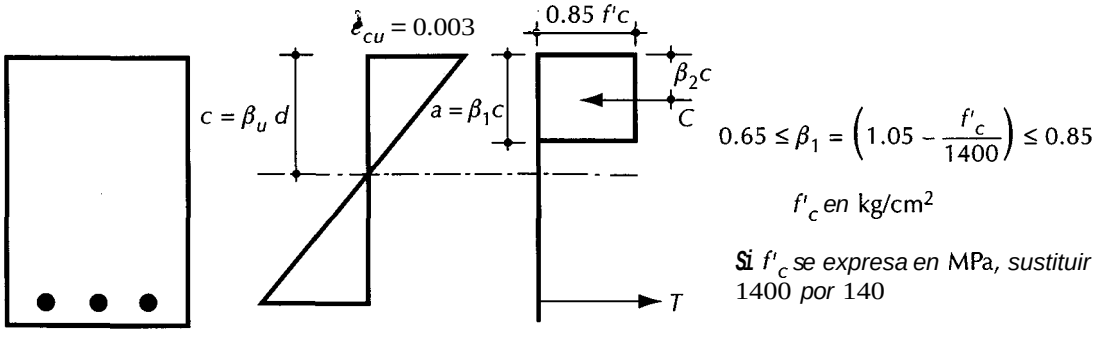


Figura *5.6* Hipótesis ACI 318-02 sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión.

HIPÓTESIS DE LAS NORMAS TÉCNICAS COMPLEMENTARIAS (NTC-04) DEL REGLAMENTO DEL DISTRITO FEDERAL (MÉXICO)

Las Normas Técnicas Complementarias habían especificado un bloque equivalente de esfuerzos diferente al del Reglamento ACI. En vez de un esfuerzo uniforme y una profundidad variable del eje neutro, como en la figura 5.6, se especificaba un esfuerzo variable y una profundidad constante del eje neutro. La utilización de este bloque equivalente tenía ventajas para la elaboración de ayudas de diseño, como los diagramas de interacción que se comentan en el capítulo 6. Sin embargo, no proporcionaba buenos resultados para concretos de resistencias altas, por lo que se cambió, a partir de 2004, por un bloque muy parecido al del Reglamento ACI. La única diferencia radica en el uso del parámetro f^*_c, que se ha definido en la sección 4.2.2 y que sustituye en las ecuaciones correspondientes a f'_c. El bloque resultante, usando la notación de las NTC, se muestra en la figura 5.7.

HIPÓTESIS DE OTROS REGLAMENTOS

Algunas investigaciones indican que los bloques equivalentes mencionados requieren revisarse cuando se usan concretos de muy alta resistencia, y para tomar esto en cuenta ciertos reglamentos especifican cambiar tanto el esfuerzo uniforme como la profundidad del bloque [5.9]. Por ejemplo, el reglamento de Nueva Zelanda especifica una profupdidad del bloque de y veces la profundidad del eje neutro y un esfuerzo uniforme de a f''_c, donde y y a tienen los valores;

$$\gamma = 0.85 - 0.008(f'_c - 300)$$

y

$$\alpha = 0.85 - 0.004(f'_c - 550)$$

El reglamento canadiense contiene una disposición semejante con los siguientes valores de y y a:

$$y = (0.97 - 0.00025\ f'_c) \geq 0.67$$
$$a = (0.85 - 0.00015\ f'_c) \geq 0.67$$

En las ecuaciones anteriores, f'_c está en kg/cm^2. Puede verse que para cqncretps de resistencias usuales, los valores obtenidos con los diferentes reglamentos son muy parecidos.

5.3.3 Procedimientos para determinar la *resistencia a flexión*

Los diversos procedimientos consisten en establecer un estado de deformación tal, que la

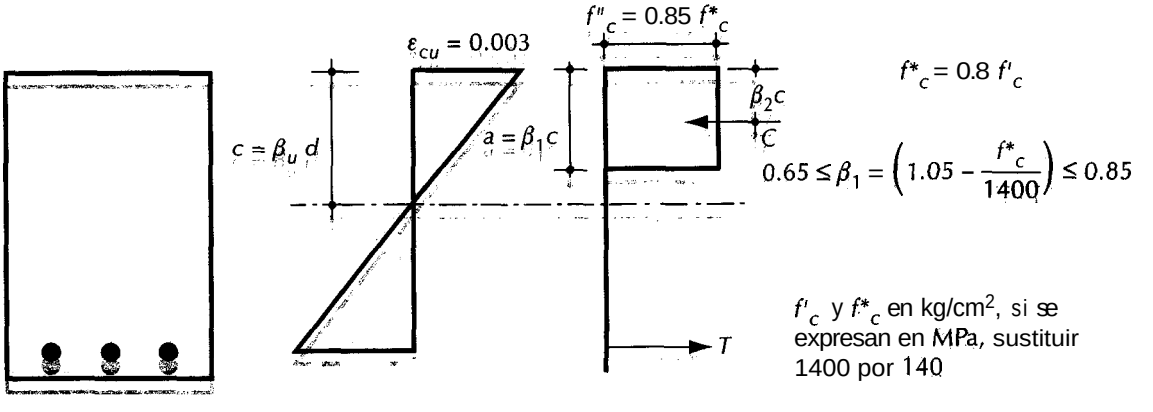


Figura 5.7 Hipótesis de las NTC-04 sobre la distribución de deformaciones y esfuerzos en la zona de compresión.

sección se encuentre en equilibrio, o sea, que la suma de las fuerzas de compresión que actúan en una sección transversal, sea igual a la suma de las fuerzas de tensión. Una vez establecido dicho estado de equilibrio, se calcula el momento de todas las fuerzas internas con respecto a un eje cualquiera. Este momento es la resistencia a flexión de la sección. El estado de equilibrio interno puede determinarse por medio de tanteos o algebraicamente. En los siguientes incisos se ilustra la determinación de la resistencia de diversos tipos de secciones.

En esta sección se presentan ejemplos en los que se usan los Reglamentos ACI y del Distrito Federal. El procedimiento que usa las hipótesis generales se ilustra más adelante en la sección 5.5.

SECCIONES RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS – REGLAMENTO ACI 318-92

En el ejemplo 5.1 se calcula la resistencia de una sección simplemente armada. Se ilustran tres procedimientos posibles.

El primero es un procedimiento de tanteos. Como primer paso en la solución, se adoptó un estado de deformaciones que queda definido por el valor de ε_{cu} y un valor de la profundidad del eje neutro, c. Según el reglamento ACI 318-02, el valor de ε_{cu} es 0.003 (figura 5.6). El valor de c es tentativo y se eligió arbitrariamente. Un valor razonable es de aproximadamente un tercio del peralte, por lo que en el ejemplo se hizo el primer tanteo con c = 20 cm. Ya establecido el estado de deformaciones, se determinó el estado de esfuerzos usando la hipótesis de la figura 5.6. El valor de β_1 resultó en este caso de 0.85. A partir del estado de esfuerzos, se calculó la fuerza de compresión C, que fue de 86,700 kg. A continuación se calculó la deformación en el acero, usando triángulos semejantes en el diagrama de deformaciones unitarias. En el ejemplo se obtuvo un valor de 0.006, que es mayor que la deformación de fluencia ε_y.

Esto significa que el acero está fluyendo. Según las hipótesis ACI 318-02, puede considerarse que el acero tiene una gráfica esfuerzo-deformación elasto-plástica, por lo cual, el esfuerzo es igual al esfuerzo de fluencia f_y para cualquier valor de ε_s mayor que ε_y. Esta hipótesis equivale a despreciar la zona de endurecimiento por deformación del acero; por lo tanto, el esfuerzo del acero en el ejemplo es igual a f_y, y la fuerza de tensión se obtiene multiplicando el área de acero, A_s por el valor de f_y. Resultó, de esta manera, un valor de T de 63,000 kg. Cuando la deformación ε_s es menor que ε_y, el esfuerzo correspondiente puede encontrarse por medio de la ecuación $f_s = E_s \varepsilon_s$ o bien, directamente en la gráfica esfuerzo-deformación del acero.

Si el valor supuesto de la profundidad del eje neutro, c, hubiese sido correcto, las fuerzas C y T habrían resultado iguales. En el ejemplo no resultaron así, por lo que fue necesario ajustar el valor. Ya que la fuerza de compresión resultó mayor que la de tensión, el valor de c deberá ser menor que el supuesto inicialmente. Esto implica que ε_s seguirá siendo mayor que ε_y y que el acero fluye también en este caso.

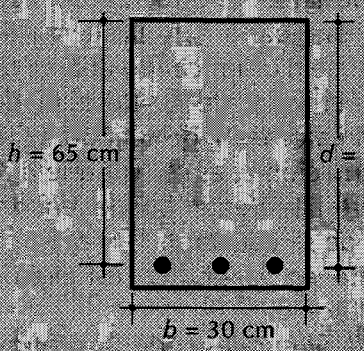
Por lo tanto, puesto que $C = T$, el valor correcto de c puede calcularse a partir de la ecuación:

$$c = \frac{C}{\beta_1 \times 0.85 f'_c \times b}$$

Una vez encontrado el valor de c con el cual la sección estaba en equilibrio, se calculó el momento resistente nominal, M_n, multiplicando la fuerza de tensión, o la de compresión, por el brazo de par interno, z. (Se entiende por resistencias nominales las resistencias sin afectar por los factores de reducción especificadas tanto en el Reglamento ACI 318-02 como en las NTC-04.) Se obtuvo de esta manera un momento resistente de 33.9 ton-m. Según las recomendaciones

EJEMPLO 5.1 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección rectangular, usando las hipótesis ACI 318-02.***

DATOS



$f'_c = 200$ kg/cm^2

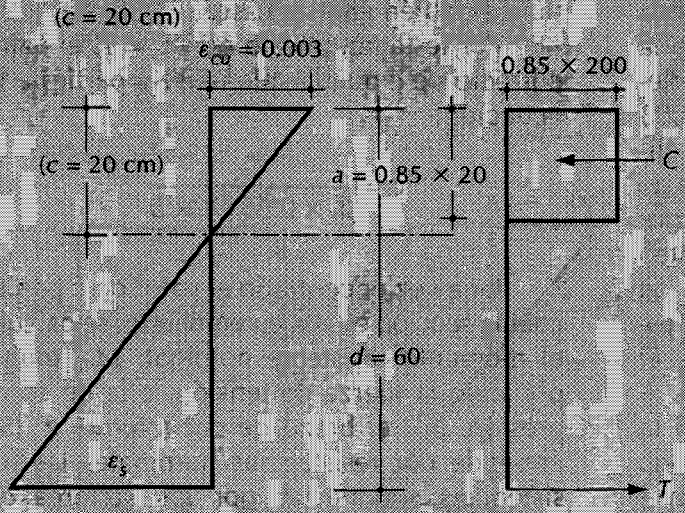
$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 3$ barras No. 8

$= 15$ cm^2

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR TANTEOS

1er *tanteo*



$C = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 20 \times 30 = 86{,}700$ kg

EJEMPLO 5.1 ***(continuación)***

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 40}{20} = 0.006$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

$\varepsilon_s > \varepsilon_y$

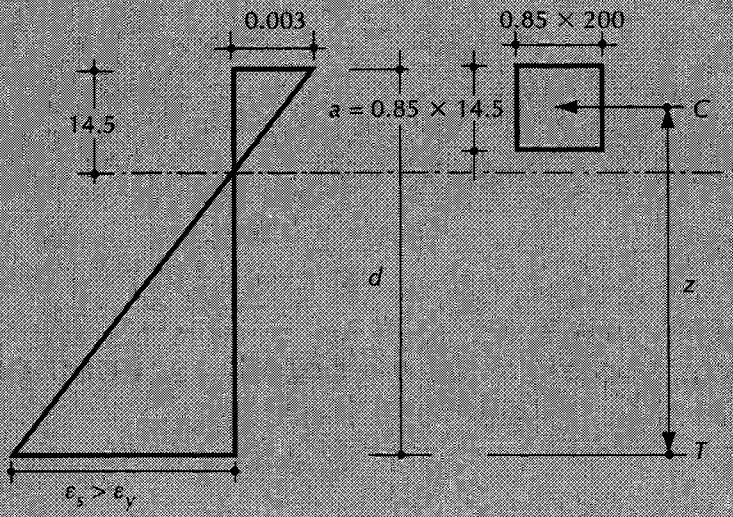
$f_s = f_y = 4200$ kg/cm^2

$T = A_s f_s = 15 \times 4200 = 63{,}000$ kg

$C > T \therefore$ debe reducirse el valor de c.

2° tanteo

$$\left(c = \frac{63{,}000}{0.85 \times 0.85 \times 200 \times 30} = 14.5\right)$$



$C = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 14.5 \times 30 = 62{,}900$ kg

$\varepsilon_s > \varepsilon_y \therefore f_s = f_y$

$T = 63{,}000$ kg

$C \simeq T$

EJEMPLO 5.1 ***(continuación)***

$$M_n = T \cdot z$$

$$z = d - \frac{a}{2} = 60 - \frac{0.85 \times 14.5}{2} = 53.8 \text{ cm}$$

$$M_n = 63 \times 0.538 = 33.9 \text{ ton-m}$$

$$\phi M_n = 0.90 \times 33.9 = 30.5 \text{ ton-m}$$

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA NOMINAL MEDIANTE LA ECUACIÓN DE LA FIGURA 5.8.

$$M_n = bd^2 f'_c \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c}$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{15}{30 \times 60} = 0.0083$$

$$\omega = \frac{0.00833 \times 4200}{200} = 0.175$$

$$M_n = 30 \times 60^2 \times 200 \times 0.175 (1 - 0.59 \times 0.175)$$

$$M_n = 33.9 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$M_n = 33.9 \text{ ton-m}$$

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA NOMINAL MEDIANTE LA GRÁFICA DEL APÉNDICE A

Para $\omega = 0.175$ $\quad \dfrac{M_n}{bd^2 f'_c} = 0.157$

$$\therefore M_n = 0.157 \times 30 \times 60^2 \times 200 = 33.9 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

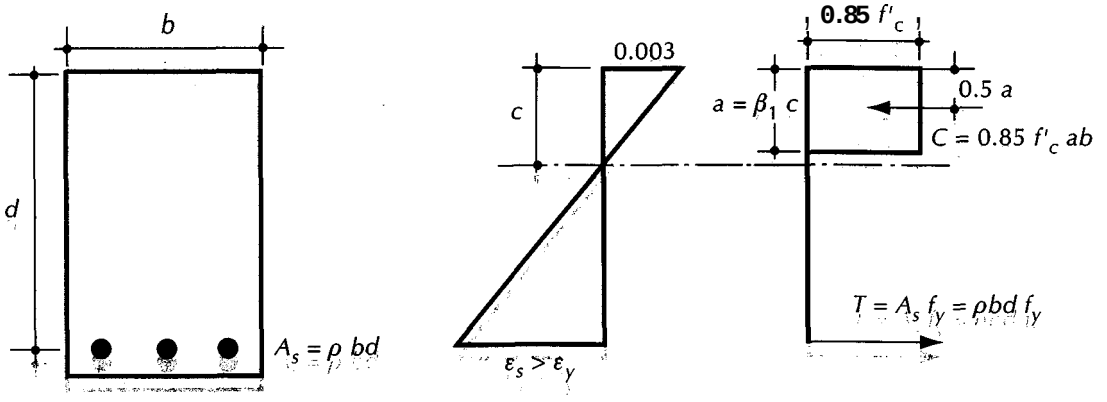
$$M_n = 33.9 \text{ ton-m}$$

ACI, los valores de M_n deben reducirse multiplicándolos por el factor ϕ para obtener el momento resistente de diseño, ϕM_n. Para el caso de flexión, su valor es de 0.90. El valor del momento resistente de diseño fue, en el ejemplo, de 30.5 ton-m.

El segundo procedimiento es aplicable únicamente a secciones rectangulares subreforzadas, con refuerzo de tensión únicamente y consiste en el empleo de la ecuación deducida en la figura 5.8, que tiene la ventaja de proporcionar de modo directo el memento nominal resistente.

En el tercer procedimiento, el momehto resistente de la sección propuesta se obtuvo usando la gráfica del Apéndice A. Esta gráfica es la representación de la ecuación de la figura 5.8; se incluye también una representación de la fórmula equivalente que se deriva de las hipótesis de las NTC-04.

El procedimiento de tanteos tiene la ventaja de poder aplicarse fácilmente a secciones no rectangulares o con refuerzo de tensión y compresión. Aunque es posible en estos casos obtener expresiones analíticas siguiendo un procedimiento semejante al



Por equilibrio:

$$C = T$$

$$0.85\, f'_c\, ab = \rho\, bd\, f_y$$

$$a = \frac{\rho\, df_y}{0.85\, f'_c} \qquad \text{(i)}$$

Tomando momentos con respecto al acero de tensión

$$M_n = C\left(d - \frac{a}{2}\right) = 0.85\, f'_c\, abd\left(1 - \frac{a}{2d}\right)$$

Sustituyendo a de la ecuación (i) y tomando en cuenta que $\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c}$

$$M_n = bd^2\, f'_c\, \omega\,(1 - 0.59\, \omega)$$

Figura 5.8 Momento resistente nominal de elementos rectangulares con refuerzo de tensión únicamente, de acuerdo con el Reglamento ACI 318-02.

mostrado en la figura 5.8, se llega a ecuaciones muy complicadas o a sistemas de ecuaciones simultáneas cuya solución resulta más laboriosa que el procedimiento de tanteos.

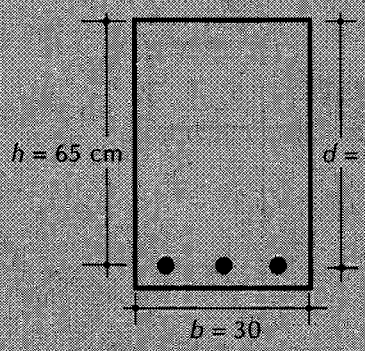
Los procedimientos de obtención de resistencia por medio de la ecuación de la figura 5.8 y por medio de la gráfica del Apéndice A son muy sencillos y rápidos. Debe siempre verificarse si la sección es subreforzada, ya que estos procedimientos, como se mencionó anteriormente, son sólo aplicables e estas secciones. En la sección 5.4 se presentan algunos métodos para determinar si la sección es subreforzada o sobrerreforzada.

SECCIONES RECTANGULARES SIMPLEMENTE ARMADAS – NTC-04

En el ejemplo 5.2 se ilustra el cálculo de la resistencia de la misma sección rectangular

EJEMPLO 5.2 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección rectangular, usando las hipótesis de las NTC-04.***

DATOS



$f'_c = 200$ kg/cm^2

$f^*_c = 0.8 \times 200 = 160$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

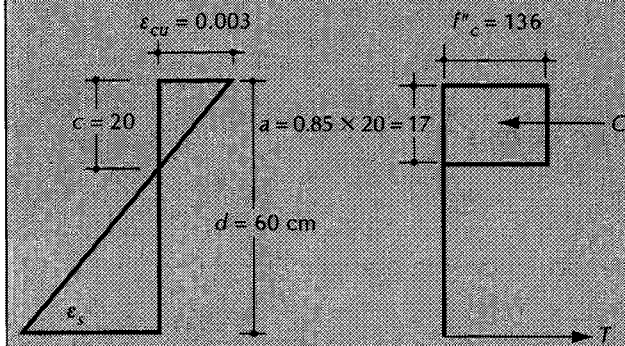
$A_s = 3$ barras No. 8 $= 15$ cm^2

$f''_c = 0.85\ f^*_c = 136$ kg/cm^2

$$\beta_1 = 1.05 - \frac{160}{1400} = 0.93 > 0.85$$

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR TANTEOS

1er *tanteo* ($c = 20$ cm)



$C = 136 \times 16 \times 30 = 65{,}280$ kg

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 40}{20} = 0.006$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

$\varepsilon_s > \varepsilon_y$

$f_s = f_y = 4200$ kg/cm^2

$T = A_s f_s = 15 \times 4200 = 63{,}000$ kg

$C = 136 \times 17 \times 30 = 69{,}360$ kg

$C > T$ ∴ debe reducirse el valor de c.

EJEMPLO 5.2 ***(continuación)***

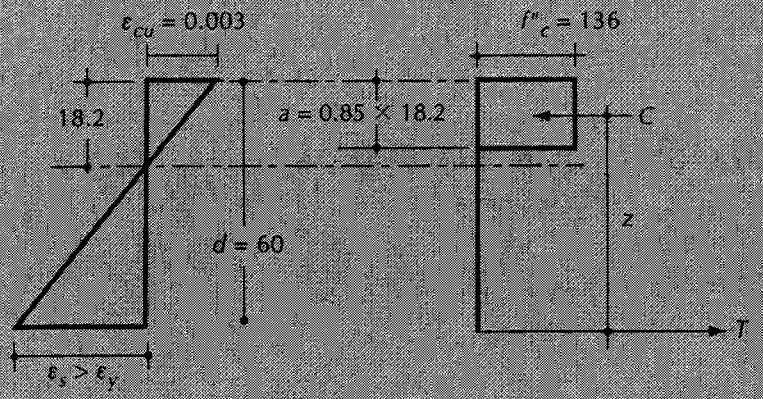
2o. *tanteo* $\left(c = \dfrac{63{,}000}{0.85 \times 136 \times 30} = 18.2 \text{ cm}\right)$

$C = 136 \times 0.85 \times 18.2 \times 30 = 63{,}117$ kg

$\varepsilon_s > \varepsilon_y \quad \therefore \quad f_s = f_y$

$T = 63{,}000$ kg

$C \simeq T$



$M_n = T \cdot z$

$z = d - \dfrac{a}{2} = 60 - \dfrac{0.85 \times 18.2}{2} = 52.3$ cm

$M_n = 63 \times 0.523 = 32.9$ ton-m

$M_R = F_R M_n = 0.90 \times 32.9 = 29.6$ ton-m

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA MEDIANTE LA ECUACIÓN DEL APÉNDICE A:

$M_n = bd^2 f''_c q (1 - 0.5 q)$

$q = \dfrac{p f_y}{f''_c}$

$p = \dfrac{A_s}{bd} = \dfrac{15}{30 \times 60} = 0.00833$

EJEMPLO 5.2 *(continuación)*

$$q = \frac{0.00833 \times 4200}{136} = 0.257$$

$$M_n = 30 \times 60^2 \times 136 \times 0.257 (1 - 0.5 \times 0.257)$$

$$M_n = 32.9 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$M_n = 32.9 \text{ ton-m}$$

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA MEDIANTE LA GRÁFICA DEL APÉNDICE A

$$\text{Para } q = 0.257 \rightarrow \frac{M_n}{bd^2 f''_c} = 0.221$$

$$M_n = 0.221 \times 30 \times 60^2 \times 136 = 32.5 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$M_n = 32.5 \text{ ton-m}$$

según las NTC-04, también por tres procedimientos. El esfuerzo uniforme, f''_c, y el parámetro β_1 se calcularon de acuerdo con las expresiones de la figura 5.7. Como β_1 resultó mayor que 0.85, se usó este valor.

El procedimiento de tanteos es semejante al empleado en el ejemplo 5.1. El ajuste del valor de c para el segundo tanteo se hizo aplicando la ecuación:

$$c = \frac{T}{0.85 \times f''_c \times b}$$

Al calcular resistencias de acuerdo con las NTC-04 debe hacerse una reducción de 2 cm en ciertas dimensiones de los elementos bstructurales, a no ser que se tomen precauciones para garantizar que las dimensiones de cálculo se conserven durante el proceso constructivo.

Esta reducción deberá hacerse cuandb la dimensión en cuestión sea menor de *20* cm. En vigas y losas, las dimensiones sujeta4 a reducción son el ancho y el peralte efectivo del refuerzo del lecho superior. En los ejemplos de este texto, para mayor sencillez, se supondrá que no es necesario hacer estas reducciones.

Según las NTC-04, el valor del factor de reducción, F_R, que debe utilizarse para calcular la resistencia de diseño de elementos sujetos a flexión es 0.9.

En el segundo procedimiento se aplicó una ecuación equivalente a la deducida en la figura 5.8, utilizando las hipótesis de la figura *5.7.*

Para el tercer procedimiento se utilizó la gráfica del Apéndice A, que permite calcular los momentos resistentes nominales de vigas rectangulares con base en las hipótesis de las NTC-04. La pequeña discrepancia con

respecto al valor calculado según el primer procedimiento, se debe a la precisión con que se puede leer la gráfica.

El momento resistente $M_R = M = F_R M_n$ puede obtenerse directamente a partir de la cuantía de acero p con la ayuda de las tablas del Apéndice B. (Las NTC-O4 distinguen entre M_u, el momento actuante de diseño, y M_R, el momento resistente de diseño. Idealmente los dos términos deben ser iguales, por lo que en este texto se utilizarán indistintamente.)

En este ejemplo queda claro que la única diferencia entre el Reglamento ACI y las NTC es el uso de la resistencia reducida f^*_c en estas últimas. Todas las ecuaciones y procedimientos del Reglamento ACI para flexión se puedbh usar en las NTC sustituyendo f'_c por f^*_c. No hay que olvidar, sin embargo, que los factores de carga son diferentes en ambos reglamentos. También hay que notar una diferencia en las definiciones de ω en el Reglamento ACI y q en las NTC. La primera está definida en términos de f'_c, mientras que la segunda lo está eh términos de f''_c, como puede verse en el recuadro de la gráfica del Apéndice A.

SECCIONES RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS – REGLAMENTO ACI 318-02

En este caso, el procedimiento más sencillo es el de tanteos, el cual se ilustra en el ejemplo 5.3, Los pasos a seguir son, en forma esencial, los mismos que en el ejemplo 5.1, con la diferencia de que la fuerza total de compresión es la suma de la fuerza de compresión en el concreto, C_1, y de la fuerza de compresión en el acero, C_2. Para determinar C_2 es necesario calcular la deformación al nivel del acero de compresión, ε'_s, y obtener, a partir de dicha deformación, el esfuerzo en el acero, f'_s. Este esfuerzo puede ser menor ó igual al de fluencia.

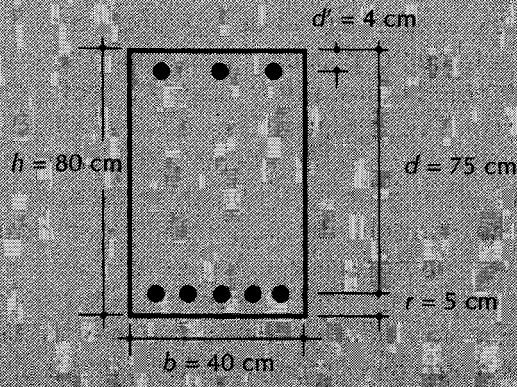
En el primer tanteo, la fuerza total de compresión resultó mayor que la de tensión. Por esta razón, en el segundo tanteo se disminuyó la profundidad del eje neutro, con lo cual las dos fuerzas quedaron con valores lo suficientemente aproximados para fines prácticos. En secciones doblemente armadas, la fuerza total de compresión no es directamente proporcional a la profundidad del eje neutro, por lo que esta profundidad, para la configuración de deformaciones unitarias correspondiente al equilibrio de la sección, no puede obtenerse estableciendo una relación de proporcionalidad después del primer tanteo, como en el caso de secciones simplemente armadas. Con la configuración final de deformaciones unitarias, el acero de compresiór no fluye, ya que ε'_s es menor que ε_y, mientras que el de tensión sí fluye. En algunas secciones en las que el recubrimiento del acero de compresión es grande, puede suceder que la deformación ε'_s resulte de tensión. En estos casos, el acero de compresión ya no actúa como tal sino como refuerzo de tensión, y su contribución a la resistencia suele ser muy pequeña. Una vez obtenida la cónfiguración de deformaciones para la cual la sección estaba en equilibrio, se calculó el momento flexionante, tdmando momentos de primer orden con respecto al eje geométrico de la sección. En realidad, para la flexión pura se pueden tomar momentos de primer orden con respecto a cualquier eje y se obtiene el mismo momento flexionante.

El momento resistente de diseño se obtuvo multiplicando el momento resistente, M_n, por el factor de reducción, ϕ, que para este caso vale también 0.9.

También pueden derivarse ecuaciones para calcular el momento resistente nominal de secciones rectangulares doblemente armadas, equivalentes a la obtenida en la figura 5.8 para secciones con refuerzo de tensión únicamente. Esto se ha hecho en la figura 5.9 usando las hipótesis del ACI. Resulta necesario distinguir dos casos, según fluya o no fluya el acero de compresión. En

EJEMPLO 5.3 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección doblemente armada usando el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



$f'_c = 250$ kg/cm^2

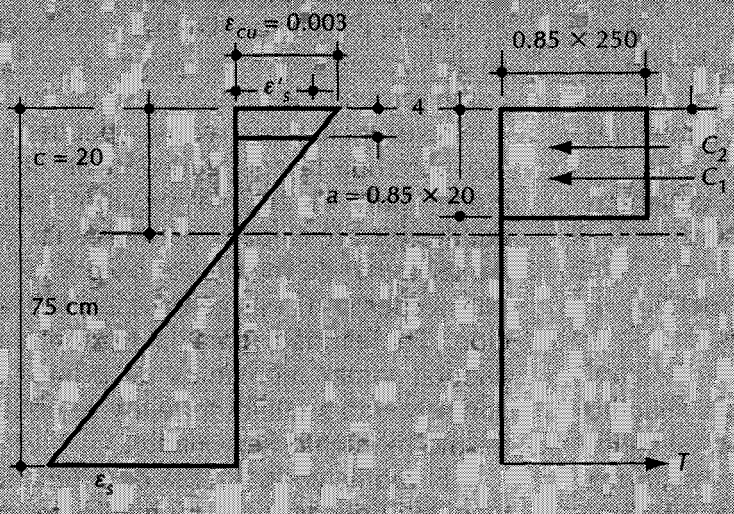
$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 5$ barras No. 8 $= 25$ cm^2

$A'_s = 3$ barras No. 8 $= 15$ cm^2

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE TANTEOS

1er *tanteo* ($c = 20$ cm)



$C_1 = 0.85 \times 250 \times 0.85 \times 20 \times 40 = 144{,}500$ kg

Por triángulos semejantes:

$$\frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{cu}} = \frac{c - d'}{c}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003 \times 16}{20} = 0.0024$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

EJEMPLO 5.3 ***(continuación)***

$\varepsilon'_s > \varepsilon_y$

$\therefore f'_s = 4200 \text{ kg/cm}^2$

$C_2 = A'_s f'_s = 15 \times 4200 = 63{,}000 \text{ kg}$

$C = C_1 + C_2 = 144{,}500 + 63{,}000 = 207{,}500 \text{ kg}$

Por triángulos semejantes:

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{cu}} = \frac{d - c}{c}$$

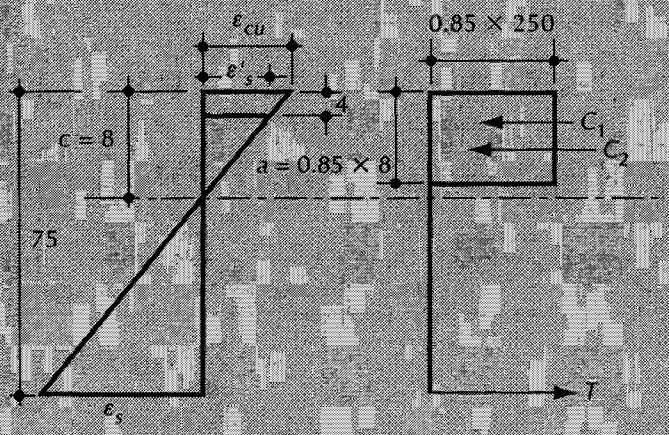
$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 55}{20} = 0.00825 > \varepsilon_y$$

$f_s = f_y$

$T = A_s f_y = 25 \times 4200 = 105{,}000 \text{ kg}$

$C > T$

2o. *tanteo* ($c = 8$ cm)



$C_1 = 0.85 \times 250 \times 0.85 \times 8 \times 40 = 57{,}800 \text{ kg}$

Por triángulos semejantes:

$$\frac{\varepsilon'_s}{\varepsilon_{cu}} = \frac{c - d'}{c}$$

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003 \times 4}{8} = 0.0015 < \varepsilon_y$$

$f'_s = \varepsilon'_s E_s = 0.0015 \times 2 \times 10^6 = 3000 \text{ kg/cm}^2$

$C_2 = A'_s f'_s = 15 \times 3000 = 45{,}000 \text{ kg}$

$C = C_1 + C_2 = 57{,}800 + 45{,}000 = 102{,}800 \text{ kg}$

EJEMPLO 5.3 ***(continuación)***

Por triángulos semejantes:

$$\frac{\varepsilon_s}{\varepsilon_{cu}} = \frac{d-c}{c}; \qquad \varepsilon_s = \frac{0.003 \times 67}{8} = 0.025 > \varepsilon_y$$

$f_s = f_y$

$T = A_s f_y = 25 \times 4200 = 105{,}000$

$T = C$

CÁLCULO DEL MOMENTO

Tomando momentos con respecto al eje geométrico de la sección:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_1 = 57.8$	$\frac{h}{2} - \frac{a}{2} = 40 - 3.4 = 36.6$	2115
$C_2 = 45.0$	$\frac{h}{2} - d' = 40 - 4 = 36$	1620
$T = 105.0$	$\frac{h}{2} - r = 40 - 5 = 35$	3675

$M_n = 7410$

$M_n = 74.1$ ton-m

Momento resistente de diseño:

$\phi M_n = 0.90 \times 74.1 = 66.7$ ton-m

$\phi M_n = 66.7$ ton-m

EJEMPLO 5.3 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA MEDIANTE LAS ECUACIONES DE LA FIGURA 5.9

$$a = \frac{(A_s - A'_s)\, f_y}{0.85\, f'_c\, b} \qquad \text{(ecuación 2)}$$

$$a = \frac{(25 - 15)\ 4\,200}{0.85 \times 250 \times 40} = 4.9 \text{ cm}$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{\beta_1\, d'}{a}\right)$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{0.85 \times 4}{4.9}\right) = 0.0009$$

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4\,200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

Como $\varepsilon'_s < \varepsilon_y$ se está en el caso 2:

$$(0.85\, f'_c\, b)\, a^2 + (0.003\, E_s\, A'_s - A_s\, f_y)\, a - (0.003\, E_s\, A'_s\, \beta_1\, d') = 0$$

$$8500\, a^2 - 15{,}000\, a - 306{,}000 = 0 \qquad \text{(ecuación 6)}$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática:

$$a = 6.9 \text{ cm}$$

$$C_s = 0.003\, E_s \left(1 - \frac{\beta_1\, d'}{a}\right) A'_s = 45{,}650 \text{ kg} \qquad \text{(ecuación 3)}$$

$$C_c = 0.85\, f'_c\, ab = 58{,}650 \text{ kg} \qquad \text{(ecuación 4)}$$

$$M_n = C_c\, (d - 0.5\, a) + C_s\, (d - d') \qquad \text{(ecuación 7)}$$

$$M_n = 73.1 \text{ ton-m}$$

$$\phi\, M_n = 0.90 \times 73.1 = 65.8 \text{ ton-m}$$

cualquiera de los dos casos, las ecuaciones resultantes son válidas siempre que fluya el acero de tensión, o sea, que el porcentaje de refuerzo sea menor o igual al porcentaje balanceado. El cálculo de porcentaje balanceado para secciones doblemente armadas se muestra en la figura 5.13. Se puede ver que es función de los porcentajes de refuerzo de tensión y de compresión.

Puesto que no se sabe de antemano si el acero de compresión fluye o no lo hace, conviene iniciar el cálculo suponiendo que sí fluye, o sea, aplicando las ecuaciones del caso 1. Lo primero que se hace es calcular el valor de a con la ecuación 2 de la figura 5.9. Conocido este valor, se calcula ε'_s que por triángulos semejantes de la figura 5.9 (b) tiene el valor:

$$\varepsilon'_s = 0.003\left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right)$$

Si ε'_s es mayor o igual a ε_y, la hipótesis de estar en el caso 1 es correcta y se calcula el momento nominal con la ecuación 1 de la figura 5.9. Si ε'_s es menor que ε_y, la hipótesis no es correcta y entonces se calcula un nuevo valor de a con la ecuación 6, y el momento nominal con la ecuación 7.

Las ecuaciones para calcular el momento resistente nominal de una sección doblemente armada son más complicadas que las de una sección con refuerzo de tensión únicamente, en especial en caso de que no fluya el acero de compresión. Por esto, generalmente resulta más sencillo el procedimiento de tanteos. Sin embargo, las ecuaciones son más convenientes para elaborar programas de computadora.

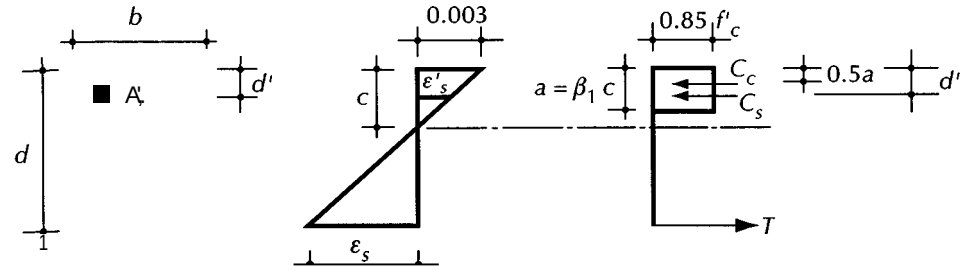
En la segunda parte del ejemplo 5.3 se calcula el momento resistente por el procedimiento de ecuaciones. Se determinó en primer término el valor de a suponiendo que se estaba en el caso 1. Como el valor de ε'_s calculado a partir de este valor de a resultó menor que ε_y, la hipótesis no fue correcta, por lo que se volvió a calcular a con la ecuación 6 que corresponde al caso 2. A partir de este nuevo valor de a se calcularon las fuerzas de compresión en el acero y en el concreto, C_s y C_c, respectivamente, el momento nominal, M_n, y el momento de diseño, ϕM_n. Las pequeñas diferencias en el resultado con respecto al procedimiento de tanteos se deben a que en este último no coinciden totalmente las fuerzas de compresión y tensión.

SECCIONES RECTANGULARES DOBLEMENTE ARMADAS – NTC-04

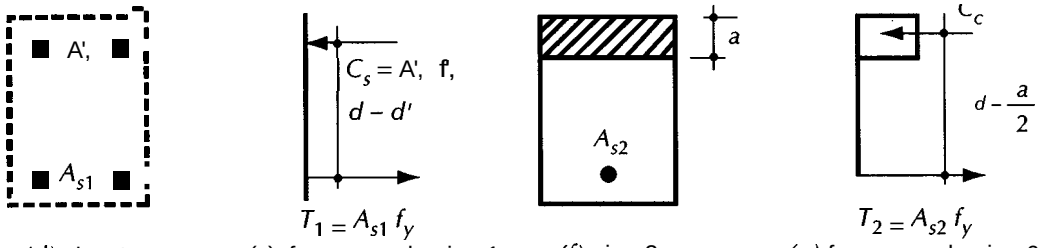
El procedimiento es igual al ilustrado en el ejemplo 5.3, basta sustituir f'_c por f^*_c. Si se emplea el método de ecuaciones, pueden usarse las de la figura 5.9 haciendo la misma sustitución.

SECCIONES T SIMPLEMENTE ARMADAS – REGLAMENTO ACI 318–02

En el ejemplo 5.4 se ilustra el procedimiento a seguir. La sección propuesta es similar a la del ejemplo 5.1, pero con un patín de compresión. La diferencia con respecto al caso de una sección rectangular estriba en el cálculo de la fuerza de compresión. En el primer tanteo, el eje neutro supuesto estaba por debajo del patín; el límite inferior del bloque equivalente de esfuerzos también quedó por debajo del patín. El bloque de esfuerzos, por lo tanto, fue de ancho variable. En los 10 cm superiores tenía un ancho de 110 cm, o sea, el ancho del patín; en cambio, en la parte inferior, el ancho del bloque fue igual al ancho del alma de la viga. Por esta razón, la fuerza de compresión se calculó en dos partes, como se muestra en el ejemplo. En este primer tanteo, la fuerza de compresión resultó mayor que la de tensión.



(a) sección completa (b) deformaciones unitarias (c) esfuerzos y fuerzas



(d) viga 1 (e) fuerzas en la viga 1 (f) viga 2 (g) fuerzas en la viga 2

Caso 1. El acero de compresión fluye ($f'_s = f_y$)

De la fig. (e):

$A'_s f_y = A_{s1} f_y$

$A'_s = A_{s1}$

Momento de la viga 1:

$M_1 = T_1 (d - d') = A'_s f_y (d - d')$

Momento de la viga 2:

$M_2 = T_2 (d - \frac{a}{2}) = A_{s2} f_y (d - \frac{a}{2})$

$A_{s2} = A_s - A_{s1} = A_s - A'_s$

Sustituyendo A_{s2}:

$M_2 = (A_s - A'_s) f_y (d - \frac{a}{2})$

Momento nominal total:

$M_n = M_1 + M_2$

$M_n = A'_s f_y (d - d') + (A_s - A'_s) f_y (d - \frac{a}{2})$ (ecuación 1)

El valor de a se encuentra por equilibrio en la fig. (g):

$A_{s2} f_y = 0.85 f'_c ab$

Puesto que $A_{s2} = A_s - A'_s$,

$$a = \frac{(A_s - A'_s) f_y}{0.85 f'_c b}$$ (ecuación 2)

Caso 2. El acero de compresión no fluye ($f'_s < f_y$)

Por triángulos semejantes de la fig. (b):

$$\varepsilon'_s = \frac{0.003 (c - d')}{c} = 0.003 \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right)$$

Las fuerzas de la fig. (c) tienen los siguientes valores:

$$C_s = E_s \varepsilon'_s A'_s = 0.003 E_s \left(1 - \frac{\beta_1 d'}{a}\right) A'_s$$ (ecuación 3)

$C_c = 0.85 f'_c ab$ (ecuación 4)

$T = A_s f_y$

Por equilibrio en la fig. (c)

$C_c + C_s = T = A_s f_y$ (ecuación 5)

Sustituyendo las ecuaciones 3 y 4 en la ecuación 5 y poniendo a como incógnita:

$(0.85 f'_c b)a^2 + (0.003 E_s A'_s - A_s f_y)a - (0.003 E_s A'_s \beta_1 d') = 0$ (ecuación 6)

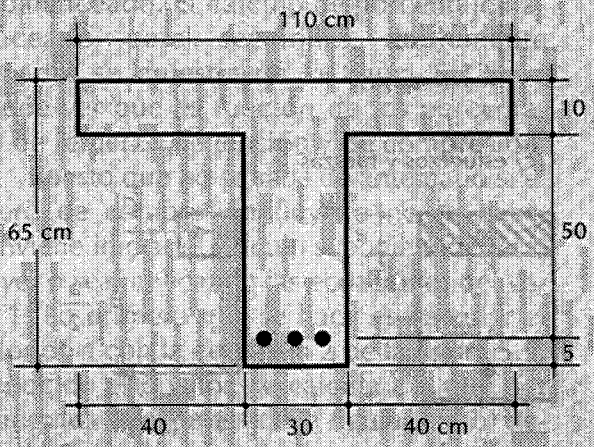
Una vez despejado el valor de a, el momento nominal puede obtenerse tomando momentos de C_c y C_s dados por las ecuaciones 3 y 4, con respecto a T:

$M_n = C_c (d - 0.5 a) + C_s (d - d')$ (ecuación 7)

Figura 5.9 Momento resistente nominal de secciones rectangulares doblemente armadas, de acuerdo con el Reglamento ACI 318-02.

EJEMPLO 5.4 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección T usando el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



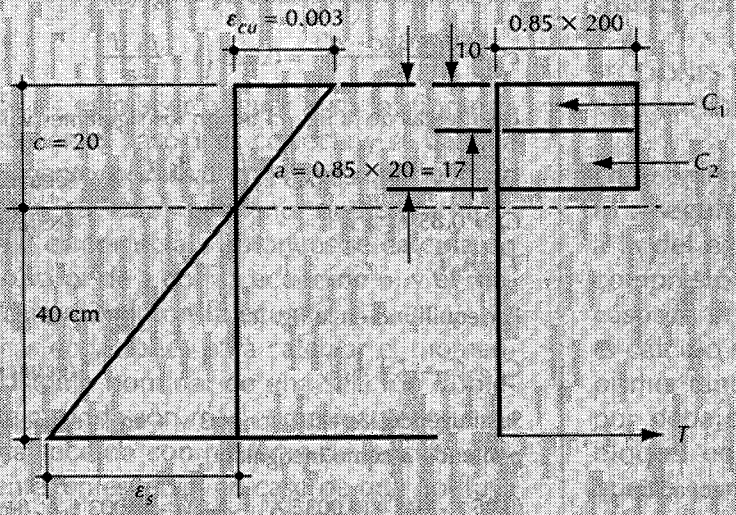
f'_c = 200 kg/cm²

f_y = 4200 kg/cm²

A_s = 3 barras No. 8 = 15 cm²

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE TANTEOS

1er *tanteo* (c = 20 cm)



$C_1 = 0.85 \times 200 \times 10 \times 110 = 187{,}000$ kg

$C_2 = 0.85 \times 200 \times 7 \times 30 = 35{,}700$ kg

$C = 222{,}700$ kg

$\varepsilon_s = \dfrac{0.003 \times 40}{20} = 0.006 > \varepsilon_y$

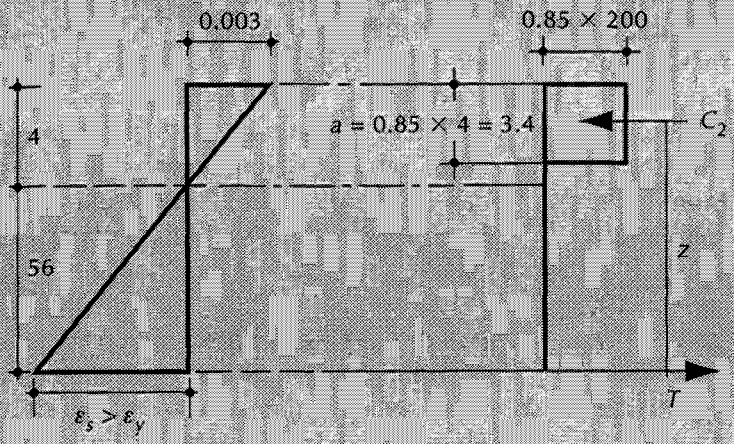
$\therefore f_s = f_y$

$T = 15 \times 4200 = 63{,}000$ kg

$C > T \therefore$ debe reducirse el valor de c

EJEMPLO 5.4 ***(continuación)***

2o. *tanteo* ($c = \dfrac{63{,}000}{0.85 \times 200 \times 0.85 \times 110} \simeq 4$ cm < 10)



$C = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 4 \times 110 = 63{,}580$ kg

$T = A_s f_y = 15 \times 4200 = 63{,}000$ kg

$C \simeq T$

CÁLCULO DEL MOMENTO

$M_n = Tz$

$T = 63{,}000$ kg

$z = 60 - \dfrac{a}{2} = 60 - 1.7 = 58.3$ cm

$M_n = 63{,}000 \times 58.3 = 36.73 \times 10^5$ kg-cm

$M_n = 36.73$ ton-m

Momento resistente de diseño:

$\phi M_n = 0.9 \times 36.73$

$\phi M_n = 33.06$ ton-m

EJEMPLO 5.4 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA MEDIANTE ECUACIONES

Se supone primero que todo el bloque de esfuerzos cae dentro del patín:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$a = \frac{15 \times 4200}{0.85 \times 200 \times 110} = 3.4$$

Como $a < t$:

$$M_n = b d^2 f'_c \omega (1 - 0.59\omega)$$

$$\omega = \frac{\rho f_y}{f'_c} = \frac{15 \times 4200}{110 \times 60 \times 200} = 0.048$$

$$M_n = 110 \times 60^2 \times 200 \times 0.048 (1 - 0.59 \times 0.048)$$

$M_n = 36.93 \times 10^5$ kg-cm

$M_n = 36.93$ ton-m

Momento resistente de diseño:

$\phi M_n = 0.9 \times 36.93$

$\phi M_n = 33.24$ ton-m

Para el siguiente tanteo se partió de la base de que el acero de tensión también fluía, ya que si se elevaba el eje neutro, la deformación unitaria del acero sería aún mayor que en el primer tanteo. Conocida entonces la fuerza de tensión, se calculó el valor de la profundidad del eje neutro suponiendo que todo el bloque de compresión quedaba dentro del patín, ya que la fuerza de compresión, C_1, del tanteo anterior era mayor que el valor de T. El valor de c obtenido de esta manera resultó de 4 cm, con lo cual se verificó la hipótesis de que el bloque quedaba dentro del patín. Cuando el eje neutro cae dentro del patín, como en este caso, el comportamiento de la sección es igual al de una sección rectangular cuyo ancho es el del patín.

También puede determinarse el momento resistente nominal de secciones T mediante ecuaciones. Es necesario distinguir dos casos, según que el bloque de esfuerzos de compresión caiga totalmente dentro del patín o que una parte caiga dentro del alma. En la figura 5.10 se muestra el procedimiento a seguir y se deducen las ecuaciones correspondientes.

Se supone primero que el bloque de esfuerzos de compresión cae totalmente dentro del patín y se calcula su profundidad a partir de la condición de equilibrio de fuerzas (véase la ecuación *i* de la figura 5.8). Esto equivale a suponer que la sección funciona como una sección rectangular cuyo ancho es el del patín.

Si la profundidad del bloque de esfuerzos, a, resulta menor que el grosor del patín, *t,* la hipótesis del paso anterior era correcta y se procede a calcular el momento resistente nominal con la ecuación deducida en la figura 5.8.

Si, por el contrario, la profundidad del bloque de esfuerzos resulta mayor que el grosor del patín, la hipótesis no era correcta y es necesario deducir otras ecuaciones. Esta deducción se hace en el paso 3 de la figura 5.10. El procedimiento consiste en dividir la sección T completa, mostrada en las figuras 5.10*(a)* y *(b),* en dos secciones: la de las figuras 5.10 (c) y (d), que está formada por las alas del patín y un área de acero A_{sp} necesaria para equilibrar la fuerza de compresión correspondiente, y la de las figuras 5.10 (e) y (f), formada por el complemento de la zona de compresión y un área de acero A_{sa} igual al área total, A, menos el área A_{sp}. Con las ecuaciones 1 y 3 deducidas en la figura 5.10 pueden calcularse el área de acero A_{sp}, que corresponde a la llamada "viga patín", y la profundidad del bloque de esfuerzos, a, de la sección completa. Conocidos estos valores, el momento resistente nominal se puede calcular con la ecuación 4 de la figura 5.10.

Obsérvese que en la deducción mostrada en la figura 5.10 se supone que el acero de tensión está fluyendo, ya que tanto en el valor de T_p de la figura 5.10 *(d)* como en el de T_a de la figura 5.10 *(f),* el esfuerzo en el acero es f_y. Por lo tanto, la relación de acero p debe ser menor que la relación balanceada ρ_b. (Más adelante, en la figura 5.14, se determina el valor de ρ_b para secciones T.)

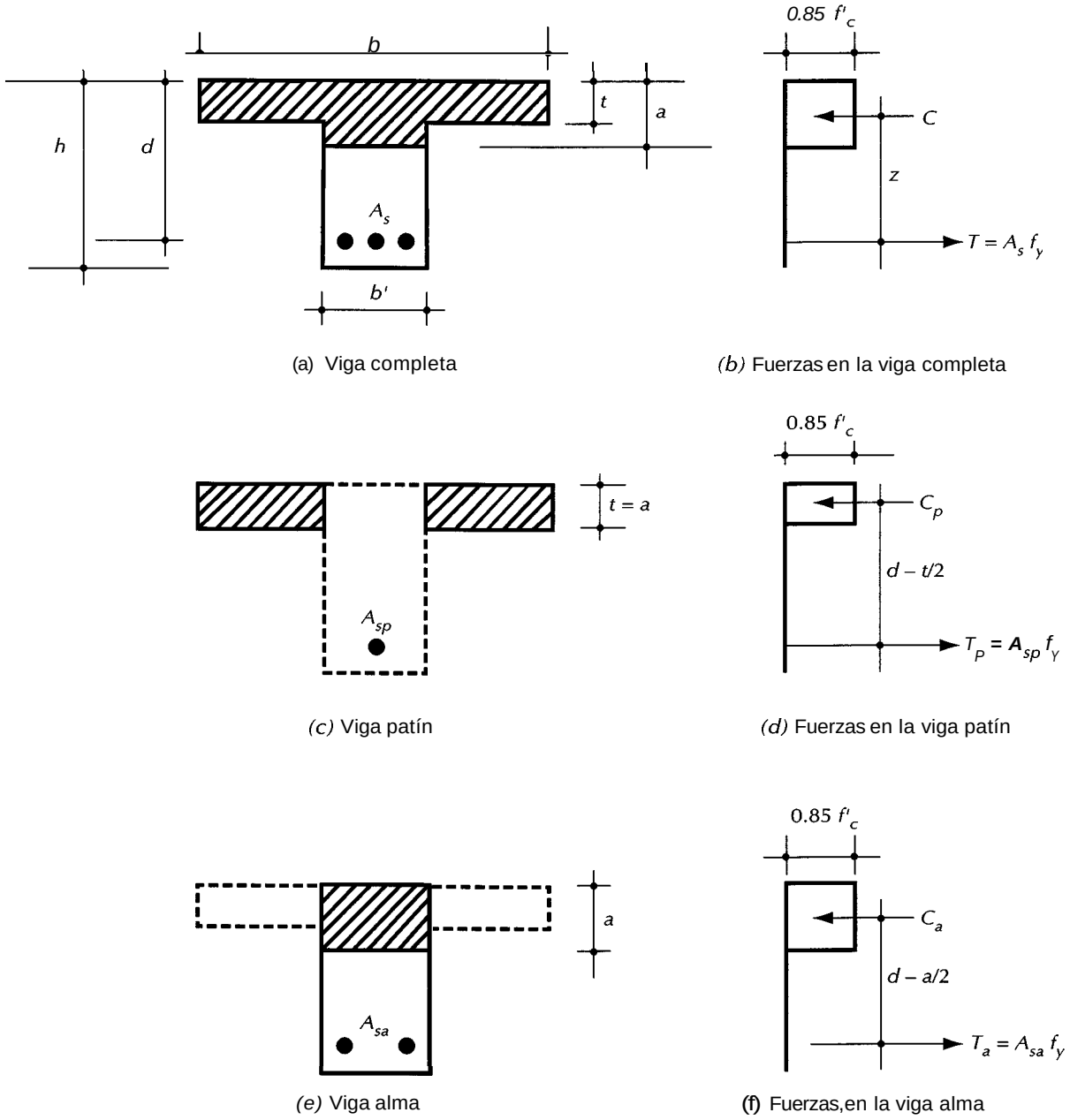
En la última parte del ejemplo 5.4 se calcula el momento resistente nominal por el procedimiento de ecuaciones. En este ejemplo, la profundidad del bloque de esfuerzos de compresión resultó menor que el grosor del patín, por lo que se usó la ecuación que corresponde a secciones rectangulares.

En el ejemplo 5.5 se resuelve una sección en la que el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del alma, o sea, la sección funciona realmente como sección T. Este ejemplo está resuelto con unidades del sistema SI.

SECCIONES T SIMPLEMENTE ARMADAS – NTC-04

En el ejemplo 5.6, en el que se aplicaron las NTC-04, el eje neutro quedó debajo del lecho inferior del patín. Al igual que en el ejemplo 5.4, se hizo un tanteo inicial en el cual resultó que, para la profundidad ensayada,

el acero fluía y que la fuerza de compresión era mayor que la de tensión. Por ello, en el segundo tanteo se supuso una profundidad del eje neutro menor, lo que automáticamente garantiza que el acero fluye. Puesto que la fuerza de compresión desarrollada



(a) Viga completa

(b) Fuerzas en la viga completa

(c) Viga patín

(d) Fuerzas en la viga patín

(e) Viga alma

(f) Fuerzas,en la viga alma

Figura 5.10 Momento resistente nominal de secciones T, de acuerdo con el Reglamento ACI 318–02.
(Continúa en la página siguiente.)

1. Cálculo de a suponiendo que todo el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del patín

   $C = T$

   $0.85\ f'_c\ ba = A_s\ f_y$

   $$a = \frac{A_s\ f_y}{0.85\ f'_c\ b}$$

   Si $a \leq t$, se continúa con el paso 2
   Si $a > t$, se continúa con el paso 3

2. Se calcula el momento resistente nominal como si se tratase de una sección con refuerzo de tensión Únicamente y con un ancho igual al del patín (figura 5.8)

   $M_n = bd^2\ f'_c\ \omega\ (1 - 0.59\omega)$

   donde $w = \dfrac{\rho\ f_y}{f'_c}$

3. A continuación se deducen las ecuaciones correspondientes a este caso

   De las figuras *(c)* y (d):
   $C_p = T_p$
   $C_p = 0.85\ f'_c\ t\ (b - b')$
   $T_p = A_{sp}\ f_y$
   de donde:

   $$A_{sp} = \frac{0.85\ f'_c\ t\ (b - b')}{f_y} \qquad \text{(ecuación 1)}$$

   De las figuras (e) y *(f)*:

   $C_a = T_a$
   $C_a = 0.85\ f'_c\ b'a$
   $T_a = A_{sa}\ f_y$
   de donde:

   $$a = \frac{A_{sa}\ f_y}{0.85\ f'_c\ b'} \qquad \text{(ecuación 2)}$$

   $A_{sa} = A_s - A_{sp}$
   luego:

   $$a = \frac{(A_s - A_{sp})\ f_y}{0.85\ f'_c\ b'} \qquad \text{(ecuación 3)}$$

De las figuras *(d)* y *(f)*:

$$M_n = T_p\ (d - \frac{t}{2}) + T_a\ (d - \frac{a}{2})$$

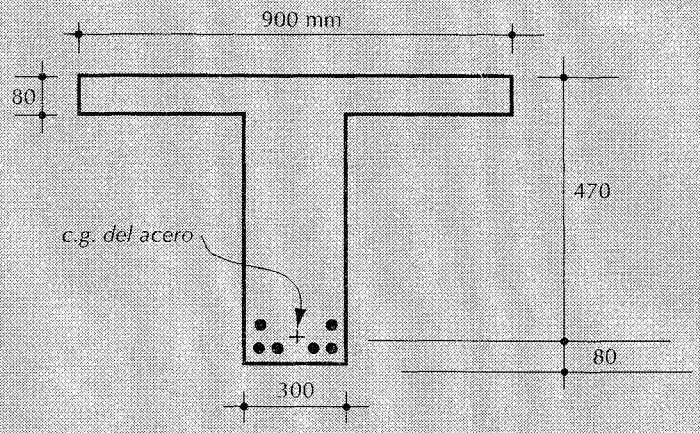
$$M_n = A_{sp}\ f_y\ (d - \frac{t}{2}) + (A_s - A_{sp})\ f_y\ (d - \frac{a}{2}) \qquad \text{(ecuación 4)}$$

Calculando A_{sp} con la ecuación 1 y a con la ecuación 3, puede calcularse el momento nominal con la ecuación 4.

Figura 5.10 (continuación).

EJEMPLO 5.5 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección T usando el Reglamento ACI 318-02. Sistema SI.***

DATOS



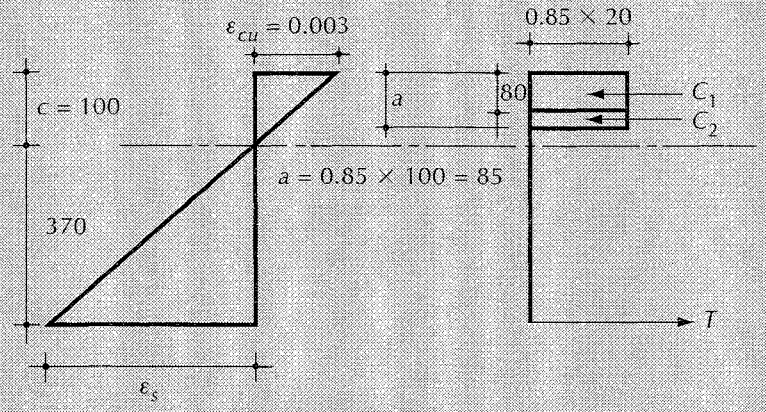
f'_c = 20 MPa

f_y = 420 MPa

A_s = 8 barras No. 8 = 4000 mm^2

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE TANTEOS

1er *tanteo* (c = 100 mm)



C_1 = 0.85 × 20 (MPa) × 80 (mm) × 900 (mm) = 1.22 × 10^6 MPa · mm^2

C_2 = 0.85 × 20 (MPa) × 5 (mm) × 300 (mm) = 0.02 × 10^6 MPa · mm^2

C = 1.24 × 10^6 MPa · mm^2

C = 1.24 × 10^6 N

$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 370}{100} = 0.0111 > \varepsilon_y$$

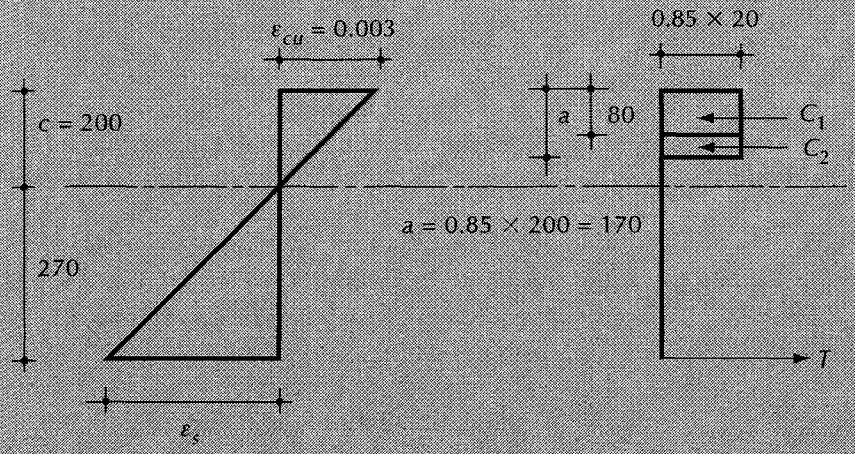
$\therefore f_s = f_y$

T = 4000 × 420 = 1.68 × 10^6 N

$C < T \therefore$ debe aumentarse el valor de c

EJEMPLO 5.5 ***(continuación)***

2o. *tanteo* ($c = 200$ mm)



$C_1 = 0.85 \times 20\ (\text{MPa}) \times 80\ (\text{mm}) \times 900\ (\text{mm}) = 1.22 \times 10^6\ \text{MPa} \cdot \text{mm}^2$

$C_2 = 0.85 \times 20\ (\text{MPa}) \times 90\ (\text{mm}) \times 300\ (\text{mm}) = 0.46 \times 10^6\ \text{MPa} \cdot \text{mm}^2$

$C = 1.68 \times 10^6\ \text{MPa} \cdot \text{mm}^2$

$C = 1.68 \times 10^6\ \text{N}$

$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 270}{200} = 0.004 > \varepsilon_y$$

$\therefore f_s = f_y$

$T = 4000 \times 420 = 1.68 \times 10^6\ \text{N}$

$C = T$

CÁLCULO DEL MOMENTO

Tomando momentos con respecto a la fuerza de tensión

	Fuerza (N)	*Brazo* (mm)	*Momento* (N · mm)
C_1	1.22×10^6	$470 - 40 = 430$	525×10^6
C_2	0.46×10^6	$470 - 125 = 345$	159×10^6
			$M_n = 684 \times 10^6$

Momento de diseño:

$\phi M_n = 0.90 \times 684 \times 10^6 = 616 \times 10^6$

$$\boxed{\phi M_n = 616 \times 10^6\ \text{N} \cdot \text{mm}}$$

EJEMPLO 5.5 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE ECUACIONES

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b}$$

$$a = \frac{4000 \times 420}{0.85 \times 20 \times 900} = 110 \text{ mm}$$

Como $a > t$, el bloque de esfuerzos cae fuera del patín y es necesario usar las ecuaciones del paso 3 de la figura 5.10

$$A_{sp} = \frac{0.85 f'_c t (b - b')}{f_y} \qquad \text{(ecuación 1)}$$

$$A_{sp} = \frac{0.85 \times 20 \times 80 \times 600}{420} = 1943 \text{ mm}^2$$

$$a = \frac{(A_s - A_{sp}) f_y}{0.85 \times f'_c \times b'} \qquad \text{(ecuación 3)}$$

$$a = \frac{(4000 - 1943)\, 420}{0.85 \times 20 \times 300} = 169$$

$$M_n = A_{sp} f_y \left(d - \frac{t}{2}\right) + (A_s - A_{sp}) f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \qquad \text{(ecuación 4)}$$

$$M_n = 1943 \text{ (mm}^2\text{)} \times 420 \text{ (MPa)} \times (470 - 40) \text{ (mm)} +$$
$$+ (4000 - 1943) \text{ (mm}^2\text{)} \times 420 \text{ (MPa)} \times \left(470 - \frac{169}{2}\right) \text{ (mm)}$$

$$M_n = 684 \times 10^6 \text{ MPa} \cdot \text{mm}^3 = 684 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momento de diseño

$$\phi M_n = 0.90 \times 684 \times 10^6 = 616 \times 10^6$$

$$\boxed{\phi M_n = 616 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}}$$

por el patín, C_1, no era suficiente para equilibrar la tensión proporcionada por el acero, fue necesario considerar una contribución de la nervadura. La magnitud de esta contribución, C_2, se determinó por la diferencia entre T y C_1, ya que $T = C$ y $C = C_1 + C_2$. Conocido el valor de C_2, se determinó la profundidad, s, parte de la nervadura en compresión. El momento resistente se calculó tomando momentos de las fuerzas de compresión con respecto al centro de gravedad del acero.

En la parte final del ejemplo 5.6 se calcula el momento resistente por el procedimiento de ecuaciones. Nótese que las ecuaciones 1 y 3 de la figura 5.10 han sido modificadas para adaptarlas a la hipótesis sobre distribución de esfuerzos de compresión de las NTC (figura 5.7). Como en el caso de las vigas doblemente armadas, la modificación consiste en sustituir f'_c por f^*_c.

SECCIONES SIMÉTRICAS DE FORMA CUALQUIERA

El procedimiento general es el mismo descrito anteriormente y se ilustra en la figura 5.11. Consiste en obtener por tanteos un estado de deformaciones tal, que la sección esté en equilibrio de fuerzas horizontales.

Cuando la forma de la zona de compresión no se presta a una determinación sencilla de sus características (área y centro de gravedad), conviene dividirla en franjas estrechas paralelas al eje neutro, como se muestra en la figura 5.11. Las fuerzas de compresión y de tensión en el acero se calculan de la misma manera que en los ejemplos anteriores.

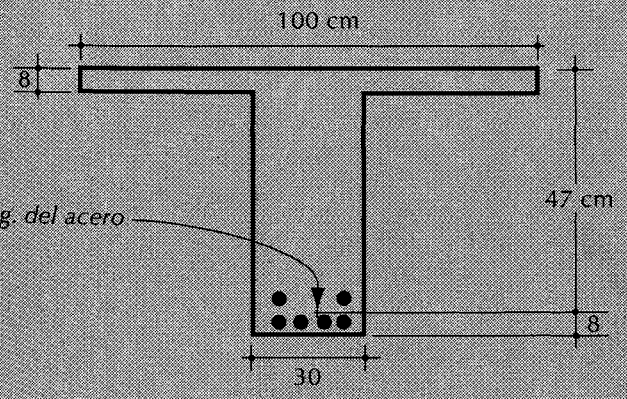
5.4 Determinación de la relación balanceada

5.4.1 Secciones rectangulares simplemente armadas

Se mencionó anteriormente que la resistencia a flexión de secciones rectangulares simplemente armadas puede determinarse fácilmente por medio de la ecuación de la figura 5.8 o por medio de la gráfica del Ápendice A, siempre que la sección sea subreforzada.

EJEMPLO 5.6 ***Determinación de la resistencia a flexión de una sección T usando las NTC-04.***

DATOS



$f'_c = 200$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

$A_s = 6$ barras No. 8 $= 30$ cm^2

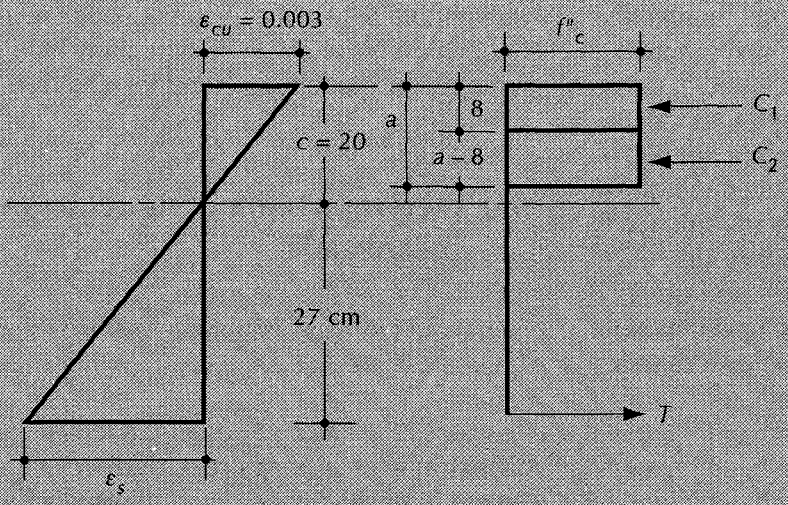
$f''_c = 0.85 \times 0.8 \times 200 = 136$ kg/cm^2

$\beta_1 = 0.85$

EJEMPLO 5.6 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE TANTEOS

1er *tanteo* (c = 20 cm)



$a = \beta_1 c = 0.85 \times 20 = 17$ cm

$C_1 = 8 \times 100 \times 136 = 108{,}800$ kg

$C_2 = 9 \times 30 \times 136 = 36{,}720$ kg

$C = 145{,}520$ kg

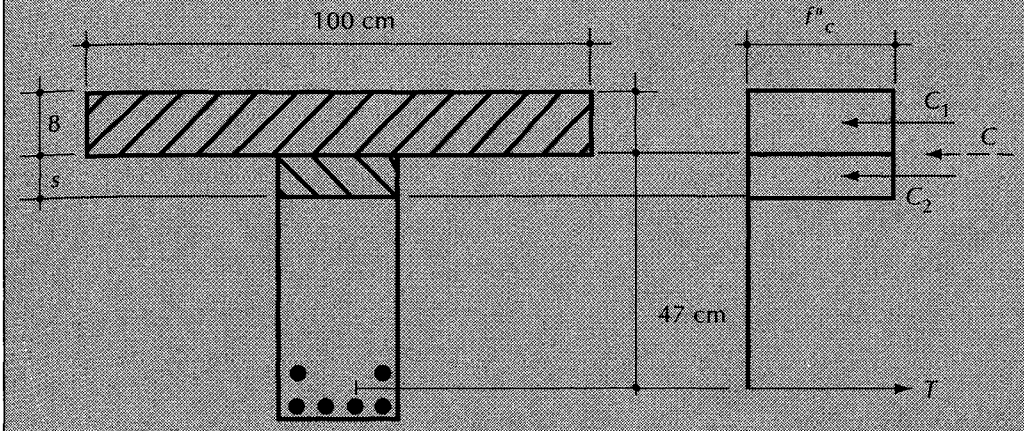
$$\varepsilon_s = \frac{0.003 \times 27}{20} > \varepsilon_y \therefore f_s = f_y$$

$T = A_s f_y = 30 \times 4200 = 126{,}000$ kg

$C > T \therefore$ se debe reducir el valor de c

EJEMPLO 5.6 ***(continuación)***

2o. *tanteo*



$T = 126{,}000$ kg
$C_1 = 108{,}800$ kg
$C = T$
$C = C_1 + C_2$
$C_2 = T - C_1 = 126{,}000 - 108{,}800 = 17{,}200$ kg
$C_2 = b' \times s \times f''_c$
(b' = ancho nervadura viga)

$$s = \frac{C_2}{b'\, f''_c} = \frac{17{,}200}{30 \times 136} = 4.2 \text{ cm}$$

CÁLCULO DEL MOMENTO

(Tomando momentos con respecto a la fuerza de tensión.)

	Fuerza (ton)	*Brazo* (m)	*Momento* (ton-m)
C_1	108.8	0.43	46.78
C_2	17.2	0.369	6.35
			$M_n = 53.13$

Momento resistente de diseño:

$M_R = F_R M_n = 0.9 \times 53.13$ $\quad$ $M_R = 47.82$ ton-m

EJEMPLO 5.6 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA POR EL PROCEDIMIENTO DE ECUACIONES

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f^*_c b}$$

$$f^*_c = 0.8 \times 200 = 160$$

$$a = \frac{30 \times 4200}{0.85 \times 160 \times 100} = 9.3 \text{ cm}$$

Como $a > t$, se aplican las ecuaciones del paso 3 de la figura 5.10, modificadas para las NTC

$$A_{sp} = \frac{0.85 f^*_c t (b - b')}{f_y} \qquad \text{(ecuación 1a)}$$

$$A_{sp} = \frac{0.85 \times 160 \times 8 \times 70}{4200} = 18.1 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{(A_s - A_{sp}) f_y}{0.85 f^*_c b'} \qquad \text{(ecuación 3a)}$$

$$a = \frac{(30 - 18.1) \times 4200}{0.85 \times 160 \times 30} = 12.2$$

$$M_n = A_{sp} f_y (d - \frac{t}{2}) + (A_s - A_{sp}) f_y (d - \frac{a}{2}) \qquad \text{(ecuación 4)}$$

$$M_n = 18.1 \times 4200 \times 43 + (30 - 18.1) \times 4200 \times 40.9$$

$$M_n = 53.13 \times 10^5 \text{ kg-cm} = 53.13 \text{ ton-m}$$

Momento resistente de diseño:

$$M_R = F_R M_n = 0.9 \times 53.13$$

$$\boxed{M_R = 47.82 \text{ ton-m}}$$

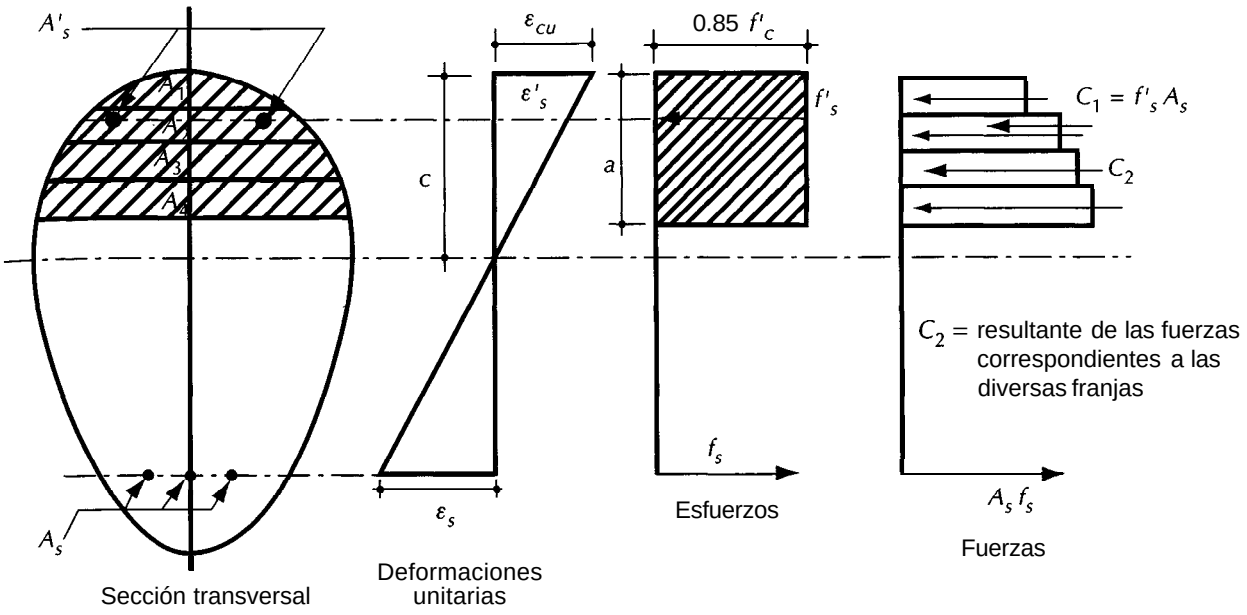


Figura 5.1 1 Flexión en secciones simétricas de forma cualquiera. (Hipótesis ACI 318-02.)

Conviene, entonces, disponer de un medio sencillo para determinar si la sección es subreforzada, o sea, si su relación de refuerzo, p, es menor que la relación balanceada ρ_b. También es necesario calcular la relación balanceada para fines de diseño, ya que, para asegurar una ductilidad adecuada y reducir así el riesgo de fallas frágiles, los reglamentos de construcción especifican usar siempre relaciones de refuerzo menores que la balanceada.

Para secciones rectangulares simplemente armadas, la relación balanceada puede calcularse con la ecuación

$$\rho_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y} \cdot \frac{6000}{6000 + f_y} \qquad (5.1)$$

Esta ecuación se deduce en la figura 5.12. Como puede verse en dicha figura, se obtiene de un estado de deformaciones unitarias en el cual se alcanzan simultáneamente la deformación de aplastamiento del concreto, que se supone igual a 0.003, y la deformación de fluencia del acero de refuerzo. En la figura 5.12 se han utilizado las hipótesis del Reglamento ACI 318-02 para determinar el bloque equivalente de esfuerzos. El mismo procedimiento puede emplearse usando las hipótesis de otros reglamentos. Si se usan las NTC, el valor de ρ_b es el siguiente:

$$\rho_b = \frac{f''_c}{f_y} \cdot \frac{6000 \beta_1}{f_y + 6000} \qquad (5.2)$$

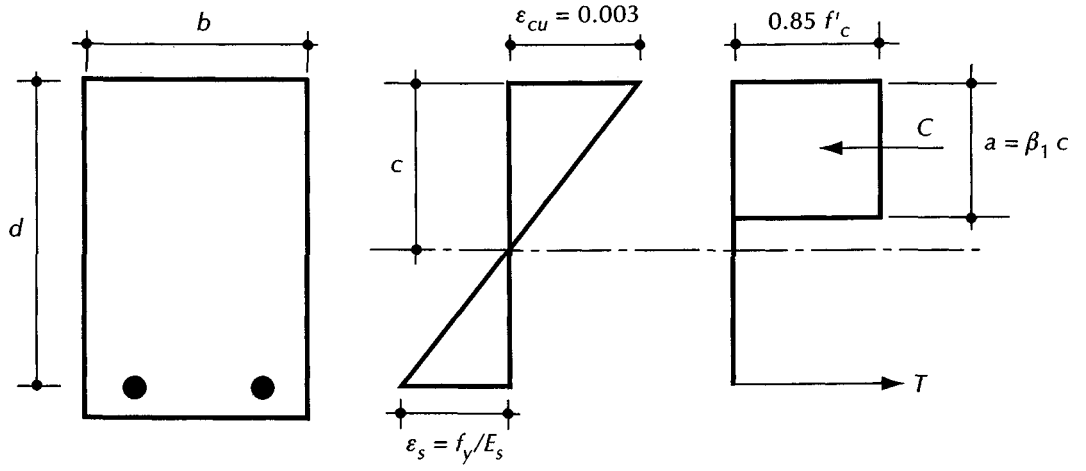
Esta ecuación se deduce de la 5.1, si se sustituye f'_c por f^*_c y se toma en cuenta que $f''_c = 0.85\ f^*_c$.

Hay dos enfoques usados en los reglamentos para garantizar que las vigas sean

subreforzadas. En las NTC se especifica que la relación de refuerzo, p, no exceda de 90 por ciento de la relación balanceada ρ_b, o de 75 por ciento si el elemento en cuestión forma parte de sistemas que deban resistir fuerzas sísmicas. En el Reglamento ACI se especifica que la deformación unitaria del acero más cercano a la cara en tensión de la viga, ε_t, figura 5.13, no sea menor que 0.004. Esta deformación unitaria corresponde a una relación de refuerzo ligeramente inferior a 0.75 ρ_b.

5.4.2 Secciones rectangulares doblemente armadas

También se mencionó al deducir las ecuaciones para calcular la resistencia de secciones rectangulares doblemente armadas, en la figura 5.9, que dichas ecuaciones eran válidas siempre que fluyera el acero de tensión, o sea, que la relación de refuerzo de tensión, ρ, fuese menor que la relación balanceada ρ_b. Igualmente para fines de diseño es conveniente disponer de una expresión sencilla para el cálculo de ρ_b.



Por triángulos semejantes:

$$c = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}\right) = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{2\times10^6}}\right)$$

$$c = d\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

Por equilibrio:

$T = C$

$\rho_b b d\, f_y = b\beta_1\, c\, 0.85\, f'c$

Despejando ρ_b y sustituyendo c:

$$\rho_b = \frac{\beta_1 0.85 f'_c}{f_y}\quad\frac{6000}{6000 + f_y} \qquad \textbf{(ecuación 5.1)}$$

donde $\beta_1 = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) \le 0.85$ **(figura 5.5)**

Figura 5.12 Determinación de la relación balanceada, ρ_b, de secciones rectangulares simplemente armadas (hipótesis ACI 318-02).

La deducción de las ecuaciones correspondientes se presenta en la figura 5.14. La ecuación 1 de esta figura permite calcular la relación balanceada de acero de tensión para el caso en que no fluye el acero de compresión, o sea, el caso 2 de la figura 5.9. La utilización de esta ecuación resulta complicada en la práctica, porque es necesario determinar previamente el valor de la fuerza de compresión en el acero, C_s, y para calcular este valor se requiere obtener el de la profundidad del bloque de compresión a. Resulta entonces más conveniente, si ya se conoce el valor de a, determinar el valor de ε_s por triángulos semejantes y compararlo con ε_y para saber si fluye el acero de tensión.

Para el caso en que fluya el acero de compresión, la ecuación se simplifica a

$$(\rho_b - \rho') = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y}\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right) \qquad (5.3)$$

Esta ecuación sí se usa frecuentemente en la práctica para seleccionar relaciones de acero que aseguren la fluencia del acero de tensión. El procedimiento consiste en seleccionar una determinada relación de acero de compresión ρ' y calcular la relación balanceada de acero de tensión, ρ_b, con la ecuación 5.3. Obsérvese que si se usa una relación de acero de tensión, ρ, menor que ρ_b, fluirá el acero de tensión, pero no necesariamente el de compresión, por lo que se podría estar en el caso 2 de la figura 5.9.

La ecuación 5.3 se obtuvo con las hipótesis del Reglamento ACI 318-02. Si se utilizan las NTC, debe sustituirse el término 0.85 f'_c por el término 0.85 f^*_c. Estas sustituciones se explican por comparación de las figuras 5.6 y 5.7. La cifra 6000, que sale del producto $E_s\varepsilon_s$, y por lo tanto tiene unidades de kg/cm^2, debe sustituirse por 600 MPa si se usa el sistema SI.

5.4.3 Secciones *T*

Si el bloque de esfuerzos de compresión queda totalmente dentro del patín, la viga funciona como si fuese rectangular con un ancho igual al del patín, según se ha explicado anteriormente. Por lo tanto, la relación balanceada ρ_b se determina con la ecuación 5.1 tomando como ancho b el del patín. Si el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del alma, la relación balanceada

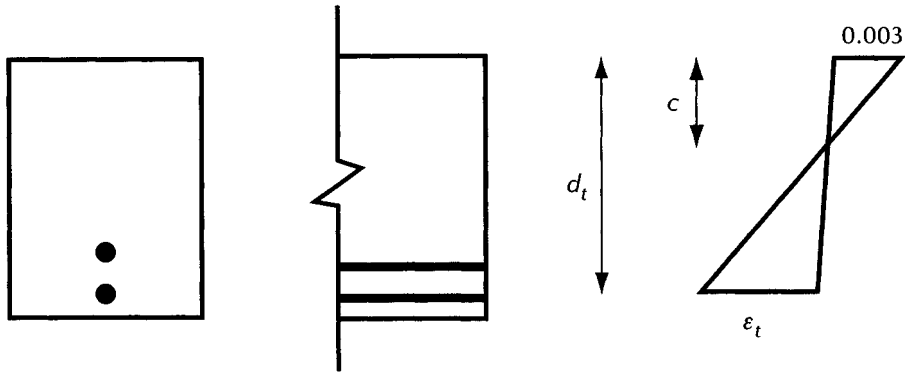
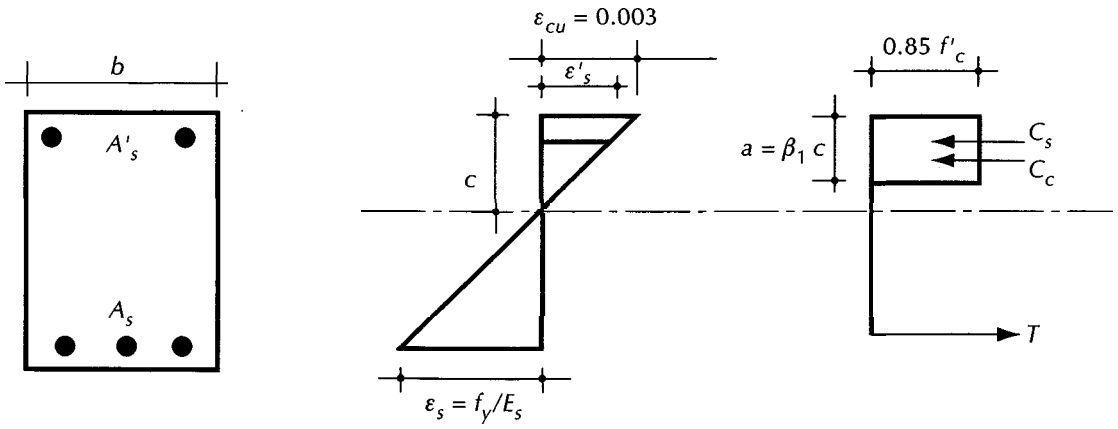


Figura 5.1 3 Deformaciones unitarias en una viga subreforzada.



Por triángulos semejantes:

$$c = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}\right) = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{2\times10^6}}\right)$$

$$c = d\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

Por equilibrio:

$T = C_c + C_s$

$\rho_b\, bd\, f_y = b\beta_1\, c\, 0.85\, f'_c + \rho'\, bd\, f'_s$

Agrupando y sustituyendo el valor de c:

$$\left(\rho_b - \frac{\rho' f'_s}{f_y}\right) = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y}\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

(ecuación 1)

donde $\beta_1 = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) \le 0.85$ (figura 5.5)

$$f'_s = \frac{C_s}{A'_s}$$

y C_s se calcula con la ecuación 3 de la figura 5.9

Si fluye el acero de compresión, $f'_s = f_y$ y la ecuación 1 se simplifica a:

$$\left(\rho_b - \rho'\right) = \frac{0.85\beta_1 f'_c}{f_y}\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$ (ecuación 5.31

Figura 5.14 Determinación de la relación balanceada, ρ_b, de secciones rectangulares doblemente armadas (hipótesis ACI 318-02).

puede calcularse con la siguiente ecuación deducida en la figura 5.15

$$\rho_b = \frac{0.85 f'_c}{f_y}\left(\frac{t(b-b')}{b'd} + \frac{\beta_1(6000)}{6000+f_y}\right) \qquad (5.4)$$

Obsérvese que en esta ecuación la relación ρ_b está definida como $A_s/b'd$, o sea, está calculada a partir del ancho del alma. Para obtener las ecuaciones correspondientes a las NTC y al sistema SI deben hacerse las mismas modificaciones señaladas para vigas doblemente armadas.

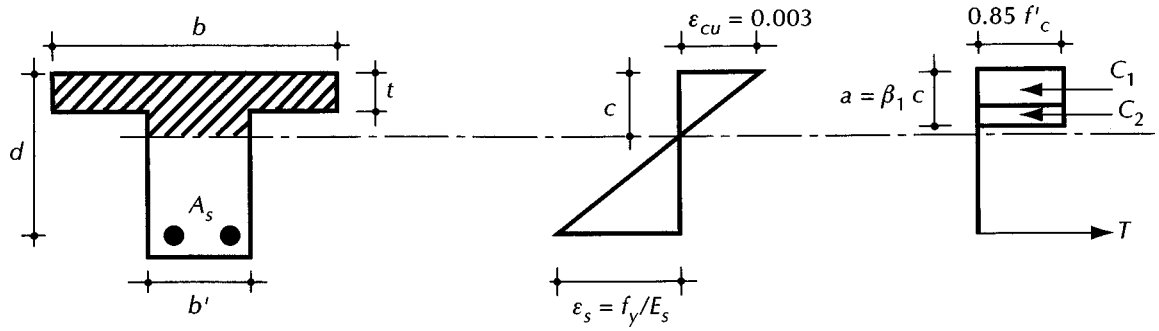
Para secciones T y doblemente armadas, el Reglamento ACI señala que se debe cumplir con el valor mínimo de ε_t especificado para secciones simplemente armadas, figura 5.13.

5.5 Flexión asimétrica

En todos los casos anteriores, las secciones transversales son simétricas con respecto a un eje vertical y el momento flexionante actúa en un plano vertical que pasa por dicho eje. Cuando no se cumplen estas condiciones, la flexión es asimétrica. Pueden considerarse dos casos de flexión asimétrica. El primero de ellos se presenta en secciones que no tienen ningún eje de simetría. El otro, más frecuente, es el de secciones que tienen dos ejes de simetría, pero en las que el momento flexionante actúa en un eje distinto de dichos ejes.

El primer caso se ilustra en la figura 5.16. Para encontrar la resistencia de una sección de este tipo, puede usarse el procedimiento de tanteos descrito anteriormente. Debido a la asimetría de la sección, es necesario verificar en cada tanteo que la resultante de fuerzas de compresión sea igual a la resultante de fuerzas de tensión y, además, que ambas resultantes queden en el plano de flexión o estén contenidas en un plano paralelo a él. Cuando las fuerzas de compresión y tensión están en el plano de flexión, la sección no tiene torsión; en cambio, si están en un plano paralelo al de flexión, la sección sí tiene torsión. Por ejemplo, en la figura 5.16, que representa esquemáticamente un tanteo típico, las resultantes de compresión y de tensión no están en un plano paralelo al de flexión. Por lo tanto, generan un momento interno alrededor del eje determinado por la intersección del plano de flexión con la sección transversal, que no está equilibrado con un momento externo de la misma magnitud. Para lograr la condición de equilibrio, es necesario hacer tanteos en los que se varíe tanto la profundidad como la inclinación del eje neutro. Esto hace que el procedimiento sea más laborioso que en el caso de flexión simétrica.

El segundo caso se ilustra en la figura 5.17. Se trata de obtener el momento nominal resistente, M_n, de una sección con dos ejes de simetría, cuando el plano de flexión está inclinado con respecto a dichos ejes. (La línea N-N en la figura señala la intersección del plano de flexión con la sección transversal de la viga.) Para esto se proyecta el momento M_n (normal a la línea N-N) sobre los ejes X y Y de simetría. Después se supone una posición del eje neutro, se calculan los valores de las resultantes de compresión y tensión de la manera ya descrita y se calculan también los momentos de dichas resultantes alrededor de los ejes X y Y. Para que se satisfaga el equilibrio de la sección, las resultantes de compresión y de tensión deben ser iguales entre sí y, además, la relación entre los momentos de las resultantes alrededor de los ejes X y Y debe ser igual a la relación entre las proyecciones del momento M_n alrededor de los ejes correspondientes. Para lograr estas dos condiciones de equilibrio es necesario comúnmente hacer un gran número de tanteos variando la profundidad y la inclinación del eje neutro. (Nótese que en flexión asimétrica el eje neutro, en



Por triángulos semejantes:

$$c = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{E_s}}\right) = d\left(\frac{0.003}{0.003 + \frac{f_y}{2\times10^6}}\right)$$

$$c = d\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

como c = a/β_1

$$a = \beta_1 d\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

Tomando el valor de *a* de la ecuación 3 de la figura 5.10:

$$\frac{(A_s - A_{sp})f_y}{0.85 f'_c\, b'} = \beta_1 d\left(\frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

Despejando ***A,*** y tomando el valor de A_{sp} de la ecuación 1 de la figura 5.10:

$$A_s = \frac{0.85\,f'_c\,t\,(b-b')}{f_y} + \frac{0.85\,f'_c\,b'\,\beta_1\,d}{f_y}\,\frac{6000}{6000+f_y}$$

Definiendo $p_b = \frac{A_s}{b'd}$,

$$\rho_b = \frac{0.85\,f'_c}{f_y}\left[\frac{t\,(b-b')}{b'd} + \frac{\beta_1(6000)}{6000 + f_y}\right] \quad \text{(ecuación 5.4)}$$

Figura 5.15 Determinación de la relación balanceada, ρ_b, de secciones T (hipótesis ACI 318-02).

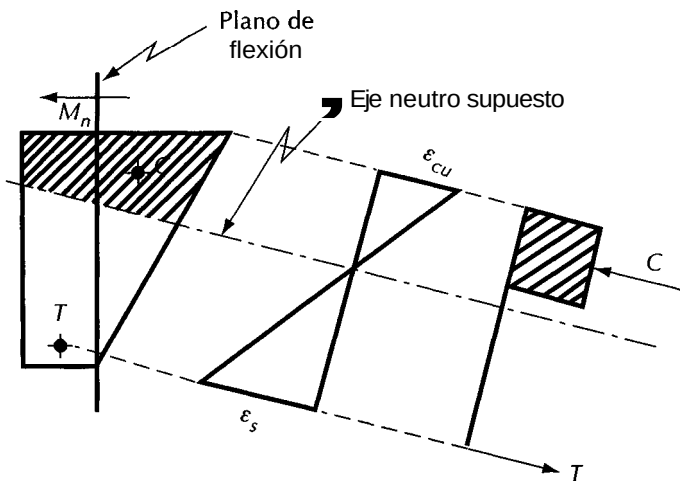


Figura 5.16 Primer caso de flexión asimétrica.

general, no es perpendicular al plano de flexión. Véase al respecto, por ejemplo, el inciso 8.3 de la referencia 5.7.)

Un procedimiento aproximado más sencillo, consiste en calcular la resistencia de la sección alrededor de los ejes de simetría X y Y, como si se tratase de flexión simétrica. Estos momentos se denominan M_{nx} y M_{ny}, respectivamente. Después se obtiene una relación entre los momentos internos M_x y M_y con la siguiente ecuación propuesta en la referencia 5.4

$$\frac{M_x}{M_{nx}} + \frac{M_y}{M_{ny}} = 1 \qquad (5.5)$$

A partir de esta relación entre M_x y M_y, y de la relación entre estos momentos, que se establece al proyectar el momento M_n sobre los ejes X y Y (figura 5.17), se pueden calcular los valores de M_x y M_y y el valor de M_n, que es la resistencia a flexión asimétrica.

Este caso se conoce con el nombre de *flexión biaxial,* ya que es equivalente al caso de una sección sujeta a flexión en dos planos perpendiculares simultáneamente.

5.6 Procedimiento general y comentarios sobre las hipótesis simplificadoras para cálculos de resistencias

En la sección 5.3.2 se indicó que los reglamentos de construcción hacen hipótesis simplificadoras con respecto a la distribución de esfuerzos en la zona de compresión del concreto y el valor de la deformación unitaria máxima útil del concreto para fines de cálculo de resistencia. En rigor, la resistencia a flexión puede determinarse sin necesidad de recurrir a estas hipótesis si se conocen, o se pueden suponer, las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero. La determinación de la resultante de los esfuerzos de compresión en el concreto y de su posición, puede hacerse fácilmente dividiendo la zona de compresión en franjas, tal como se ilustra en el ejemplo que se expone a continuación.

En la figura 5.18 se muestra un tanteo típico para una sección dada, usando las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero de la figura 5.19. En este tanteo se su-

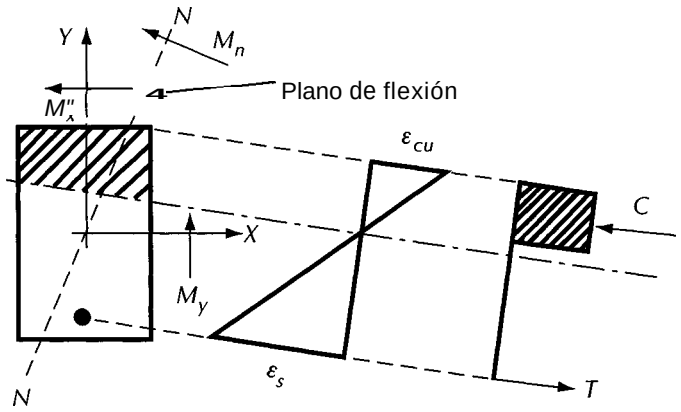


Figura 5.17 Segundo caso de flexión asimétrica (flexión biaxial).

puso una deformación unitaria máxima en compresión de 0.003, y una profundidad del eje neutro de 24 cm (figura 5.18 6). La zona de compresión se dividió en seis franjas y, a partir de las deformaciones unitarias, se determinaron los esfuerzos en los bordes de cada franja (figura 5.18 c), utilizando la curva esfuerzo-deformación de la figura 5.19 a. Por ejemplo, el esfuerzo de 348 kg/cm^2 corresponde a una deformación unitaria de 0.0020 en esta última figura. Las fuerzas de la figura 5.18 *d* se obtuvieron multiplicando los esfuerzos promedio en cada franja por el peralte de la franja y por el ancho de la sección. En este tanteo, la fuerza de tensión resultó mucho menor que la de compresión, por lo que debe hacerse otro tanteo subiendo considerablemente el eje neutro. Cuando se igualen ambas fuerzas, se calculan los momentos de todas las fuerzas parciales con respecto al eje geométrico, y el momento que se obtiene es el momento flexionante resistente para el valor supuesto de ε_c.

En la figura 5.20 se muestra una curva con los valores del momento flexionante resistente para distintos valores de la deformación unitaria en la fibra extrema en compresión. Puede verse en esta figura que el momento flexionante varía muy poco para un intervalo amplio de valores de E. Por esta razón, los reglamentos de construcción suponen un valor fijo de ε_{cu}, con lo cual se obtiene un valor del momento flexionante suficientemente preciso, sin necesidad de hacer varios tanteos con distintos valores de E.

El procedimiento general descrito en esta sección se ha empleado también para estudiar la influencia de la forma de la curva esfuerzo-deformación del concreto sobre la resistencia a flexión. Se ha podido determinar que la resistencia varía muy poco siempre que se usen formas razonables de la curva esfuerzo-deformación. Esto justifica emplear distribuciones sencillas, como los bloques rectangulares que aceptan los reglamentos más utilizados.

El procedimiento general implica una labor numérica considerable. Sin embargo, resulta relativamente sencillo elaborar programas de computadora, e inclusive para máquinas de bolsillo programables, y llevarlo a cabo.

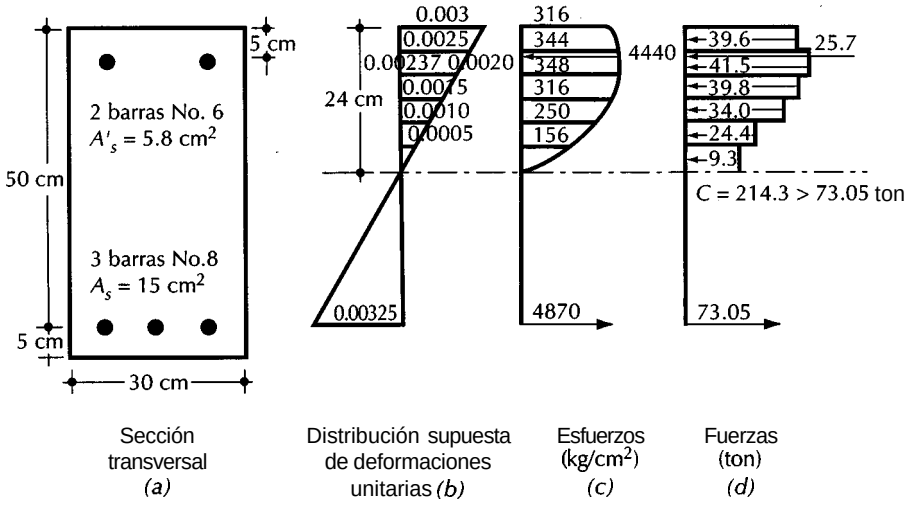


Figura 5.18 Determinación de acciones internas por el procedimiento general usando las gráficas esfuerzo-deformación de la figura 5.19.

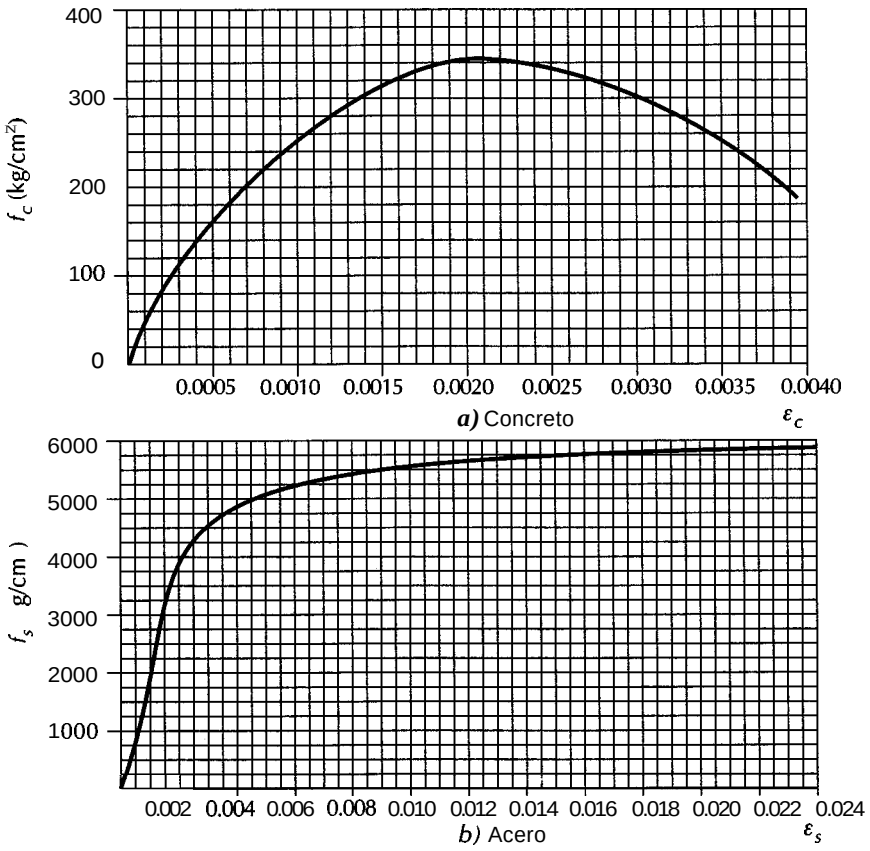


Figura 5.19 Gráficas esfuerzo-deformación del concreto y del acero usadas en la figura 5.18.

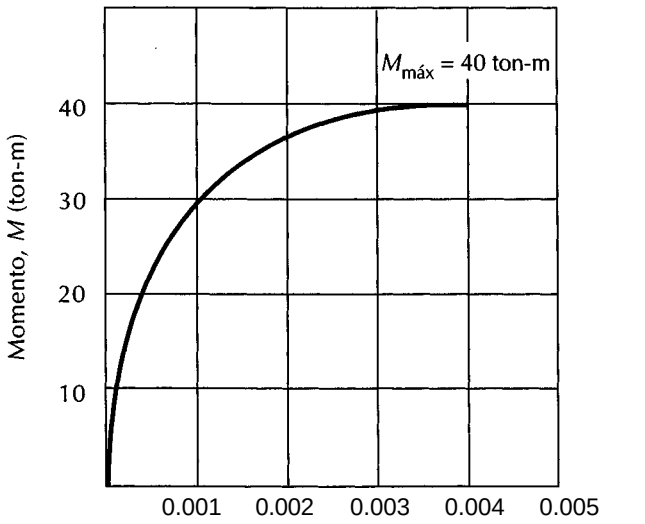


Figura *5.20* Característica acción-respuesta, $M - \varepsilon_c$.

Referencias

5.1 Hognestad, E. "A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members". Boletín 399. Urbana, Ill., Engineering Experiment Station, University of Illinois, 1951.

5.2 Whitney, C.S. "Plastic Theory of Reinforced Concrete Design". *Transactions* ASCE, Vol. 107, 1942.

5.3 Mattock, A.H., L. B. Kriz y E. Hognestad. "Rectangular Concrete Stress Distribution in Ultimate Strength Design". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, febrero 1961.

5.4 –. Strength and *Serviceability* Criteria for *Reinforced* Concrete Bridge Members. Washington, U.S. Department of Commerce, Bureau of Public Roads, 1966.

5.5 Granholm, H. A. General *Flexural* Theory of Reinforced Concrete. Nueva York, Wiley, 1965.

5.6 Rüsch, H. "Researches toward a General Flexural Theory of Structural Concrete". Journal of the *American* Concrete *Institute*. Detroit, julio, 1960.

5.7 Popov, E. P. Introducción a la mecánica de sólidos. México, Limusa, 1976.

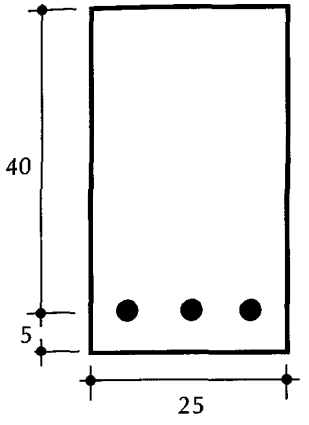
5.8 Collins, M. P, Mitchell, D., MacGregor, J. G. "Structural Design Considerations for High Strength Concrete". Concrete International. Vol. 15, No. 5, mayo 1993.

5.9 Vijaya Rangan, B. "High-Performance High-Strength Concrete: Design Recommendations". Concrete International. Vol. 20, No. 11, noviembre 1998.

Ejercicios

Nota: en los ejercicios 5.1 a 5.8, úsense las hipótesis simplificadoras de algún reglamento de construcción a elección del lector.

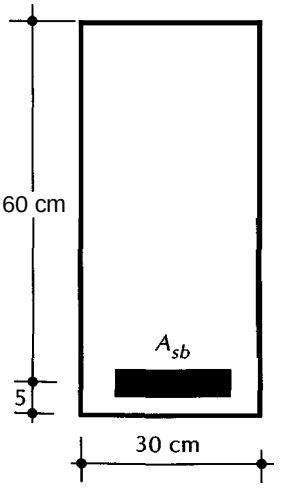
5.1 Determinar si la siguiente sección es subreforzada o sobrerreforzada:



$f'_c = 350$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
A_s = 3 barras del No. 6

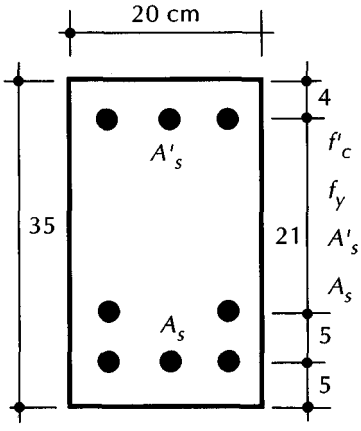
5.2 Calcular la resistencia a flexión de la sección del ejercicio anterior. Determinar la deformación unitaria en el acero en el momento de alcanzar la resistencia.

5.3 Calcular el área de acero, A_{sb}, de la siguiente sección, correspondiente a la condición balanceada. Calcular también la resistencia de la sección balanceada.



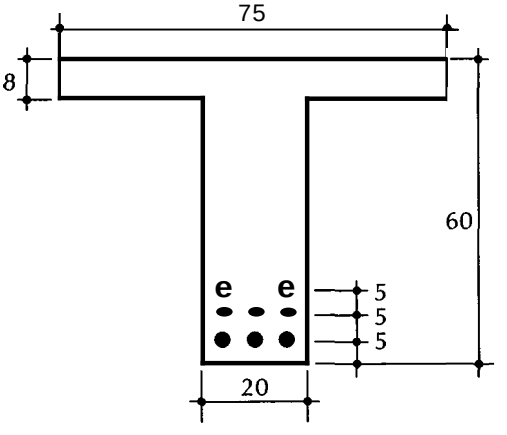
$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 2800$ kg/cm^2

5.4 Calcular la resistencia de la siguiente sección y determinar en qué lechos de refuerzo fluye el acero.



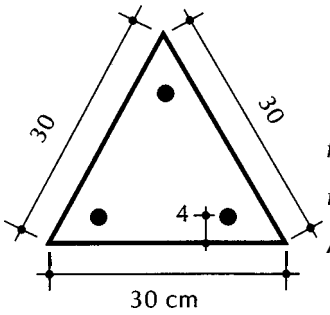
$f'_c = 300$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
A'_s = 3 barras del No. 6
A_s = 5 barras del No. 8

5.5 Calcular la resistencia de la siguiente sección:



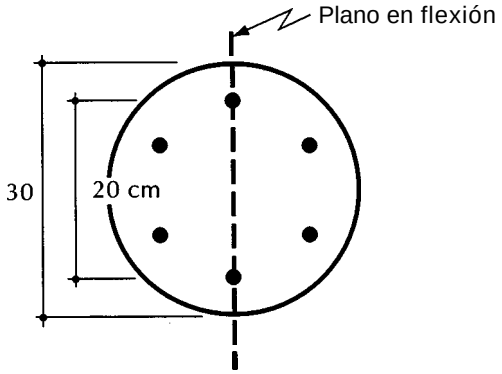
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
A_s = 8 barras del No. 8

5.6 Calcular la resistencia de la siguiente sección (usual en algunos tipos de pilotes) y determinar si fluye el acero de tensión. Resolver el problema para dos casos. En el primero, supóngase que la fibra extrema en compresión es un vértice del triángulo y que el plano de flexión es normal a la base. En el segundo, supóngase que la fibra extrema en compresión es una base del triángulo y que el plano de flexión es normal a la base.



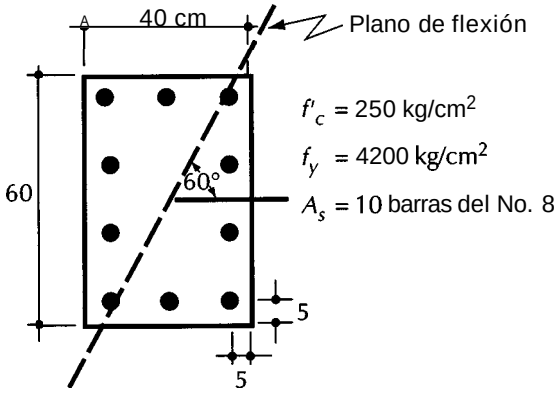
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 3$ barras del No. 4

5.7 Calcular la resistencia a flexión de la siguiente sección, y determinar qué barras fluyen.



$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 6$ barras del No. 8

5.8 Calcular la resistencia a flexión de la siguiente sección usando la ecuación 5.5.



$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 10$ barras del No. 8

5.9 Utilizando el procedimiento general descrito en la sección 5.6, calcule el momento flexionante resistente de la sección mostrada en la figura 5.18, cuando la deformación unitaria en la fibra extrema en compresión es de 0.004. Utilice las gráficas esfuerzo-deformación del concreto y del acero de la figura 5.19. Compruebe la respuesta en la figura 5.20.

CAPÍTULO 6

Flexión y carga axial

6.1 Introducción. /6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión. /6.3 Cálculo de resistencia./ 6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera. /6.5 Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera. /6.6 Flexotensión.

6.1 Introducción

En este capítulo se presentan los procedimientos necesarios para determinar la resistencia de elementos de concreto reforzado sujetos a la acción de carga axial y momento flexionante. Se consideran aquí únicamente elementos muy cortos, en los que no existen problemas de esbeltez. Se supondrán conocidas la geometría del elemento, incluyendo la cantidad y distribución del acero de refuerzo, la calidad del concreto, definida por una cierta resistencia nominal (f'_c), y la calidad del acero, definida por su esfuerzo de fluencia (f_y).

Considerando el problema de un modo general, se puede suponer que la carga axial, P, y el momento flexionante, M, varían independientemente. En la figura 6.1*a* se muestra una representación esquemática de un elemento bajo la acción de P y M, y en la figura 6.1*b*, un sistema estáticamente equivalente en el que M = Pe. Es importante señalar que en algunas estructuras, P y M varían en la misma proporción en una sección transversal dada al variar las condiciones de carga externa. Esto equivale a afirmar que la excentricidad, e, permanece constante. Sin embargo, en otros casos P y M pueden variar en distinta forma, y entonces e no es constante.

Un elemento puede alcanzar su resistencia bajo innumerables combinaciones de carga axial y momento flexionante. Estas combinaciones varían desde una carga axial máxima, P_o, de tensión o compresión, y un momento nulo, hasta un momento M, aunado a una carga axial nula. El lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante con las que un elemento puede alcanzar su resistencia, se representa gráficamente por medio de un diagrama de *interacción*. La figura 6.2 muestra uno típico para una sección rectangular con refuerzo

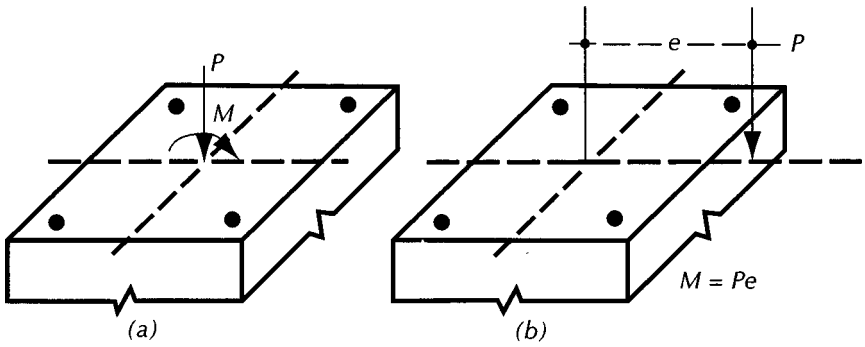


Figura 6.1 Elementos equivalentes sujetos a flexocompresión.

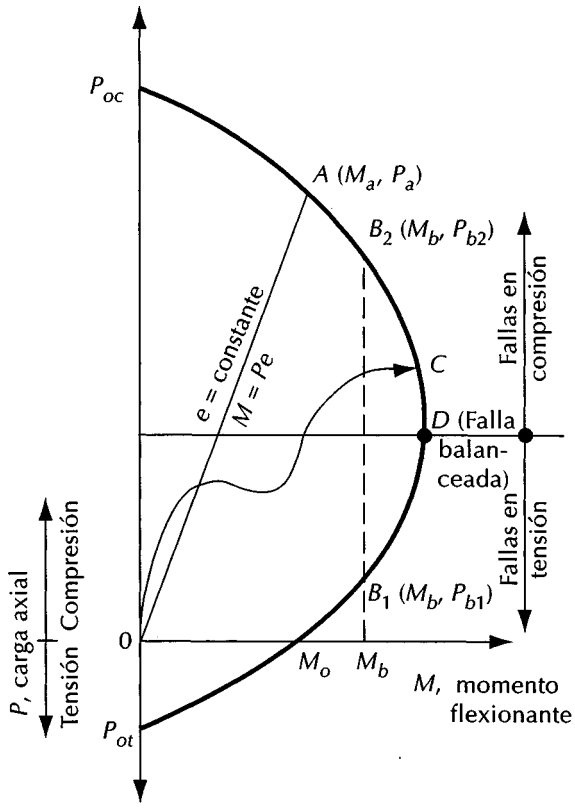


Figura 6.2 Diagrama de interacción típico para una sección rectangular.

simétrico. Cualquier punto en la curva de trazo continuo representa una combinación de momento y carga axial que hace que el elemento alcance su resistencia.

Puede observarse que si únicamente se aplicara carga axial de compresión, el valor máximo, o resistencia, correspondería al punto P_{oc}. De igual manera, la carga axial máxima de tensión sería la correspondiente a P_{ot}. Si la sección se sujetara sólo a momento flexionante, el máximo que podría aplicarse sería el marcado con M_o. Nótese que el máximo momento flexionante que la sección es capaz de resistir no es el que corresponde a una carga axial nula.

Cuando al aumentar la carga externa el momento y la carga axial crecen en la misma proporción, la historia de carga queda representada por una recta desde el origen, con una pendiente igual al cociente P/M = 1/e. Para las combinaciones de carga representadas por la recta OA de la figura 6.2, la resistencia correspondería a la combinación M, P. En la figura se observa también que para un mismo momento, M_b, existen dos valores de carga axial que hacen que la sección alcance su resistencia. Finalmente, la línea OC representa una historia de carga cualquiera.

El diagrama de interacción de la figura 6.2 corresponde a un elemento definido perfectamente en su geometría y materiales, y representa el conjunto de valores de acciones interiores máximas que el elemento es capaz de soportar. El conocimiento necesario para llegar a esta representación se ha ido acumulando de investigaciones experimentales sobre el comportamiento de elementos de concreto reforzado sujetos a flexión y carga axial. Estos estudios abarcan desde ensayes en vigas simplemente apoyadas con cargas concentradas simétricas hasta ensayes en elementos de concreto reforzado sujetos a compresión axial o a compresión excéntrica. También se han llevado a cabo algunos estudios, mucho más reducidos, de elementos sujetos a flexotensión. Con base en esta información, ha sido posible elaborar teorías apoyadas en hipótesis razonables, por medio de las cuales se puede predecir la resistencia de un elemento con un grado tolerable de precisión. Utilizando cualquiera de estas teorías se pueden obtener diagramas de interacción, como el mostrado en la figura 6.2.

En la actualidad se puede predecir la resistencia de un elemento de concreto reforzado sujeto a flexión y carga axial con un error no mayor del 25 por ciento de la capacidad real que se obtendría si dicho elemento se ensayase hasta la falla. En casos usuales, con flexión en torno a uno de los ejes principales, el error es del orden del 10 por ciento.

Esta aproximación es satisfactoria para fines de diseño estructural.

6.2 Comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a flexocompresión

El tipo de espécimen usado en investigaciones de elementos sujetos a flexocompresión es semejante al que aparece en la figura 6.3, donde se indican esquemáticamente el refuerzo usual y una posible configuración de agrietamiento. Generalmente la carga P se aplica a una excentricidad constante. Esto hace que toda la zona prismática del espécimen esté sujeta a una carga axial y a un momento flexionante que crecen en la misma proporción, hasta el colapso.

Existen dos modos principales de falla de elementos sujetos a flexocompresión: falla en compresión y falla en tensión.

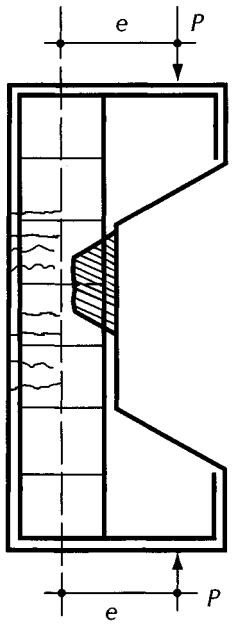


Figura 6.3 Espécimen para ensaye en flexocompresión con agrietamiento típico.

En el primer caso la falla se produce por aplastamiento del concreto. El acero del lado más comprimido fluye, en tanto que el del lado opuesto no fluye en tensión.

El segundo modo de falla se produce cuando el acero de un lado fluye en tensión antes de que se produzca el aplastamiento del concreto en el lado opuesto, más comprimido.

El tipo de falla depende esencialmente de la relación entre momento y carga axial en el colapso. En el diagrama de interacción mostrado en la figura 6.2, el punto D separa la zona de fallas en compresión de la de fallas en tensión; recibe el nombre de *punto de falla balanceada.*

Se ha observado que el efecto del refuerzo helicoidal sobre la resistencia disminuye apreciablemente en cuanto la carga axial tiene cierta excentricidad, aunque la hélice sigue aumentando la ductilidad del elemento.

También en este caso cabe notar que las mediciones de deformaciones han indicado que éstas varían linealmente a lo largo del peralte, es decir, las secciones transversales se mantienen planas antes y después de la deformación.

6.3 Cálculo de resistencia

6.3.1 Determinación del diagrama de interacción

En la sección 6.1 se dijo que un diagrama de interacción es la representación gráfica del lugar geométrico de las combinaciones de carga axial y momento flexionante que hacen que un elemento alcance su resistencia. Así, si se cuenta con el diagrama de interacción de un elemento dado, se conocen todas las combinaciones de carga axial y momento que puede soportar.

El diagrama de interacción de un elemento puede obtenerse a partir de las hipó-

tesis descritas en la sección 5.3 para el cálculo de la resistencia de elementos sujetos a flexión pura. Pueden usarse las hipótesis simplificadoras sobre la forma del diagrama de esfuerzos de compresión en el concreto y sobre la deformación unitaria máxima útil de concreto, o bien, puede aplicarse el procedimiento general descrito en la sección 5.6. El primer enfoque se ilustra en el ejemplo 6.1, y el segundo en la figura 6.4.

El diagrama de interacción se obtiene determinando varios puntos que lo definan. El procedimiento para encontrar un punto cualquiera es, esencialmente, el mismo usado en flexión para calcular las fuerzas de compresión y de tensión, una vez supuesta la profundidad del eje neutro. Sin embargo, no es necesario hacer varios tanteos hasta igualar ambas fuerzas, ya que su diferencia representa la fuerza normal, P, y el momento con respecto al eje geométrico representa el momento flexionante, M, que corresponden al estado de deformaciones determinado por la profundidad supuesta del eje neutro. Por lo tanto, para cada estado de deformaciones se obtiene un valor de P y uno de M, que definen un punto del diagrama de interacción.

Los diagramas de interacción tienen la forma general mostrada en la figura 6.2. Se puede definir un diagrama en forma aproximada estimando los siguientes puntos, o puntos cercanos a ellos:

a) El punto P_{oc}, que corresponde a carga axial de compresión pura, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias de compresión uniforme (en secciones simétricas).
b) El punto D, que corresponde a la falla balanceada, para el cual se supone un estado de deformaciones unitarias definido por ε_{cu} en la fibra extrema en compresión y por ε_y en el acero de tensión. Este estado de deformaciones es el que se tiene cuando, simultáneamente, el concreto alcanza su deformación máxima útil y el acero su límite de fluencia.
c) El punto M, que corresponde a momento sin carga axial, para el cual se supone un estado de deformaciones semejante a los obtenidos en el capítulo 5 para cálculos de resistencia a flexión.
d) Un punto adicional entre los puntos P_{oc} y D, y otros dos puntos entre los puntos D y M.

En la mayoría de los casos, estos puntos son suficientes para definir con precisión adecuada el diagrama de interacción. En ocasiones se determinan puntos en la zona de flexotensión. La determinación de estos puntos se trata en la sección 6.6.

El procedimiento con hipótesis simplificadoras se ilustra en el ejemplo 6.1, en el que se han usado las hipótesis simplificadoras del Reglamento ACI 318-02. Se trata de calcular el diagrama de interacción de una sección con porcentajes iguales de refuerzo de compresión y de tensión, como es usual en columnas. La sección tiene también dos barras a medio peralte y en el ejemplo se ha considerado la contribución de estas barras.

El primer punto que se determina es el que corresponde a compresión sin momento (punto P_{oc} de la figura 6.2). Debido a que la sección es simétrica, el estado de deformaciones correspondiente es uniforme, como se muestra en el diagrama del ejemplo. Este caso resulta igual al de una columna sujeta a carga axial pura (capítulo 4), y la resistencia puede calcularse con la ecuación 4.1, la cual expresa que la resistencia total es la suma de las contribuciones del concreto y del acero. En secciones no simétricas, si se supone un estado uniforme de deformaciones se obtiene también un momento, por lo que el punto que se calcula no cae sobre el eje de ordenadas del diagrama de interacción. Sin embargo, tal punto resulta útil, ya que por lo general está localizado cerca del eje

de ordenadas y sirve para determinar gráficamente la intersección del diagrama con el eje. A continuación se calcula en el ejemplo el punto correspondiente a la falla balanceada (punto D en la figura 6.2). El estado de deformaciones unitarias se fija de tal manera que la deformación en la fibra extrema en compresión es igual a la deformación máxima útil del concreto (0.003 según el Reglamento ACI 318-02), y la deformación en el acero de tensión más alejado del eje neutro es igual a la deformación de fluencia (0.0021 para acero de 4200 kg/cm^2 de esfuerzo de fluencia). A partir del diagrama de deformaciones unitarias se calculan las deformaciones unitarias, ε, en todos los lechos de refuerzo; después se calculan los esfuerzos en el acero, que son iguales al esfuerzo de fluencia cuando la deformación unitaria es mayor que la de fluencia, e iguales a $\varepsilon_s E_s$, cuando es menor, y a continuación se calculan las fuerzas en los distintos lechos de acero, F_s, multiplicando las áreas de acero por los esfuerzos correspondientes. Por triángulos semejantes se calcula la profundidad del eje neutro, c, y a partir de ésta, la profundidad del bloque equivalente ($0.85c$ en este caso) y la fuerza de compresión en el concreto, C_c. Para el estado de deformaciones supuesto, los dos lechos superiores de acero trabajan a compresión, y el lecho inferior a tensión. La suma algebraica de todas las fuerzas que actúan en la sección, da el valor de la fuerza normal, P, que resulta de compresión, y la suma de momentos alrededor del eje geométrico es el momento flexionante resistente, M. De esta manera se obtiene el punto de falla balanceada.

A continuación se calcula un punto cercano al punto M, de la figura 6.2, o sea, al de momento sin carga axial.

Para obtener el punto M, con precisión, sería necesario hacer varios tanteos hasta igualar las fuerzas de compresión con las de tensión, como en la determinación de la resistencia a flexión (capítulo 5); basta con obtener un punto cercano. En el caso de este punto (punto 3), se fijó la profundidad del eje neutro, y por triángulos semejantes se determinaron las deformaciones unitarias en todos los lechos de refuerzo. Por lo demás, el procedimiento es igual al del punto anterior. Con la profundidad del eje neutro supuesta, se obtuvo una carga axial de tensión de 22.6 ton, la cual es pequeña comparada con la de los dos puntos anteriores. Esto significa que el punto está ligeramente por debajo de las abscisas. Aun cuando la carga axial hubiera resultado de magnitud considerable, el punto hubiese servido para determinar el diagrama de interacción, ya que todos los puntos calculados de la manera descrita están sobre dicho diagrama.

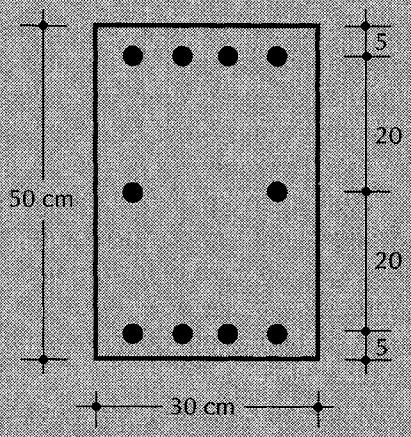
El punto 4 se calculó para tener un punto intermedio entre el punto correspondiente a compresión pura y el de falla balanceada. El estado de deformaciones supuesto es tal, que en el lecho inferior de acero se tiene una deformación nula. Esto simplifica un poco los cálculos. Por lo general, el diagrama no se aparta mucho de una línea recta en la zona considerada, y con un solo punto es suficiente para definirlo. Sin embargo, si se desea una gran precisión o si se observa que el diagrama dista mucho de ser lineal, pueden calcularse más puntos en esta zona suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedios entre los dos puntos 1 y 2. Si no se necesita una gran precisión, los puntos de carga axial pura y de falla balanceada pueden unirse con una línea recta.

Para definir el diagrama entre los puntos de falla balanceada y de flexión pura, en el ejemplo se calcularon otros dos puntos suponiendo diagramas de deformaciones unitarias intermedias. En esta zona del diagrama es necesario, por su gran curvatura, calcular dos puntos como mínimo para definirlo.

Al final del ejemplo se muestra un diagrama dibujado a escala con los valores obtenidos. Con este diagrama puede conocerse la resistencia de la sección para cualquier combinación de P y M. Para fines de ilustra-

EJEMPLO 6.1 ***Determinación del diagrama de interacción de una columna usando el bloque equivalente de esfuerzos (hipótesis ACI 318-02).***

DATOS

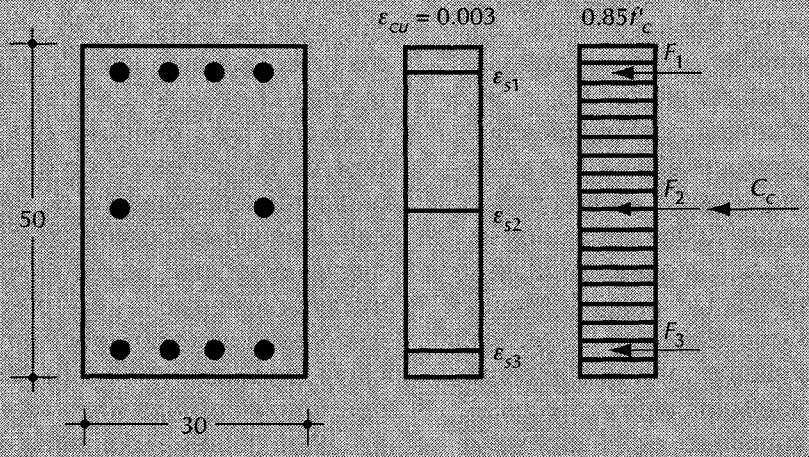


$f'_c = 200$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

A_s = 10 barras del No. 8

OBTENCIÓN DE P_{oc} (PUNTO 1)



$P_{oc} = 0.85\, f'_c\, A_g + A_s f_y = C_c + F_1 + F_2 + F_3$ (ecuación 4.1)

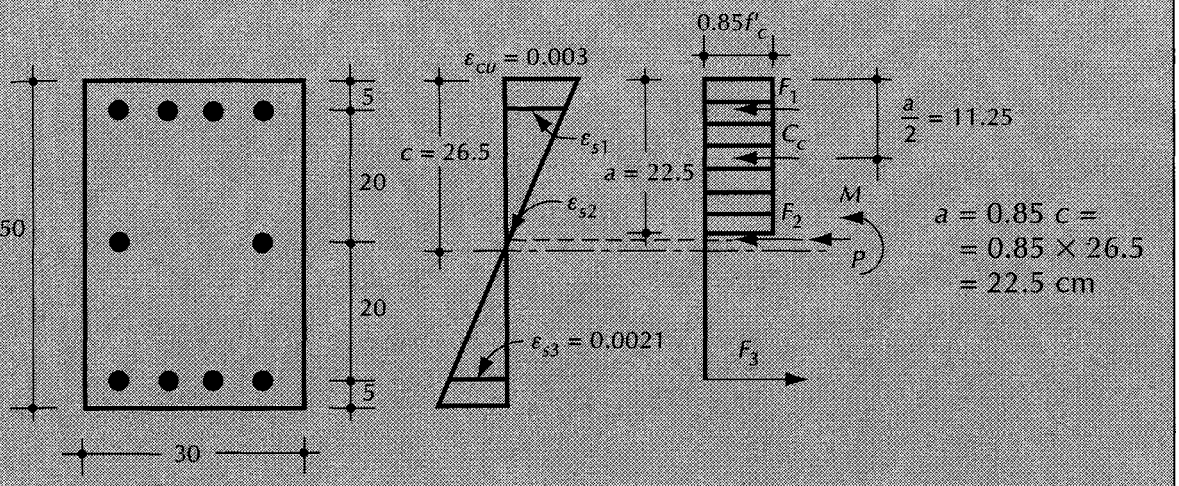
$P_{oc} = 0.85 \times 200 \times 30 \times 50 + 50 \times 4200$

$P_{oc} = 255{,}000 + 210{,}000 = 465{,}000$ kg

$P_{oc} = 465$ ton

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

OBTENCIÓN DEL PUNTO DE FALLA BALANCEADA (PUNTO 2)



Por triángulos semejantes:

$$c = \frac{\varepsilon_{cu} \times d}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_{s3}} = \frac{0.003 \times 45}{0.0051} = 26.5 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 21.5}{26.5} = 0.00243 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 1.5}{26.5} = 0.000170 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s3} = 0.0021 = \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s2} = E_s\, \varepsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00017 = 340 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s3} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1}\, f_{s1} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$
$F_2 = A_{s2}\, f_{s2} = 10 \times 340 = 3400 \text{ kg} = 3.4 \text{ ton}$
$F_3 = A_{s3}\, f_{s3} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84.0 \text{ ton}$

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 f'_c\, ab = 0.85 \times 200 \times 0.85 \times 26.5 \times 30 = 114{,}880 \text{ kg} = 114.9 \text{ ton}$

Cálculo de P:

$P = C_c + F_1 + F_2 - F_3 = 114.9 + 84.0 + 3.4 - 84.0 = 118.3 \text{ ton}$

Cálculo de M:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)*	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 114.9$	13.75	1580
$F_1 = 84.0$	20.0	1680
$F_2 = 3.4$	0.0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1680

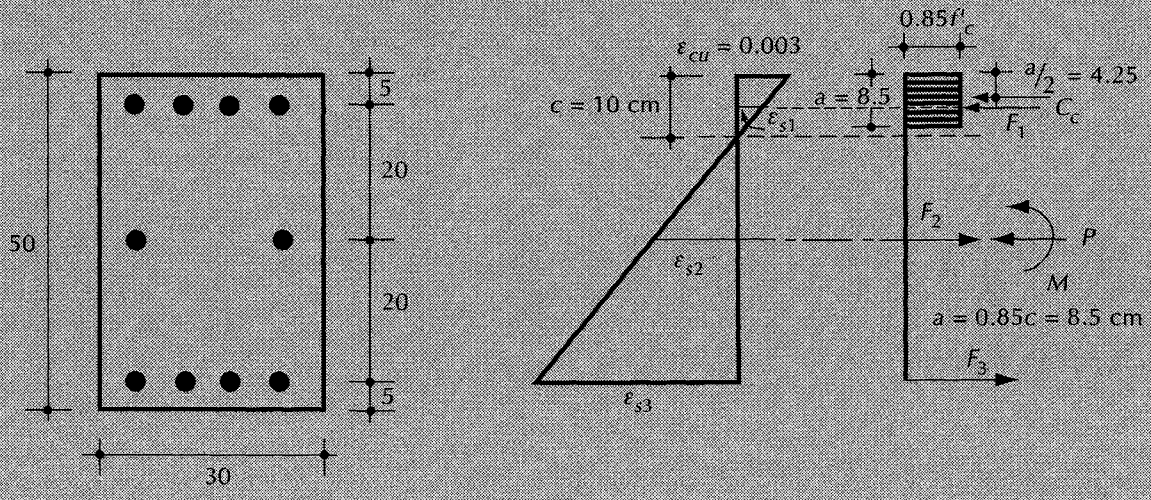
**Distancias a un eje que pasa por el medio peralte.*

$M = 4940$ ton-cm

Para el punto 2:

$P = 118.3$ ton
$M = 49.4$ ton-m

DETERMINACIÓN DE UN PUNTO CERCANO A M_o (PUNTO 3)



Se supone c = 10 cm

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 5}{10} = 0.0015 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 15}{10} = 0.0045 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 35}{10} = 0.0105 > \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = E_s \varepsilon_{s1} = 2 \times 10^6 \times 0.0015 = 3000 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s2} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s3} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 3000 = 60{,}000 \text{ kg} = 60 \text{ ton}$
$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 4200 = 42{,}000 \text{ kg} = 42 \text{ ton}$
$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 \times 200 \times 8.5 \times 30 = 43{,}400 \text{ kg} = 43.4 \text{ ton}$

Cálculo de P:

$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 43.4 + 60.0 - 42.0 - 84.0 = -22.6 \text{ ton}$

Cálculo de M:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 43.4$	20.8	900
$F_1 = 60.0$	20	1200
$F_2 = 42.0$	0	0
$F_3 = 84.0$	20	1680

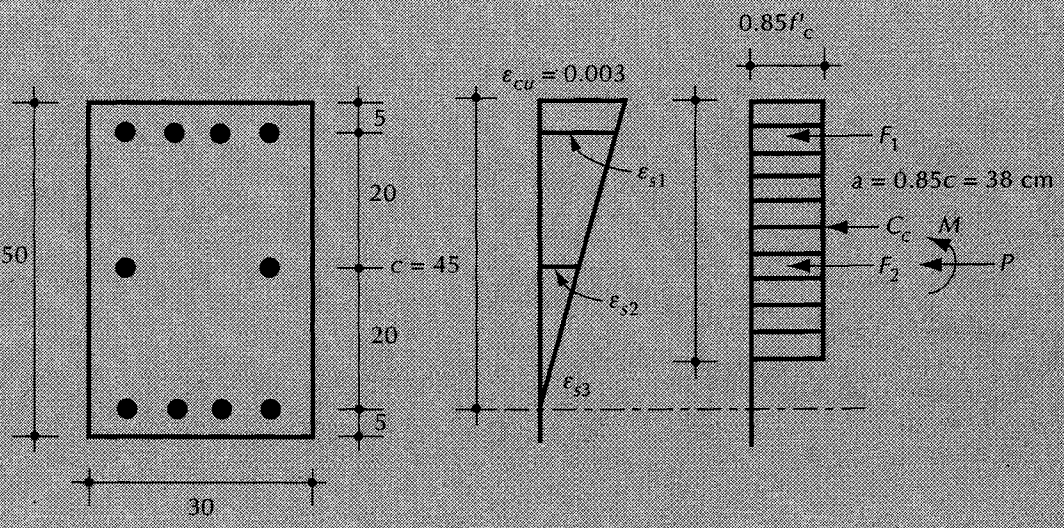
$M = 3780$ ton-cm

Para el punto 3:

$P = -22.6$ ton (tensión)
$M = 37.8$ ton-m

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

OBTENCIÓN DE UN PUNTO ENTRE EL (1) Y EL (2) (PUNTO 4)



Se supone $\varepsilon_{s3} = 0$

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 40}{45} = 0.00267 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{45} = 0.00133 < \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00133 = 2670 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s3} = 0$

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$
$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 2670 = 26{,}700 \text{ kg} = 26.7 \text{ ton}$
$F_3 = 0$

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 \times 200 \times 38 \times 30 = 194{,}000$ kg = 194 ton

Cálculo de *P*:

$P = C_c + F_1 + F_2 = 194.0 + 84.0 + 26.7 = 304.7$ ton

Cálculo de *M*:

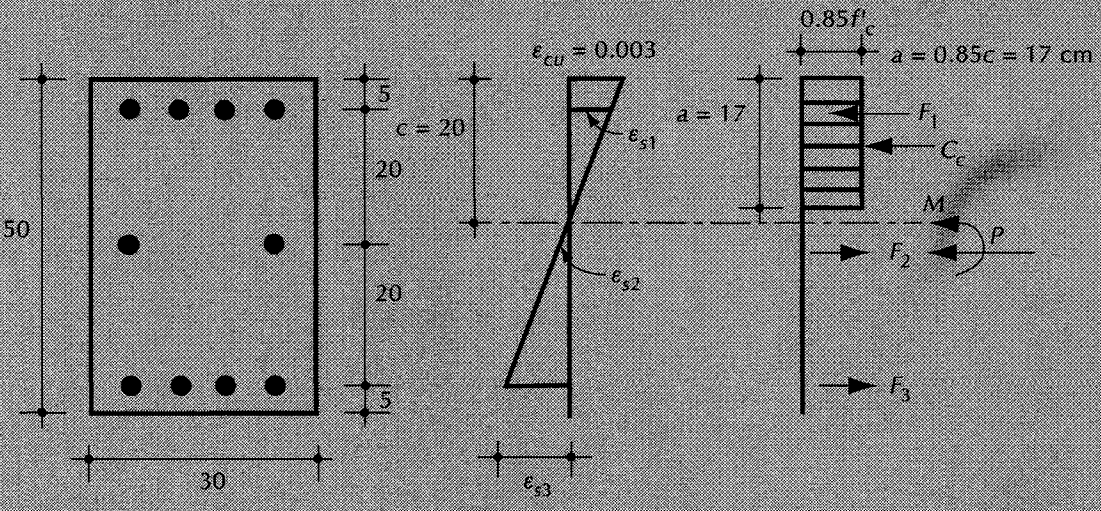
Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 194.0$	6	1164
$F_1 = 84.0$	20	1680
$F_2 = 26.7$	0	0

$M = 2844$ ton-cm

Para el punto 4:

$P = 304.7$ ton
$M = 28.4$ ton-m

OBTENCIÓN DEL PUNTO 5 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSIÓN



Se supone c = 20 cm

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 15}{20} = 0.00225 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 5}{20} = 0.00075 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 25}{20} = 0.00375 > \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s2} = E_s \varepsilon_{s2} = 2 \times 10^6 \times 0.00075 = 1500 \text{ kg/cm}^2$
$f_{s3} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1} f_{s1} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$
$F_2 = A_{s2} f_{s2} = 10 \times 1500 = 15{,}000 \text{ kg} = 15 \text{ ton}$
$F_3 = A_{s3} f_{s3} = 20 \times 4200 = 84{,}000 \text{ kg} = 84 \text{ ton}$

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 \times 200 \times 17 \times 30 = 86{,}700 \text{ kg} = 86.7 \text{ ton}$

Cálculo de P:

$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 86.7 + 84.0 - 15.0 - 84.0 = 71.7 \text{ ton}$

Cálculo de M:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 86.7$	16.5	1430
$F_1 = 84.0$	20.0	1680
$F_2 = 15.0$	0.0	0
$F_3 = 84.0$	20.0	1680

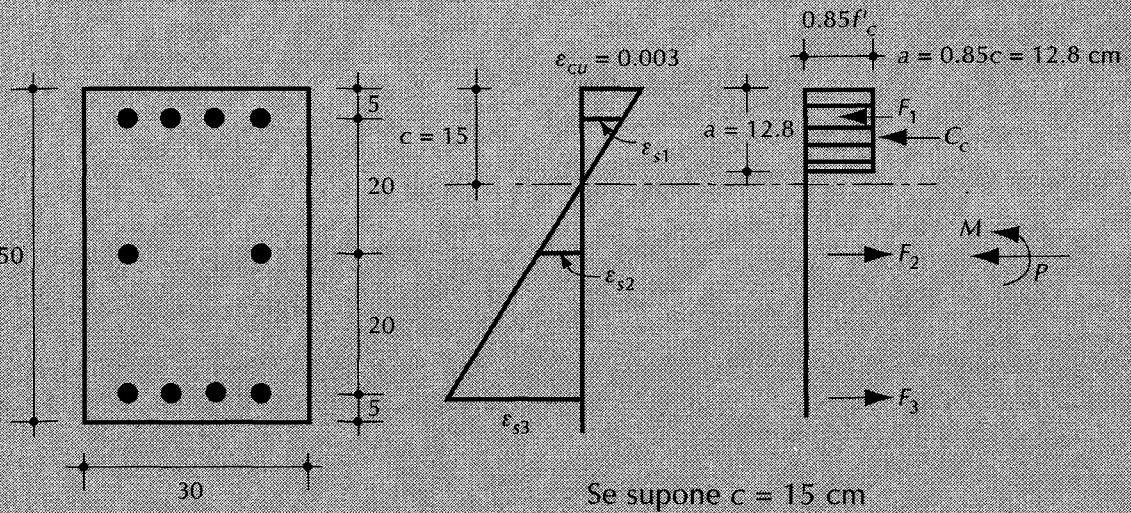
$M = 4790$ ton-cm

Para el punto 5:

$P = 71.7$ ton
$M = 47.9$ ton-m

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

OBTENCIÓN DEL PUNTO 6 EN LA ZONA DE FALLA POR TENSIÓN



Se supone $c = 15$ cm

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 10}{15} = 0.0020 < \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s3} = \frac{0.003 \times 30}{15} = 0.0060 > \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = 4000$ kg/cm^2
$f_{s2} = 4000$ kg/cm^2
$f_{s3} = f_y = 4200$ kg/cm^2

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1}\, f_{s1} = 20 \times 4000 = 80{,}000$ kg $= 80$ ton
$F_2 = A_{s2}\, f_{s2} = 10 \times 4000 = 40{,}000$ kg $= 40$ ton
$F_3 = A_{s3}\, f_{s3} = 20 \times 4200 = 84{,}000$ kg $= 84$ ton

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 \times 200 \times 12.8 \times 30 = 65{,}300$ kg $= 65.3$ ton

Cálculo de P:

$P = C_c + F_1 - F_2 - F_3 = 65.3 + 80 - 40 - 84 = 21.3$ ton

EJEMPLO 6.1 ***(continuación)***

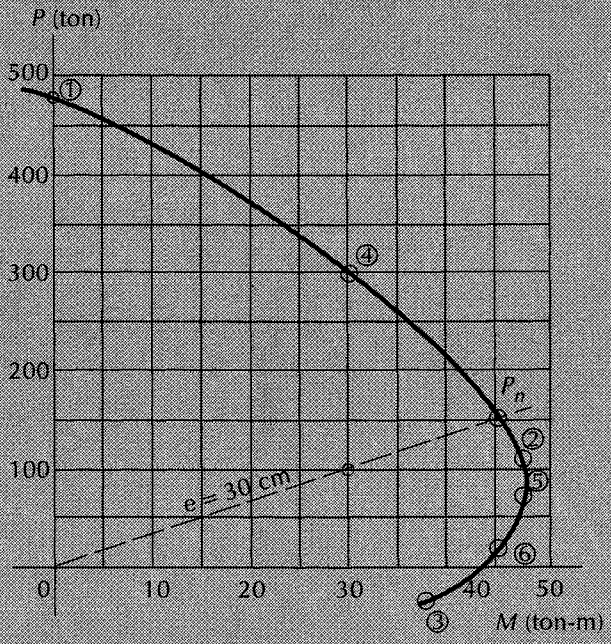
Cálculo de M:

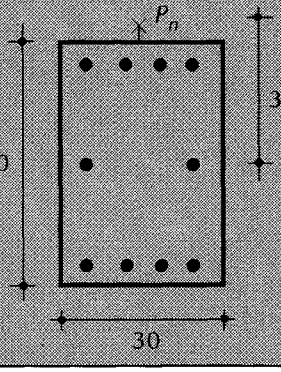
Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 65.3$	18.6	1215
$F_1 = 80$	20.0	1600
$F_2 = 40$	0.0	0
$F_3 = 84$	20.0	1680

$M = 4495$ ton-cm

$P = 21.3$ ton
$M = 44.9$ ton-m

Para el punto 6:





$P_n = ?$

$e = 30 \text{ cm} = \dfrac{M}{P}$

Para fijar la línea que corresponde a $e = 30$ cm, se supone un valor cualquiera de P y se determina el de M: si $P = 100$ ton, $M = 30$ ton-m.

Se determina ahora la intersección de la línea con el diagrama de interacción:

$P_n = 150$ ton

ción, al final del ejemplo 6.1 se muestra la obtención de la resistencia de la columna cuando la carga actúa con una excentricidad de 30 cm.

La carga obtenida de esta manera es la resistencia nominal de la columna usada en el ejemplo, P_n. Para obtener la carga de diseño, sería necesario multiplicar la carga anterior por el factor de reducción de resistencia, ϕ. El Reglamento ACI 318-02 especifica valores de ϕ que dependen del tipo de falla. Si el elemento falla en un punto del diagrama de interacción que corresponde a falla por compresión, o sea, por arriba del punto D de la figura 6.2, el valor es de 0.70 para refuerzo helicoidal y 0.65 para otro tipo de refuerzo. Si el miembro falla en flexión pura o cerca de la falla en flexión pura, el valor es de 0.90. Para fallas comprendidas entre los puntos anteriores, se interpola linealmente. En la figura 6.4 se ilustran estas disposiciones. Para la zona de falla por compresión, el valor de la deformación unitaria en el lecho de acero más cercano a la zona de tensión, ε_t (ver figura 5.13), es de 0.002, que corresponde a la falla balanceada.[1] Se considera que el miembro falla en flexión pura, o cerca de la flexión pura, si la deformación ε_t es igual o mayor a 0.005, y la zona de transición es la correspondiente a falla en tensión del diagrama de interacción, o sea, entre los puntos M_o y D de la figura 6.2. En la figura 6.4 se muestran las ecuaciones que corresponden a la interpolación en la zona de transición.

El procedimiento descrito anteriormente puede aplicarse a secciones de otras formas y con diferentes hipótesis simplificadoras.

[1] El valor de 0.002 se obtiene en unidades inglesas dividiendo el esfuerzo de fluencia del acero, 60,000 psi, entre el módulo de elasticidad del acero de 30×10^6 psi. En sistema métrico, el valor es de 0.0021. Los valores son para acero grado 60 en unidades inglesas y con 4200 kg/cm^2 de esfuerzo de fluencia en sistema métrico. En la figura 6.4 se ha respetado el valor obtenido con unidades inglesas.

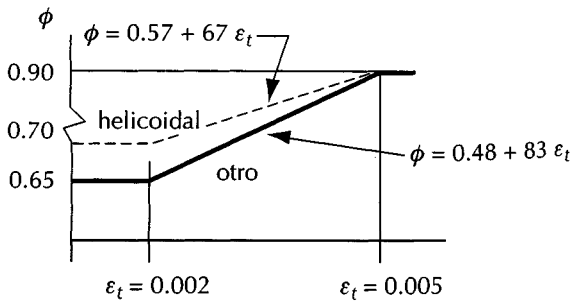


Figura 6.4 Valores del factor de reducción, ϕ, en la transición entre fallas por compresión y fallas por flexión.

También puede aplicarse definiendo las características geométricas y mecánicas de la sección por medio de literales, lo cual tiene la ventaja de que se obtienen diagramas adimensionales que sirven para cualquier sección de esas características. Esto se ha hecho tanto con las hipótesis del Reglamento ACI 318-02 como con las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal, para obtener diagramas de interacción de uso general. En el Apéndice C se presentan algunos calculados por el autor [6.2], aplicando las hipótesis del Distrito Federal, para secciones rectangulares y circulares. Estos diagramas cubren la mayoría de las secciones que se encuentran normalmente y simplifican de manera notable el cálculo de resistencias a flexocompresión y flexotensión. Sólo es necesario calcular el diagrama de una sección dada cuando dicha sección difiere mucho de las que aparecen en los diagramas adimensionales disponibles y la precisión que se obtiene interpolando no es suficiente.

En la referencia 6.1 se proporcionan diagramas de interacción adimensionales basados en las hipótesis del Reglamento ACI 318-77, que son semejantes a las del Reglamento ACI 318-02.

La obtención de diagramas de interacción adimensionales como los de las referencias 6.1 y 6.2 se hace normalmente con la

ayuda de computadoras. Esto permite calcular fácilmente un gran número de puntos de cada diagrama, por lo que éstos quedan perfectamente definidos.

Otra manera de resolver el problema con ayuda de computadoras, es disponer de un programa que trace el diagrama de interacción de una sección definida. Ahora que se dispone de equipos de buena capacidad en oficinas y hasta en el hogar, este método resulta más ventajoso. En la referencia 6.5 se presenta un programa para este fin.

El cálculo de resistencias utilizando diagramas de interacción adimensionales se ilustra en el ejemplo 6.2. Se trata de obtener la carga excéntrica, P_u, que se puede aplicar a la columna circular mostrada, lo que equivale a aplicarle una carga axial, P_u, y un momento flexionante, $P_u e$. El ejemplo está resuelto con los diagramas adimensionales del Apéndice C y con el sistema SI de unidades.

En primer término se obtuvo la relación d/D, que resultó 0.75, por lo que se debe usar la gráfica C.17 que corresponde a esta relación. De acuerdo con los datos del problema, es posible conocer los valores de e/D, y de q. Con el primero se puede escoger la línea radial correspondiente, y con el segundo, el diagrama de interacción. Para este problema, el valor de e/D calculado es muy cercano a la línea radial que tiene el valor 0.60, y el valor de q nos indica que debemos considerar un diagrama de interacción intermedio entre los dibujados para q = 0.4 y q = 0.6, más cercano al segundo que al primero. La intersección de la radial y el diagrama de interacción define un punto cuya ordenada, K, tiene un valor de 0.18. A partir de este valor, se puede calcular la carga P_u como se muestra en el ejemplo.

Ya que en el ejemplo se han usado las NTC-04, debe incluirse, en el cálculo de P_u, el factor de reducción F_R. Las NTC-O4 señalan que, para flexocompresión, se tomará un valor de 0.8 cuando el núcleo esté confinado por un zuncho y también cuando el elemento falle en tensión, y un valor de 0.7 cuando el núcleo no esté confinado y la falla sea en compresión. En el ejemplo, la falla es en compresión, ya que la interacción de la línea radial y del diagrama de interacción queda situada ligeramente arriba del punto de falla balanceada del diagrama de interacción. Por esta razón, y porque no se especifica el zuncho, se tomó $F_R = 0.7$.

6.3.2 Obtención de la resistencia por tanteos utilizando hipótesis simplificadoras

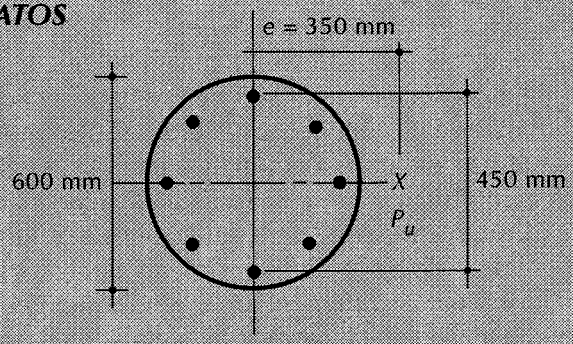
El procedimiento descrito en la sección anterior, que consiste en obtener la resistencia a partir del diagrama de interacción, es apropiado cuando se va a determinar la resistencia de una sección para distintas combinaciones de P y M, o para distintas excentricidades de la carga aplicada. Cuando se trata de calcular la resistencia para una sola combinación de P y M, resulta más conveniente el procedimiento de tanteos descrito en esta sección.

Este procedimiento consiste en calcular los valores de P y de M para una configuración supuesta de deformaciones unitarias, de la misma manera que en el ejemplo 6.1. Se determina después la excentricidad, $e = M/P$, y se compara con la excentricidad de la carga externa. Si coinciden las dos excentricidades, el problema está resuelto, y si no coinciden, se hacen otros tanteos cambiando la configuración de deformaciones unitarias hasta lograr la coincidencia. Se ve que el procedimiento es básicamente el mismo que el usado en el capítulo 5 para calcular la resistencia en flexión. La diferencia estriba en que para flexión se procede a tantear hasta que C sea igual a T (lo cual equivale a la condición P = 0 y e = ∞), mientras que para flexocompresión se tantea hasta que M/P sea igual a la excentricidad buscada.

En el ejemplo 6.3 se ilustra este procedimiento aplicado a una sección rectangular con refuerzo asimétrico. El ejemplo se ha resuelto mediante las hipótesis simplificadoras del Reglamento ACI 318-02. En el primer tan-

EJEMPLO 6.2 ***Obtención de la resistencia de una columna circular utilizando los diagramas de interacción del Apéndice C. NTC-04. Sistema SI.***

DATOS



$f'_c = 25$ MPa

$f_y = 420$ MPa

$A_s = 8$ barras No. 10

$A_s = 6340$ mm^2

OBTENCIÓN DE LA RESISTENCIA

$$\frac{d}{D} = \frac{450}{600} = 0.75$$

Se utiliza la gráfica C.17

$$\frac{e}{D} = \frac{350}{600} = 0.58$$

$$\rho = \frac{4\,A_s}{\pi\,D^2} = \frac{4 \times 6340\ (\text{mm}^2)}{\pi \times 600^2\ (\text{mm}^2)} = 0.022$$

$$f''_c = 0.68\,f'_c = 0.68 \times 25 = 17\ \text{MPa}$$

$$q = \rho\,\frac{f_y}{f''_c} = \frac{0.022 \times 420}{17} = 0.54$$

De la gráfica C.17: $K = 0.18$

$$P_u = KF_R\,D^2\,f'_c$$

$$P_u = 0.18 \times 0.7 \times 600^2\ (\text{mm}^2) \times 25\ (\text{MPa}) = 1.13 \times 10^6\ (\text{MPa})\ (\text{mm}^2)$$

$$\boxed{P_u = 1.13 \times 10^6\ \text{N}}$$

teo, la excentricidad que corresponde a los valores obtenidos de las acciones internas P y M es de 31.7 cm, la cual difiere de la excentricidad de la carga, que es de 40 cm, como se indica en los datos del problema. Para aumentar la excentricidad, en el segundo tanteo se disminuyó la profundidad del eje neutro, con lo que la excentricidad resultante coincidió con la excentricidad dada como dato. La carga que puede resistir la sección, por consiguiente, es el valor de P_n obtenido en el segundo tanteo, o sea 103.9 ton. La carga de diseño se obtendría multiplicando este valor de P_n por el factor de reducción @De acuerdo con las ecuaciones de la figura 6.4, para este caso de una columna de estribos, ϕ sería igual a 0.48 + 83 ε_t

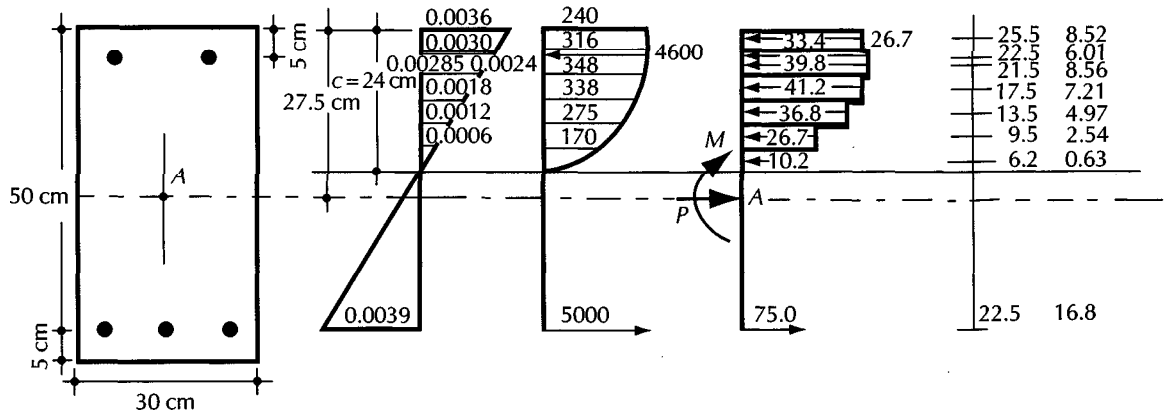
$$\phi = 0.48 + 83 \times 0.00375 = 0.79$$

ya que la deformación unitaria en el lecho de acero más cercano a la cara de tensión es $\varepsilon_{s2} = 0.00375$.

6.3.3 Procedimiento general

En las secciones anteriores se ha indicado la manera de obtener las acciones internas máximas en una sección, utilizando hipótesis simplificadoras referentes a la deformación unitaria máxima útil del concreto y al diagrama de esfuerzos de compresión. Es posible emplear también el procedimiento general descrito en la sección 5.6 para el caso de flexión, el cual es aplicable para cualquier diagrama esfuerzo-deformación tanto del concreto como del acero.

En la figura 6.5 se ilustra la obtención de los valores de P_n y M, para una sección deter-



A'_s = 2 barras No. 6 = 5.8 cm^2

A_s = 3 barras No. 8 = 15 cm^2

Sección transversal	Distribución supuesta de deformaciones unitarias	Esfuerzos (kg/cm^2)	Fuerzas (ton)	Brazos (cm)	Momentos (ton-m)
(a)	*(b)*	*(c)*	*(d)*	*(e)*	*(f)*

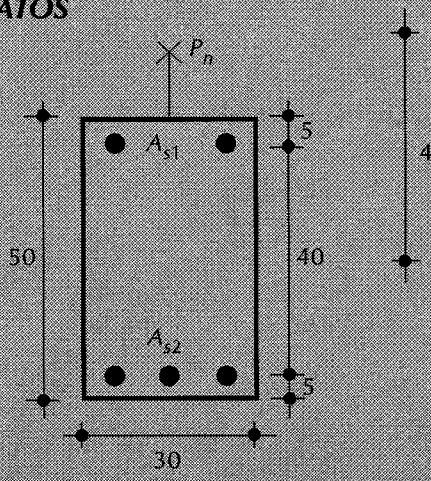
$\Sigma F = P_n = 139.8$ ton $\qquad \Sigma M_A = M_n = 55.32$ ton-m

excentricidad = $e = M_n/P_n = 39.5$ cm

Figura *6.5* Evaluación de acciones interiores.

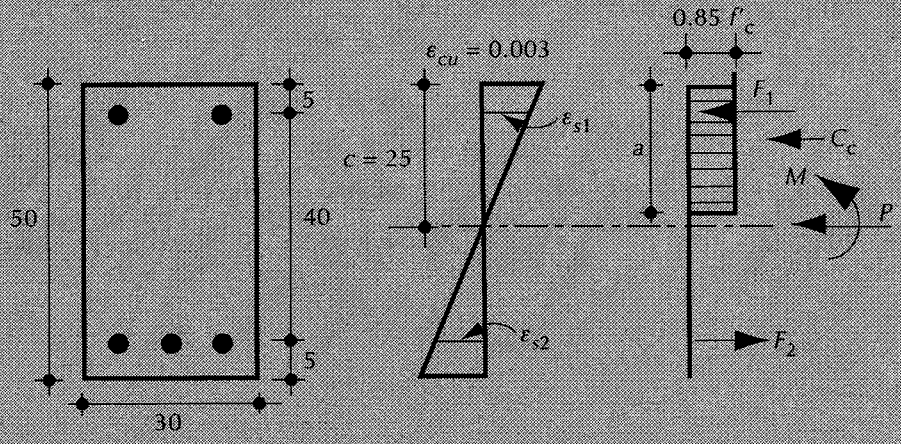
EJEMPLO 6.3 ***Obtención de la resistencia de una sección por tanteos.***

DATOS



$f'_c = 350$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$e = 40$ cm
A_{s1} = 2 barras del No. 6 = 5.7 cm^2
A_{s2} = 3 barras del No. 8 = 15 cm^2

1er tanteo (c = 25 cm)



$$a = \left(1.05 - \frac{f'_c}{1400}\right) c = \left(1.05 - \frac{350}{1400}\right) 25 = 0.8\, c = 20 \text{ cm}$$ (figura 5.6)

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 20}{25} = 0.0024 < \varepsilon_y$$

EJEMPLO 6.3 ***(continuación)***

Esfuerzos en el acero:

$f_{s1} = f_{s2} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$

Fuerzas en el acero:

$F_1 = A_{s1}\, f_{s1} = 5.7 \times 4200 = 23{,}900 \text{ kg} = 23.9 \text{ ton}$
$F_2 = A_{s2}\, f_{s2} = 15 \times 4200 = 63{,}000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$

Fuerza en el concreto:

$C_c = 0.85 \times 350 \times 20 \times 30 = 178{,}500 \text{ kg} = 178.5 \text{ ton}$

$P = C_c + F_1 - F_2 = 178.5 + 23.9 - 63.0 = 139.4 \text{ ton}$

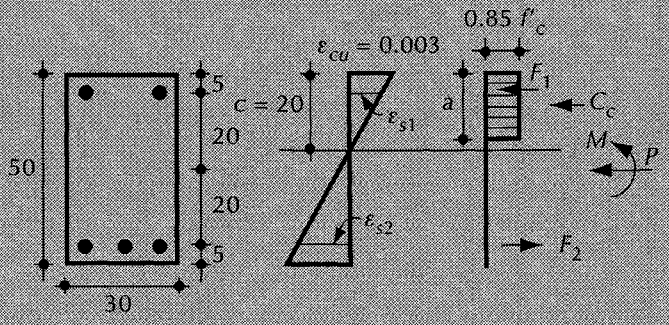
Cálculo del momento:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 178.5$	15	2677
$F_1 = 23.9$	20	478
$F_2 = 63.0$	20	1260

$M = 4415$ ton-cm

$$e = \frac{M}{P} = \frac{4415}{139.4} = 31.7 \text{ cm} \neq 40 \text{ cm}$$

2º tanteo (c = 20 cm)



$a = 0.8c = 0.8 \times 20 = 16 \text{ cm}$ (figura 5.6)

EJEMPLO 6.3 ***(continuación)***

Por triángulos semejantes:

$$\varepsilon_{s1} = \frac{0.003 \times 15}{20} = 0.00225 > \varepsilon_y$$

$$\varepsilon_{s2} = \frac{0.003 \times 25}{20} = 0.00375 > \varepsilon_y$$

Esfuerzos en el acero:

$$f_{s1} = f_{s2} = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

Fuerzas en el acero:

$$F_1 = A_{s1}\, f_{s1} = 5.7 \times 4200 = 23{,}900 \text{ kg} = 23.9 \text{ ton}$$
$$F_2 = A_{s2}\, f_{s2} = 15 \times 4200 = 63{,}000 \text{ kg} = 63.0 \text{ ton}$$

Fuerza en el concreto:

$$C_c = 0.85 \times 350 \times 16 \times 30 = 143{,}000 \text{ kg} = 143 \text{ ton}$$
$$P_n = C_c + F_1 - F_2 = 143.0 + 23.9 - 63.0 = 103.9 \text{ ton}$$

Cálculo del momento:

Fuerza (ton)	*Brazo* (cm)	*Momento* (ton-cm)
$C_c = 143.0$	17	2430
$F_1 = 23.9$	20	478
$F_2 = 63.0$	20	1260

$M = 4168$ ton-cm

$$e = \frac{M_n}{P_n} = \frac{4168}{103.9} = 40 \text{ cm}$$

Este valor coincide con la excentricidad de la carga. Por lo tanto:

$$P_n = 103.9 \text{ ton}$$

minada suponiendo el estado de deformaciones unitarias indicado en la figura 6.5*b*. Las curvas esfuerzo-deformación del concreto y del acero son las de la figura 5.19 (capítulo 5). Aplicando el procedimiento para distintas configuraciones de deformaciones unitarias, se obtuvo el diagrama de interacción de la figura 6.6.

Debe observarse que, para obtener los valores correspondientes a las resistencias, es necesario hacer tanteos variando la deformación máxima en el concreto, pero manteniendo la excentricidad constante, hasta obtener un valor máximo de M, tal como se hizo en la sección 5.6 en el caso de flexión simple. De ahí que en la figura 6.6 los diagramas de deformaciones unitarias correspondientes a los distintos puntos del diagrama de interacción mostrados, tienen diferentes valores de deformación máxima en compresión.

6.4 Elementos con dos planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera

6.4.1 Solución por tanteos

El problema consiste en encontrar el valor máximo de la carga axial P que actúa fuera de los planos de simetría, a distancias e_x y e_y de ellos. Esta condición es estáticamente equivalente a considerar el elemento sujeto a una carga axial P y a dos momentos flexionantes, $M_x = Pe_x$ y $M_y = Pe_y$.

Para un elemento de geometría y excentricidades dadas, aplicando las hipótesis simplificadoras o el procedimiento básico a partir de características esfuerzo-deformación, por tanteos sucesivos se puede obtener el valor máximo de la carga P que actúa a las excentricidades dadas. En la figura 6.7 se presenta un cálculo típico para una posición supuesta del eje neutro que, junto con el valor de $\varepsilon_o = 0.003$, fija la distribución de deformaciones unitarias, las que tienen valores constantes en secciones paralelas al eje neutro supuesto. En este ejemplo, la zona sujeta a compresión tiene forma trapecial. Se calculan las fuerzas, los brazos y los momentos referidos a los ejes x y y. Se obtienen entonces valores de P, M_x y M_y para la posición supuesta del eje neutro. Si los valores de $e_x = M_x/P$ y $e_y = M_y/P$ coinciden con los dados, el problema está resuelto; si no, debe cambiarse la posición del eje neutro y repetirse el proceso hasta que se obtengan excentricidades que coincidan con las dadas. El cambio en la posición del eje neutro consistirá en general en una traslación y una rotación.

El proceso descrito predice satisfactoriamente la resistencia, pero es muy laborioso. La convergencia es lenta debido a que los valores de las excentricidades son muy sensibles a pequeñas variaciones en la posición del eje neutro. Sin embargo, para algunos casos particulares, se han desarrollado diagramas de interacción, mediante programas para computadora electrónica. En la referencia 6.4 se presentan diagramas para resolver casos de columnas rectangulares y de columnas en forma de cruz. En la siguiente sección se presenta un procedimiento aproximado.

6.4.2 Fórmula de Bresler

Bresler [6.3] ha desarrollado una expresión sumamente simple para calcular los valores máximos de la carga de compresión que actúa a excentricidades e_x y e_y en secciones rectangulares con refuerzo simétrico. La expresión que propone es:

$$\frac{1}{P_n} = \frac{1}{P_x} + \frac{1}{P_y} - \frac{1}{P_o} \qquad (6.1)$$

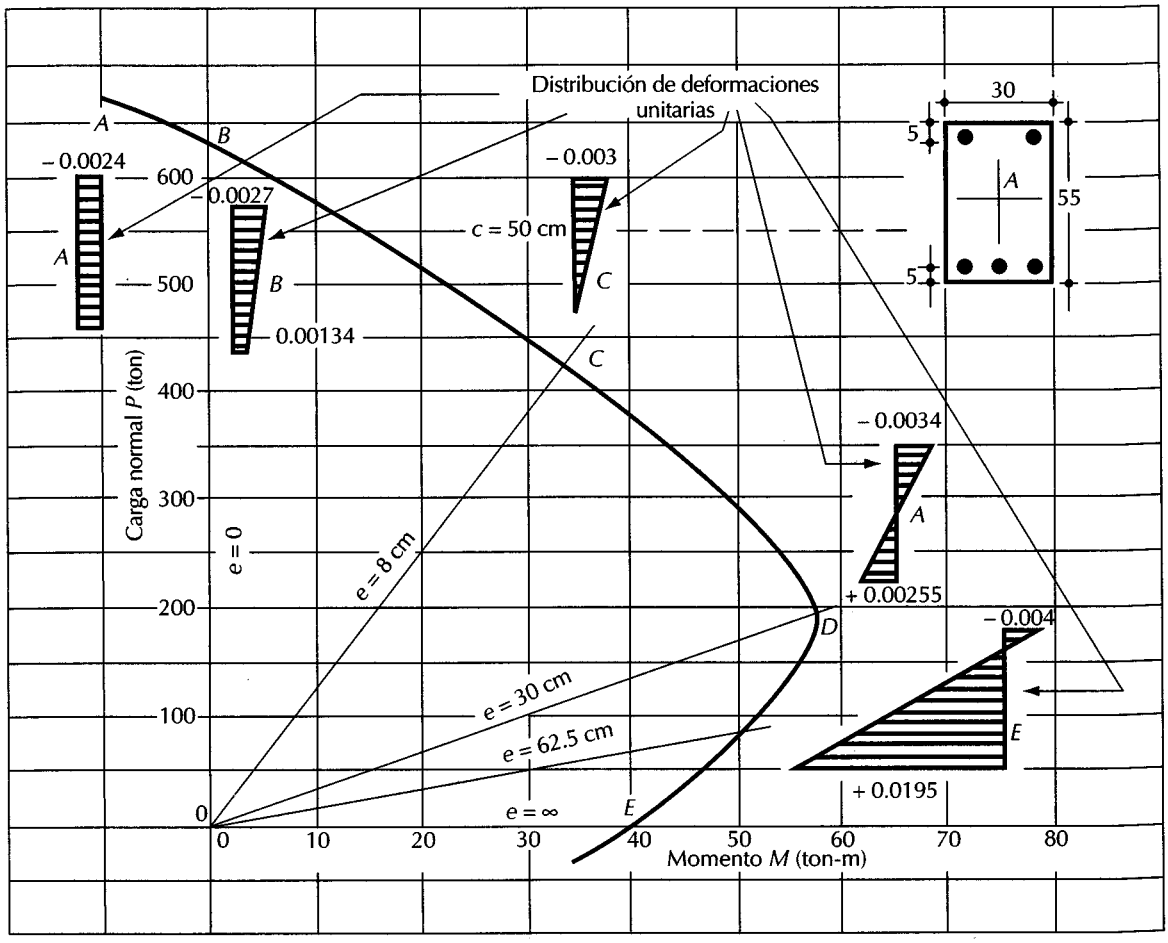


Figura 6.6 Diagrama de interacción para el elemento de la figura 6.5.

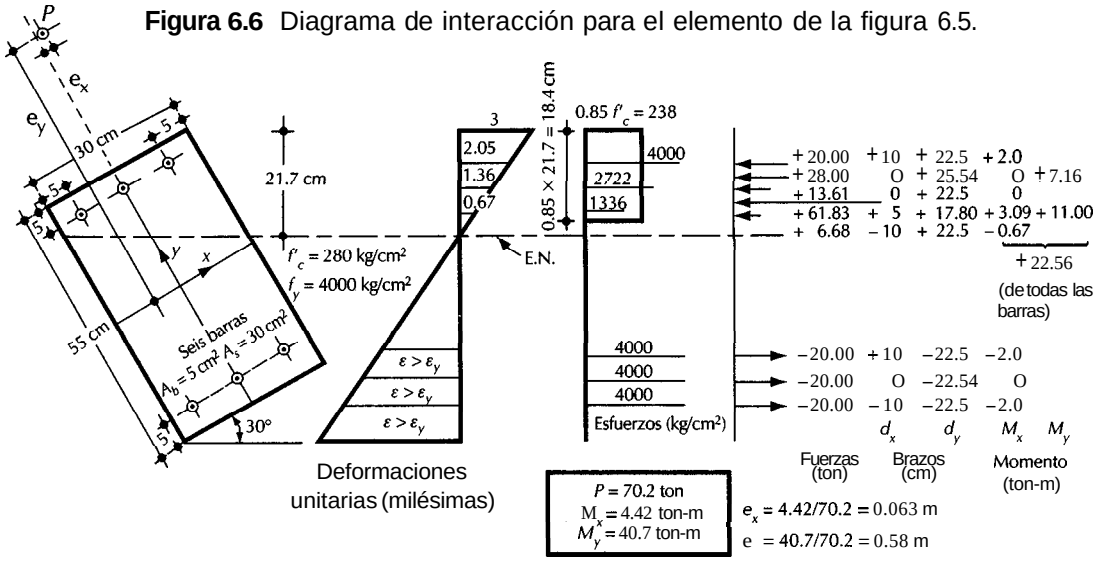


Figura 6.7 Cálculo típico para una posición cualquiera del eje neutro; flexión en dos direcciones.

donde

P_n = carga normal máxima que actúa a excentricidades e_x y e_y;
P_x = carga normal máxima a una excentricidad e_x contenida en un plano de simetría ($e_y = 0$);
P_y = carga normal máxima a una excentricidad e_y contenida en un plano de simetría normal al anterior ($e_x = 0$), y
P_o = carga axial máxima que puede resistir el elemento ($e_x = e_y = 0$).

Puede verse que la ecuación 6.1 reduce el problema a una combinación de soluciones más simples: dos de flexocompresión en un plano de simetría y una de compresión axial.

Para elementos simétricos, con una carga normal que actúe en un punto cualquiera del plano de la sección del elemento, el lugar geométrico de los valores máximos de carga axial que el elemento es capaz de resistir es una superficie de interacción (figura 6.8) cuyas trazas con los planos x y y serán los diagramas de interacción para flexión en una dirección que se han mostrado anteriormente.

La expresión propuesta por Bresler representa una familia de planos que aproximan los puntos de la superficie de interacción. Esta expresión es válida para valores de P_n mayores que 0.1 P_o, aproximadamente. La ecuación 6.1 verifica los resultados de los ensayes disponibles dentro de 20 por ciento de aproximación.

En la figura 6.7 se muestra que, para la posición del eje neutro escogida, la carga axial máxima se encuentra a $e_x = 6.3$ cm, $e_y = 58$ cm y vale 70.2 ton. Como ilustración de la aproximación que da la fórmula de Bresler, se encontraron los valores de $P_x = 295$ ton, $P_y = 78.5$ ton y $P_o = 514$ ton, usando los diagramas de interacción de la referencia 6.6, utilizando $f'_c = 238$ kg/cm^2 y $f_y = 4000$ kg/cm^2. Se encontró así $P_n = 70.5$ ton, valor que coincide con el calculado con el procedimiento general.

6.4.3 Ecuación de la superficie de falla

Otro enfoque para analizar columnas sujetas a carga axial y flexión en dos planos es el propuesto por C.T. Hsu [6.5]. Consiste en representar la superficie de interacción de la figura 6.8 por la ecuación:

$$\left(\frac{P_n - P_{nb}}{P_o - P_{nb}}\right) + \left(\frac{M_{nx}}{M_{nbx}}\right)^{1.5} + \left(\frac{M_{ny}}{M_{nby}}\right)^{1.5} = 1.0 \quad (6.2)$$

donde (ver figura 6.9):

P_n = carga axial nominal aplicada
M_{nx}, M_{ny} = momentos nominales aplicados alrededor de los ejes x y y, respectivamente
P_o = resistencia nominal a carga axial
P_{nb} = resistencia nominal a carga axial en la condición balanceada
M_{nbx}, M_{nby} = momentos nominales resistentes alrededor de los ejes x y y, respectivamente, en la condición balanceada.

Los valores de P_o, P_{nb}, M_{nbx} y M_{nby} dependen de las propiedades de la sección y pueden calcularse como ya se ha visto en este capítulo. Si los momentos M_{nx} y M_{ny} se expresan como la carga axial multiplicada por las excentricidades correspondientes, la única incógnita de la ecuación 6.2 resulta la carga axial P_n, la cual puede encontrarse resolviendo la ecuación. Aunque la incógnita queda elevada a la potencia 1.5, la ecuación puede resolverse por tanteos.

La ecuación 6.2 también puede usarse para diagramas de interacción con flexión en un solo plano haciendo nulos los términos que corresponden al eje perpendicular.

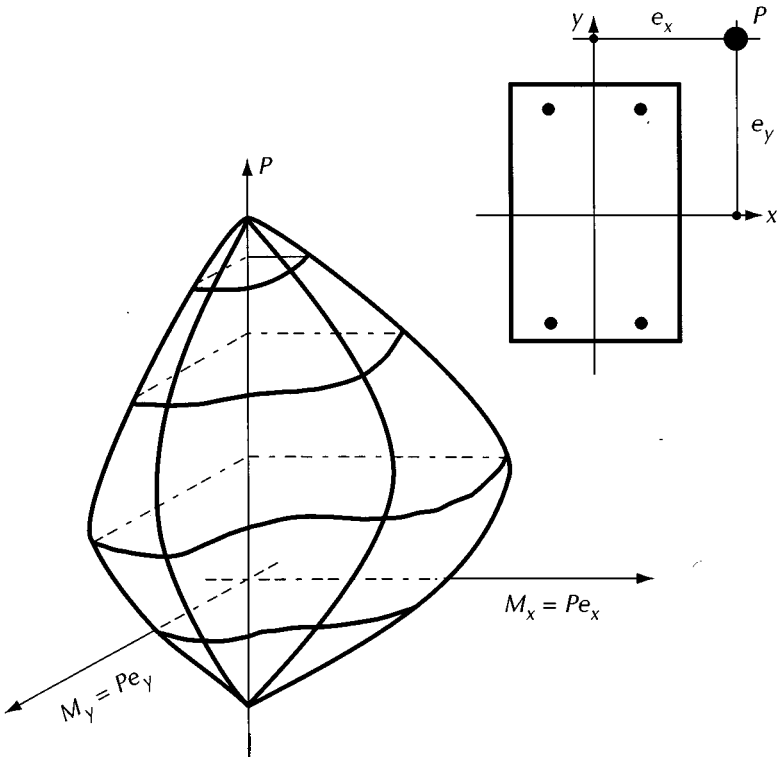


Figura 6.8 Superficie de interacción.

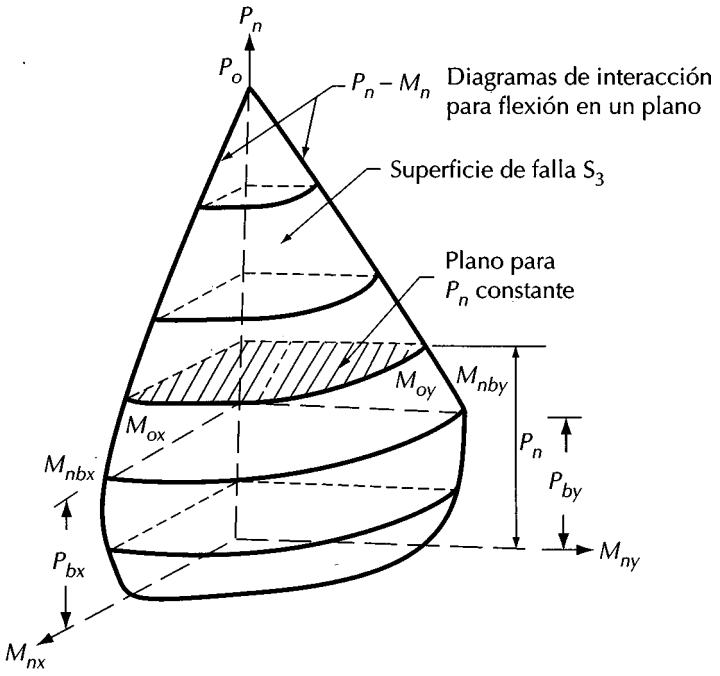


Figura 6.9 Parámetros que definen la ecuación de la superficie de falla [6.5].

Se han comparado los resultados obtenidos con este método con numerosos ensayes y se ha encontrado una excelente correlación [6.5].

6.5 Elementos sin planos de simetría sujetos a carga axial y flexión en un plano cualquiera

En este caso son aplicables tanto el procedimiento básico como las hipótesis simplificadoras. Aunque es muy complicado resolver este tipo de problemas en una forma general, es posible tratar casos particulares, definidos en geometría y refuerzo, para uno o varios planos de flexión. Un caso interesante es el de columnas en forma de L, las cuales se emplean con alguna frecuencia en las esquinas de edificios. Estas columnas vienen resueltas en la referencia 6.4.

6.6 Flexotensión

Si bien no es frecuente encontrar elementos sujetos a flexotensión, existen algunas estructuras, por ejemplo algunos depósitos, cuyos elementos están sometidos a este tipo de acción. La información experimental sobre flexotensión es muy escasa, aunque se ha encontrado que con la ecuación 6.2 se obtienen resultados que correlacionan bien con ensayes disponibles [6.5]. Sin embargo, es posible obtener diagramas de interacción en la zona de flexotensión usando los procedimientos expuestos anteriormente para flexocompresión, con ciertos efectos particulares que se describen con detalle a continuación.

Si se admiten las hipótesis simplificadoras usuales, y se considera una curva esfuerzo-deformación elastoplástica para el acero, se puede hacer la siguiente descripción cualitativa de la variación de las condiciones de deformación de un elemento sujeto a una carga de tensión con excentricidad constante, cuando la carga varía desde cero hasta llegar a un valor máximo. Las etapas de deformación se muestran en la figura 6.10.

Para valores pequeños de la excentricidad (figura 6.10*a*), las deformaciones a lo largo de la sección son todas de tensión. Una vez que el concreto se agrieta a deformaciones del orden de 0.0001, la tensión externa es resistida únicamente por el acero de refuerzo. Este estado se representa por la distribución de deformaciones 1 de la figura 6.10*a*. Al aumentar la carga, manteniendo la excentricidad constante, las tensiones en los dos lechos de acero aumentan proporcionalmente, hasta que el acero del lado de la carga alcanza su deformación de fluencia (distribución 2). Puesto que la excentricidad es fija, al no aumentar la tensión en el acero que fluye, la tensión en el acero de otro lecho permanece constante. Es decir, la línea que representa la distribución de deformaciones gira en torno al punto A, localizado en el acero menos deformado. Esta etapa continúa hasta que la deformación en la fibra superior es nula (distribución 3). Entre los estados 2 y 3, la carga externa no aumenta. Más allá del estado 3 se producen esfuerzos de compresión en la cara opuesta a la carga y se incrementa el esfuerzo en el acero de dicha cara. El incremento en tensión en este acero debe ser mayor que la compresión resultante en el concreto para que la tensión total aumente. El valor máximo de la carga se producirá cuando la deformación en el concreto alcance su valor máximo, ε_{cu}. Esta condición se representa por la distribución 4 de la figura 6.10*a*. El incremento de carga entre los estados 3 y 4 generalmente es pequeño.

La figura 6.10*b* muestra las distintas distribuciones de deformaciones resultantes al incrementar el valor de la carga, para cargas de tensión con excentricidades relativamente grandes. Para una carga pequeña (distribu-

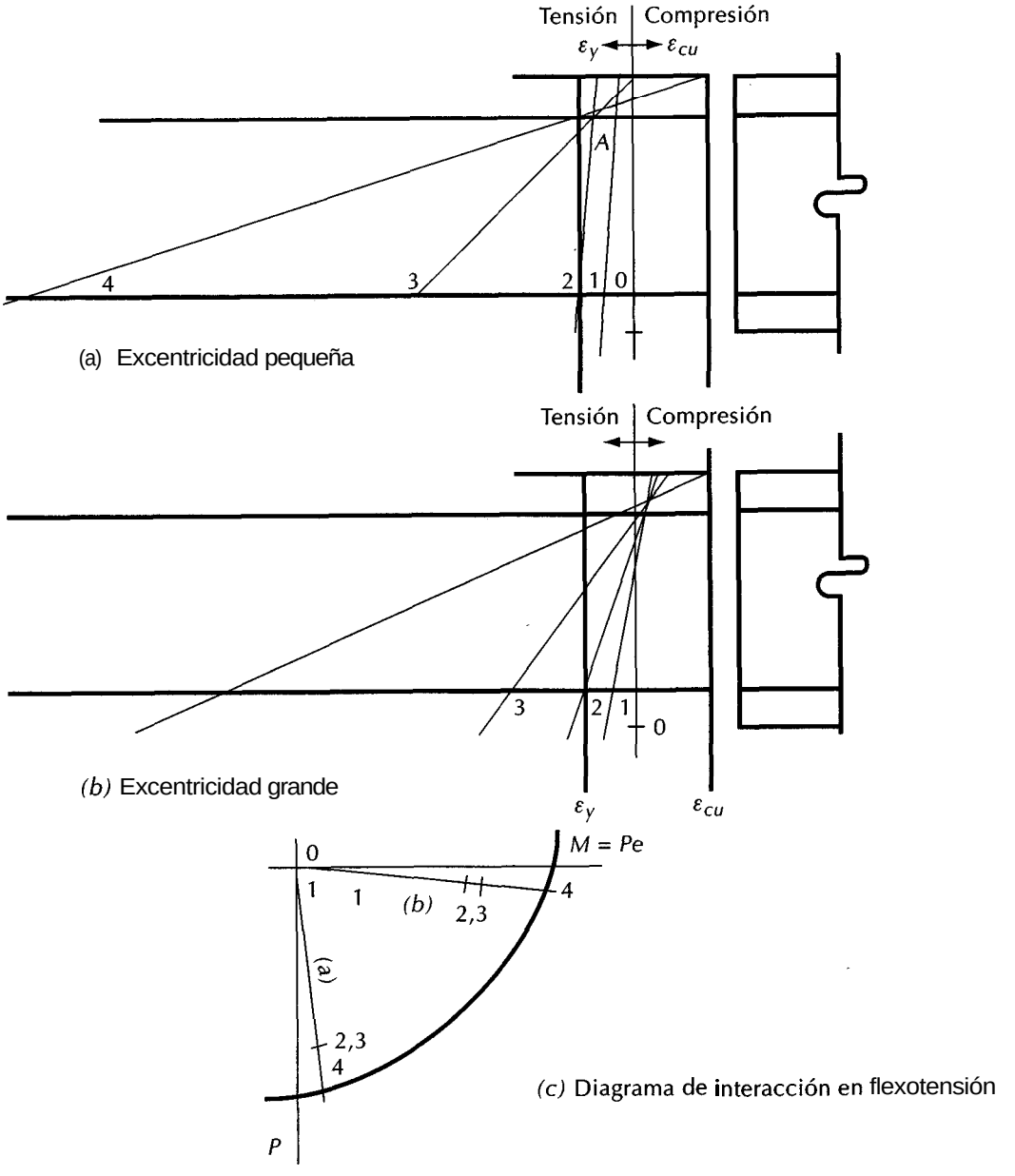


Figura 6.10 Condiciones de deformación unitaria en flexotensión en elementos sujetos a carga creciente con excentricidad constante.

ción 1) se presentan deformaciones de tensión en el lado de la carga, y de compresión en el lado opuesto. Al aumentar la carga, manteniendo la excentricidad constante, las fuerzas de compresión y de tensión resultantes deben aumentar proporcionalmente. La diferencia entre estas dos fuerzas es pequeña, ya que se trata de excentricidades grandes. Durante este proceso el eje neutro tiende a moverse hacia la cara en compresión. Se

llega así a la distribución de deformaciones 2, en que el acero del lado de tensión alcanza su esfuerzo de fluencia. Al aumentar la deformación, puesto que la tensión de dicho acero permanece constante, el incremento en la tensión total se debe a una disminución en la compresión total de la sección. Para que el incremento del momento sea proporcional al de la tensión, es necesario que la distribución de deformaciones cambie, como se muestra en el estado 3 de la figura 6.10*b*. Este proceso prosigue hasta el punto en que se alcanza la deformación máxima útil en compresión del concreto (distribución 4).

En la figura 6.10*c* se presenta un diagrama típico de interacción para la zona de flexotensión. Se indican en él los puntos correspondientes a las distintas distribuciones de deformaciones que se han mencionado arriba.

Si el acero del lado opuesto a la carga está muy cerca de la superficie (lo que ocurre por relaciones pequeñas de recubrimiento a peralte), prácticamente no hay diferencia entre los valores de P que se obtienen de los estados 2, 3 y 4. Por el contrario, si la relación recubrimiento-peralte es grande, puede haber diferencias del orden del diez por ciento entre las tensiones correspondientes a los estados 2 y 4.

La descripción anterior es simplista, pero de ella se concluye que las hipótesis simplificadoras son aplicables hasta un estado de tensión pura. En este caso, la tensión máxima que se puede desarrollar es la que resiste el acero, $P = A_s f_y$, ya que el concreto no resiste las deformaciones correspondientes.

De acuerdo con la descripción anterior, la resistencia en flexotensión se alcanza cuando el concreto se aplasta en compresión en un lado, al mismo tiempo que las deformaciones en tensión en el lado opuesto son considerables. La posibilidad de una fractura del acero a una carga menor es pequeña, ya que la deformación de fractura del acero es del orden de 30 a 100 veces la deformación máxima de compresión del concreto, para aceros torcidos en frío y aceros laminados ordinarios, respectivamente.

En estos cálculos se desprecia generalmente el endurecimiento debido a la deformación del acero de refuerzo. De tomarse en cuenta, cambiarían ligeramente los valores correspondientes de P y M, pero al despreciarlos se obtienen resultados del lado de la seguridad.

En resumen, aplicando rigurosamente las hipótesis simplificadoras se puede trazar fácilmente el diagrama de interacción, haciendo variar el valor de la carga normal desde un máximo en compresión hasta un máximo en tensión. A modo de ejemplo se ha hecho esto para una sección con igual área de acero en dos caras opuestas, utilizando las hipótesis ACI. El diagrama de interacción correspondiente se muestra en la figura 6.11, donde se consignan también los datos de la sección. El diagrama se trazó obteniendo parejas de valores (M, P) para distintas distribuciones de deformaciones unitarias.

Las líneas que representan estos estados de deformación giran todas alrededor del punto sobre la fibra superior en la cara de compresión que corresponde a una deformación máxima de compresión del concreto, $\varepsilon_{cu} = 0.003$. Se puede observar que el diagrama de interacción en la zona de flexotensión sigue lógica y continuamente el trazo para flexocompresión, hasta llegar a un valor igual a $A_s f_y$ para el caso de tensión pura.

El diagrama de la figura 6.11 representa entonces el lugar geométrico de los valores máximos de carga normal que puede ser aplicada a una sección simétrica cuando la excentricidad de la carga con respecto al centroide geométrico de la sección varía desde cero (punto 1), hasta infinito (punto 3) para una carga de compresión, y desde infinito nuevamente hasta una excentricidad nula (punto 5), para una carga de tensión.

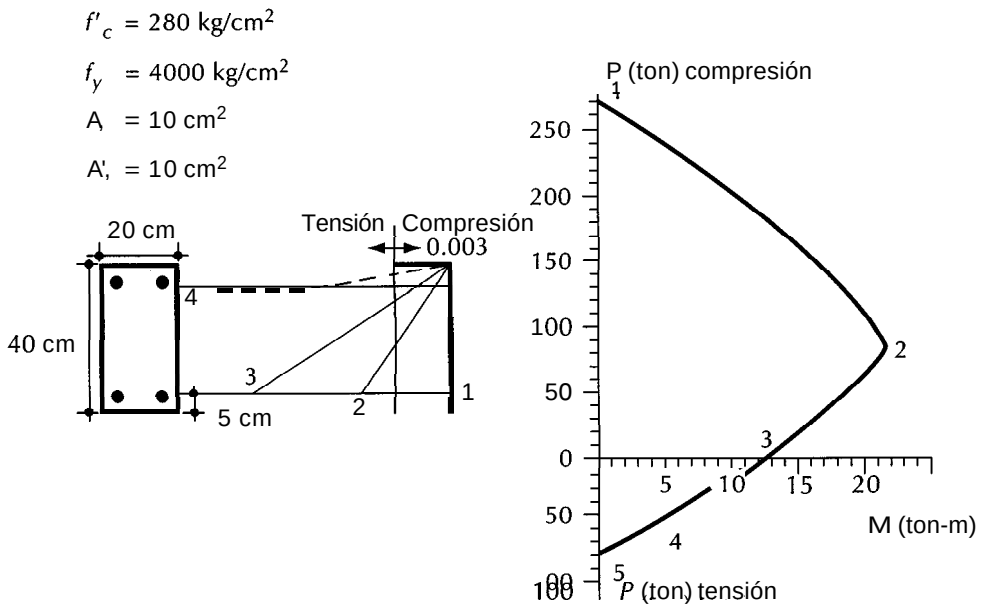


Figura 6.11 Diagrama de interacción para una sección simétrica (hipótesis ACI).

Referencias

6.1 Comité ACI 340. Design Handbook: One-Way Slabs, Brackets, *Footings,* Pile Caps, Columns, Two-Way Slabs, and Seismic Design in Accordance with the Strength Design Method of 318-95, SP-017, Detroit, 1997.

6.2 González Cuevas, O., y J. Cano Licona. "Programa de cómputo para calcular la resistencia de elementos de concreto sujetos a flexocompresión". Universidad Autónoma Metropolitana, México, 2003.

6.3 Bresler, B. "Design Criteria for Reinforced Concrete Columns under Axial Load and Biaxial Bending". *Journal* of the American Concrete *Institute*. Detroit, enero 1961.

6.4 Marín, J. "Ábacos, fórmulas y criterios para el cálculo de columnas de edificios de concreto armado". Boletín IMME. Caracas, enero-junio 1978.

6.5 Hsu, Cheng-Tzu Thomas. "Analysis and Design of Square and Rectangular Columns by Equation of Failure Surface". *ACI* Structural *Journal*. Detroit, marzo-abril 1988.

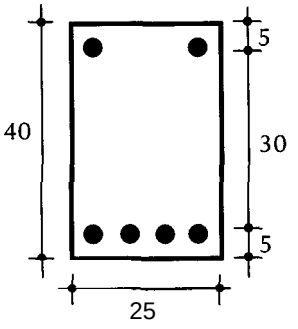
6.6 Meli, R., y M. Rodríguez. Gráficas para diseñar columnas de concreto reforzado. México, Instituto de Ingeniería, UNAM, septiembre, 1980.

Ejercicios

6.1 Utilizando el diagrama de interacción del ejemplo 6.1, calcular la carga que puede resistir la sección mostrada para excentricidades de 60 cm y de 5 cm. Calcular también el momento que puede resistir la sección bajo una carga axial de 250 ton.

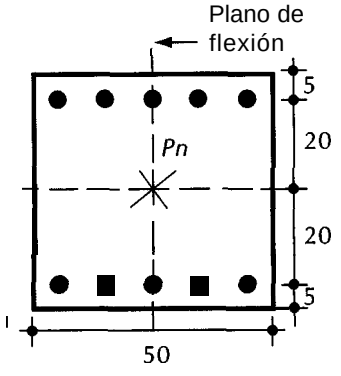
6.2 Determinar, por el procedimiento de tanteos y usando hipótesis simplificadoras, la resistencia

de la siguiente sección para una excentricidad de 20 cm hacia la cara con dos barras.



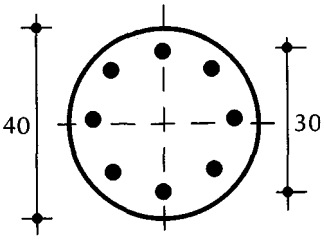
$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 6$ barras del No. 6

6.3 Determinar el momento que puede resistir la siguiente sección por el procedimiento de tanteos, usando las hipótesis ACI o Distrito Federal. Verificar el resultado obtenido con las gráficas del Apéndice C.



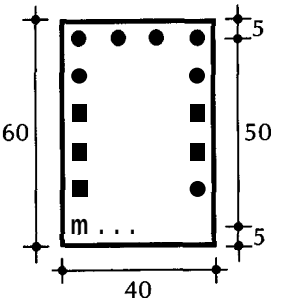
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 10$ barras del No. 8
$P_n = 300$ ton

6.4 Calcular la carga axial que puede resistir la siguiente sección, usando las gráficas del Apéndice C con las hipótesis ACI, si está sometida a un momento de 2 ton-m.



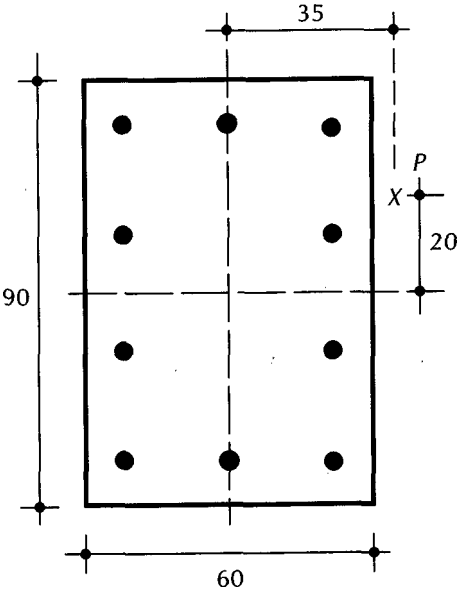
$f'_c = 300$ kg/cm^2
$f_y = 3500$ kg/cm^2
$A_s = 8$ barras del No. 8

6.5 Calcular los momentos de diseño de la siguiente sección en cada uno de los dos planos principales de flexión cuando está sometida a una carga axial Última, $P_n = 300$ ton.



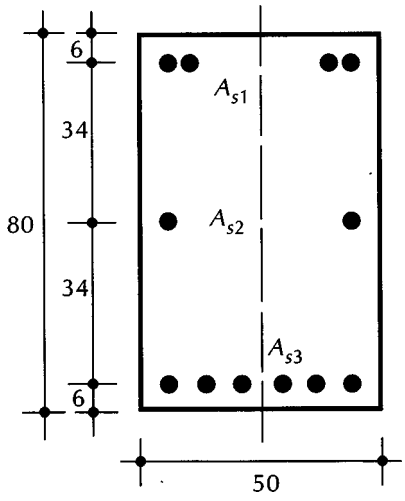
$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 16$ barras del No. 6

6.6 Calcular la resistencia de diseño de la siguiente sección usando la fórmula de Bresler y la ecuación de la superficie de falla.



$f'_c = 300$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$A_s = 10$ barras del No. 10

6.7 Obtener un diagrama de interacción en flexo-compresión de la siguiente sección usando hipótesis simplificadoras.



A_{s1} = 4 barras del No. 10

A_{s2} = 2 barras del No. 10

A_{s3} = 6 barras del No. 10

f'_c = 350 kg/cm^2

f_y = 4200 kg/cm^2

CAPÍTULO 7

Elementos sujetos a fuerza cortante

7.1 **Introducción.** ***17.2*** **Comportamiento y modos de falla.** ***17.3*** **Mecanismos de falla por cortante.** ***17.4*** **Efectos de las variables en la carga de agrietamiento.** ***17.5*** **Efectos de las variables sobre la resistencia.** ***17.6*** **Expresiones para evaluar la resistencia a efectos de fuerza cortante.** ***17.7*** **Ejemplos.**

7.1 Introducción

En el capítulo 1 se indicó que para establecer un procedimiento razonable para el dimensionamiento de estructuras de concreto, es necesario disponer de medios para determinar con un grado de precisión satisfactorio la resistencia de elementos sujetos a cualesquiera combinaciones de momento flexionante, carga axial, fuerza cortante y momento torsionante. El problema planteado en su forma general no es fácil de tratar, dado el estado actual de nuestros conocimientos, por lo que comúnmente se intenta resolverlo considerando combinaciones parciales a ciertas acciones. Así, por ejemplo, en el capítulo 6 se establecieron procedimientos para predecir la resistencia de elementos sujetos a combinaciones de carga axial y momento flexionante, haciendo caso omiso de los efectos de la fuerza cortante y del momento torsionante. En este capítulo se estudiará el efecto de la fuerza cortante sobre elementos de concreto reforzado, cuando éstos están sometidos simultáneamente a momento flexionante, como ocurre en el caso general, y también cuando, además, existe carga axial. Sin embargo, no se considerará por ahora el efecto de la torsión.

Para visualizar el efecto de la fuerza cortante es útil recordar algunos conceptos elementales de la mecánica de los materiales, ya que, a niveles de carga bajos y antes de la aparición de las grietas, el comportamiento del concreto reforzado se asemeja al de un material homogéneo y elástico. El estudio se limitará al caso de elementos en que el estado de esfuerzos puede suponerse como un estado de esfuerzos plano.

En un punto cualquiera de un elemento sujeto a este tipo de esfuerzos, los esfuerzos normales y tangenciales correspondientes a los distintos planos que pueden pasarse por el punto varían en magnitud, al cambiar la orientación del plano de referencia. El estado de esfuerzos en un punto queda definido cuando se conocen los esfuerzos normales y tangenciales según dos planos perpendiculares cualesquiera. Aquellos planos en que sólo existen esfuerzos normales se llaman planos principales y son perpendiculares entre sí. Los esfuerzos en estos planos reciben el nombre de esfuerzos principales y tienen la propiedad de ser los esfuerzos máximo o mínimo que pueden existir en el punto.

Considérese una viga elástica sujeta a un sistema de cargas concentradas, tal como se muestra en la figura 7.1. En las regiones próximas a un apoyo o a una carga concentrada, la viga se encuentra sometida a esfuerzos tangenciales v y a esfuerzos normales f_x y f_y, definidos en direcciones paralelas y perpendiculares, respectivamente, al eje del elemento. Los esfuerzos f_y se deben a efectos locales de las reacciones o de las cargas, y se desprecian en regiones alejadas de éstas. Los esfuerzos normales longitudinales, f_x, pueden evaluarse dentro del rango elástico del elemento mediante la fórmula $f_x = My/I$, donde M es el momento flexionante que ac-

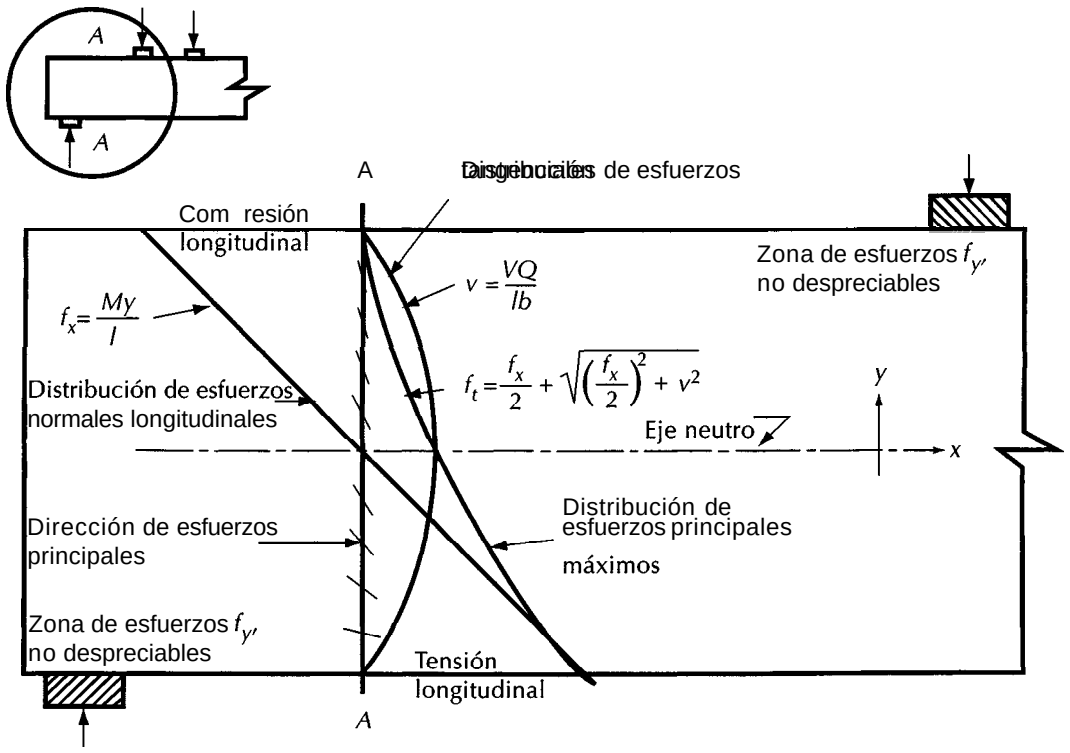


Figura 7.1 Distribución de esfuerzos en una sección de una viga.

túa en la sección considerada, y es la distancia desde el eje neutro al nivel considerado, e *I* es el momento de inercia de la sección transversal del elemento. En la figura 7.1 se muestra una distribución lineal típica de esfuerzos normales longitudinales.

La distribución elástica de esfuerzos tangenciales, v, se calcula con la expresión $v = VQ/Ib$, donde V es la fuerza cortante en la sección, Q es el momento estático con respecto al eje neutro del área de la sección situada arriba del nivel considerado, *I* es el momento de inercia, y b es el ancho de la sección al nivel considerado. Si la sección es rectangular, esta expresión conduce a una distribución parabólica, con un valor máximo a la altura del eje neutro igual a $3V/2bh$. Esta distribución se muestra también en la misma figura.

Cuando los esfuerzos f_y no existen, o se desprecian, los esfuerzos principales, f_t, se pueden calcular a partir de los esfuerzos tangenciales, v, y normales, f_x, mediante la expresión

$$f_t = \frac{f_x}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{f_x}{2}\right)^2 + v^2}$$

En esta expresión, los esfuerzos f_x y f_t son positivos cuando son de tensión. El signo positivo corresponde al esfuerzo principal máximo, que es el que interesa principalmente en el caso de elementos de concreto, en tanto que el negativo corresponde al esfuerzo principal mínimo. En lo sucesivo se trabajará exclusivamente con el esfuerzo principal máximo (o de tensión). La inclinación del plano correspondiente al esfuerzo principal máximo se obtiene mediante la expresión

$\tan 2\theta = 2v/f_x$, donde θ es el ángulo formado por el esfuerzo principal máximo con el eje de la pieza. Es fácil comprobar que en los puntos en que existe únicamente esfuerzo cortante, el esfuerzo principal máximo es igual a v, y tiene una inclinación de 45° con respecto al eje horizontal. Igualmente es claro que el esfuerzo principal de tensión es nulo en la fibra superior, e igual al esfuerzo normal en la fibra inferior. En general, en la zona de compresión, el esfuerzo normal, f_x, reduce el valor del esfuerzo principal máximo con respecto al valor correspondiente en el eje neutro, en tanto que en la zona de tensión lo aumenta, como se indica en la figura 7.1. En esta figura se muestra, además, una distribución de las intensidades e inclinaciones de las tensiones principales en una sección típica de una viga.

La presencia de una carga axial solamente modificaría la posición del eje neutro y, por lo tanto, la posición de la línea de esfuerzo normal nulo o de máximo esfuerzo tangencial.

Una forma conveniente de representar la orientación de los esfuerzos en los distintos puntos de un elemento, consiste en trazar las redes de trayectorias de esfuerzos principales. Estos diagramas muestran gráficamente la dirección de los esfuerzos principales en cualquier punto del elemento. En la figura 7.2 se ilustra una red típica de esfuerzos principales, para el caso de una viga libremente apoyada sujeta a una carga uniforme.

Como la resistencia del concreto a esfuerzos de tensión es baja, comparada con su resistencia a esfuerzos de compresión, o a esfuerzo cortante propiamente dicho, un elemento de concreto tenderá a fallar según superficies perpendiculares a las direcciones de las tensiones principales.

En vigas de concreto, esto hace necesario proporcionar refuerzo de acero para suplir la falta de resistencia a tensión del concreto en cualquier zona del elemento.

El efecto primordial de la fuerza cortante en un elemento de concreto, es el desarrollo de esfuerzos de tensión inclinados con respecto al eje longitudinal del miembro. Son estos esfuerzos los que pueden originar la falla del elemento a una carga inferior a aquella que produciría una falla en flexión como las descritas en el capítulo 5. En este capítulo se estudia la resistencia de elementos de concreto a esfuerzos de tensión inclinados, tanto cuando existe refuerzo especial para resistir estos esfuerzos como cuando no existe.

En rigor, no debe hablarse de fallas de esfuerzo cortante, ya que las grietas inclinadas

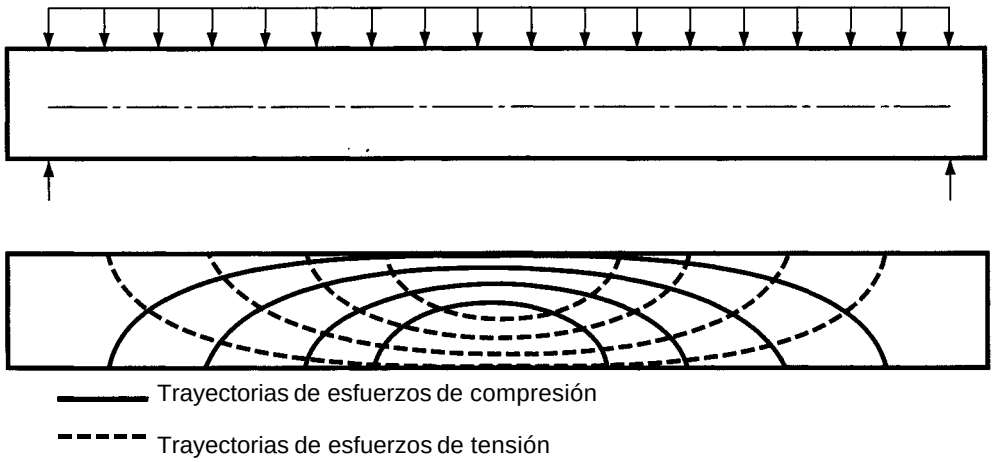


Figura 7.2 Trayectorias de esfuerzos en una viga rectangular homogénea.

que pueden presentarse en zonas de fuerza cortante considerable son en realidad grietas de tensión en planos inclinados. Una falla de esfuerzo cortante propiamente dicha podría presentarse, por ejemplo, en la cara de contacto de los dos elementos de una viga compuesta, formada por un elemento inferior precolado y un elemento superior colado en el lugar, donde el esfuerzo cortante en dicha cara puede exceder la resistencia al deslizamiento relativo de los dos elementos. Otro caso es el de ménsulas de claro muy corto. En el capítulo 12 se estudia este tipo de comportamiento.

De lo anterior podría concluirse que una forma razonable de reforzar las vigas de concreto consistiría en colocar barras de acero siguiendo las trayectorias de los esfuerzos principales de tensión. Esto, sin embargo, es poco práctico, ya que las dificultades constructivas son obvias.

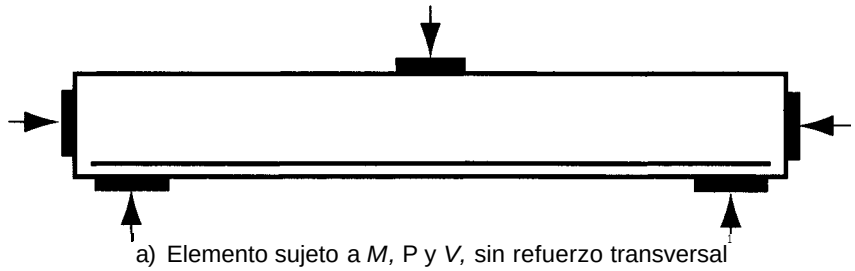
El comportamiento de un elemento de concreto reforzado es bastante más complejo que lo que se ha descrito aquí, pues la distribución de esfuerzos cambia apreciablemente en el momento en que se exceden las tensiones que puede soportar el concreto y aparecen grietas. La posición en que se forman estas grietas no puede predecirse con exactitud, ya que existen siempre variaciones locales en la resistencia del concreto, que no es un material realmente homogéneo. La presencia de grietas impide idealizar de una manera sencilla el funcionamiento de un elemento de concreto reforzado. A esta dificultad se añade que el concreto no es un material elástico y que, por tanto, las distribuciones de esfuerzos cambian con el nivel de carga.

Debido entonces a la complejidad del problema, los métodos utilizados en la actualidad para dimensionar elementos de concreto sujetos a fuerza cortante se basan en el conocimiento experimental de su comportamiento. Los estudios experimentales se han concentrado principalmente en la determinación de la resistencia del concreto al agrietamiento inclinado y de la contribución del refuerzo transversal a la resistencia.

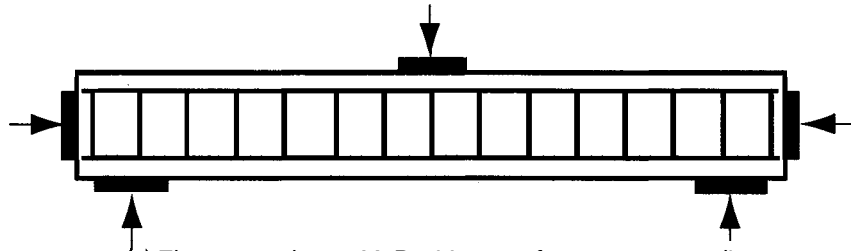
Los primeros ensayes encaminados a la determinación de los efectos de la fuerza cortante se realizaron hace más de 75 años. Desde entonces, y en especial de 1946 a la fecha, se han llevado a cabo muchas investigaciones tendientes a evaluar la influencia de distintos factores, de manera que se dispone en la actualidad de una cantidad importante de datos experimentales. Sin embargo, como se verá, son tantas las variables que influyen en la resistencia de elementos sujetos a fuerza cortante, y sus efectos dependen tanto de la interacción de las distintas variables, que ha sido difícil racionalizar los resultados de las investigaciones y experiencias disponibles, aunque recientemente se han logrado avances muy importantes [7.28].

En las secciones siguientes se hará un resumen de los aspectos principales del comportamiento y modos de falla de elementos sujetos a fuerza cortante, indicando los efectos de diversas variables en los mecanismos de agrietamiento y falla por cortante. Además, se presentan algunas de las expresiones más comunes para evaluar la resistencia a la fuerza cortante, cuya aplicación se ilustra con ejemplos.

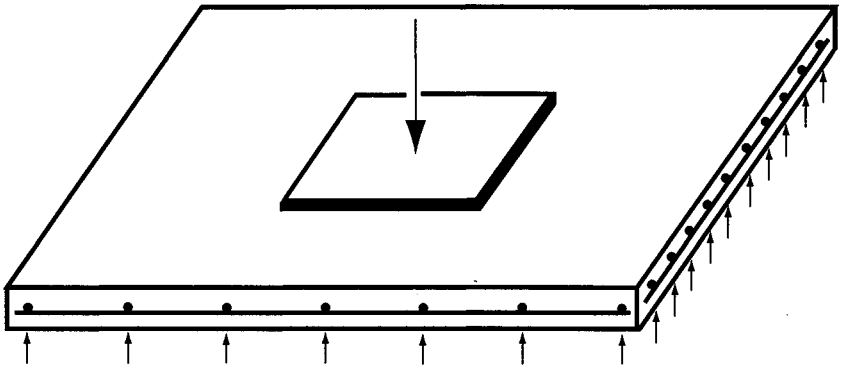
Para un tratamiento más amplio del problema, incluyendo la propuesta de diversos modelos para explicar el comportamiento, consúltense las referencias 7.1, 7.11, 7.12, 7.13 y 7.16. De especial interés son los trabajos desarrollados recientemente por M. P. Collins y un grupo de profesores canadienses que han elaborado una teoría de falla de elementos de concreto que toma en cuenta factores importantes como la presencia de barras de refuerzo, la formación de grietas, la disminución de la resistencia a compresión debida a esfuerzos de tensión perpendiculares y otros de este tipo [7.17]. Esta teoría ha sido aplicada al cálculo de la resistencia de vigas sujetas a fuerza cortante, obteniéndose una buena correlación con los resultados experimentales [7.18]. El Reglamen-



a) Elemento sujeto a *M,* P y *V,* sin refuerzo transversal



b) Elemento sujeto a *M,* P y *V,* con refuerzo transversal'



c) Elemento ancho con refuerzo en dos direcciones sujeto a V_x, V_y, *M,* y M_y, apoyado perimetralmente o en toda su base (caso esquemático de una losa plana o zapata)

Figura 7.3 Tipos de elementos sujetos a fuerza cortante.

to Canadiense de Construcciones [7.19] ha incluido estos métodos en sus disposiciones sobre fuerza cortante; sin embargo, los reglamentos ACI y NTC, que son los usados en este texto, no los incorporan, por lo que no se tratan aquí con detalle. Se recomienda consultar la referencia 7.29, donde se presenta un excelente resumen de avances recientes.

7.2 Comportamiento y modos de falla

En esta sección se describen el comportamiento bajo carga y los modos de falla de elementos de concreto en los cuales la acción de la fuerza cortante es importante. Para facilitar la exposición se agrupan los elementos en tres tipos distintos, según se muestra en la figura 7.3.

a) Vigas o columnas sin refuerzo transversal en el alma, sujetas a combinaciones de fuerza cortante, momento flexionante y carga axial.

b) Vigas o columnas con refuerzo transversal en el alma, mostrado esquemáticamente en la figura por estribos verticales, y sujetas a las mismas

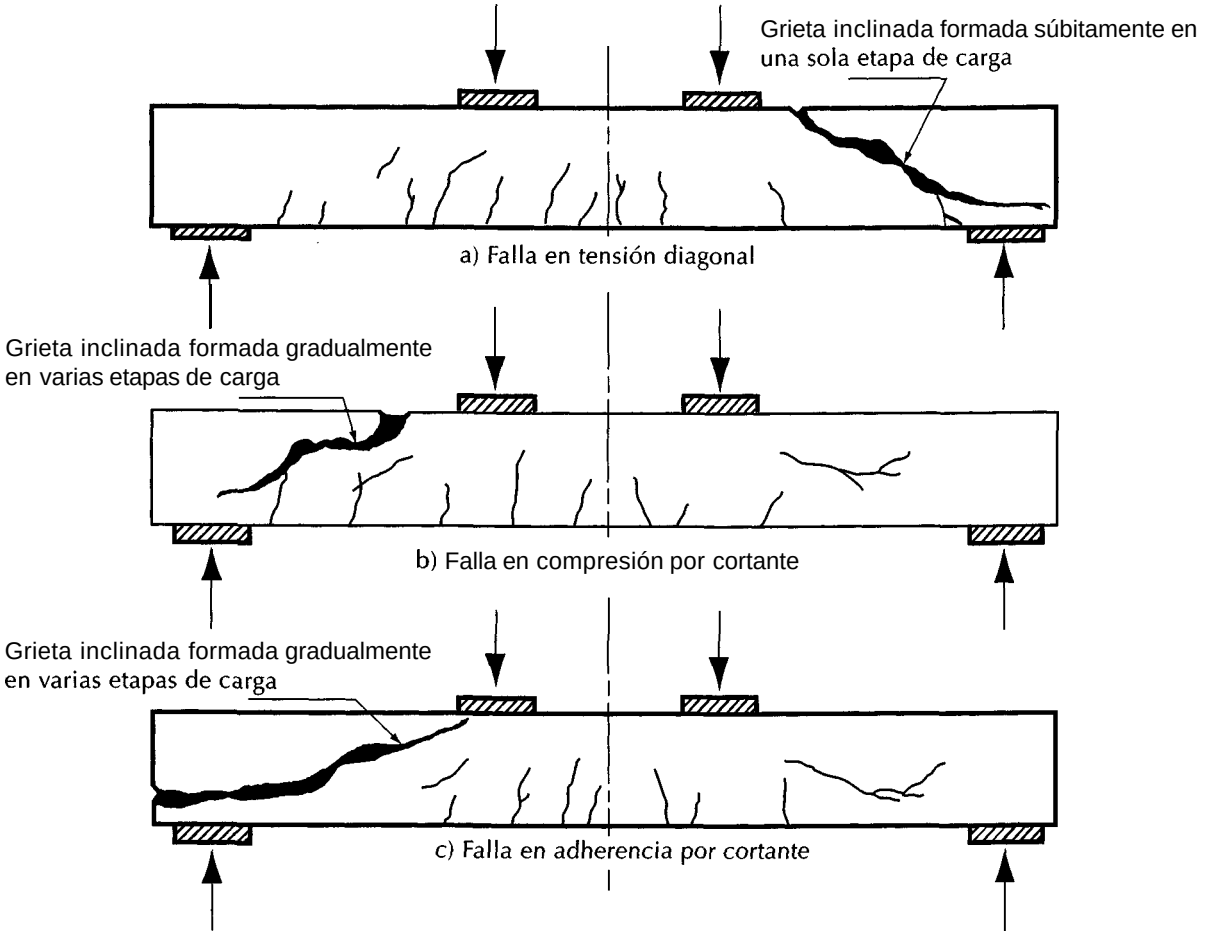


Figura 7.4 Representación esquemática de los diferentes tipos de falla en elementos en los que predomina la fuerza cortante.

combinaciones de carga que los elementos del inciso a.

c) Losas y zapatas, reforzadas y apoyadas en las dos direcciones, sujetas a cargas concentradas o a cargas repartidas. Este tipo de elementos está sujeto a flexión en dos direcciones.

7.2.1 Elementos sin refuerzo en el alma

SECCIONES RECTANGULARES

Considérese un elemento sometido a carga en la forma mostrada en la figura 7.4*a*. En los primeros incrementos de carga no existe diferencia entre el comportamiento de un elemento que falle por efecto de fuerza cortante y el de otro que falle por flexión. Antes de que aparezcan las primeras grietas en la parte inferior, debidas a flexión, el comportamiento del elemento es esencialmente elástico. Al aumentar las cargas, la fuerza cortante puede originar esfuerzos principales que excedan la resistencia a tensión del concreto, produciendo grietas inclinadas a una altura aproximada de medio peralte. Estas grietas pueden aparecer súbitamente en puntos donde no exista una grieta de flexión o, muy frecuentemente, pueden presentarse como continuación de una grieta de flexión que gradualmente cambia de inclinación.

En miembros sujetos a compresión o tensión axial, las grietas inclinadas se forman a cargas mayores o menores, respectivamente, que la carga que produce el agrietamiento del mismo miembro sin carga axial. A partir de este momento, el comportamiento del elemento difiere en forma importante del correspondiente a un miembro que falle por flexión. La grieta inclinada puede aparecer súbitamente, sin señal previa, y extenderse inmediatamente hasta causar el colapso de la pieza, como se muestra en la figura 7.4*a*. En este caso la falla se denomina de *tensión diagonal.* Por otra parte, puede suceder que el agrietamiento inclinado se desarrolle gradualmente y que el colapso de la pieza se produzca finalmente por el aplastamiento de la zona de compresión en el extremo de la grieta inclinada, al reducirse considerablemente la zona disponible para soportar los esfuerzos de compresión originados por flexión. En este caso la falla se denomina de *compresión por cortante* (figura 7.4*b*). La diferencia esencial entre ambos tipos de falla consiste en que, en una falla por tensión diagonal, el agrietamiento inclinado es súbito y causa de inmediato el colapso de la pieza, mientras que en una falla de compresión por cortante, la pieza puede soportar cargas mayores que la que produce el agrietamiento inclinado.

Algunos autores establecen otro tipo de falla, denominada generalmente de *adherencia por cortante.* Este tipo se caracteriza porque la resistencia se alcanza cuando se presentan extensos agrietamientos longitudinales al nivel del acero de tensión, simultáneos con un aplastamiento ligero en la zona de compresión en el extremo de la grieta inclinada, como se muestra en la figura 7.4*c*.

Desde el punto de vista de resistencia, cuando la falla se produce súbitamente al aparecer la primera grieta inclinada importante, se dice que el elemento falla en *tensión diagonal.* Cuando la falla ocurre después de la aparición de una grieta inclinada importante y la resistencia es mayor que la carga que formó esta grieta, se dice que el elemento tuvo una *falla en compresión por cortante* o *en adherencia por cortante,* según el caso.

Desde el punto de vista del comportamiento de una estructura, es muy desventajoso que un elemento alcance su resistencia debido a uno de estos tipos de falla antes de que se presente la fluencia del acero longitudinal, ya que estas fallas se producen rápidamente a deformaciones pequeñas. En consecuencia, la estructura resulta poco dúctil.

La carga que produce las primeras grietas inclinadas completas se suele denominar *carga de agrietamiento inclinado.* En general, una grieta inclinada importante es aquella que se extiende a través de casi todo el peralte del elemento y se empieza a prolongar a lo largo del acero de tensión. Varios investigadores la han definido de acuerdo con distintos criterios basados en la observación visual del elemento, y, por lo tanto, la carga correspondiente está sujeta a variaciones de orden subjetivo. Sin embargo, esta carga marca en general un cambio importante en el comportamiento del miembro. Cuando la grieta inclinada se produce súbitamente y causa el colapso de la pieza, la carga de agrietamiento es también la resistencia del elemento.

SECCIONES NO RECTANGULARES

La información disponible actualmente sobre el comportamiento y la resistencia de elementos de sección no rectangular es mucho menor que la existente sobre elementos de sección rectangular. Se han realizado ensayes de laboratorio sobre elementos de sección circular [7.3 y *7.201* con acero longitudinal distribuido en el perímetro de la sección. El comportamiento general de estos elementos fue similar al descrito anteriormente para elementos de sección rectangular, excepto que las grietas inclinadas tendían a formarse de

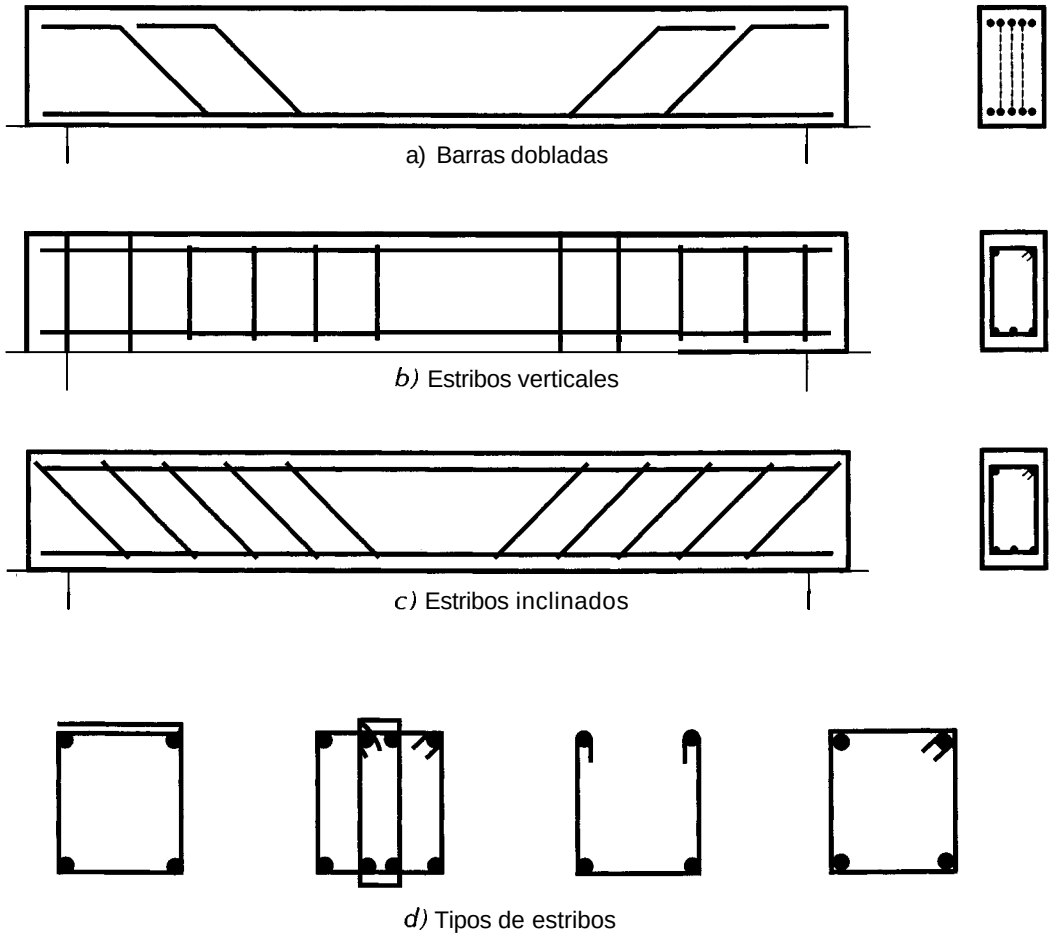


Figura 7.5 Tipos de esfuerzo.

un modo más gradual, debido a la presencia de acero longitudinal en todo el peralte de la pieza.

En ensayes de elementos de sección I se puede presentar un tipo adicional de falla: aplastamiento del alma por esfuerzos de compresión aproximadamente paralelos a la dirección de grietas inclinadas. Este tipo de falla sólo se presenta cuando el alma es relativamente delgada en comparación con el ancho de la zona de compresión. Por lo demás, el comportamiento es semejante al descrito anteriormente para secciones rectangulares.

7.2.2 Elementos con refuerzo en el alma

El refuerzo transversal, o refuerzo en el alma, que se utiliza en elementos de concreto para aumentar su resistencia a los efectos de la fuerza cortante, puede ser de distintos tipos. En algunos casos se aprovecha parte del acero principal de flexión, doblándolo en zonas donde ya no es requerido para tomar esfuerzos longitudinales, de manera que atraviese las regiones donde pueden aparecer grietas inclinadas. Estas barras, para que sean efectivas, deben anclarse en la zona de compresión (figura 7.5*a*). El tipo de refuerzo transversal

de uso más extendido es el estribo (figura 7.5*b*).

En la figura 7.5*d* se ilustran las formas más usuales de este tipo de refuerzo. Comúnmente los estribos son de dos ramas en "U" o cerrados, siendo los cerrados los más frecuentes. Sin embargo, en algunos casos se utilizan también estribos de cuatro ramas.

El tipo de estribo más usual es aquel que tiene sus extremos doblados a 135". Generalmente los estribos se colocan en posición vertical, pero a veces se colocan inclinados con respecto al eje del elemento con un ángulo que varía entre 30° y 60°, siendo 45" la inclinación más común (figura 7.5*c*). Ocasionalmente se utilizan en un mismo elemento combinaciones de los diversos tipos de refuerzo transversal mencionados arriba.

El comportamiento bajo carga de elementos con refuerzo en el alma, es similar al descrito en la sección anterior hasta la aparición de las primeras grietas inclinadas. A partir de este momento, la presencia del refuerzo transversal restringe el crecimiento de las grietas inclinadas. Si se tiene refuerzo transversal en cantidades suficientes, las grietas inclinadas serán pequeñas y de poca consideración y la falla se producirá en flexión, antes o después de la fluencia del acero longitudinal.

Se ha observado que cualquiera que sea el tipo de refuerzo transversal que se utilice, éste no contribuye en forma apreciable a resistir los esfuerzos inclinados de tensión hasta que se forman las primeras grietas inclinadas en el alma de la pieza; es decir, el refuerzo en el alma influye muy poco en la magnitud de la carga que produce estas grietas. Pero después de la aparición de las grietas, el refuerzo transversal se deforma gradualmente al incrementar la carga, hasta que alcanza su límite de fluencia. Esta condición limita la contribución de este refuerzo a la resistencia del elemento. Si el elemento tiene poco refuerzo en el alma, la falla puede producirse por fractura de una o varias de las barras de refuerzo transversal. Con el objeto de evitar que el ancho de las grietas inclinadas sea excesivo, las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal y el Reglamento ACI 318-02, indican que el acero transversal tenga un esfuerzo de fluencia máximo de 4200 kg/cm^2.

En los ensayes de laboratorio se ha observado que la resistencia a los efectos de la fuerza cortante de un elemento con refuerzo transversal, se puede estimar como su resistencia al agrietamiento inclinado más la contribución del refuerzo transversal. Normalmente, en un diseño se busca que esta suma sea mayor que la resistencia del elemento en flexión o flexocompresión, para garantizar que no se presente el colapso por efectos de fuerza cortante.

Es importante tener en cuenta que, para que el refuerzo transversal sea realmente efectivo, debe colocarse a espaciamientos tales, a lo largo del eje de la pieza, que cualquier grieta inclinada potencial que pudiera formarse en el elemento sea cruzada cuando menos por una barra de refuerzo en el alma.

Otro efecto importante del refuerzo en el alma es el de incrementar la ductilidad del elemento, al proporcionar confinamiento lateral al concreto sujeto a compresión. Este efecto es de la misma naturaleza que el efecto del zuncho en columnas con carga axial, aun cuando no es tan grande como éste, tanto porque la cuantía del refuerzo de estribos es menor que la de zunchos, como porque el efecto de confinamiento es menor en una pieza sujeta a flexocompresión que en una sujeta a compresión axial. Este efecto es de gran importancia en estructuras que pueden estar sujetas a fuerzas sísmicas, en las que desarrollar una ductilidad adecuada es tan importante como el garantizar la resistencia necesaria.

7.2.3 Losas planas y zapatas

Se han efectuado muchos ensayes de elementos como el mostrado en la figura 7.3*c*, en los que se trata de reproducir el proble-

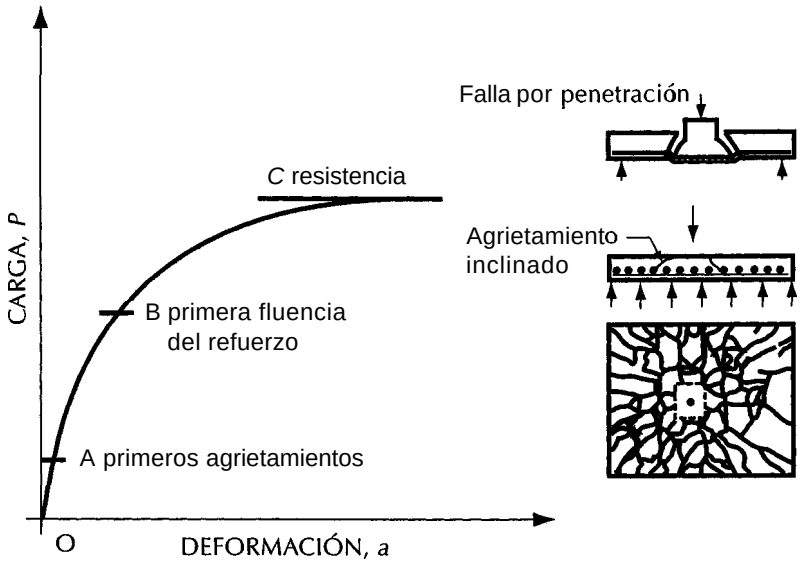


Figura 7.6 Característica carga-deformación de una zapata.

ma de la transmisión por fuerza cortante de la carga de una losa plana o zapata a una columna. Los elementos ensayados han sido en su mayor parte de forma cuadrada o rectangular, con la carga concentrada aplicada sobre una superficie cuadrada menor, y apoyados generalmente en todo el perímetro. Ocasionalmente, con el objeto de simular el efecto de la reacción del terreno en zapatas, se han probado elementos apoyados en toda su superficie sobre camas de resortes. Sin embargo, el comportamiento general bajo carga y el modo de falla observado han sido los mismos, cualquiera que sea el tipo de apoyo: perimetral o en camas de resortes.

La figura *7.6* muestra esquemáticamente una gráfica carga-deformación al centro de uno de estos elementos. En general, si se tiene un elemento relativamente esbelto y dúctil, se pueden desarrollar las tres etapas mostradas en la figura:

1ª Del origen al punto A. En esta etapa el comportamiento es aproximadamente lineal, hasta que se presentan los primeros agrietamientos en la cara de tensión de la losa.

2ª En esta etapa, comprendida entre los puntos A y B, se alcanza la primera fluencia del refuerzo horizontal de tensión y el agrietamiento se extiende por la losa. Simultáneamente pueden presentarse grietas inclinadas que van del acero de tensión hacia la periferia de la superficie cargada, formando una pirámide o cono truncado alrededor de esta superficie.

3ª Al final de esta etapa se alcanza la resistencia (punto C) y se produce el colapso final por penetración de la columna a través de la losa, con una superficie de falla en forma de pirámide o cono truncado.

Dependiendo de la relación entre el claro y el peralte de la losa, o de la relación entre el área de la losa y el área de la superficie de aplicación de carga y de la cantidad de acero longitudinal de flexión, la falla por perforación puede presentarse antes o después

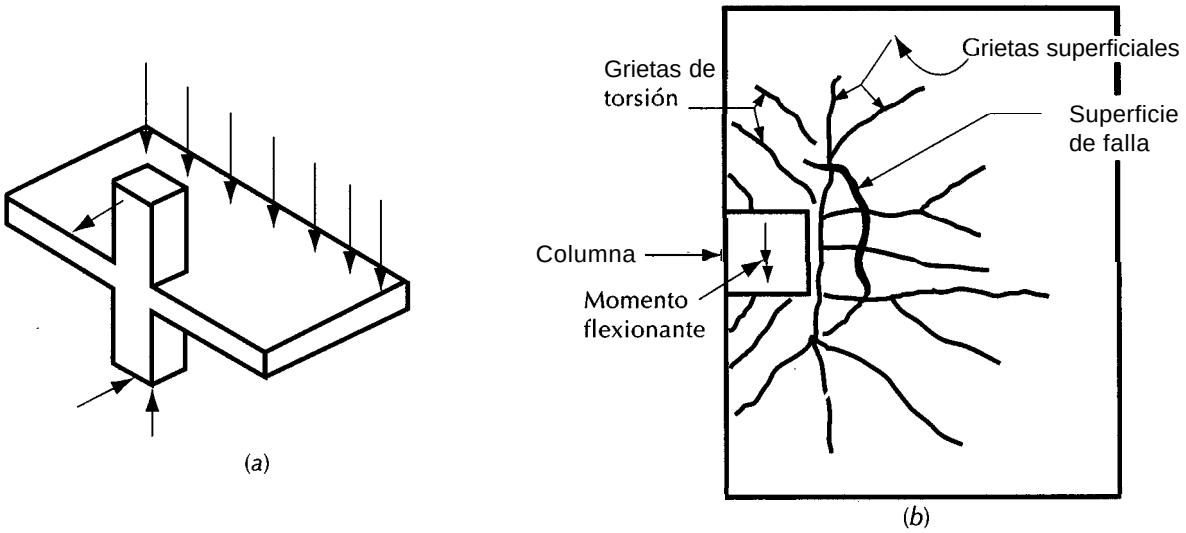


Figura 7.7 Espécimen de ensaye y configuración de agrietamiento en una losa conectada a una columna de borde (adaptada de la referencia 7.21).

de que fluya el acero longitudinal. En otras palabras, en una losa de poca esbeltez y con mucho acero longitudinal no se podrán desarrollar más que las etapas OA y AB de la curva descrita anteriormente. Incluso, puede suceder que la columna perfore la losa antes de que se alcance el punto B, aunque este caso es poco probable para las dimensiones usuales en la práctica. Cuando el colapso por perforación se presenta después de que la losa ha sufrido un agrietamiento considerable, y después de que el acero longitudinal ha fluido, el tipo de falla puede clasificarse como de flexión y se caracteriza por una deformación importante. Independientemente de la magnitud de la deformación a la falla, el colapso final se presenta siempre por perforación de la columna a través de la losa, y la superficie de falla tiene la forma de una pirámide o de un cono truncado. Lo anterior indica que existe siempre una etapa previa al colapso final, en la cual se desarrollan grietas inclinadas alrededor de la superficie cargada, hasta que se forma una superficie de falla.

Los esfuerzos nominales correspondientes a la resistencia de un elemento de este tipo, son, en general, mayores que para una viga, debido principalmente al efecto del ancho del elemento y a que el concreto alrededor de la superficie cargada está sujeto a compresiones normales en dos direcciones, que le proporcionan un cierto confinamiento lateral.

También se han realizado ensayes en especímenes como el mostrado en la figura 7.7*a,* que simulan la conexión de una losa plana o de una zapata con una columna de borde. En este caso, además de carga axial, se transfiere un momento flexionante de la losa a la columna, por lo que el elemento en cuestión se encuentra sometido a solicitaciones más severas que cuando sólo existe carga axial. Aunque pueden desarrollarse las tres etapas de carga mencionadas anteriormente, la configuración de agrietamiento difiere debido a la existencia de un borde libre en la losa. En la figura 7.7*b* se muestra el estado típico de agrietamiento al producirse la falla en este tipo de elementos [7.21]. Puede verse que se desarrollan también grietas de torsión originadas por la transferencia de momento flexionante.

Un caso intermedio entre los dos presentados en esta sección es el de una columna interior conectada a una losa que tiene momentos flexionantes diferentes a ambos lados de la columna. El momento flexionante que se transfiere de la losa a la columna es la diferencia entre los dos momentos flexionantes. La pirámide o cono truncado no resulta simétrico, y el grado de asimetría depende de la relación entre la carga axial y el momento transferido.

7.3 Mecanismos de falla por cortante

Por facilidad de nomenclatura y teniendo en cuenta que en las secciones siguientes interesa distinguir si el elemento transmite la carga en una o varias direcciones, se designará por miembro a todo elemento con dos dimensiones apreciablemente menores que la tercera y en el que los esfuerzos se transmiten en una dirección. Es decir, por miembros se entenderá cualquiera de los elementos agrupados bajo los tipos (a) y (*b*) de la figura 7.3. Los elementos comprendidos en el tipo (*c*) se tratarán bajo el encabezado de losas planas y zapatas.

7.3.1 Miembros sin refuerzo transversal

Se ha dicho que en algunas ocasiones el colapso de un elemento se produce súbitamente al presentarse el agrietamiento inclinado, mientras que en otras el miembro es capaz de soportar cargas apreciablemente mayores que la que produjo dicho agrietamiento. Esto puede explicarse de una manera cualitativa observando que la presencia de una grieta inclinada origina un cambio importante en el comportamiento del miembro.

Para fijar ideas, y por sencillez en la explicación, considérese una viga sin refuerzo transversal, provista de refuerzo longitudinal adecuado y sujeta a una carga concentrada situada a una distancia a del apoyo. En la figura 7.8 se presenta un diagrama de cuerpo libre del elemento después de haberse desarrollado una grieta inclinada. Si se supone que la fuerza cortante en la longitud *a* es constante e igual a la reacción, despreciando, por lo tanto, el efecto del peso propio, los momentos flexionantes varían como se muestra en la misma figura.

Antes de que aparezca la grieta inclinada, el comportamiento del miembro es prácticamente lineal y, por lo tanto, la tensión en el acero es sensiblemente proporcional al momento flexionante. Pero una vez que se desarrolla una grieta inclinada, el comportamiento del elemento en la zona agrietada se asemeja al de un arco rebajado. Por equilibrio, la tensión en el acero entre las secciones AA' y BB' debe ser constante e igual al valor correspondiente a la sección de momento flexionante mayor (BB').

La presencia de la grieta inclinada produce cuatro efectos importantes:

a) Reduce la zona disponible para tomar esfuerzos de compresión; la compresión total debe ser tomada íntegramente en la profundidad y (figura 7.8).

b) Produce un aumento súbito en la tensión del refuerzo en la sección AA', hasta que ésta alcanza el valor correspondiente a la sección BB'.

c) Reduce el área disponible para tomar la fuerza cortante en la sección. Antes de la aparición de la grieta, la fuerza cortante se distribuye de alguna manera a través de todo el peralte del elemento, mientras que después del agrietamiento, la mayor parte de la fuerza cortante tiene que ser resistida por la zona de compresión del concreto (fuerza V_1), y sólo una parte pequeña es resistida por la barra de tensión (fuerza V_2) y por el efecto de trabazón entre las rugosidades de las superficies de las dos caras de la grieta (componente vertical de la fuerza V_3).

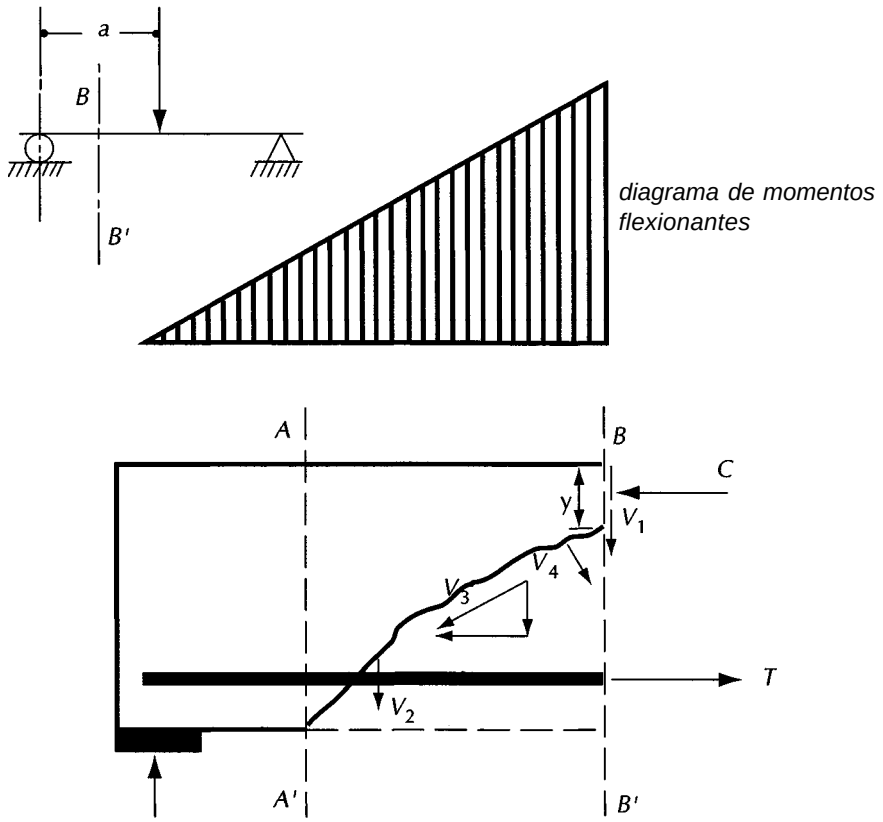


Figura 7.8 Diagrama de cuerpo libre al aparecer una grieta inclinada.

d) Reduce esfuerzos de tensión transversales a la posición de la grieta que pueden ser resistidos por el concreto (fuerza V_4) y que pueden ser significativos. Se ha visto que estos esfuerzos, llamados *residuales,* no desaparecen totalmente al formarse la grieta, ya que las partes a ambos lados de ella no se separan totalmente, sino que se forman pequeños puentes que las mantienen unidas y a través de los cuales pueden seguirse transmitiendo esfuerzos [7.29].

Si al desarrollarse la grieta inclinada, la zona de compresión reducida es capaz todavía de resistir la compresión resultante, si el acero de refuerzo puede tomar el incremento súbito de tensión, y si los esfuerzos residuales de tensión son importantes, entonces la grieta inclinada se estabiliza y el miembro es capaz de resistir cargas mayores trabajando como arco rebajado. Si, por el contrario, la zona de compresión reducida por la grieta inclinada es ya incapaz de tomar la fuerza de compresión, se produce una falla por aplastamiento del concreto en la parte superior de la grieta inclinada, simultáneamente con la formación de ésta. También es posible que al formarse la grieta inclinada, la longitud del acero de refuerzo entre la sección AA' y el extremo de la pieza sea insuficiente para desarrollar por adherencia la tensión necesaria y, en consecuencia, la falla se producirá también rápidamente.

En resumen, si al desarrollarse la grieta inclinada la zona disponible para tomar esfuerzos de compresión es insuficiente, o si

el acero es incapaz de desarrollar la adherencia requerida para tomar el incremento de tensión, se produce el colapso del elemento inmediatamente después de formarse la grieta inclinada, y la falla es por tensión diagonal. Si la grieta se estabiliza y el elemento es capaz de tomar carga adicional, la falla será de adherencia por cortante cuando se agote la capacidad de transmitir tensiones por adherencia entre el acero y el concreto; o bien, de compresión por cortante cuando se aplaste el concreto en la zona de compresión. Cuando el elemento carece de refuerzo transversal, es frecuente que estos dos tipos de falla se presenten casi simultáneamente.

De las consideraciones anteriores se pueden deducir ciertas conclusiones que concuerdan con los hechos observados experimentalmente. Hasta ahora ha sido imposible correlacionar la capacidad adicional de un elemento sobre la carga de agrietamiento inclinado con las variables primarias. Esto es debido a que dicha capacidad depende en gran parte de la posición y extensión de la grieta inclinada, y éstas no pueden predecirse de antemano con precisión, porque el concreto no es un material homogéneo.* Una pequeña variación en la posición o en la extensión de la grieta inclinada puede cambiar drásticamente la longitud de anclaje del acero de tensión y la profundidad de la zona de compresión y, por lo tanto, la capacidad de carga posterior al agrietamiento inclinado. En pruebas de laboratorio de especímenes idénticos, colados simultáneamente y ensayados bajo las mismas condiciones, se han observado variaciones en el valor de la carga de agrietamiento inclinado del orden del 10 por ciento, en tanto que las cargas de colapso han llegado a diferir entre sí en más del 50 por ciento. Por esta razón, la mayor parte de los investigadores concuerdan en considerar la carga de agrietamiento en tensión diagonal como la resistencia útil a la acción de fuerza cortante de un elemento sin refuerzo transversal, aun sabiendo que en algunos casos la carga de colapso puede ser mucho mayor.

7.3.2 Miembros con refuerzo transversal

En la sección 7.2.2 se indicó ya que la presencia de refuerzo transversal influye muy poco en el valor de la carga de agrietamiento y en el comportamiento general del elemento antes de que se desarrolle la grieta inclinada. Pero una vez que se presenta dicha grieta, el refuerzo en el alma contribuye eficazmente a incrementar la capacidad de carga del elemento, y si este refuerzo se proporciona en forma adecuada, puede lograrse que el colapso se produzca por efecto de los esfuerzos longitudinales de flexión y no por efecto de la fuerza cortante.

El refuerzo en el alma desempeña un papel triple después de la aparición de la grieta inclinada. Por una parte, restringe el crecimiento y desarrollo del agrietamiento inclinado, conservando en esa forma una profundidad mayor para la zona de compresión. Esto incrementa la capacidad de esta zona para resistir fuerzas normales y tangenciales. Por otra parte, cuando se usa refuerzo transversal en forma de estribos, éstos mejoran la capacidad por adherencia del miembro, pues tienden a evitar fallas por desgarramiento al nivel del acero de refuerzo. Finalmente, el refuerzo en el alma toma una porción importante de la fuerza cortante externa y, cuando el refuerzo forma anillos cerrados, incrementa ligeramente la resisten-

* Un avance importante reciente es la Teoría Modificada del Campo de Compresión de Collins, et al., en la que se tratan de relacionar las variables mencionadas calculando la deformación unitaria longitudinal, ε, al nivel del refuerzo de tensión, la cual depende del ángulo de inclinación de las grietas (que pueden diferir de 45°), de su separación y de los esfuerzos en el refuerzo [7.28 y 7.29].

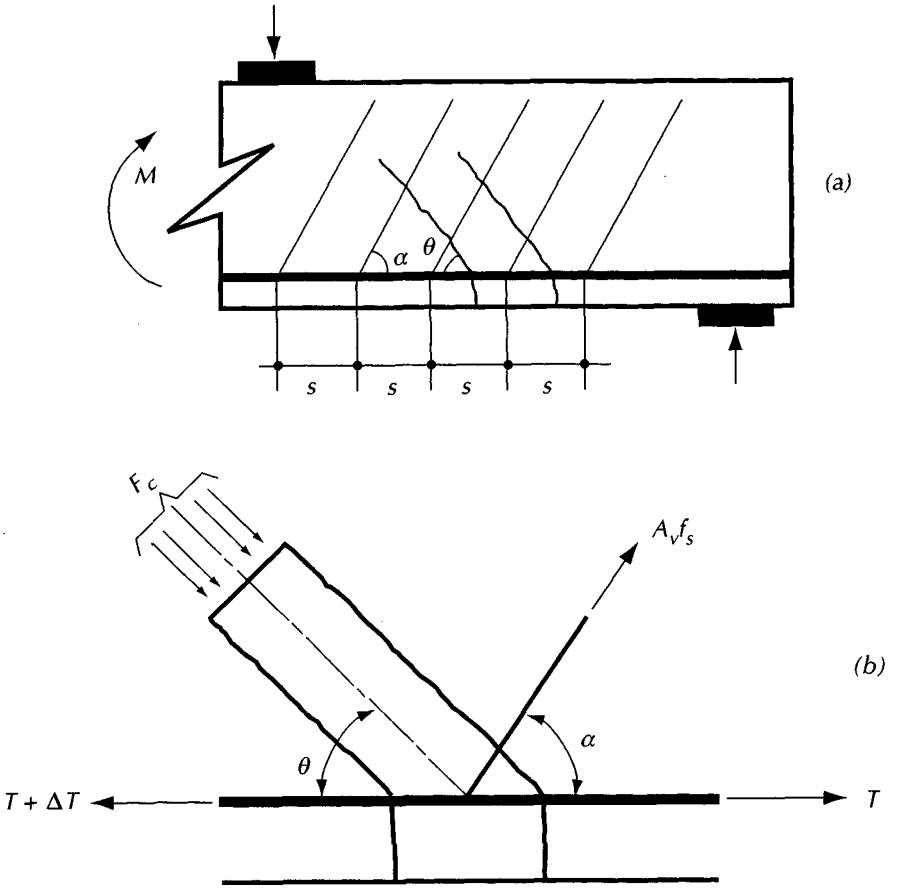


Figura 7.9 Analogía de la armadura.

cia de la zona de compresión debido al efecto de confinamiento.

El mecanismo de falla de un elemento con refuerzo transversal ha sido difícil de establecer con precisión hasta ahora. Sin embargo, algunas de las funciones del refuerzo transversal pueden explicarse cualitativamente acudiendo a la idealización propuesta por Ritter en 1899. Esta idealización, conocida como la analogía de *la* armadura, se presenta a continuación en forma generalizada, ya que algunas de las expresiones de dimensionamiento más comunes han sido derivadas de ella.

Ritter supuso que una viga con refuerzo transversal, en la cual existen grietas causadas por tensiones inclinadas, puede idealizarse como una armadura en la que el refuerzo longitudinal funciona como la cuerda de tensión, el refuerzo transversal como las diagonales de tensión, el concreto de la zona comprimida como la cuerda de compresión, y las proporciones de concreto entre las grietas inclinadas como las diagonales de compresión. Esta idealización se muestra esquemáticamente en la figura 7.9*a*.

En el análisis se supone que las grietas inclinadas forman un ángulo θ y el refuerzo transversal un ángulo α con el eje de la pieza. Las hipótesis en que se basa el análisis de la armadura son las siguientes:

a) La zona comprimida del elemento toma sólo esfuerzos normales de compresión.

b) El refuerzo longitudinal de tensión toma Únicamente esfuerzos normales de tensión.
c) Todas las tensiones inclinadas son resistidas por el refuerzo transversal.
d) Las grietas inclinadas se extienden desde el refuerzo longitudinal de tensión hasta el centroide de la zona de compresión.
e) Se desprecia el efecto del peso propio o de cargas distribuidas entre grietas inclinadas consecutivas. En otras palabras, el incremento de momento entre dos secciones distantes *s* entre sí es igual a Vs, donde Ves la fuerza cortante en la zona entre las dos secciones consideradas.

En la figura 7.9*b* se muestran las fuerzas que actúan en una junta de la cuerda de tensión de la armadura idealizada. El espaciamiento horizontal entre grietas inclinadas y entre barras o estribos de refuerzo transversal se designa por s. La fuerza de compresión en la diagonal de concreto se denota por F_c, y la de tensión en la diagonal de acero por $A_v f_s$ (en que A_v es el área del refuerzo transversal y f_s es el esfuerzo a que está sujeto).

Debido al incremento de momento, ΔM, existe un incremento en la tensión longitudinal igual a AT.

Por equilibrio de fuerzas verticales:

$$A_v f_s \operatorname{sen} \alpha = F_c \operatorname{sen} \theta \qquad (7.1)$$

Por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$\Delta T = A_v f_s \cos \alpha + F_c \cos \theta \qquad (7.2)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis (e):

$$\Delta T = \Delta M / z = Vs / z \qquad (7.3)$$

donde z es el brazo del par resistente.

Sustituyendo F_c de la ecuación 7.1 y AT de la ecuación 7.3, en la ecuación 7.2, se tiene

$$\frac{Vs}{z} = A_v f_s \left[\cos \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \theta}\right]$$

Por lo que la fuerza cortante máxima que puede tomarse con un área A_v de refuerzo transversal es

$$V = \frac{A_v f_s z}{s}\left[\cos \alpha + \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\tan \theta}\right] \qquad (7.4)$$

Si se admite que las grietas se forman comúnmente con un ángulo θ igual a 45°

$$V = \frac{A_v f_s z}{s} (\operatorname{sen} \alpha + \cos \alpha) \qquad (7.5)$$

De esta expresión puede deducirse que, si la capacidad de carga del elemento depende directamente de su resistencia a esfuerzos de tensión inclinados, la carga máxima se obtiene cuando fluye el acero de refuerzo transversal; esto es, cuando $f_s = f_y$. Esto presupone que tanto el concreto de la zona de compresión como el acero de refuerzo longitudinal, que forman las cuerdas de compresión y de tensión de la armadura idealizada, deben ser capaces de soportar los incrementos en las fuerzas correspondientes, originados por el desarrollo de las grietas inclinadas.

La analogía de la armadura se ha usado durante muchos años, en la forma simple que desarrolló Ritter, para estimar la resistencia a fuerza cortante de miembros con refuerzo transversal. Para lograr una correlación aceptable entre los resultados de ensayes y las resistencias calculadas con la analogía de la armadura, lo que se ha hecho es sumar a la resistencia calculada, la que corresponde a un elemento sin refuerzo transversal. Aunque de esta manera se han obtenido expresiones que

permiten calcular la resistencia con aproximación suficiente para fines prácticos, el procedimiento adolece de limitaciones teóricas, por lo que se ha continuado en la búsqueda de métodos más racionales para explicar el comportamiento general bajo la acción de fuerza cortante y para derivar de ellos procedimientos de diseño. Algunos autores han presentado modificaciones a la teoría de la armadura para tomar en cuenta factores importantes como la inclinación de las grietas, la reducción de la resistencia de la diagonal de compresión de concreto de la figura 7.9 por el efecto de esfuerzos y deformaciones transversales, la formación de configuraciones de agrietamiento en forma de abanico cerca de los apoyos y de cargas concentradas, la transmisión de fuerzas a través de las grietas y otros de este tipo [7.17, 7.18, 7.22, 7.29]. Estos trabajos han sido incorporados en algunos reglamentos de construcciones, pero todavía no lo han sido en los reglamentos a los que se hace referencia en este texto, por lo que no se presentan aquí con detalle.

7.3.3 Losas planas y zapatas sin refuerzo transversal

Los mecanismos de falla por fuerza cortante en losas planas y zapatas son cualitativamente del mismo tipo que el descrito anteriormente para miembros sin refuerzo transversal.

Debido a que los momentos flexionantes disminuyen muy rápidamente del perímetro del área cargada hacia los centros de los tableros de losa o los extremos de la zapata, las tensiones máximas antes del agrietamiento se concentran en zonas cercanas a una superficie definida por planos trazados a 45° a partir del perímetro del área cargada (figura 7.6). En otras palabras, mientras que en miembros la zona crítica por cortante puede presentarse en regiones relativamente grandes a lo largo de su longitud, en losas planas y zapatas las zonas críticas están concentradas alrededor del perímetro del área cargada.

Se ha podido observar por medio de perforaciones previas hechas en la losa, que el agrietamiento inclinado se produce siguiendo una superficie en forma de pirámide truncada, en planos con una inclinación aproximada de 45° con respecto al plano medio de la losa o zapata, a cargas del orden de 50 a 70 por ciento de la resistencia. En esta zona los momentos flexionantes son altos y, por lo tanto, se requieren cantidades relativamente grandes de acero por flexión, que usualmente tienen suficiente longitud de anclaje. Existe también en el plano medio de la losa o zapata un efecto de confinamiento triaxial debido al área cargada. Por consiguiente, no puede producirse una falla irrestricta de tensión diagonal. De lo anterior se concluye que la resistencia es siempre mayor que la carga que produce el primer agrietamiento inclinado. En otras palabras, el fuerte gradiente de momentos hace que las grietas inclinadas tiendan a producirse en la zona adyacente al área cargada. Pero estas grietas no pueden desarrollarse súbitamente ni hacia el área cargada, debido al confinamiento, ni tampoco a lo largo del acero de tensión, porque éste suele existir en cantidades y con longitud suficientes.

Los ensayes realizados en especímenes que simulan la acción de una columna sobre una losa o una zapata confirman lo anterior. La resistencia es generalmente del orden de dos veces la carga que produce los primeros agrietamientos inclinados alrededor del área cargada, y depende de la zona de compresión disponible en el perímetro de dicha área.

También se han hecho aplicaciones de la analogía de la armadura a este tipo de elementos [7.23].

7.3.4 Losas planas y zapatas con refuerzo transversal

Se han ensayado losas planas y zapatas con distintos tipos de refuerzo transversal, como

los de las figuras 7.12, 7.14 y 7.15, que se comentan con detalle más adelante. Se han detectado básicamente dos mecanismos de falla. En el primero, la sección crítica se desarrolla en forma similar a la que se presenta en losas sin refuerzo, pero se desplaza hasta la zona en que el refuerzo deja de ser efectivo. En el segundo, la resistencia se alcanza cuando fluye el refuerzo transversal. Para tener mayor información se pueden consultar las referencias 7.9, 7.10 y 7.24.

7.4 Efectos de las variables en la carga de agrietamiento

En esta sección se presentan de una manera cualitativa los efectos de las principales variables que influyen en la magnitud de la carga de agrietamiento. Puesto que el fenómeno es muy complejo, debido a la interacción de las distintas variables, no puede expresarse cuantitativamente el efecto individual de cada variable sin tener en cuenta los efectos de las demás. Las expresiones que indican cuantitativamente los efectos de las variables se presentarán posteriormente en la sección 7.6, en la forma en que se utilizan para evaluar la resistencia de elementos sujetos a fuerza cortante.

7.4.1 Miembros sin refuerzo transversal

RESISTENCIA DEL CONCRETO A TENSIÓN

Puesto que las grietas inclinadas aparecen cuando se excede la resistencia del concreto a esfuerzos de tensión, el efecto de esta variable es obvio: a mayor resistencia a tensión, mayor es la carga de agrietamiento inclinado.

Como no existe un procedimiento estándar para medir la resistencia del concreto a tensión, se acostumbra correlacionar la carga que produce el agrietamiento inclinado de un miembro con la raíz cuadrada de la resistencia del concreto a compresión. Experimentalmente se ha encontrado que la resistencia a tensión es aproximadamente proporcional a la raíz cuadrada de la resistencia a compresión, en el rango usual de resistencia de concreto de peso normal.

PORCENTAJE DE ACERO LONGITUDINAL

Se ha observado en ensayes de vigas que al aumentar el porcentaje de acero longitudinal aumenta la carga necesaria para producir el agrietamiento inclinado. La influencia de esta variable se explica teniendo en cuenta que, para miembros con características geométricas y mecánicas iguales y en los que sólo varía el porcentaje de acero longitudinal, el agrietamiento debido a flexión bajo una misma carga es mayor cuanto menor es el porcentaje de acero longitudinal. Puesto que las grietas en flexión reducen la zona disponible para tomar esfuerzos cortantes, éstos aumentan al producirse aquéllas, incrementándose a su vez los esfuerzos de tensión inclinados. Por lo tanto, al aumentar el agrietamiento en flexión disminuye el valor de la carga de agrietamiento inclinado.

ESBELTEZ

Se ha comprobado experimentalmente que la capacidad al agrietamiento inclinado de un miembro disminuye al aumentar su esbeltez, entendiendo por esbeltez la relación entre el claro donde existe la fuerza cortante y el peralte. Para vigas con cargas concentradas, esta relación puede expresarse como M/Vd.

La disminución en el valor de la carga de agrietamiento al aumentar la esbeltez de un miembro, puede explicarse teniendo en cuenta dos aspectos. Primero, mientras mayor sea la esbeltez, para una misma carga, mayor será el agrietamiento por flexión y, por lo tanto, mayores serán las concentraciones de esfuerzos en la parte superior de las grietas

al reducirse la sección disponible para tomar la fuerza cortante. Estas concentraciones de esfuerzos incrementan el valor de los esfuerzos de tensión inclinados y propician el desarrollo de la grieta en tensión diagonal como continuación de la grieta en flexión. Segundo, en elementos poco esbeltos, en los que las cargas están cercanas a los apoyos, los esfuerzos normales de compresión f_y (figura 7.1) disminuyen el ,valor del esfuerzo principal de tensión y aumentan, por lo tanto, la carga necesaria para producir el agrietamiento inclinado.

De lo anterior puede observarse que tanto la esbeltez como el porcentaje de acero longitudinal influyen en el valor de la carga de agrietamiento inclinado, debido a la interacción que existe en el miembro entre los efectos de la fuerza cortante y del momento flexionante.

RELACIÓN DE ANCHO A PERALTE

En series limitadas de ensayes se ha observado que a mayor relación ancho peralte, mayor es la carga de agrietamiento por unidad de área de la sección transversal del miembro. La razón de este efecto no se explica aún claramente [7.4].

TAMAÑO

Existen indicios de que la carga de agrietamiento inclinado es menor mientras mayor es el tamaño del miembro [7.8], aunque este efecto se reduce cuando existe refuerzo longitudinal en las caras laterales de las vigas 17.301.

CARGA AXIAL

La aplicación de carga axial en un miembro aumenta (cuando dicha carga es de compresión) o disminuye (cuando es de tensión) la carga de agrietamiento inclinado, ya que la carga axial produce directamente esfuerzos normales de compresión o tensión que disminuyen o aumentan, respectivamente, el valor de la tensión principal para una misma carga transversal, según se vio en la sección 7.1.

CORTE DE BARRAS LONGITUDINALES

Se ha observado que si se corta un cierto número de barras longitudinales de tensión en una zona en la que existe fuerza cortante, la carga de agrietamiento inclinado es menor que la que se obtiene cuando no se corta ninguna barra. Esto se debe a que en la sección de corte se producen concentraciones importantes de esfuerzos que provocan grietas por flexión, lo que incrementa los esfuerzos cortantes en esta zona y origina, en forma. prematura, el desarrollo de la grieta inclinada como continuación de las grietas por flexión.

7.4.2 Miembros con refuerzo transversal

Se ha mencionado ya que el refuerzo transversal influye muy poco en el valor de la carga de agrietamiento inclinado y en el comportamiento general del miembro antes de alcanzarse este nivel de carga. Las mediciones de deformación realizadas en barras de refuerzo transversal, muestran que los esfuerzos en dichas barras son prácticamente nulos antes de que aparezca el agrietamiento inclinado. Las dimensiones de la grieta dependen de la cantidad de refuerzo transversal.

Las otras variables principales, como la calidad del concreto, el porcentaje de acero longitudinal, la esbeltez, etc., tienen los efectos descritos en la sección anterior.

7.4.3 Losas planas *y* zapatas

La información disponible sobre la carga de agrietamiento de estos elementos es muy escasa, ya que sólo recientemente se ha obser-

vado que este fenómeno ocurre en ellas en forma parecida a como se presenta en miembros con flexión en una dirección. Todos los estudios que se han realizado sobre los efectos de las distintas variables han estado enfocados hacia la determinación de la resistencia a fuerza cortante y no de la carga de agrietamiento. La influencia de las variables se describirá, relacionándola con la resistencia, en la sección 7.5.3.

7.5 Efectos de las variables sobre la resistencia

7.5.1 Miembros sin refuerzo transversal

Del mecanismo de falla expuesto en la sección 7.3.1 puede concluirse que las variables que afectan la capacidad de carga posterior al agrietamiento inclinado son principalmente la resistencia a la compresión del concreto y la resistencia a esfuerzos de adherencia del acero longitudinal. La primera es esencial cuando la falla final es en compresión por cortante, en tanto que la segunda, que depende a su vez de la resistencia a la tensión del concreto y de las características mecánicas y geométricas del acero de refuerzo longitudinal, es fundamental cuando el colapso se produce por adherencia.

Se ha dicho que la capacidad de carga en exceso de la carga de agrietamiento de un elemento sin refuerzo transversal no puede predecirse, ya que ésta es variable aun para elementos que pueden considerarse como idénticos. En consecuencia, no es posible realizar un estudio sistemático de los efectos de las variables.

Desde un punto de vista práctico, se acostumbra considerar la carga de agrietamiento como la carga máxima confiable del miembro, despreciando la capacidad de carga adicional, aun cuando ésta pueda ser 30 por ciento mayor.

7.5.2 Miembros con refuerzo transversal

En términos generales, se han aplicado dos criterios para estimar la resistencia de un elemento con refuerzo transversal. Uno de ellos considera que la resistencia a fuerza cortante se obtiene como la suma de las contribuciones del concreto y del refuerzo transversal; es decir, que es igual a la carga de agrietamiento inclinado más la contribución directa del refuerzo transversal, calculada utilizando la analogía de la armadura o alguna de sus variantes. En cambio, según otro criterio predominante hasta hace algunos años, se consideraba que, una vez desarrollada la grieta inclinada, sólo el refuerzo transversal resiste la fuerza cortante.

En la sección 7.3.2 se afirmó que la información experimental con que se cuenta en la actualidad indica que el primer criterio permite predecir con una mayor aproximación la resistencia de los elementos que fallan por fuerza cortante. En consecuencia, será este criterio el que se seguirá en la presente sección.

Los efectos de las variables en la carga de agrietamiento han sido descritos ya en la sección 7.4.1. Falta tratar solamente el efecto del refuerzo transversal. Este efecto depende en forma importante del valor del porcentaje y del esfuerzo de fluencia del acero transversal utilizado.

Si el porcentaje de refuerzo transversal es muy bajo, al producirse la grieta inclinada se incrementa súbitamente el esfuerzo en las barras de refuerzo transversal que cruzan dicha grieta, excediéndose el esfuerzo de fluencia y originándose inmediatamente una falla súbita en tensión diagonal, sin que la carga externa pueda aumentar sobre aquella que produjo el agrietamiento inclinado. Éste es, desde luego, un tipo de falla inconveniente.

Si el porcentaje de refuerzo transversal es el comúnmente empleado, la carga externa puede aumentar después de que se pro-

duce la grieta inclinada, aumentando los esfuerzos en el refuerzo transversal y en el concreto de la zona de compresión, hasta que se alcanza la fluencia del acero transversal. Cualquier incremento adicional en la carga externa aumentará los esfuerzos en la zona de compresión, la que eventualmente fallará bajo la combinación de esfuerzos normales por flexión y esfuerzos tangenciales por cortante. Este tipo de falla es menos objetable, puesto que la influencia del acero transversal permite apreciar la inminencia de la falla.

Finalmente, si el porcentaje de refuerzo transversal es muy alto, la falla se producirá en la zona de compresión bajo un estado de esfuerzos combinados, sin que se produzca la fluencia del acero en el alma del elemento. Este tipo de falla no es tan súbito como el primero, pero es menos dúctil que el segundo.

7.5.3 Losas y zapatas

En este caso influyen en el valor de la resistencia algunas de las variables consideradas en el caso de miembros y otras particulares de estos elementos, debidas a la acción de flexión en dos direcciones y a que la posición de la sección crítica está dentro de límites muy estrechos.

La resistencia del concreto a tensión influye de la misma manera que en miembros. El efecto de la cantidad de acero de flexión, que en miembros se expresa en función de la relación acero ρ, en losas se toma en cuenta a través de su resistencia en flexión. Esto se justifica considerando que las losas y zapatas por lo común son subreforzadas, y que, por lo tanto, su resistencia a flexión es prácticamente proporcional a la cantidad de acero.

Se ha encontrado que el peralte de la losa o zapata en la sección crítica y el lado del área cargada (lado de la columna), influyen en forma importante en la resistencia. La influencia del peralte es obvia: a mayor peralte, mayor resistencia, ya que aumenta el área disponible para tomar esfuerzos normales y tangenciales. El lado del área cargada tiene un efecto similar al del peralte, pero de menor importancia. Esto puede explicarse considerando que al aumentar dicha dimensión aumenta el área de la sección crítica por esfuerzo cortante.

El parámetro M/Vd, que en el caso de miembros es de cierta importancia, no interviene aquí, porque la posición de la sección crítica prácticamente está fija.

Existen otras variables de importancia. Una de ellas es la presencia de perforaciones y agujeros de distintas formas en las cercanías del área cargada. Éstos son frecuentes en la práctica para permitir el paso de ductos y otras instalaciones. Otra variable es la forma del área cargada. También se ha encontrado que la restricción o desplazamiento en el plano de la losa y la velocidad de aplicación de la carga influyen en la resistencia. Algunas de estas variables han sido estudiadas y se presentan recomendaciones específicas al respecto en el Reglamento ACI 318-02 y en las NTC-04.

La presencia de refuerzo transversal formado por barras no evita el colapso final por perforación, aunque esta perforacion puede presentarse a deformaciones considerables cuando ya se ha desarrollado la capacidad por flexión del elemento.

Otra variable importante en el caso de losas y zapatas es la presencia de un momento flexionante que actúe simultáneamente con la carga axial. Este caso, ilustrado en la figura 7.10, es común en columnas perimetrales de estructuras a base de losas planas, así como en las columnas interiores de estos sistemas cuando los claros contiguos difieren en longitud y carga o cuando la estructura está sujeta a fuerzas horizontales importantes. También se presenta esta situación en columnas que deben transferir una carga axial y un momento a una zapata. El momento que debe transferirse es resistido en parte por flexión en las caras AB y CD y en parte por excentricidad de la fuerza cortante que actúa en la sección crítica. Los momentos torsionantes producen es-

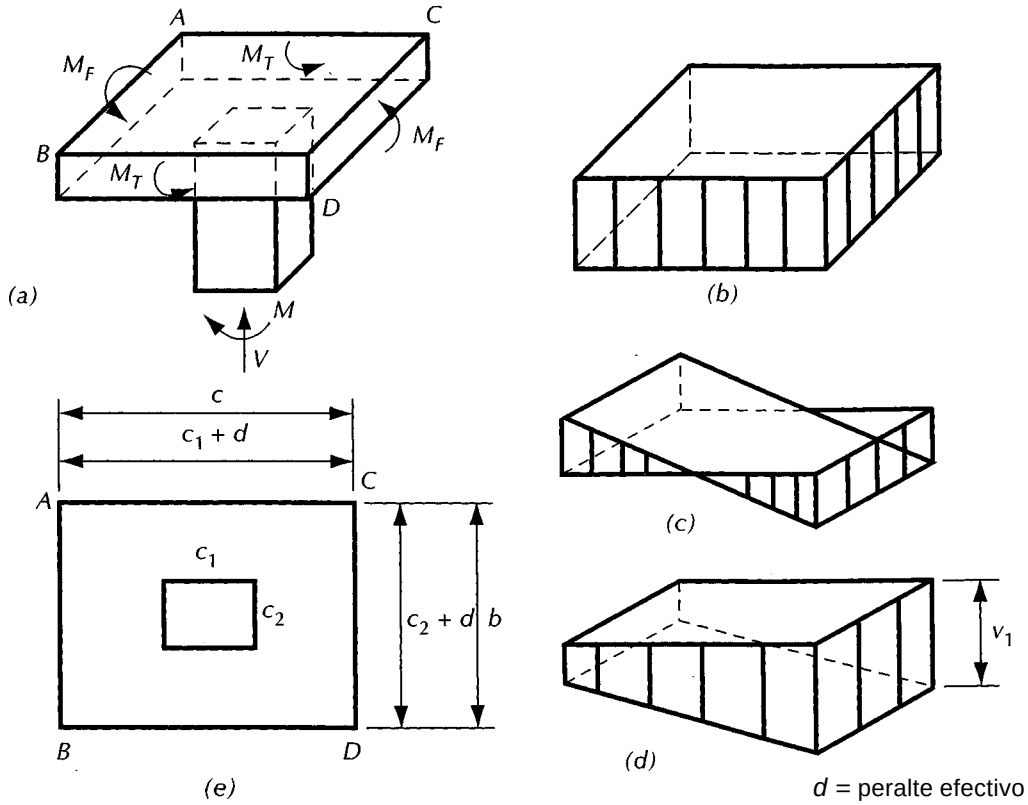


Figura 7.10 Efecto de momento flexionante combinado con carga axial.

fuerzos cortantes (figura 7.10*c*), que se suman a los correspondientes a la carga axial (figura 7.10*b*). La distribución de esfuerzos cortantes resultantes se ilustra en la figura 7.10*d*. Por tanto, la presencia del momento flexionante reduce la resistencia con respecto al caso en que sólo actúa la carga axial. (El cálculo de estos esfuerzos se expone en el inciso 7.6.1c).

7.6 Expresiones para evaluar la resistencia a efectos de fuerza cortante

En la mayoría de los reglamentos, los efectos de las variables estudiados anteriormente se expresan por medio de fórmulas sencillas, con ciertas limitaciones y restricciones.

Las expresiones propuestas reflejan los efectos de las variables principales, dentro de los límites de la información experimental. Las recomendaciones esenciales del Reglamento ACI 318-02 y de las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal están basadas en el trabajo del Comité ACI-ASCE 326 y en las revisiones hechas posteriormente por ese mismo comité, ahora con el número 426, presentadas en las referencias 7.12 a 7.15 y 7.29. En las secciones 7.6.1 y 7.6.2 se incluyen las recomendaciones específicas del Reglamento ACI 318-02 y de las NTC-04, respectivamente.

7.6.1 Expresiones del reglamento ACI*

a) Miembros sin refuerzo transversal

El Reglamento ACI 318-02 presenta un procedimiento simplificado y otro más detallado para calcular la resistencia nominal de

* Las constantes que aparecen en las expresiones de esta sección y de la siguiente son en muchos casos dimensionales. Cuando las ecuaciones están numeradas en la

elementos sin refuerzo transversal. Según el primero, la resistencia a fuerza cortante de un elemento sujeto únicamente a flexión y cortante puede calcularse con la ecuación

$$V_c = 0.50\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.6)$$

o bien, en sistema SI

$$V_c = 0.16\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.6\ \text{SI})$$

donde

V_c = resistencia nominal, que corresponde a la carga de agrietamiento.
b = ancho del alma de secciones T o I, o ancho total si la sección es rectangular.
d = peralte efectivo del refuerzo longitudinal de tensión.

Si el elemento está sujeto además a carga axial de compresión, la resistencia se calcula con la ecuación

$$V_c = 0.50\left(1 + 0.0071\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.7)$$

o bien

$$V_c = 0.16\left(1 + 0.072\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.7\ \text{SI})$$

donde

N_u = carga axial de compresión que actúa sobre el miembro multiplicada por el factor de carga apropiado.
A_g = área total de la sección transversal.

El factor $(1 + 0.0071\ N_u/A_g)$ cuantifica el efecto de la carga axial de compresión, que, como ya se ha mencionado, incrementa la resistencia debido a que reduce los esfuerzos de tensión y el agrietamiento en las vigas.

Para vigas sujetas a cargas axiales de tensión significativas, el Reglamento ACI 318-02 especifica, en el procedimiento simplificado, que toda la fuerza cortante sea resistida por estribos, esto es, que no se considere la contribución del concreto.

Con el procedimiento más detallado del Reglamento ACI 318-02, la resistencia de un miembro sin refuerzo en el alma y sometido únicamente a flexión y fuerza cortante se calcula con la siguiente ecuación

$$V_c = \left(0.5\sqrt{f'_c} + 180\,\rho\frac{V_u d}{M_u}\right)bd$$

$$\le 0.90\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.8)$$

o bien

$$V_c = \left(0.16\sqrt{f'_c} + 18\,\rho\frac{V_u d}{M_u}\right)bd$$

$$\le 0.29\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.8\ \text{SI})$$

donde

ρ = relación de acero longitudinal, A_s/bd.
A_s = área de acero longitudinal.
V_u = fuerza cortante en la sección considerada, multiplicada por el factor de carga apropiado.
M_u = momento flexionante en la sección considerada, multiplicado por el factor de carga apropiado. Si M_u es menor que $V_u d$ se toma igual a este producto.

---

forma usual, con dígitos únicamente, las fuerzas están en **kg**, los esfuerzos en **kg/cm²** y las dimensiones de longitud y área en **cm** y **cm²**.

Cuando el número de la ecuación está seguido de las letras SI, las fuerzas están en N, los esfuerzos en **MPa**, y las dimensiones de longitud y el área en **mm** y **mm²**.

La ecuación 7.8 toma en cuenta dos variables mencionadas en la sección 7.4 que tienen efecto sobre la carga de agrietamiento: la relación de acero longitudinal, ρ, y la esbeltez expresada por el término $V_u d/M_u$. Las resistencias calculadas con esta ecuación son mayores que las calculadas con el procedimiento simplificado, pero la labor numérica se complica sustancialmente como se verá en los ejemplos que se presentan más adelante.

El efecto de una carga axial de compresión se toma en cuenta disminuyendo el valor del momento flexionante M_u en la ecuación 7.8, sustituyéndolo por el valor M_m dado por

$$M_m = M_u - N_u\left(\frac{4h-d}{8}\right) \qquad (7.9)$$

eliminando la restricción $V_u d/M_m \leq 1$ y sin que la resistencia V_c exceda el valor

$$V_c = 0.90\sqrt{f'_c}\, bd\sqrt{1+0.030\, N_u/A_g} \quad (7.10)$$

o bien

$$V_c = 0.29\sqrt{f'_c}\, bd\sqrt{1+0.30\, N_u/A_g} \quad (7.10\ \text{SI})$$

En estas ecuaciones

M_m = momento flexionante modificado.
N_u = carga normal a la sección transversal, positiva si es de compresión.
h = peralte total de la sección transversal.
A_g = área total de la sección transversal.

Para cargas axiales de tensión importantes, la resistencia puede calcularse con la ecuación

$$V_c = 0.50\sqrt{f'_c}\, bd\left(1+0.028\,\frac{N_u}{A_g}\right) \quad (7.11)$$

o bien

$$V_c = 0.16\sqrt{f'_c}\, bd\left(1+0.28\,\frac{N_u}{A_g}\right) \quad (7.11\ \text{SI})$$

en las que N_u tiene signo negativo por ser de tensión.

En las ecuaciones 7.6 a 7.11 el valor de f'_c debe limitarse a 700 kg/cm^2 (70 MPa). Esta restricción se establece porque se ha encontrado en algunos ensayes que las ecuaciones tienden a sobrestimar la resistencia a fuerza cortante cuando se usan concretos de alta resistencia, debido a que en éstos las superficies de agrietamiento resultan menos rugosas que en concretos normales, lo que reduce la carga que resiste por el efecto de trabazón entre los agregados [7.25, 7.26].

La resistencia de diseño se obtiene, como en el caso de las otras acciones ya estudiadas, multiplicando la resistencia nominal calculada con alguna de las ecuaciones anteriores por el factor de resistencia, ϕ, que para fuerza cortante debe tener el valor de 0.75. Esta resistencia de diseño, ϕV_c, debe ser igual o mayor que la fuerza cortante que actúa en la sección crítica por cortante, la cual, debido principalmente a los esfuerzos verticales de compresión que existen en los apoyos del elemento, no se presenta en la cara del apoyo sino a una cierta distancia de la misma. De la observación del agrietamiento de gran número de ensayes en cortante se ha concluido que la grieta inclinada se inicia generalmente a una distancia de la cara del apoyo no menor que d. Teniendo esto en cuenta, el Reglamento ACI especifica considerar como sección crítica por cortante, la situada a una distancia d de la cara del apoyo. Sin embargo, para prevenir el posible desarrollo de grietas inclinadas más cercanas al apoyo, no debe reducirse el área de la sección transversal entre la cara del apoyo y la sección crítica. Cuando el apoyo es de naturaleza tal que no se inducen es-

fuerzos de compresión, la sección crítica debe tomarse en el paño de apoyo.

En la figura 7.11 se ilustra la localización de la sección crítica para algunos casos típicos. En los casos (*a*) y (*b*) existen esfuerzos verticales de compresión cerca del apoyo y la sección crítica se presenta a una distancia d de la cara del apoyo. En el caso de la figura 7.11*c* el elemento horizontal está colgado del elemento vertical que trabaja a tensión; como no hay esfuerzos de compresión en el elemento horizontal, la sección crítica debe considerarse en la cara interior del elemento vertical. En el caso de la figura 7.11d existe una carga concentrada cerca del apoyo que hace que el valor de la fuerza cortante dentro de la distancia d sea mucho mayor que en el resto de la viga; la sección crítica debe tomarse también en la cara del apoyo.

b) Miembros con refuerzo transversal

La resistencia a fuerza cortante de miembros con refuerzo en el alma se considera igual a

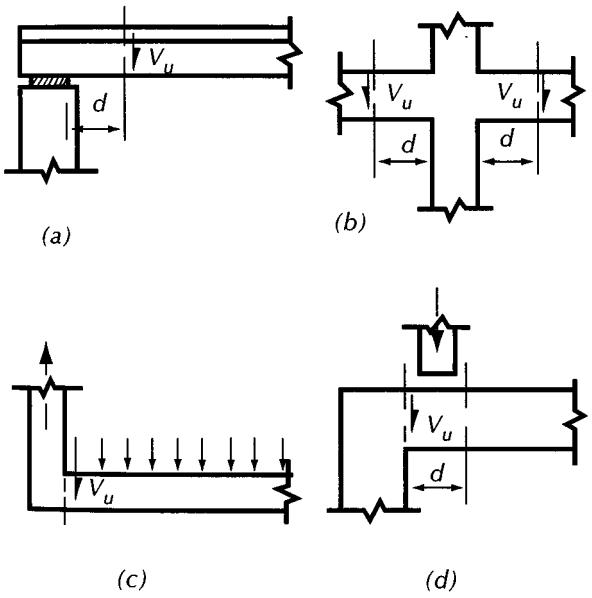


Figura 7.11 Localización de la sección crítica para fuerza cortante en algunos casos típicos (referencia 7.27).

la suma de la resistencia del concreto calculada como se indica en la sección anterior, y de la contribución a la resistencia del refuerzo en el alma, o sea

$$V_n = V_c + V_s \qquad (7.12)$$

donde

V_n = resistencia nominal de un miembro con refuerzo en el alma.
V_c = resistencia del concreto.
V_s = contribución del refuerzo en el alma.

La contribución del acero en el alma se calcula con base en la analogía de la armadura presentada en la sección 7.3.2, suponiendo que el refuerzo en el alma fluye en la falla. La expresión que se presenta en el Reglamento ACI 318-02 puede deducirse de la ecuación 7.5 haciendo z = d, simplificación que puede aceptarse teniendo en cuenta la poca precisión con que pueden valuarse los efectos de las variables secundarias. Con esta simplificación se obtiene

$$V_s = \frac{A_v f_y (\operatorname{sen}\alpha + \cos\alpha)\, d}{s} \qquad (7.13)$$

donde

A_v = área total del refuerzo en el alma en una distancia *s*, medida en dirección paralela al refuerzo longitudinal.
α = ángulo entre las barras o estribos de refuerzo en el alma y el eje longitudinal del miembro.
s = separación de estribos o barras dobladas, medida en dirección paralela a la del refuerzo longitudinal.

En el caso de estribos perpendiculares al refuerzo longitudinal ($\alpha = 90°$), la ecuación 7.13 se reduce a

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \qquad (7.14)$$

El valor de V_s en ningún caso debe ser mayor de $2\sqrt{f'_c}\,b\,d$ ($0.64\sqrt{f'_c}\,bd$ en sistema SI), ya que si se tuviese una cantidad excesiva de refuerzo en el alma, no se garantizaría que la resistencia total fuese la suma de la resistencia del concreto y de la contribución del acero. El Reglamento ACI 318-02 también especifica que el esfuerzo de fluencia de diseño del refuerzo en el alma no exceda de 4200 kg/cm^2. La contribución del refuerzo a la resistencia nominal debe afectarse del mismo valor de ϕ, o sea, 0.75, para obtener la contribución a la resistencia de diseño.

Además de aumentar la resistencia a fuerza cortante, el refuerzo transversal aumenta la ductilidad y proporciona un aviso de falla que no poseen los elementos sin dicho refuerzo. Este refuerzo resulta de gran valor cuando se presentan fuerzas imprevistas en la estructura, lo que evita fallas catastróficas. Por esta razón, se recomienda en general colocar una cantidad mínima de dicho refuerzo transversal. En este sentido, el Reglamento ACI 318-02 recomienda colocar un área mínima igual a

$$A_v = 0.2\sqrt{f'_c}\,\frac{bs}{f_y} \qquad (7.15)$$

o bien

$$A_v = 0.06\sqrt{f'_c}\,\frac{bs}{f_y} \qquad (7.15\ \text{SI})$$

en cualquier sección en la que la fuerza cortante, afectada por el factor de carga, exceda de la mitad de la resistencia de diseño del concreto, ϕV_c. Se exceptúan de esta recomendación losas, zapatas y vigas anchas.

Los reglamentos limitan también la separación del refuerzo transversal cuando éste se considera necesario. En general, se trata de impedir que pueda desarrollarse una grieta inclinada a 45° sin que sea interceptada por una barra en la zona comprendida entre el refuerzo de tensión y el semiperalte efectivo del elemento. El Reglamento ACI 318-02 especifica a este respecto que la separación de estribos perpendiculares al eje longitudinal de un elemento no exceda de $d/2$ ni de 60 cm. Cuando V_s excede de $\sqrt{f'_c}\,bd$, estas separaciones deben reducirse a la mitad.

Teniendo en cuenta que el corte de barras longitudinales en zonas de tensión origina concentraciones de esfuerzos importantes que propician el desarrollo de grietas por tensión diagonal, el Reglamento ACI 318-02 (sección 12.10.5) impone ciertas limitaciones a tal práctica. Para que sea admisible cortar barras longitudinales en zonas de tensión, debe satisfacerse una de las siguientes condiciones: a) la fuerza cortante en la zona de corte no es mayor que los dos tercios de la fuerza cortante permisible, incluyendo el efecto del refuerzo en el alma; *b*) se proporcionan estribos adicionales a lo largo de la barra cortada en un distancia $3d/4$, a partir del punto de corte; estos estribos adicionales deben tener un área no menor que $4.2\ bs/f_y$ y la separación no debe exceder de $d/8\beta_b$, donde β_b es la relación entre el área de barras cortadas y el área total, y *c*) las barras que se continúan tienen un área por lo menos del doble de la requerida por flexión en el punto de corte, y el cortante no excede de las tres cuartas partes del permitido.

La intención de estas limitaciones es tener en cuenta los efectos perjudiciales del corte de barras que han sido observados en ensayes realizados por Ferguson 17.51 y Baron [7.6].

Se aprecia que estas recomendaciones son engorrosas en aplicaciones prácticas. La más sencilla de observar es la primera, la cual puede cumplirse prolongando el refuerzo de tensión o aumentando los estribos.

c) Losas y zapatas

El Reglamento ACI 318/02 distingue dos posibles tipos de falla: como viga y como losa. En el primero, la losa se considera como una

viga ancha en la cual se puede presentar el agrietamiento inclinado, en forma similar a la descrita anteriormente para miembros, en una sección crítica localizada a una distancia d del apoyo o de la cara de una carga concentrada. El cálculo de la resistencia para este caso es igual al presentado en las secciones 7.6.1a y 7.6.1b.

La falla como losa corresponde a la descrita en la sección 7.2.3, o sea, a la penetración de un cono o pirámide truncada en la losa. La resistencia de una losa sin esfuerzo para cortante será, en este caso, el menor de los tres valores siguientes:

$$V_c = \left(0.5 + \frac{1}{\beta_c}\right)\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.16)$$

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 0.5\right)\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.17)$$

$$V_c = \sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.18)$$

o bien, en sistema SI:

$$V_c = \left(0.16 + \frac{32}{\beta_c}\right)\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.16\ \text{SI})$$

$$V_c = \left(\frac{\alpha_s d}{b_o} + 0.5\right)\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.17\ \text{SI})$$

$$V_c = 0.32\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.18\ \text{SI})$$

El factor β_c es la relación entre el lado largo y el lado corto de la columna que transmite la carga a la losa. El término b_o es el perímetro de la sección crítica, la cual se localiza de tal manera que su perímetro sea mínimo, pero que no se acerque a la columna una distancia menor que $d/2$. Para losas sin refuerzo en el alma, la sección crítica tiene la misma forma que la columna que transmite o recibe la carga y dista de ella una distancia uniforme de $d/2$; para losas con refuerzo en el alma, la sección crítica puede tener forma distinta, como se puede ver en la figura 7.13. El factor α_s tiene un valor de 10 para columnas interiores, 7.5 para columnas de borde y 5 para columnas de esquina.

Para columnas cuadradas o de forma no alargada, se ha encontrado que el esfuerzo cortante v_c en la sección crítica es $\sqrt{f'_c}$ (0.32 $\sqrt{f'_c}$ en sistema SI). En estos casos rige generalmente la ecuación 7.18. Sin embargo, también se ha encontrado que el esfuerzo cortante disminuye en columnas de forma alargada, en las que rige generalmente la ecuación 7.16. La ecuación 7.17 toma en cuenta que la resistencia disminuye para valores pequeños de la relación d/b_o.

Existen varios tipos de refuerzo transversal para losas y zapatas cuya función es restringir el agrietamiento potencial que define el cono o pirámide truncada de falla mostrado en la figura 7.6. Esta función es similar a la de los estribos o barras dobladas usados en vigas.

En la figura 7.12 se muestra un tipo de refuerzo que consiste en crucetas formadas por perfiles de acero estructural que se colocan sobre la columna. Estas crucetas desplazan la sección de falla alejándola de la columna, como se muestra en la figura 7.13, con lo cual aumenta el perímetro de dicha sección y, como consecuencia, aumenta también la resistencia a cortante, al mismo tiempo que disminuye la fuerza cortante en la sección crítica.

Otro tipo de refuerzo, más sencillo en su procedimiento de construcción, es el mostrado en la figura 7.14. Consiste en crucetas formadas por estribos del mismo tipo que los usados en vigas [7.10]. Cuando se usa este refuerzo, la sección de falla se desplaza en la misma forma indicada en la figura 7.13.

El dimensionamiento del primer tipo de refuerzo no se incluye en este texto. El lec-

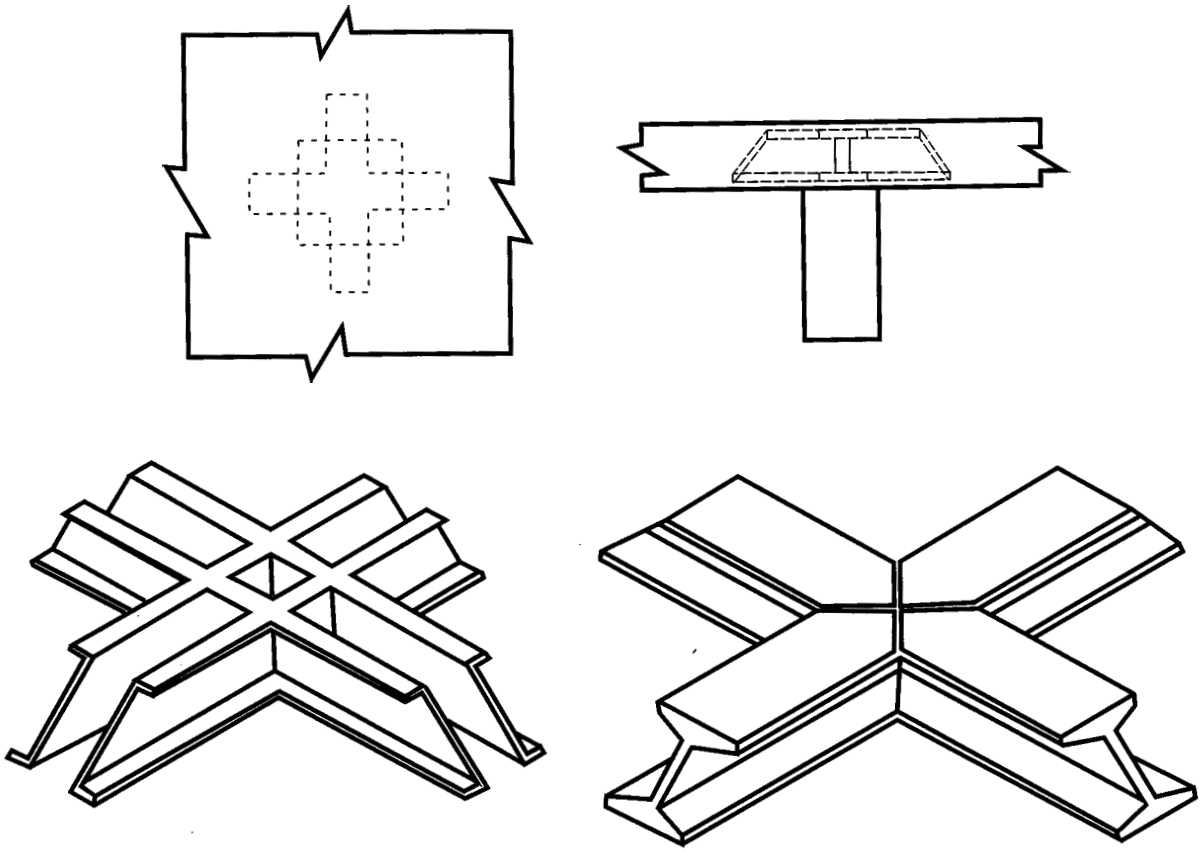


Figura 7.12 Refuerzo para cortante en losas a base de perfiles estructurales.

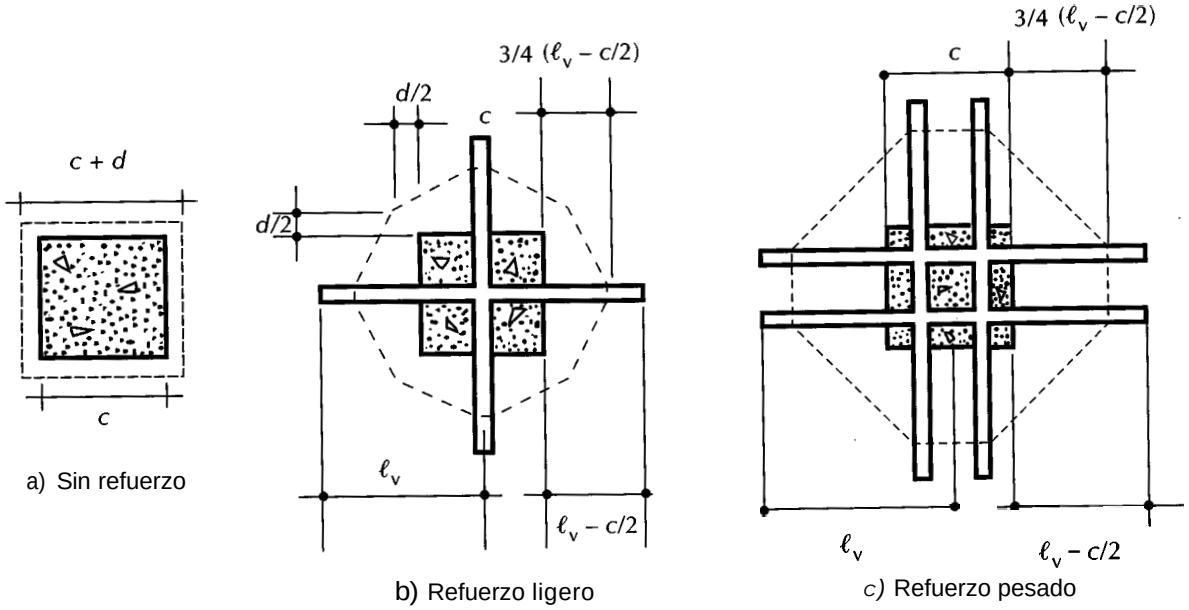


Figura 7.13 Localización de la sección crítica.

tor puede consultar la referencia 7.9. Para calcular la resistencia con el refuerzo mostrado en la figura 7.14, se suman las resistencias del concreto, V_c, y del acero, V_s, para obtener la resistencia total. La primera se calcula con la expresión

$$V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.19)$$

$$V_c = 0.16\sqrt{f'_c}\, b_o d \qquad (7.19\ \text{SI})$$

y la segunda con la ecuación 7.14, sumando las resistencias de los cuatro brazos (en columnas de borde serán tres brazos y en columnas de esquina, dos brazos). La suma de las resistencias V_c y V_s no debe considerarse mayor que $1.5\sqrt{f'_c}b_o d$, o bien, $0.48\sqrt{f'_c}b_o d$ en sistema SI.

Un tercer tipo de refuerzo en el alma para losas, que también ha desmostrado su eficacia en algunos ensayes, es el mostrado en la figura 7.15. Consiste en pernos con cabeza soldados en su parte inferior a una placa o solera [7.24]. El tallo del perno desempeña el mismo papel que las ramas verticales de los estribos del refuerzo anterior y las cabezas sirven de anclajes. La resistencia se calcula también igual que en el caso anterior.

Experimentos realizados en los laboratorios de la Portland Cement Association (Skokie, III.) indican que se puede tomar en cuenta la reducción de la resistencia a fuerza cortante producida por la presencia de agujeros en la cercanía de una columna, reduciendo el perímetro b_o en la longitud interceptada por las dos tangentes a los bordes del agujero trazadas desde el centro del área cargada, tal como se muestra en la figura 7.16. Según el Reglamento ACI 318-02, esta reducción debe tenerse en cuenta sólo cuando la distan-

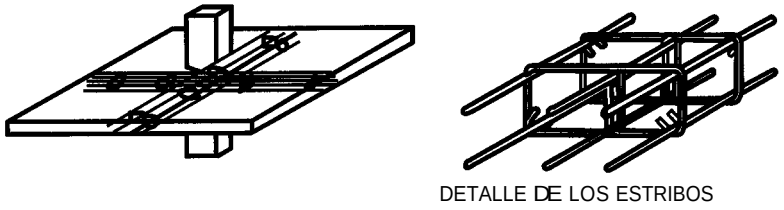


Figura 7.14 Refuerzo para cortante en losas a base de estribos.

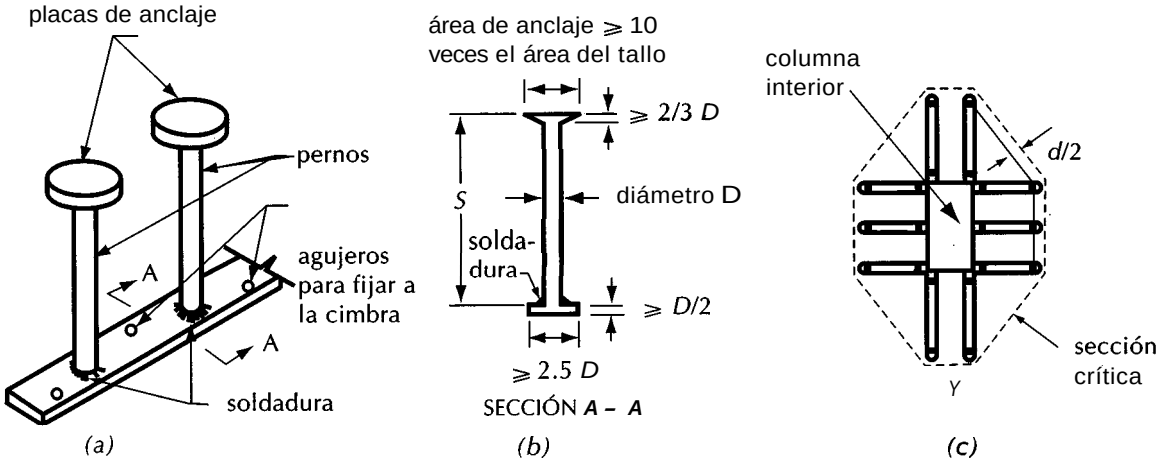


Figura 7.15 Refuerzos para cortante en losas a base de pernos.

cia del agujero al apoyo es menor que diez veces el peralte efectivo.

Al final de la sección 7.5.3 se presentó el caso de losas que, adicionalmente a la carga axial, transferían un momento a la columna. Se dijo que una parte del momento se transfería por flexión y otra parte por momentos torsionantes, que producían esfuerzos cortantes adicionales a los producidos por la carga axial (figura 7.10). El Reglamento ACI 318-02 especifica que la fracción del momento total que se transmite mediante momentos torsionantes se calcule multiplicando el momento total por el factor γ_v definido por la ecuación

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}} \qquad (7.20)$$

donde c_1 es el lado de la columna en la dirección en que se transmite el momento, y c_2 en la dirección perpendicular (figura 7.10).

El esfuerzo máximo v_1 mostrado en la figura 7.10*d* no debe exceder los valores de $(V_c/b_o d)$ obtenidos con las ecuaciones 7.16, 7.17 o 7.18, si se trata de losas sin refuerzo en el alma. Si la losa tiene refuerzo en el alma, el esfuerzo máximo v_1 no debe exceder el valor de $(V_c + V_s)/b_o d$, calculando V_c con la ecuación 7.19 y V_s con la ecuación 7.14. El área A_v de esta ecuación debe ser la de las ramas de los estribos de todas las vigas ficticias de la figura 7.14. El valor de v_1 se puede calcular con la expresión siguiente

$$v_1 = \frac{V_u}{b_o d} + \frac{\gamma_v M_u y_1}{J} \qquad (7.21)$$

El parámetro J es un momento polar de inercia modificado que corresponde a la sección crítica. En la figura 7.17 se presentan valores de este parámetro para columnas interiores, exteriores y de esquina. El significado del término y_1 se muestra también en la figura 7.17.

d) Comentarios sobre las expresiones del Reglamento ACI 318-02

La ecuación 7.8 fue propuesta originalmente por el comité 326 con base en los ensayes realizados hasta 1963. Se incluyó en el Reglamento ACI de 1971 y nuevamente en los de 1977 a 2002. Sin embargo, se le han señalado algunas limitaciones importantes que se resumen a continuación.

El análisis de ensayes posteriores a 1963 ha mostrado que la ecuación mencionada da resultados del lado de la inseguridad para elementos con relación de acero longitudinal inferior a 0.01 y valores de $V_u d/M_u$ inferiores a 0.5. Se ha propuesto la siguiente ecuación que toma en cuenta estos factores [7.2]

$$V_c = \left(0.25\sqrt{f'_c} + 1000\,\rho\,\frac{V_u d}{M_u}\right) bd \qquad (7.22)$$

o bien

$$V_c = \left(0.08\sqrt{f'_c} + 98\,\rho\,\frac{V_u d}{M}\right) bd \qquad (7.22\ \text{SI})$$

También se ha señalado que el efecto del término $V_u d/M_u$ es poco significativo para vigas con valores de la relación de esbeltez a/d mayores que dos. Además, una vez que se desarrolla el agrietamiento inclinado se presenta cierta acción de arco en la viga y como consecuencia de esta acción, la distribución de esfuerzos de flexión no corresponde ya al diagrama de momentos flexionantes, por lo que el significado del término $V_u d/M_u$ pierde sentido [7.14].

Por las razones anteriores, y por la dificultad operativa de manejar el término $V_u d/M_u$, se ha propuesto sustituir la ecuación del Reglamento ACI que se utiliza para calcular la resistencia del concreto por la siguiente ecuación [7.14, 7.15]

$$V_c = \left[(0.20 + 30\,\rho)\sqrt{f'_c}\right] bd$$

$$\leq 0.60\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.23)$$

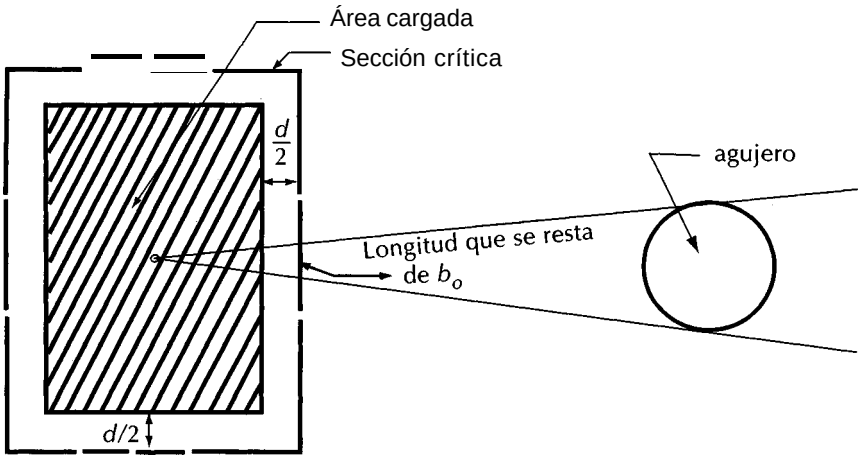


Figura 7.16 Reducción en el perímetro de la sección crítica por la presencia de un agujero.

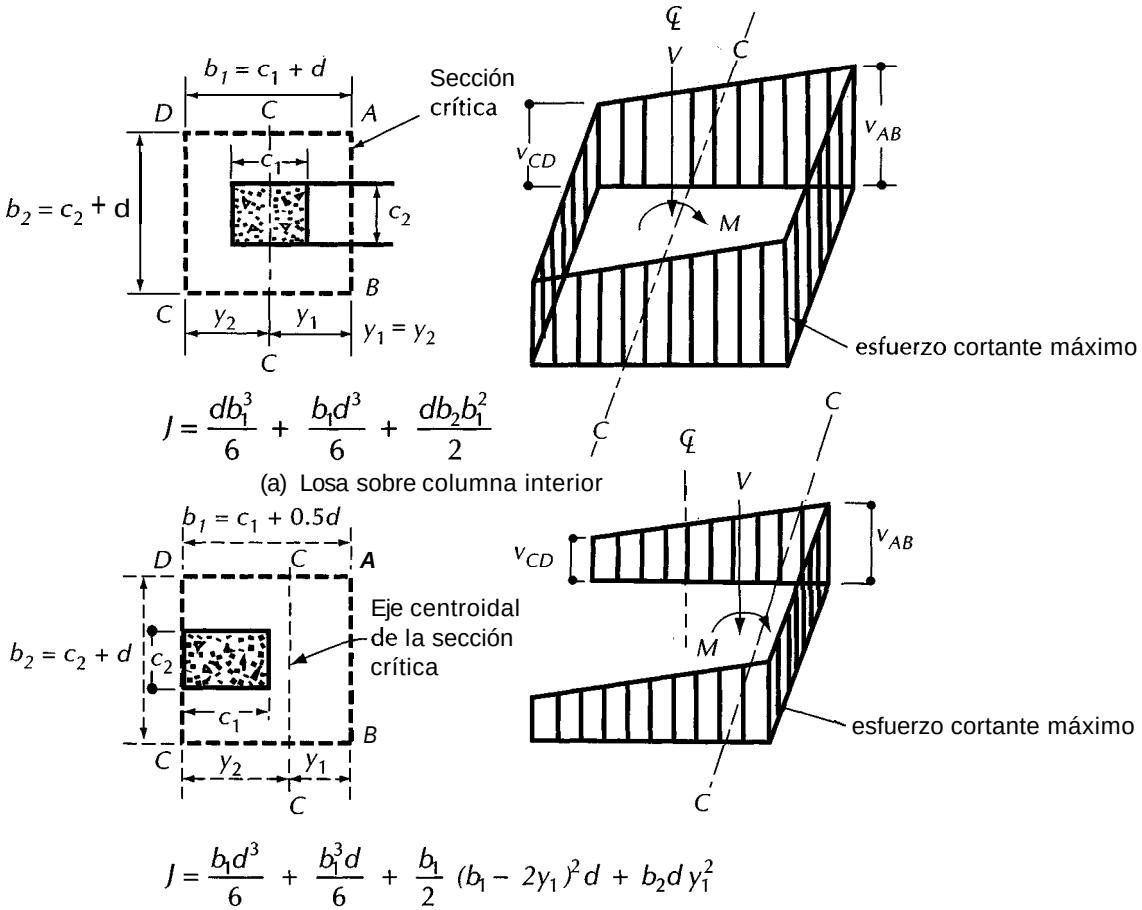
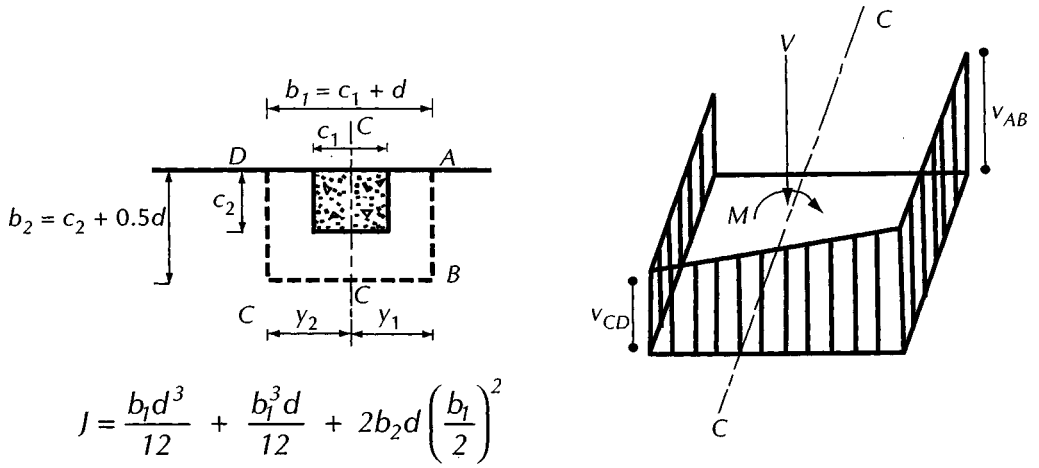
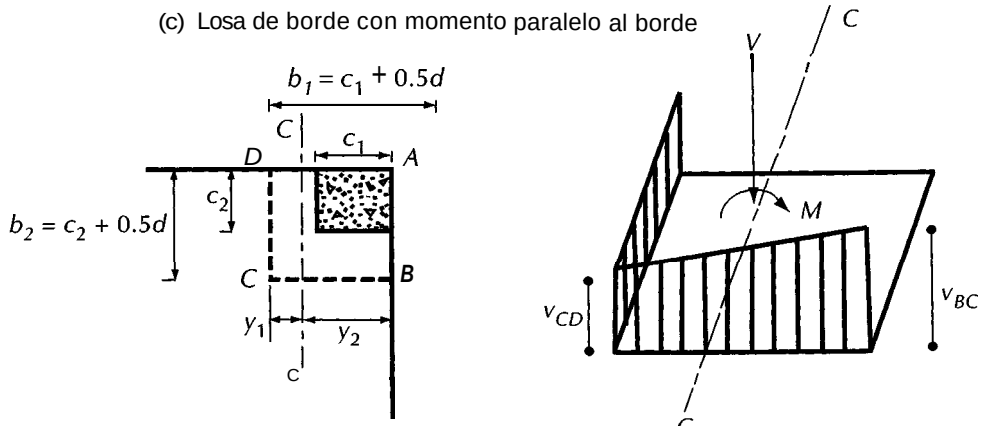


Figura 7.17 Valores del parámetro *J* sobre columnas interiores y de borde.



$$J = \frac{b_1 d^3}{12} + \frac{b_1^3 d}{12} + 2b_2 d\left(\frac{b_1}{2}\right)^2$$

(c) Losa de borde con momento paralelo al borde



$$J = \frac{b_1 d^3}{12} + \quad 12 + b_1 d\left(\frac{b_1}{2} - y_1\right)^2 + b_2 d y_1^2$$

(d) Losa *de* esquina

Figura *7.1* **7** *(Continuación)*

Esta ecuación resulta más fácil de aplicar y los valores calculados con ella concuerdan razonablemente bien con los medidos experimentalmente.

Otras modificaciones que se han propuesto a las normas incluidas en el Reglamento ACI consisten en ecuaciones diferentes a las actuales para calcular el efecto de cargas de compresión y de tensión [7.20], en la uniformización de criterios para concreto reforzado y presforzado (que no se comentan en este texto, ya que no incluye concreto presforzado) y en la inclusión de precauciones especiales cuando una viga secundaria se une a una viga principal en tal forma que el lecho inferior de la viga principal diste del lecho inferior de la viga secundaria menos de la mitad del peralte de la viga secundaria. En este caso se considera que la viga secundaria está colgada de la principal, y deben colocarse estribos que resistan por sí solos la totalidad de la fuerza cortante que transmite la viga secundaria a la principal. Estos estribos deben quedar dentro de una distancia de la mitad de la altura de la viga secundaria a cada lado de la intersección de las dos vigas.

En relación con el diseño de losas y zapatas con refuerzo transversal, el procedimiento del ACI, al considerar que el área de estribos A_v es la de todas las ramas de las vigas ficticias de la figura 7.14, está suponiendo que el refuerzo transversal debe ser simétrico con respecto a la columna, aunque los esfuerzos varíen en cada cara según se muestra en la figura 7.17. En las NTC no se hace esta suposición, como se verá más adelante, y en algunas referencias se proponen también procedimientos alternativos [7.31, capítulo 16].

7.6.2 Expresiones de las *NTC-04* del Reglamento del Distrito Federal

a) Miembros sin refuerzo transversal

La resistencia nominal de estos miembros se calcula con las siguientes ecuaciones, según la relación de refuerzo:

si $\rho < 0.015$,

$$V_c = \left[(0.20 + 20\ \rho)\sqrt{f^*_c}\right] bd \qquad (7.24)$$

$$V_c = \left[(0.06 + 6\ \rho)\sqrt{f^*_c}\right] bd \qquad (7.24\ \text{SI})$$

si $\rho \geq 0.015$,

$$V_c = 0.5\ \sqrt{f^*_c}\ bd \qquad (7.25)$$

$$V_c = 0.16\ \sqrt{f^*_c}\ bd \qquad (7.25\ \text{SI})$$

Se puede ver que las ecuaciones 7.24 y 7.25 son muy similares a la ecuación 7.23 propuesta en las referencias 7.14 y 7.15. En las primeras se utiliza la resistencia reducida f^*_c, en vez de f'_c como en todas las NTC-04. El valor de p para el cual se cambia de la ecuación 7.24 a la 7.25 se ha incrementado con respecto al propuesto en las referencias 7.14 y 7.15, y también al incluido en versiones anteriores de las NTC, para tomar en cuenta información reciente [7.30]. Este reglamento establece que las ecuaciones 7.24 y 7.25 se aplican a miembros cuya relación claro a peralte total no sea menor que cuatro. También establece que si el peralte total es mayor que 70 cm, la resistencia calculada se reduzca multiplicándola por el factor [1-0.004 (*h*-70)], el cual no deberá tomarse mayor que 1.0 ni menor que 0.8. Esta reducción se basa en recomendaciones presentadas en la referencia 7.13 que toman en cuenta el efecto del tamaño de la sección, efecto que se ha analizado anteriormente en este texto.

Las NTC-04 permiten tomar en cuenta la contribución a la resistencia del patín a compresión en secciones *T, I* o L. Esto se logra sumando la cantidad t^2 al área bd de las ecuaciones 7.24 o 7.25, en el caso de vigas T e *I* y $t^2/2$ en el caso de vigas L. En estos casos, b representa el ancho del alma, y t el espesor del patín.

El efecto de una carga axial de compresión se toma en cuenta multiplicando la resistencia calculada con las ecuaciones 7.24 o 7.25 por el término $[1 + 0.007\ (P_u/A_g)]$, $[1 + 0.07\ (P_u/A_g)]$ en sistema SI, donde P_u es la carga axial multiplicada por el factor de carga y A_g el área gruesa de la sección, siempre que P_u no exceda de $[0.7\ f^*_c\ A_g + 2000\ A_s]$, $[0.7\ f^*_c\ A_g + 200\ A_s]$ en sistema SI. Cuando la carga axial es mayor que este valor, lo cual sucede con cargas axiales muy elevadas, la resistencia a cortante se va disminuyendo linealmente desde el valor correspondiente al límite anterior hasta un valor nulo para la resistencia a compresión axial, o sea, para $P_u = A_g\ f''_c + A_s\ f_y$.

En el caso de cargas axiales de tensión, la resistencia obtenida con las ecuaciones 7.24 o 7.25 se multiplica por el factor $[1 + 0.03\ (P_u/A_g)]$, $[1 + 0.3\ (P_u/A_g)]$ en sistema SI, donde P_u tiene signo negativo por ser de tensión. Se

ve que este procedimiento es similar al expresado por la ecuación 7.11 para el Reglamento ACI 318-02.

Cuando existan cargas axiales, el valor de la relación de refuerzo, p, que se utilice para determinar si se usa la ecuación 7.24 o la 7.25, se calcula usando el área de las barras de la capa de refuerzo más próxima a la cara de tensión, o a la cara de compresión mímima, en secciones rectangulares, o tomando un área de acero igual a 0.33 A_g en secciones circulares. En estas últimas, bd se sustituirá por A_g.

La resistencia de diseño, V_{cR}, se obtiene multiplicando la resistencia nominal, V_c, por un factor de resistencia, F_R, igual a 0.80.

b) Miembros con refuerzo transversal

Los criterios del Reglamento del Distrito Federal son los mismos que los del Reglamento ACI. La resistencia es igual a la suma de la contribución del concreto y de la contribución del acero. La primera se calcula con las ecuaciones de la sección anterior y la segunda con las ecuaciones 7.13 y 7.14. Se permite usar esas mismas ecuaciones para secciones circulares, sustituyendo d por el diámetro de la sección.

La resistencia de diseño se obtiene multiplicando la resistencia nominal por un factor F_R igual a 0.80, o sea, igual al de miembros sin refuerzo transversal.

No se permite que la resistencia de diseño total de vigas exceda de 2.5 F_R bd (0.8 $F_R \sqrt{f^*_c}$ bd en sistema SI), ni la de columnas o elementos de marcos dúctiles exceda de 2.0 F_R bd (0.64 $F_R \sqrt{f^*_c}$ bd en sistema SI), ni usar estribos con esfuerzo de fluencia mayor de 4200 kg/cm^2 (420 MPa), por las razones expuestas en la sección 7.6.1 b.

En vigas en las que la carga de diseño, V_u, sea menor que la resistencia del concreto, V_{cR}, y en las que por lo tanto no se requeriría teóricamente refuerzo por cortante, se especifica colocar estribos verticales por lo menos del No. 2.5, espaciados a cada medio peralte efectivo, que proporcionen un área mínima de

$$A_{v,mín} = 0.25 \sqrt{f^*_c}\, \frac{bs}{f_y}$$

$$A_{v,mín} = 0.083 \sqrt{f^*_c}\, \frac{bs}{f_y}$$

Cuando V_u es mayor que V_{cR}, pero menor o igual a 1.5 $F_R \sqrt{f^*_c}$ bd (0.47 $F_R \sqrt{f^*_c}$ bd en sistema SI), el espaciamiento de estribos no debe exceder de 0.5 d. Si V_u es mayor que 1.5 $F_R \sqrt{f^*_c}$ bd, el espaciamiento no debe ser mayor que 0.25 d.

También se presentan en las NTC-04 limitaciones sobre interrupciones y traslapes del refuerzo longitudinal. Se especifica al respecto que en tramos comprendidos a un peralte efectivo de las secciones donde, en zonas de tensión, se interrumpa más que 33 por ciento, o traslape más que 50 por ciento del refuerzo longitudinal, la fuerza cortante máxima que puede tomar el concreto se considere de 0.7 V_{cR}.

c) Losas y zapatas

También se especifica revisar dos condiciones: la de viga ancha y la de cortante por penetración. La primera, con los procedimientos usuales para vigas, y la segunda, como se describe a continuación.

Se calculan los esfuerzos cortantes máximos con la ecuación 7.21 y con los valores que se proporcionan en la figura 7.17.

Desde luego, si no hay transmisión de momentos, el segundo término del segundo miembro de esta ecuación es nulo. El esfuerzo cortante máximo calculado de esta manera, como el v_{AB} de las figuras 7.17a y b, no debe exceder el menor de los siguientes

valores, a menos que se coloque refuerzo transversal:

$$v_{máx} \le F_R\left(0.5+g\right)\sqrt{f^*_c} \qquad (7.26)$$

$$v_{máx} \le F_R\sqrt{f^*_c} \qquad (7.27)$$

$$v_{máx} \le 0.3F_R\left(0.5+g\right)\sqrt{f^*_c} \qquad (7.26\ \text{SI})$$

$$v_{máx} \le 0.3F_R\sqrt{f^*_c} \qquad (7.27\ \text{SI})$$

donde y es la relación de lado corto a lado largo. Aun cuando no se excedan estos valores, debe colocarse un esfuerzo mínimo como el indicado en la figura 7.14, consistente en estribos no menores del No. 2 espaciados a no más de $d/3$ y en una longitud no menor a un cuarto del claro correspondiente. Estas disposiciones son equivalentes a las de las ecuaciones 7.18 y 7.16 del Reglamento ACI.

Si se requiere refuerzo en el alma, se procede de la siguiente manera. Se supone que las vigas ficticias indicadas en la figura 7.14 tienen un ancho, b, igual al peralte de la losa, d, más el lado de la columna perpendicular a la viga que se esté analizando ($b = c + d$). La fuerza cortante en cada rama de las vigas ficticias se calcula multiplicando el esfuerzo máximo en la cara correspondiente, calculado con la ecuación 7.21, por la sección transversal de viga ficticia, bd, de tal manera que $V_u = v_{máx}$ db. A continuación se calcula la contribución del concreto con la ecuación

$$V_{cR} = 0.4F_R\,bd\sqrt{f^*_c} \qquad (7.28)$$

$$V_{cR} = 0.13F_R\,bd\sqrt{f^*_c} \qquad (7.28\ \text{SI})$$

La diferencia entre V_u y V_{cR} será la fuerza V_s que debe tomar el refuerzo transversal de cada rama. La separación de los estribos necesarios se calcula con las ecuaciones 7.13 o 7.14 según el caso.

Con el procedimiento de las NTC, el refuerzo transversal no resulta simétrico alrededor de las columnas, como en el caso del Reglamento ACI. La separación de los estribos depende de la magnitud de los esfuerzos máximos en cada cara de la columna. El esfuerzo $v_{máx}$, calculado como ya se ha descrito, no debe exceder de 1.3 $F_R\sqrt{f^*_c}$ [0.4 $F_R\sqrt{f^*_c}$ en sistema SI]. En el ejemplo 18.1 se ilustra la aplicación de este método en el caso de una losa plana.

7.7 Ejemplos

Ejemplo 7.1. En este ejemplo se ilustra la determinación de la resistencia a fuerza cortante de una viga simplemente apoyada, con las características de refuerzo y dimensiones mostradas y sujeta a una carga concentrada en el centro y una carga uniformemente repartida. La revisión se hizo siguiendo los dos criterios previstos en el Reglamento ACI 318-02:

a) Considerando que la contribución del concreto está dada por

$$V_c = 0.50\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.6)$$

b) Considerando que la contribución del concreto está dada por

$$V_c = \left(0.5\sqrt{f'_c} + 180\,\rho\,\frac{V_u d}{M_u}\right)bd$$

$$\le 0.90\sqrt{f'_c}\,bd \qquad (7.8)$$

Para aplicar el criterio b, según el cual la contribución del concreto a la resistencia depende de la interacción entre el momento y la fuerza cortante, fue necesario calcular estas acciones en varias secciones de la viga (el cálculo correspondiente no se incluye en el ejemplo). Se consideraron secciones a cada metro y secciones con alguna característica particular. La sección 1, situada a una distancia del paño del apoyo igual al peralte efectivo (0.67 m), o sea, a 0.77 m del centro del apoyo, es la sección crítica para cortante, como se indicó en la sección 7.6.1. La sección 4, situada a 2.35 m del apoyo, se encuentra a la mitad de la distancia entre el último de los estribos con separación de 25 cm y el primero de los estribos con separación de 30 cm. Puede considerarse que es en esta sección donde cambia la contribución del acero, debido al cambio en la separación de estribos. En la sección 2, a 1.0 metro del centro de apoyo, se calcularon dos valores de V_c, uno a la izquierda y otro a la derecha, ya que el valor de ρ, que interviene en el cálculo de V_c, cambia en esta sección.

En todos los cálculos, para mayor sencillez, se consideró que el valor del peralte efectivo es 0.67 m. Esto no es rigurosamente cierto en las regiones donde el refuerzo longitudinal se encuentra en un solo lecho. Esta simplificación influye poco en la precisión de los resultados. Los cálculos para determinar la contribución del concreto según el criterio b se presentan en forma tabulada en el ejemplo. También se comparan las resistencias totales, sumas de las contribuciones del concreto y del acero, según las dos alternativas examinadas. Las contribuciones tanto del concreto como del acero han sido afectadas del coeficiente de reducción ϕ, que según el Reglamento del ACI debe tomarse igual a 0.75 en el cálculo de la resistencia a fuerza cortante (sección 7.6.1a). Los resultados se muestran gráficamente. Obsérvese que en la sección 1, según el criterio a, la resistencia es ligeramente escasa, mientras que según el criterio b, es ampliamente suficiente. (En el ejemplo los subíndices *i* y d indican izquierda y derecha, respectivamente.)

Puede apreciarse que el criterio b implica mayor complicación numérica que el a, pero permite un mejor aprovechamiento de los materiales.

De acuerdo con las propuestas de modificación del Reglamento ACI 318-77 formuladas en las referencias 7.14 y 7.15, la contribución del concreto debe calcularse con la expresión

$$V_c = \left[\left(0.20 + 30\,\rho\right) \sqrt{f'_c} \right] bd \qquad (7.23)$$

Aplicando esta expresión a la sección 1 del ejemplo resulta

$$V_c = \left[\left(0.20 + 30 \times 0.0121\right) \sqrt{250} \right] 25 \times 67$$

$$= 14,\ 911 \text{ kg} \simeq 14.9 \text{ ton}$$

valor superior al calculado con el criterio a del Reglamento ACI 318-02 y menor que el obtenido al aplicar el criterio b de dicho Reglamento.

Según el Reglamento ACI 318-02, en el lugar de corte de barras longitudinales debe satisfacerse uno de los requisitos reseñados en la sección 7.6.1b.

El primero, que exige que la fuerza cortante actuante en la sección de corte no exceda las dos terceras partes de la fuerza cortante resistente no se cumple, ya que

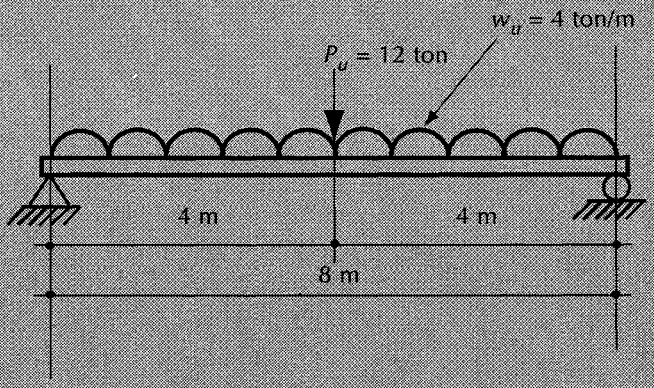
$$V_u = 18 \text{ ton}$$

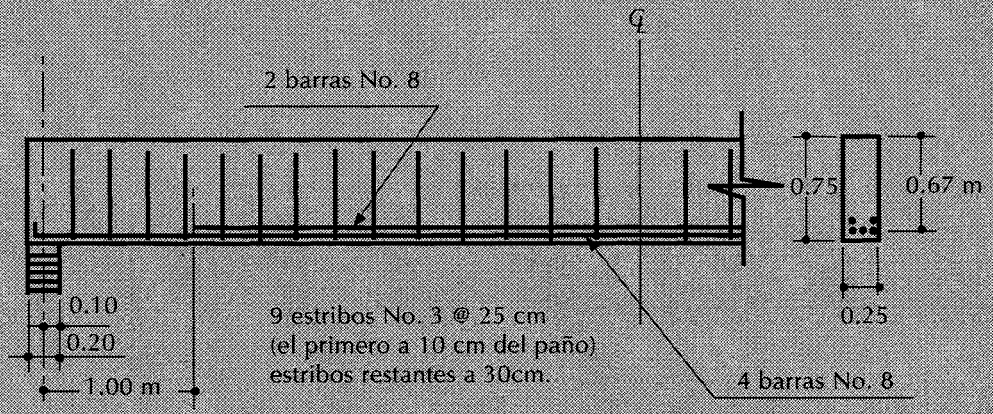
$$V_{ub} = 19.6 \text{ ton}$$

$$\frac{2}{3}\left(19.6\right) = 13.1 \text{ ton} < 18 \text{ ton}$$

EJEMPLO 7.1 ***Resistencia a cortante de una viga rectangular simplemente apoyada (Reglamento ACI 318-02).***

DATOS: CARGAS Y GEOMETRÍA





Materiales: f'_c = 250 kg/cm^2

f_y (acero principal) = 4200 kg/cm^2

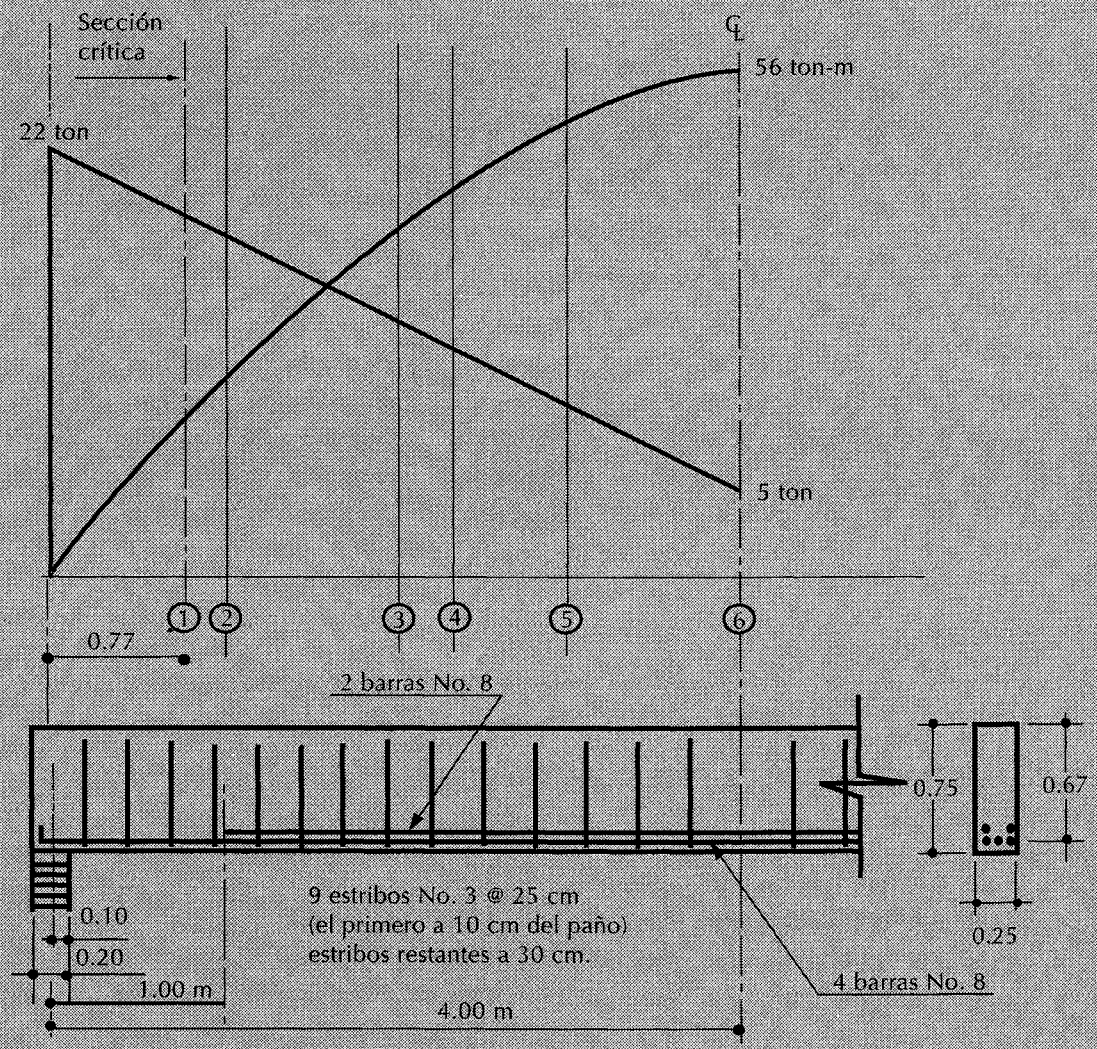
f_y (estribos) = 2800 kg/cm^2

Observaciones: usar Reglamento ACI 318-02

Las cargas dadas corresponden a nivel último, es decir, incluyen los factores de carga apropiados.

EJEMPLO 7.1 ***(Continuación)***

DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO



CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO

A) Según el criterio (a)

$V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\ bd = 0.5 \times \sqrt{250} \times 25 \times 67 = 13{,}242\ \text{kg}$

$\phi V_c = 0.75\ V_c = 9931\ \text{kg}$

$\phi V_c \simeq 9.9\ \text{ton}$

B) Según el criterio (b)

$$V_c = \left(0.5\sqrt{f'_c} + 180\,\rho\,\frac{V_u d}{M_u}\right) bd \leq 0.90\sqrt{f'_c}\ bd$$

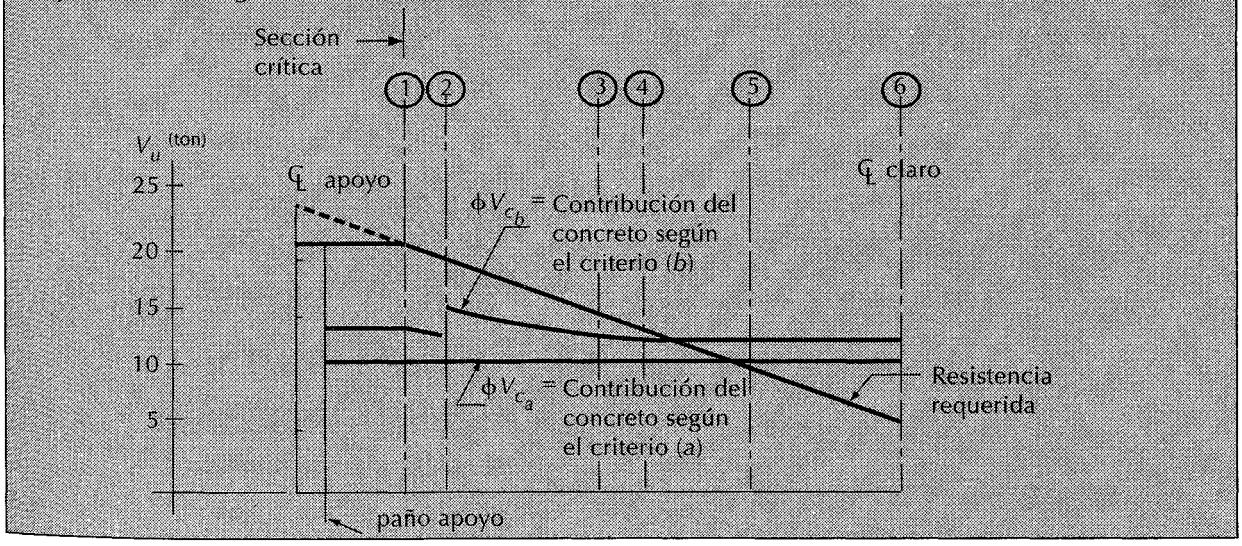
$0.90\sqrt{f'_c}\ bd = 0.90 \times \sqrt{250} \times 25 \times 67 = 23{,}836\ \text{kg} \simeq 23.8\ \text{ton}$

EJEMPLO 7.1 *(continuación)*

Cálculo tabular de la contribución del concreto según criterio (b)

Sección	1	2*i*	2*d*	3	4	5	6
Distancia desde el centro del apoyo (m)	0.77	1.00	1.00	2.00	2.35	3.00	4.00
V_u (ton)	18.9	18.0	18.0	14.0	12.6	10.0	6.0
M_u (ton-m)	15.7	20.0	20.0	36.0	40.6	48.0	56.0
$V_u\, d/M_u$	0.80	0.60	0.60	0.26	0.21	0.14	0.07
ρ	0.0121	0.0121	0.0182	0.0182	0.0182	0.08182	0.0182
$180\,\rho\,\frac{V_u d}{M_u}\left(\frac{(\text{kg})}{\text{cm}^2}\right)$	1.75	1.31	1.98	0.85	0.68	0.46	0.23
$0.5\sqrt{f'_c}\left(\frac{(\text{kg})}{\text{cm}^2}\right)$	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90	7.90
V_{c_b} (ton)	16.18	15.44	16.55	14.67	14.38	14.01	13.63
$\phi\, V_{c_b}$	12.13	11.58	12.41	11.00	10.79	10.50	10.23

Representación gráfica de la contribución del concreto



EJEMPLO 7.1 ***(Continuación)***

CONTRIBUCIÓN DEL ACERO

Estribos No. 3 ($A_v = 2 \times 0.71 = 1.42$ cm^2)

Cuando $s = 25$ cm

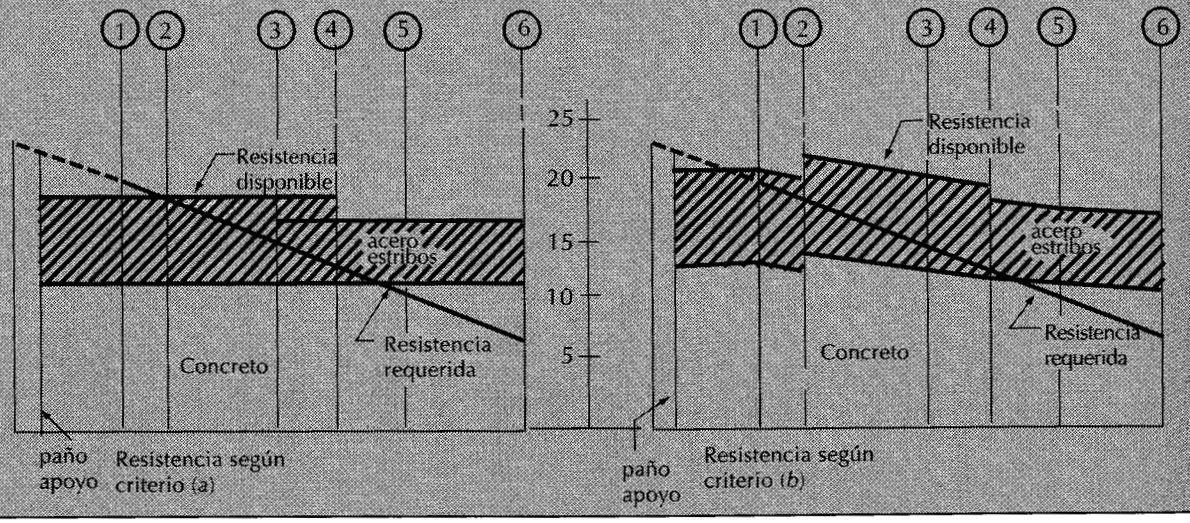
$$\phi V_s = \phi \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{0.75 \times 1.42 \times 2800 \times 67}{25} = 7992 \text{ kg} \simeq 8.0 \text{ ton}$$

Cuando $s = 30$ cm

$$\phi V_s = \phi \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{0.75 \times 1.42 \times 2800 \times 67}{30} = 6660 \text{ kg} \simeq 6.7 \text{ ton}$$

RESISTENCIA TOTAL

Sección	ϕV_{c_a}	ϕV_{c_b}	ϕV_s	V_{r_a}	V_{r_b}
1	9.9	12.1	8.0	17.9	20.1
2*i*	9.9	11.6	8.0	17.9	19.6
2*d*	9.9	12.4	8.0	17.9	20.4
3	9.9	11.0	8.0	17.9	19.0
4*i*	9.9	10.8	8.0	17.9	18.8
4*d*	9.9	10.8	6.7	16.6	17.5
5	9.9	10.5	6.7	16.6	17.2
6	9.9	10.2	6.7	16.6	16.9



Es fácil comprobar, además, que tampoco se cumplen las otras dos condiciones, por lo que será necesario aumentar el esfuerzo transversal adecuadamente.

Ejemplo 7.2. La viga de este ejemplo es de sección T y está sometida a momentos positivos y negativos. La resistencia a fuerza cortante se determinó aplicando las indicaciones de las NTC-04.

Por tratarse de una sección T, en los cálculos de la contribución del concreto a la resistencia se tomó como ancho el correspondiente a la nervadura o alma. Al aplicar la expresión 7.24, que rige cuando $p < 0.015$, debe utilizarse el valor de p correspondiente al acero de la sección en estudio que se encuentre del lado de la tensión. En el ejemplo esto se tuvo en cuenta para el cálculo de la aportación del concreto a la derecha de la sección correspondiente al punto de inflexión. Además, teniendo en cuenta lo señalado en la sección 7.8.1, en esta porción de la viga en la que el patín está en compresión, al aplicar la expresión 7.24 se sumó la cantidad t^2 al producto $b'd$.

Para efectos de la aplicación de la expresión citada cuando se trata de vigas T, el valor de p se determina refiriendo el área de acero al producto $b'd$.

Al definir la zona de influencia de estribos con una separación determinada se supuso, como en el ejemplo 7.1, que la contribución del acero, debido al cambio de separación de estribos, cambia en una sección equidistante entre el último estribo con un espaciamiento dado y el primero de los estribos siguientes con una separación diferente. Así, la zona de influencia de los estribos a 15 cm a la derecha del apoyo se determinó como sigue:

distancia del centro del apoyo al 1er. estribo = 15 + 7.5 =	22.5 cm
nueve espacios de 15 cm,	135.0
mitad de la distancia al siguiente estribo	10.0
longitud de zona de influencia	167.5 cm

Siguiendo una práctica usual, la posición del primer estribo se determinó sumando a la mitad del ancho del apoyo la mitad de la separación de los estribos siguientes.

Los cálculos de la resistencia disponible se presentan en forma tabular en el ejemplo para diversas secciones de interés. Como en el ejemplo 7.1, los subíndices i y d indican, respectivamente, izquierda y derecha. Entre las secciones consideradas pueden mencionarse las siguientes. Las secciones c, d y h son las secciones críticas, situadas a una distancia de la cara del apoyo igual a un peralte efectivo; las secciones *b,* e y g son secciones que limitan las zonas de estribos con diferente separación; la sección f corresponde al punto de inflexión. A la izquierda de esta sección la viga es rectangular, y el acero a considerar al determinar p es el del lecho superior, mientras que a la derecha la viga se comporta como una viga T y el acero que interesa es el del lecho inferior.

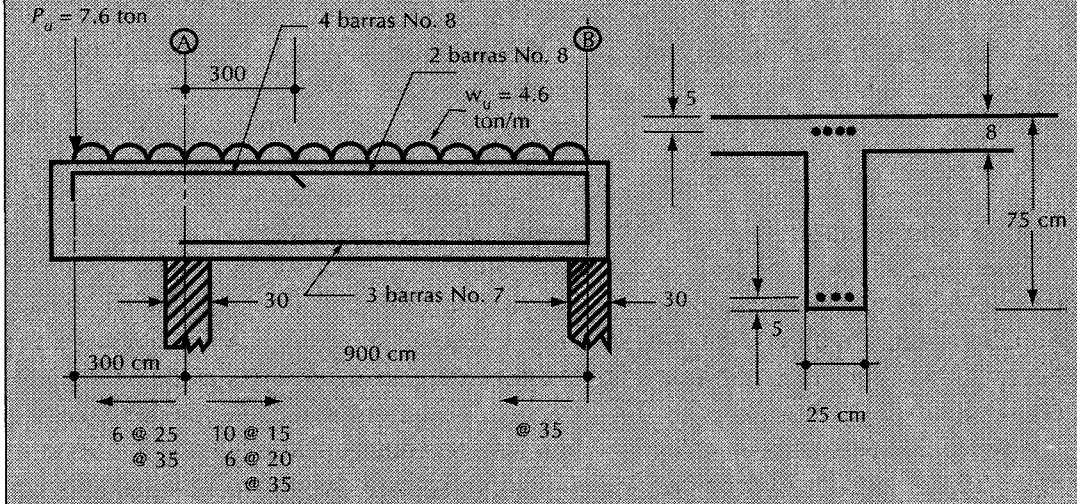
Los resultados del cálculo, que se muestran en forma gráfica, indican que la resistencia disponible es siempre superior a la requerida.

Se puede verificar que los requisitos mencionados en la sección 7.6.2(*b*) se cumplen para esta viga. En efecto, el valor de $2.5\ F_R \sqrt{f^*_c}\ bd$ resulta de 44.5 ton, el cual no se excede en ninguna sección. El valor de $1.5\ F_R \sqrt{f^*_c}\ bd$ es de 26.7 ton y tampoco se alcanza. Por lo tanto, se está en el caso de que V_u es mayor que V_{cR} pero menor que $1.5\ F_R \sqrt{f^*_c}\ bd$, y la separación de estribos no debe exceder de $0.5d$. Esta condición se cumple, ya que la máxima separación es precisamente de 35 cm, que es igual a $0.5d$.

EJEMPLO 7.2 ***Resistencia a fuerza cortante de una viga de sección T con voladizo. Reglamento NTC-04.***

DATOS

Cargas y geometría



Estribos del No. 3. El primer estribo a partir de los paños de los apoyos se encuentra a la mitad de la separación especificada.

Materiales

Concreto: $f'_c = 200$ kg/cm^2
Estribos: $f_y = 3000$ kg/cm^2 $\qquad f^*_c = 0.8\, f'_c = 160$ kg/cm^2

Observación: las cargas dadas son a nivel último; involucran los factores de carga apropiados.

CONTRIBUCIÓN DEL CONCRETO

Valores de ρ

$$d = 75 - 5 = 70 \text{ cm}$$

Sección con 4 barras del No. 8:

$$\rho = \frac{4 \times 5.07}{25 \times 70} = 0.0116$$

Sección con 3 barras del No. 7:

$$\rho = \frac{3 \times 3.87}{25 \times 70} = 0.0066$$

EJEMPLO 7.2 ***(continuación)***

a) Contribución en secciones rectangulares con $\rho = 0.0116 < 0.015$

$$V_{cR} = F_R \left[(0.20 + 20\ \rho) \sqrt{f^*_c} \right] bd \qquad \text{(ecuación 7.24)}$$

$$f^*_c = 0.8\ f'_c = 0.8 \times 200 = 160 \text{ kg / cm}^2$$

$$V_{cR} = 0.8 \left[(0.20 + 20 \times 0.0116) \sqrt{160} \right] 25 \times 70 = 7650 \text{ kg}$$

$$V_{cR} \simeq 7.6 \text{ ton}$$

b) Contribución en secciones T con el patín en compresión y $\rho = 0.0066 < 0.015$

$$V_{cR} = F_R \left(b' d + t^2 \right) (0.2 + 20\ \rho) \sqrt{f^*_c}$$

$$= 0.8 \left(25 \times 70 + 8^2 \right) (0.2 + 20 \times 0.0066) \sqrt{160}$$

$$= 6094 \text{ kg}; \quad V_{cR} \simeq 6.1 \text{ ton}$$

CONTRIBUCIÓN DEL ACERO

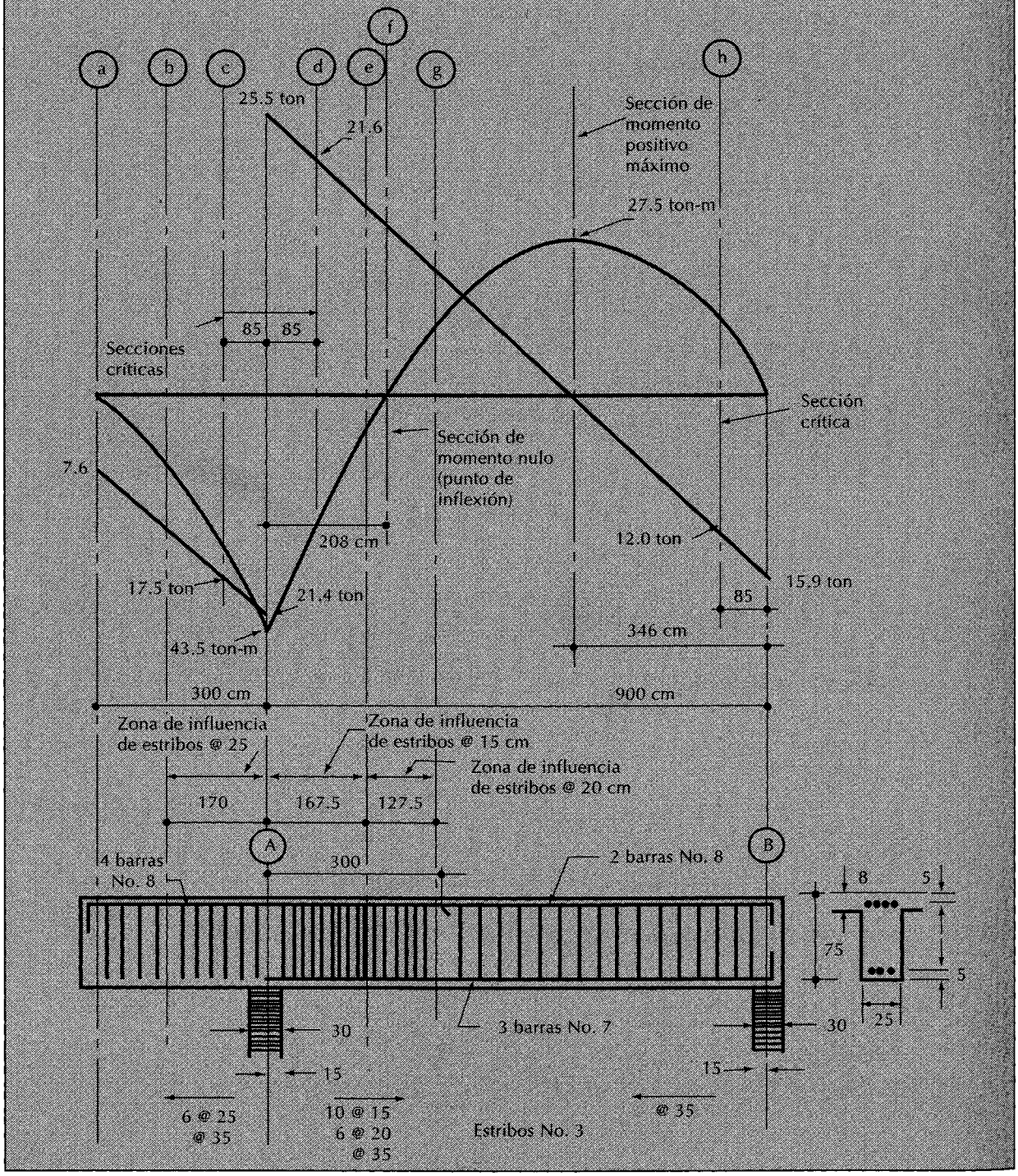
Estribos del No. 3

$$V_{sR} = \frac{F_R A_v f_y d}{s} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 3000 \times 70}{s} = \frac{238{,}560}{s}$$

s (cm)	15	20	25	35
V_{sR} (kg)	15,904	11,928	9542	6816
V_{sR} (ton)	15.9	11.9	9.5	6.8

EJEMPLO 7.2 ***(continuación)***

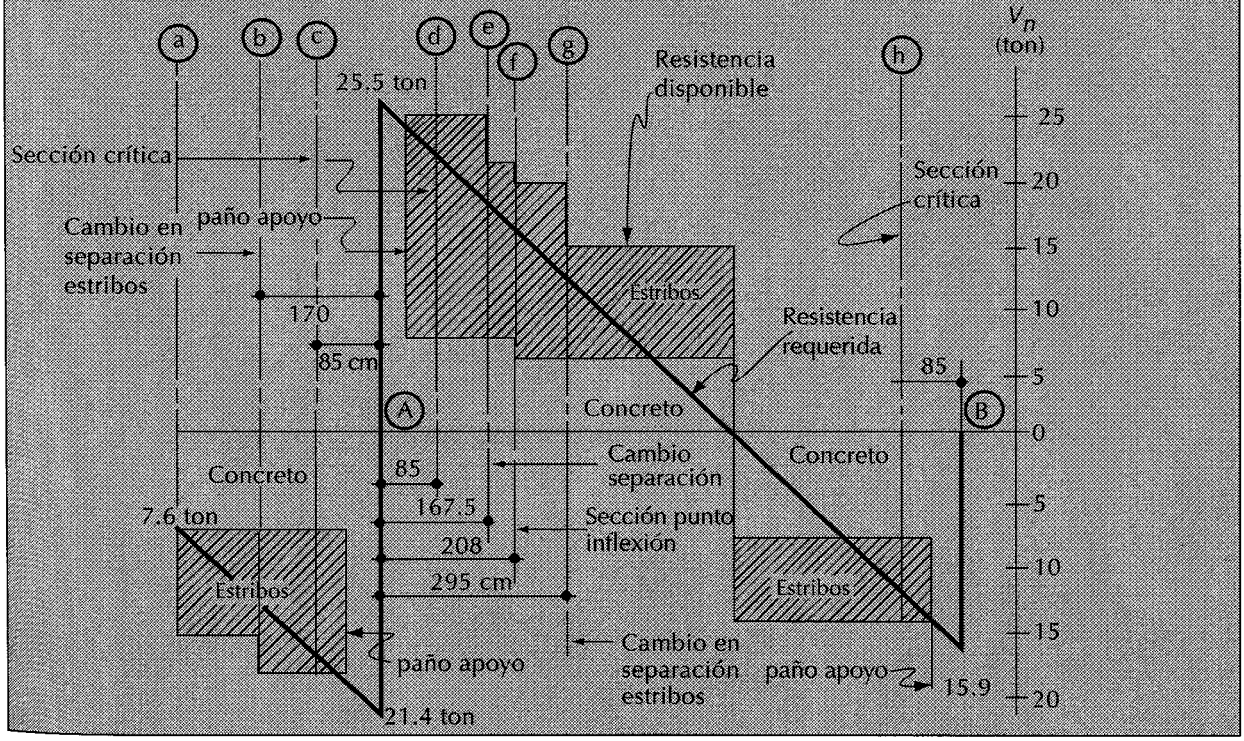
DIAGRAMAS DE FUERZA CORTANTE Y MOMENTO



EJEMPLO 7.2 *(continuación)*

RESISTENCIA TOTAL

Concepto / Sección	*Contribución concreto* V_{cR}	*Contribución acero* V_{sR} (ton)	*Resistencia disponible* $V_{cR} + V_{sR}$ (ton)	*Resistencia requerida* V_u (ton)
a	7.6	6.8	14.4	7.6
b_i	7.6	6.8	14.4	13.6
b_d	7.6	9.5	17.1	13.6
c	7.6	9.5	17.1	17.5
d	7.6	15.9	23.7	21.6
e_i	7.6	15.9	23.7	17.8
e_d	7.6	11.9	19.5	17.8
f_i	7.6	11.9	19.5	15.9
f_d	6.1	11.9	18.0	15.9
g_i	6.1	11.9	18.0	11.9
g_d	6.1	6.8	12.9	11.9
h	6.1	6.8	12.9	12.0



Ejemplo 7.3. En este ejemplo se ilustra la determinación de la resistencia a fuerza cortante de un elemento en el que actúa también una carga axial. Se conoce la magnitud de la carga axial y se quiere determinar el valor de la carga P que produce momento flexionante y fuerza cortante en el elemento en cuestión. En el ejemplo se ha usado el sistema SI de unidades y el procedimiento aproximado del Reglamento ACI para calcular la resistencia a fuerza cortante.

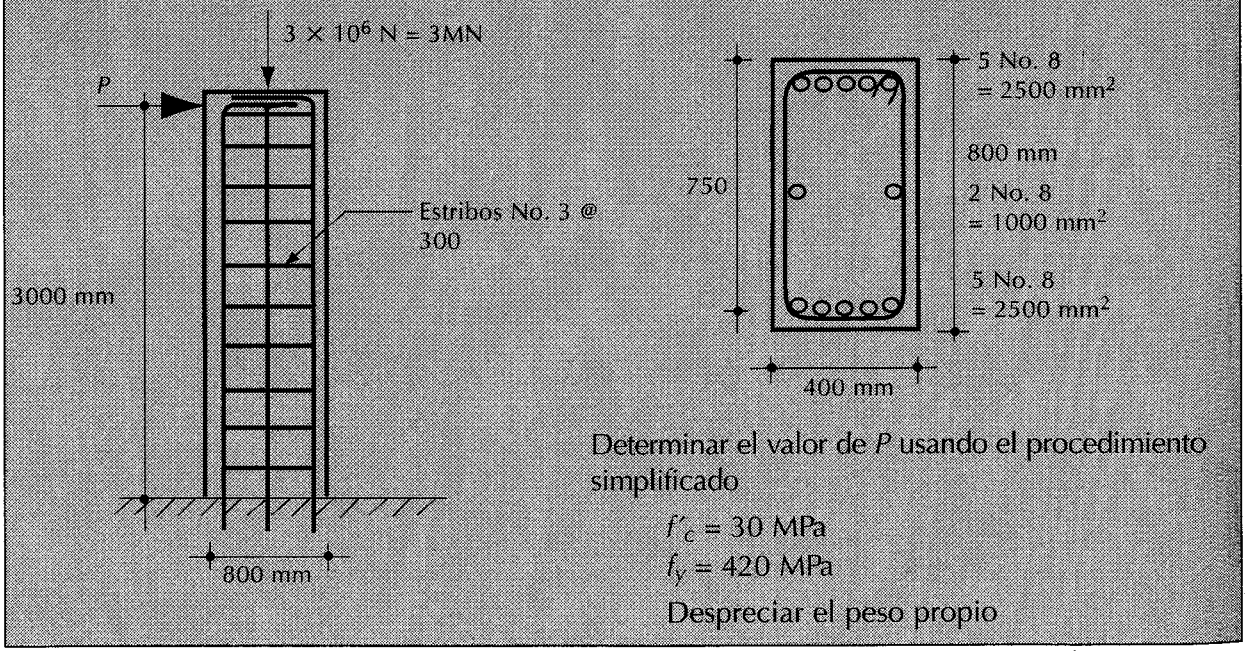
Primeramente se determinaron los diagramas de momento flexionante, fuerza cortante y fuerza normal. El primero tiene una variación lineal, con un valor máximo en el empotramiento del elemento. Los otros dos son constantes a lo largo del elemento. El de fuerza cortante y el de momento flexionante tienen que expresarse en términos de la fuerza desconocida P. La sección crítica por fuerza cortante se ha localizado a una distancia *d* del paño del empotramiento.

La contribución del concreto a la resistencia se ha calculado con la ecuación 7.7 SI, que es la que corresponde al procedimiento simplificado (sección 7.6.1*a*) y la del acero, con la ecuación 7.14 (sección 7.6.1*b*). La resistencia total nominal es la suma de las resistencias del concreto y del acero (ecuación 7.12). Esta resistencia, afectada por el factor de reducción ϕ, se iguala a la fuerza cortante en la sección crítica para despejar el valor de la fuerza P.

El valor obtenido es la resistencia a fuerza cortante. Faltaría verificar si la resistencia del elemento a flexocompresión le permite soportar esta carga P. Si su resistencia a la combinación de momento flexionante y fuerza normal le permite soportar el momento que le produce la fuerza P de 0.44 $\times 10^6$ N y la fuerza normal de 3×10^6 N, el elemento fallaría por fuerza cortante, si no, fallaría antes por flexocompresión.

EJEMPLO 7.3 ***Determinación de la fuerza cortante que puede resistir un elemento con carga axial. Sistema SI. Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



Determinar el valor de *P* usando el procedimiento simplificado

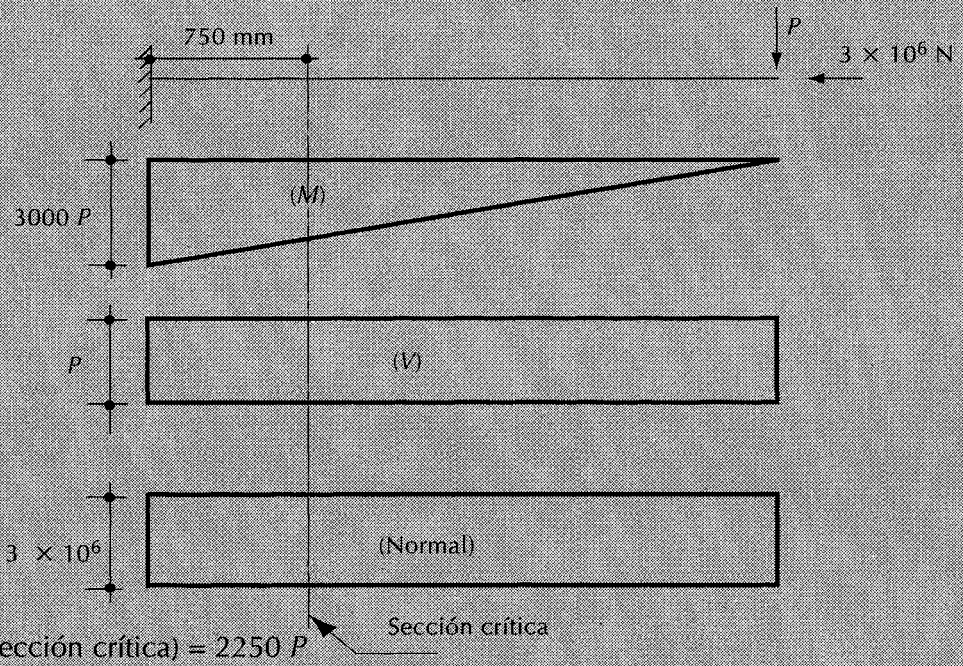
$f'_c = 30$ MPa

$f_y = 420$ MPa

Despreciar el peso propio

EJEMPLO 7.3 (continuación)

DIAGRAMAS DE MOMENTO FLEXIONANTE, FUERZA CORTANTE Y FUERZA NORMAL



M (Sección crítica) = $2250\,P$
V (Sección crítica) = P
Normal (Sección crítica) = 3×10^6 N

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA

$$V_c = 0.16\left(1 + 0.072\,\frac{N_u}{A_g}\right)\sqrt{f'_c}\;bd \qquad (7.7\ \text{SI})$$

$$V_c = 0.16\left(1 + \frac{0.072 \times 3 \times 10^6}{400 \times 800}\right)\sqrt{30}\,(400)\,(750)$$

$$V_c = 0.44 \times 10^6\ \text{N}$$

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \qquad (7.14)$$

$$A_v = 2 \times 71 = 142\ \text{mm}^2$$

$$V_s = \frac{142\ (\text{mm}^2) \times 420\ (\text{MPa}) \times 750\ (\text{mm})}{300\ (\text{mm})} = 0.15 \times 10^6\ \text{N}$$

$$V_n = V_c + V_s = (0.44 + 0.15) \times 10^6 = 0.59 \times 10^6\ \text{N}$$

$$\phi V_n = 0.75 \times 0.59 \times 10^6 = 0.44 \times 10^6\ \text{N}$$

Haciendo V (sección crítica) = ϕV_n

$\boxed{P = 0.44 \times 10^6\ \text{N}}$

Ejemplo 7.4 En este ejemplo se ilustra la determinación de la capacidad de carga de una zapata aislada de acuerdo con su resistencia a fuerza cortante. La revisión se realizó según las NTC-04. Estas normas, siguiendo un criterio semejante al del Reglamento ACI, especifican que se verifique la resistencia según dos condiciones distintas.

En la primera condición se revisa la resistencia a cortante por penetración en la sección crítica localizada a medio peralte efectivo del perímetro de la columna. En el ejemplo, como peralte efectivo se tomó un valor promedio entre los correspondientes a las dos direcciones de armado, definido por el plano de tangencia entre los dos lechos de varillas. De acuerdo con lo indicado en la sección 7.6.2*c*, la resistencia está dada por el menor de los valores calculados con las ecuaciones 7.26 y 7.27.

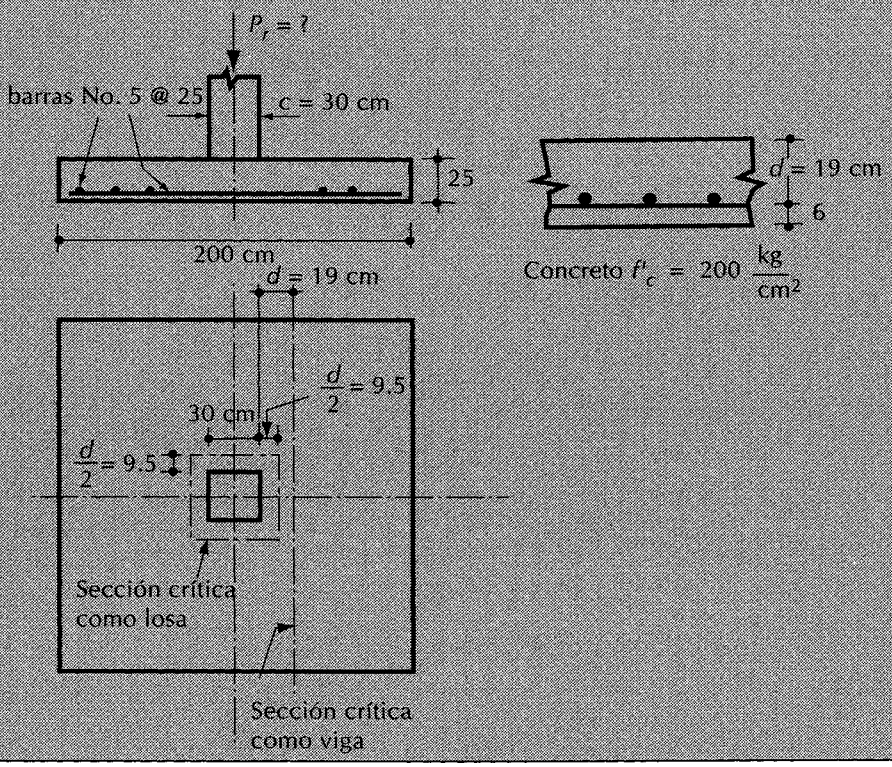
Como en este caso la relación y entre el lado corto y el lado largo de la columna tiene un valor de 1, rige la ecuación 7.27 y la resistencia se deberá calcular con la expresión

$$V_c = F_R \sqrt{f^*_c}\, b_o d \qquad (7.27)$$

Para obtener el valor de la carga P_R que puede transmitir la columna, se determinó primero la reacción del suelo, r, que equilibra la resistencia, V_c. Esto se hizo analizando el cuerpo libre ilustrado en el croquis A. El valor de la fuerza P_R se obtuvo multiplicando la reacción, r, por la superficie de la zapata, ya que debe existir equilibrio entre la carga de la columna y la reacción total del suelo.

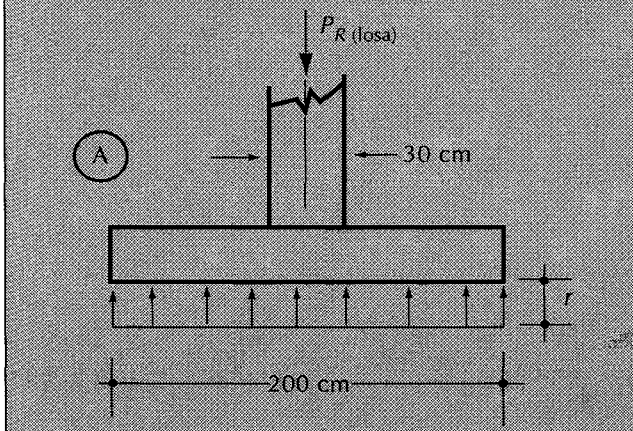
EJEMPLO 7.4 ***Capacidad de carga de una zapata cuadrada según su resistencia a fuerza cortante (Reglamento NTC-04).***

DATOS



EJEMPLO 7.4 ***(continuación)***

VALOR DE P_R CONSIDERANDO QUE RIGE RESISTENCIA COMO LOSA



$c = 30$ cm

$d = 19$ cm

$V_{cR} = F_R \sqrt{f^*_c}\ b_o\ d$

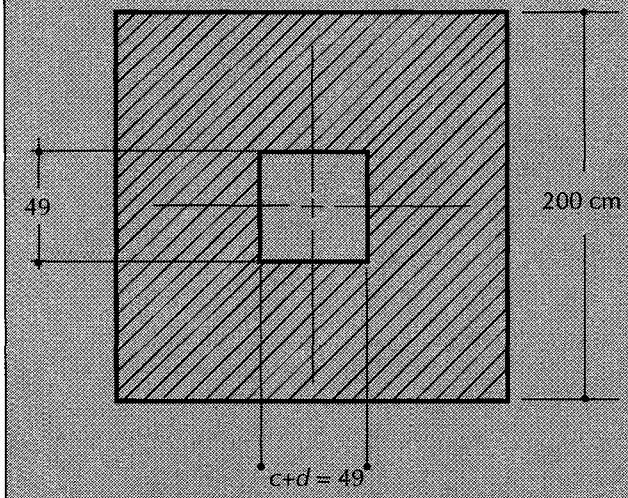
$b_o = 4\ (c + d)$

$= 4\ (30 + 19) = 196$ cm

$F_R = 0.8$

$f^*_c = 0.8\ f'_c = 160$ kg/cm²

$V_{cR} = 0.8 \times \sqrt{160} \times 196 \times 19 = 37{,}684$ kg

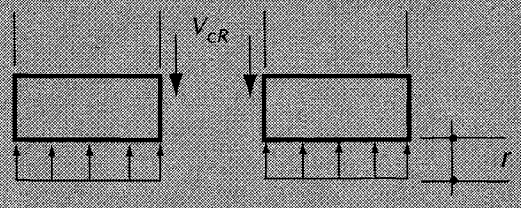


$r = \dfrac{V_{cR}}{A_1}$

$A_1 = 200^2 - 49^2 = 37{,}599$ cm²

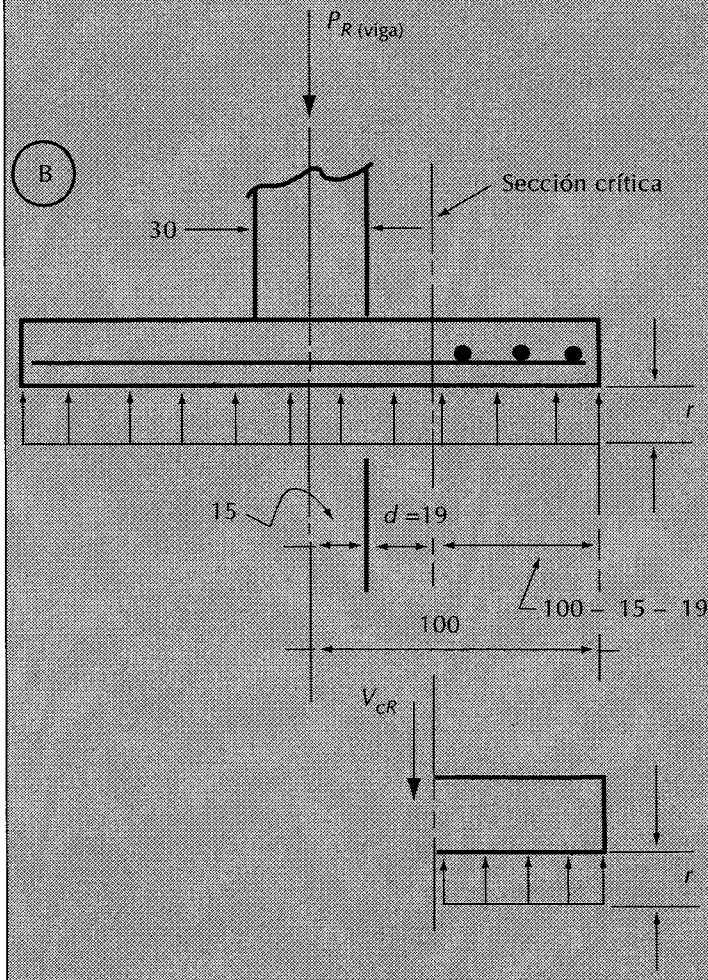
$r = \dfrac{37,\ 684}{37,\ 599} = 1.0$ kg / cm²

$P_{r\ (losa)} = rA = 1.0\ (200)^2 = 40{,}000$ kg



EJEMPLO 7.4 *(continuación)*

VALOR DE P_R CONSIDERANDO QUE RIGE RESISTENCIA COMO VIGA



Supóngase que el armado está constituido por barras del No. 5 @ 25 cm

$a_{s\ No.\ 5} = 1.98\ cm^2$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4 \times 1.98}{100 \times 19}$$

$\rho = 0.0042 < 0.015$

$$\therefore V_{cR} = F_R \left(0.2 + 20\ \rho\right) \sqrt{f^*_c}\ bd$$

$$V_{cR} = 0.8 \times \left(0.2 + 20 \times 0.0042\right) \sqrt{160} \times 200 \times 19 = 10{,}921 \text{ kg}$$

$$r = \frac{V_{cR}}{A_2}\ ;\ A_2 = 200 \times 66$$

$$r = \frac{10.921}{200 \times 66} = 0.83\ \text{kg/cm}^2$$

$$P_{R\,(viga)} = rA = 0.83 \times 200^2 = 33{,}200\ \text{kg} < P_{R\,(losa)}$$

$\therefore$ Rige capacidad como viga: $P_R = 33$ ton

En la segunda condición se considera la resistencia como si la zapata fuese una viga cuyo ancho es el ancho total de la zapata. La sección crítica para esta condición se fija igual que en vigas, es decir, a un peralte efectivo del paño de la columna. La fuerza cortante admisible se calcula con la expresión 7.24 o la 7.25, según que p sea menor o mayor que 0.01 5, afectando ambas expresiones del coeficiente F_R. En el ejemplo p resultó menor que 0.01 5, de manera que se utilizó la expresión 7.24.

La capacidad de la columna se determinó siguiendo un razonamiento semejante al de la primera condición. Los cuerpos libres considerados se aprecian en el croquis B.

La capacidad de la zapata del ejemplo quedó definida por la resistencia como viga. Con frecuencia, en otras situaciones el valor crítico es el correspondiente a la condición de losa.

De acuerdo con las NTC-04, la carga de servicio correspondiente a la capacidad última calculada se determina dividiendo ésta por el factor de carga apropiado.

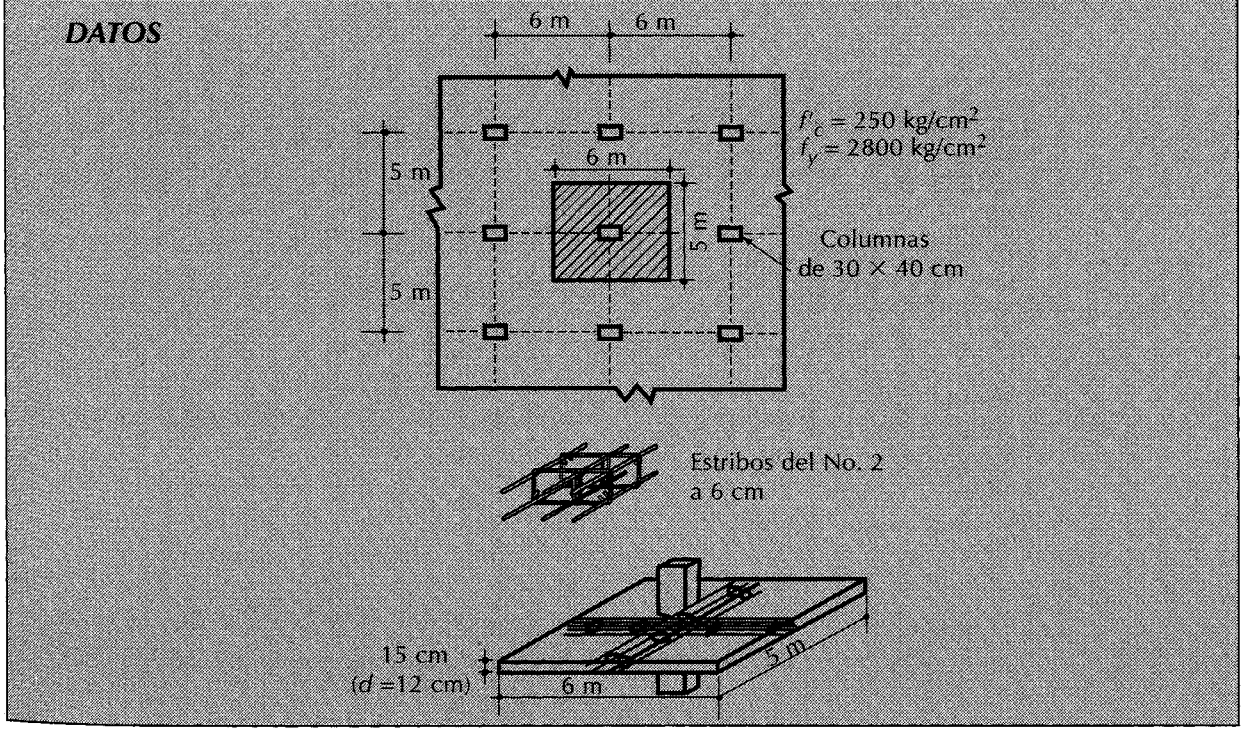
Para una combinación de carga muerta y carga viva, este factor es 1.4. Así la carga de servicio resultaría

$$p_s = \frac{P_R}{F_C} = \frac{33}{1.4} = 23.6 \text{ ton}$$

Ejemplo 7.5. Se trata de encontrar la resistencia a cortante por penetración de una losa plana con refuerzo transversal constituido por estribos de cuatro ramas, como se muestra en los datos del problema. Se supone que la estructura está sometida únicamente a carga vertical. Por claridad, no se muestra el refuerzo longitudinal de la losa. Para el cálculo se siguieron las indicaciones del Reglamento ACI 318-02.

EJEMPLO 7.5 ***Cálculo de resistencia a fuerza cortante de una losa plana reforzada (Reglamento ACI 318-02).***

DATOS



EJEMPLO 7.5 *(continuación)*

CÁLCULO DE RESISTENCIA

Contribución del concreto

$$V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\, b_o\, d$$

$$b_o = 2(30 + 12 + 40 + 12) = 188 \text{ cm}$$

$$V_c = 0.5\sqrt{250} \times 188 \times 12 = 17{,}835 \text{ kg}$$

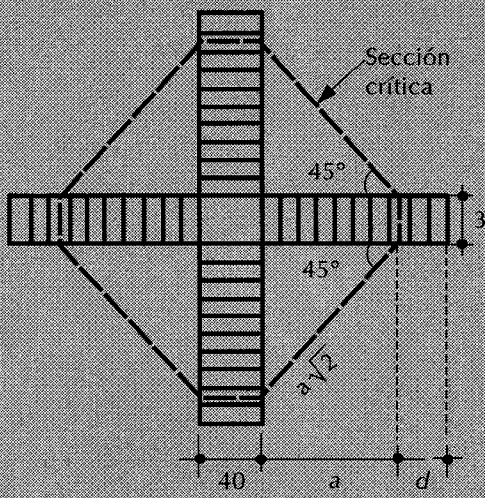
Contribución del acero

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} \times 4 = \frac{4 \times 0.32 \times 2800 \times 12}{6} \times 4 = 28{,}672 \text{ kg}$$

Resistencia nominal total

$$V_n = V_c + V_s = 17{,}835 + 28{,}672 = 46{,}507 \text{ kg}$$

Cálculo de la longitud de los brazos armados



$$b_o = 4a\sqrt{2} + 140$$

$$V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\, b_o\, d$$

$$V_n = V_c$$

$$46\,507 = 0.5\sqrt{250}\,(4\,a\sqrt{2} + 140)\,12$$

$$46\,507 = 537\,a + 13\,282$$

$$a = 62 \text{ cm}$$

longitud de cada brazo = $a + d = 62 + 12 = 74$ cm

EJEMPLO 7.5 ***(continuación)***

RESISTENCIA MÁXIMA ADMISIBLE

$$V_{n\,máx} = 1.5\sqrt{f'_c}\, b_o d$$

$$V_{n\,máx} = 1.5\sqrt{250} \times 188 \times 12$$

$$V_{n\,máx} = 53{,}505\ \text{kg}$$

$$V_n = 46{,}507\ \text{kg} < V_{n\,máx}$$

$$\therefore\ V_n < V_{n\,máx}$$

La resistencia total es la suma de la contribución del concreto y la contribución del refuerzo transversal. La primera se calcula como si se tratase de una losa sin refuerzo transversal, con la diferencia de que la contribución del concreto, V_c, se toma igual a $0.5\sqrt{f'_c}\, b_o d$, en lugar del valor dado por las ecuaciones 7.16, 7.17 o 7.18. La sección crítica se localizó a una distancia de medio peralte del perímetro de la columna.

La contribución del refuerzo transversal se calculó con la ecuación 7.14, que proporciona la constribución del refuerzo en vigas. Se supone que cada uno de los cuatro brazos de refuerzo contribuye en igual forma, y por esta razón se ha multiplicado por cuatro el segundo miembro de la ecuación 7.14.

El Reglamento ACI 318-02 recomienda que la resistencia de una losa reforzada no sea mayor que tres veces la contribución del concreto a la resistencia. Siguiendo esta recomendación, se calculó la resistencia máxima permisible multiplicando por tres la contribución del concreto a la resistencia. Esta última se determinó con la ecuación 7.19, considerando una sección crítica localizada a medio peralte del perímetro de la columna. En el ejemplo, la resistencia total resultó menor que la máxima admisible. En caso contrario, debe considerarse a la máxima admisible como la resistencia de la losa.

En el ejemplo se ha calculado la longitud mínima que deben tener los brazos de refuerzo. Esto se hizo considerando que la losa puede fallar en una sección crítica alejada de la columna y que la carga de falla para esta nueva sección crítica debe ser por lo menos igual a la resistencia de la losa reforzada. Siguiendo este criterio se determinó el perímetro de la sección crítica de manera que la carga de falla coincidiese con la resistencia V_n, suponiendo que la contribución del concreto está dada por la ecuación 7.19. Los brazos de refuerzo se prolongaron una distancia de un peralte más allá de la sección crítica.

Referencias

7.1 Comité ACI-ASCE 326. "Shear and Diagonal Tension." *Journal* of the *American* Concrete *Institute.* Detroit, enero, febrero, marzo 1962.

7.2 Díaz de Cossío, R. y S. Loera. "Comentario sobre un artículo de G.N. Kani." lournal of the *American* Concrete Institute. Detroit, diciembre 1966.

7.3 Faradji, M.J., y R. Díaz de Cossío. "Tensión diagonal en miembros de concreto de sección circular". Revista Ingeniería. México, D.F., abril 1965.

7.4 Díaz de Cossío, R. "Efecto del tamaño y de la forma de vigas y losas de concreto sobre su resistencia a fallas por cortante." Revista Ingeniería. México, D.F., abril 1962. (Véase también el comentario sobre la referencia 7.1 en el lournal of the American Concrete Institute. Detroit, septiembre 1962.)

7.5 Ferguson, P.M., y F.N. Matloob. "Effect of Bar Cutoff on Bond and Shear Strength of Reinforced Concrete Beams. "lournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, julio 1959.

7.6 Baron, M.J. "Shear Strength of Reinforced Concrete Beams at Points of Bar Cutoff." lournal of the *American* Concrete Institute. Detroit, enero 1966.

7.7 Moe, J."Shearing Strength of Reinforced Concrete Slabs and Footings under Concentrated Loads." *Bulletin* D 47. Skokie, Ill., Portland Cement Association, Development Department, abril 1961.

7.8 Kani, G.N.J. "How Safe Are our Large Reinforced Concrete Beams?"lournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, marzo 1967.

7.9 Corley, W.G., y N.M. Hawkins. "Shearhead Reinforcement for Slabs". lournal of the *American* Concrete Institute. Detroit, octubre 1968.

7.10 Carpenter, J.E., P.H. Kaar y N.W. Hanson. Comentario sobre "Proposed Revision of ACI 318-63: Building Code Requirements for Reinforced Concrete". lournal of the Arnerican Concrete *Institute*. Detroit, septiembre 1970.

7.11 Bresler, B., y J.G. MacGregor. "Review of Concrete Beams Failing in Shear". lournal of the Structural Division, *American Society* of Civil Engineers. Nueva York, febrero 1967.

7.12 Shear *in* Reinforced Concrete, Vols. 1 y 2 (SP-42). Detroit, American Concrete Institute, 1974.

7.13 Comité ACI-ASCE 426. "The Shear Strength of Reinforced Concrete Members." Proceedings of *the* American Society of Civil Engineers, Vol. 99, No. ST6, junio 1973, y Vol. 100, No. ST8, Nueva York, agosto 1974.

7.14 MacGregor., J.G., y P. Gergely. "Suggested Revisions to ACI Building Code Clauses Dealing with Shear in Beams." lournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, octubre 1977.

7.15 Comité ACI-ASCE. "Suggested Revisions to Shear Provisions for Building Code." Detroit, American Concrete Institute, 1977.

7.16 Fenwick, R. C., y T. Paulay. "Mechanisms of Shear Resistance of Concrete Beams." *Journal* of the Structural Division, Arnerican Society of Civil *Engineers*. Nueva York, octubre 1968.

7.17 Vecchio, F. J., y M. P. Collins. "The Modified Compression-Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subjected to Shear." *Journal* of the *American* Concrete Institute. Detroit, marzo-abril 1986.

7.18 Vecchio, F. J., y M. P. Collins. "Predicting the Response of Reinforced Concrete Beams Subjected to Shear Using Modified Compression Field Theory". ACI Structural *Journal*. Detroit, mayo-junio 1988.

7.19 Collins, M. P., y D. Mitchell. "A Rational Approach to Shear Design-The 1984 Canadian Code Provisions." *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, noviembre-diciembre 1986.

7.20 Ghee, A. B., M. J. N. Priestley y T. Paulay. "Seismic Shear Strength of Reinforced Concrete Columns." ACI *Structural Journal*. Detroit, enero-febrero 1989.

7.21 Moehle, J. P. "Strength of Slab-Column Edge Connections." *ACI Structural Journal*. Detroit, enero-febrero 1988.

7.22 MacGregor, J. G. "Reinforced Concrete Mechanics and Design". *Prentice* Hall. New Jersey, 1988, págs. 182-190.

7.23 Alexander, S. D. B., y S. H. Simmonds "Ultimate Strength of Slab-Column Connections." ACI *Structural Journal*. Detroit, mayo-junio 1987.

7.24 Elgabry, A. A., y A. Ghali. "Design of Stud-Shear Reinforcement for Slabs". ACI Structural *Journal*. Detroit, mayo-junio 1990.

7.25 Roller, J.J. y H. G. Russell. "Shear Strength of High Strength Concrete Beams with Web Reinforcement!' ACI Structural *Journal*. Detroit, marzo-abril 1990.

7.26 Johnson, M. K., y J. A. Ramírez. "Minimum Shear Reinforcement in Beam with Higher Strength Concrete." ACI Structural *Journal*. Detroit, julio-agosto 1989.

7.27 Comité ACI 318. "Commentary to Building Code Requirements for Reinforced Concrete-ACI 318R-02". American Concrete Institute. Detroit, 2002.

7.28 Collins, M.P.; Mitchell, D.; Adebar, PE; y Vecchio, F.J. "A General Shear Design Method". *ACI* Structurallournal, enero-febrero, 1996.

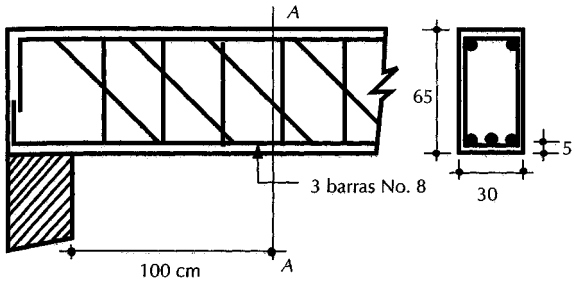
7.29 Comité ACI-ASCE 445. "Recent Approaches to Shear Design of Structural Concrete", Informe ACI 445R-99, American Concrete Institute, Detroit, noviembre, 1999.

7.30 Collins, M.P., y Kuchma, D. "How Safe Are our Large, Lightly Reinforced Concrete Beams, Slabs and Footings?".ACI *Structural Journal,* julio-agosto, 1999.

7.31 Fanella, D., y Rabat, B. (Ed.). "Notes on ACI 318-02 with Design Applications". Portland Cement Association, Skokie, 2002.

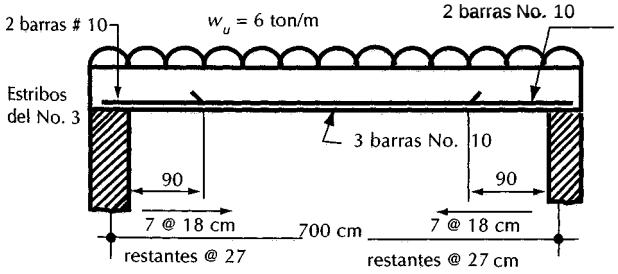
Ejercicios

7.1 Calcular la resistencia a cortante en la sección A-A de la viga siguiente, utilizando las NTC-04.



Estribos verticales del No. 3 @ 30
Estribos inclinados a 45° del No. 3 @ 40
$f'_c = 200$ kg/cm^2 $f_y = 3000$ kg/cm^2

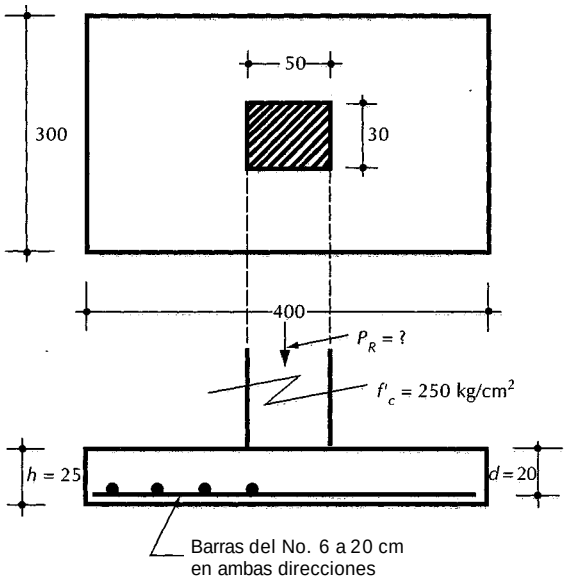
7.2 Trazar el diagrama de resistencia a fuerza cortante de la siguiente viga y compararlo con el diagrama de fuerza cortante producido por las cargas externas utilizando el método simplificado del Reglamento ACI 318-02, según el cual $V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\,bd$.



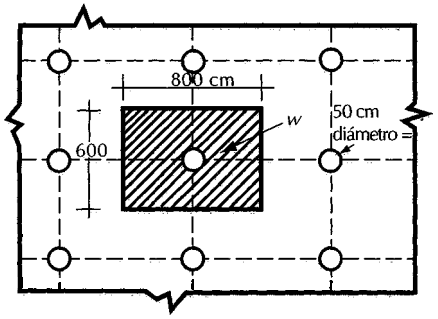
$b = 30$ cm
$h = 60$ cm
$d = 54$ cm
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 3000$ kg/cm^2

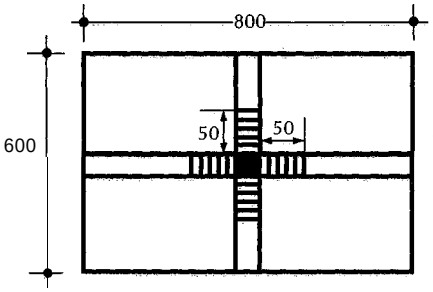
7.3 Resolver el ejercicio anterior suponiendo que V_c está dado por la ecuación 7.8.

7.4 Calcular la carga P_R que puede resistir por cortante la siguiente zapata de acuerdo con el reglamento ACI 318-02.



7.5 Calcular la carga uniformemente repartida, w, que puede soportar por cortante un sistema de losa plana con las características siguientes. Aplicar las NTC-04.





Estribos No. 3 de dos ramas @ 10 cm a partir del paño de la columna

$d = 25$ cm
$h = 30$ cm
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2

CAPÍTULO 8

Resistencia de elementos sujetos a torsión

8.1 Introducción. /8.2 Sistemas estructurales con efectos importantes de torsión. 18.3 Torsión simple. /8.4 Torsión y flexión. /8.5 Torsión y cortante. 18.6 Superficies de interacción torsión-flexión-cortante. /8.7 Torsión y carga axial. /8.8 Expresiones de los reglamentos para valuar la resistencia a efectos de torsión. /8.9 Ejemplos.

8.1 Introducción

Debido al carácter monolítico de las estructuras de concreto, es común la existencia de acciones torsionantes que se presentan casi siempre en combinación con solicitaciones de flexión, fuerza cortante y fuerza normal. En muchos casos, los efectos de la torsión son secundarios en comparación con los de las otras solicitaciones, y por eso suelen despreciarse en el diseño. Sin embargo, a veces la torsión puede ser la acción preponderante, o al menos tener un efecto lo suficientemente importante para no poder ignorarla sin que la estructura sufra daños.

El problema de torsión en estructuras de concreto tiene dos aspectos. El primero consiste en la determinación de los momentos torsionantes que actúan sobre los elementos de una estructura, y el segundo en la determinación de la resistencia de los elementos.

La determinación de momentos torsionantes es un problema de análisis estructural que no ha recibido la misma atención que el cálculo de momentos flexionantes y fuerzas cortantes. Esto se debe, en parte, a la importancia relativamente menor que se ha concedido a los efectos de torsión y, en parte, a que no se disponía, hasta hace poco tiempo, de medios para evaluar en forma razonablemente precisa la rigidez torsionante de elementos de concreto reforzado, dato necesario para el análisis de estructuras continuas.

La determinación de la resistencia a torsión de elementos de concreto ha sido objeto de numerosas investigaciones recientes. Como resultado, es posible calcular, con suficiente precisión para fines prácticos, la resistencia a torsión y a combinaciones de torsión, fuerza cortante y momento flexionante de los elementos, así como su rigidez en torsión. Al igual que en el caso de tensión diagonal, el conocimiento actual sobre el problema es en gran parte empírico.

8.2 Sistemas estructurales con efectos importantes de torsión

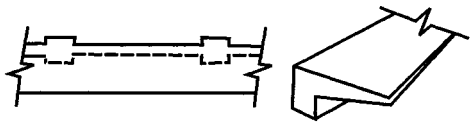
Los ejemplos que se mencionan en esta sección tienen como única finalidad ilustrar la forma en que se presentan momentos torsionantes en ciertos elementos estructurales. No se estudia con detalle el cálculo de estos momentos, para lo cual puede consultarse algún texto de análisis estructural.

Vigas que soportan marquesinas (figura 8.1a)

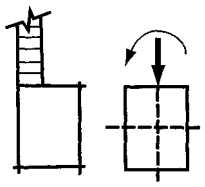
El momento de empotramiento de la marquesina se transmite como momento torsionante a la viga, la cual debe estar restringida contra giro en sus extremos por medio de columnas u otros elementos rígidos.

Vigas con muros colocados excéntricamente (figura 8.1b)

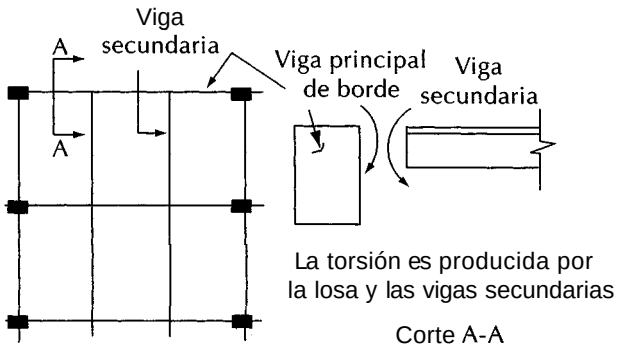
La carga que transmite el muro a la viga no coincide con el eje longitudinal de ésta. Di-



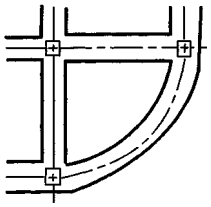
a) Vigas que soportan marquesinas



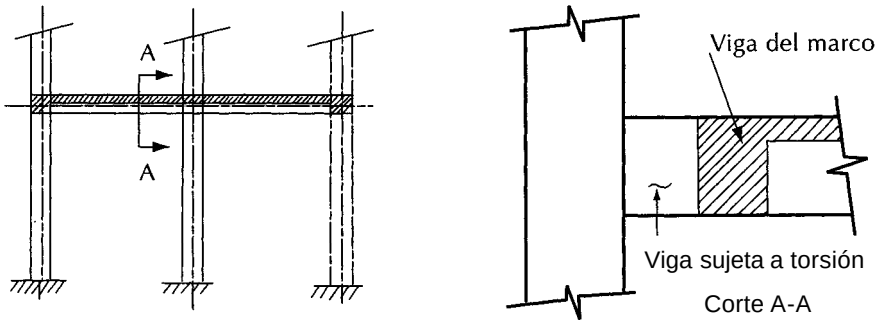
b) Vigas con muros colocados excéntricamente



c) Vigas de borde en sistemas de piso



d) Vigas curvas



e) Marco con vigas fuera del plano de las columnas

Figura 8.1 Elementos estructurales sujetos a torsión.

cha carga equivale a una que actúa en el eje longitudinal, más un momento torsionante, como se indica en la figura.

Vigas de borde en sistemas de piso (figura 8.1c)

En la figura se representa parte de un sistema de piso con vigas secundarias perpendiculares a una viga principal de borde. La viga de borde restringe parcialmente a las vigas secundarias contra rotación por flexión, o sea que proporciona un semiempotramiento a las vigas secundarias y recibe, a su vez, por condiciones de equilibrio, un momento torsionante, como se indica en la figura.

Casos semejantes al anterior se tienen en sistemas de piso de vigas y losas, sin vigas secundarias, y en el de losas planas con

vigas de borde, en los cuales las losas transmiten directamente momentos torsionantes a dichas vigas de borde.

En muchos ensayes de sistemas de piso se ha observado que la falla ocurre por torsión de las vigas de borde antes de que se alcance la resistencia en flexión de las losas y de las vigas. Por lo tanto, el caso que se ilustra es de gran importancia práctica.

Vigas curvas (figura 8.1d)

En este caso, la resultante de las cargas externas no se encuentra en el mismo plano que las reacciones en los apoyos, por lo cual se desarrollan momentos torsionantes en las vigas. Casos semejantes son los de vigas en balcón, vigas en esquina y vigas helicoidales.

Estructuras reticulares con cargas normales a su plano

Estas estructuras se presentan en puentes y en cimentaciones de edificios. Al aplicar una carga en uno de los elementos de una estructura de este tipo, aparecen torsiones importantes en los elementos perpendiculares.

Marcos con vigas fuera del plano de las columnas

En algunas ocasiones, por razones arquitectónicas, las vigas de un marco no están unidas directamente a las columnas, sino que la unión se efectúa por intermedio de vigas perpendiculares al marco en cuestión (figura 8.1*e)*. En este caso, el momento flexionante se transmite de la viga del marco a la columna por medio de torsión en el tramo de viga perpendicular al marco.

Los ejemplos anteriores no cubren, por supuesto, todos los casos en que la torsión tiene efectos importantes. La evaluación de los momentos torsionantes para estos casos y otros similares se estudia con detalle en las referencias 8.1 y 8.2.

8.3 Torsión simple

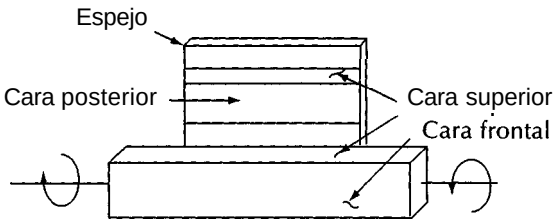
El caso de torsión simple es poco frecuente en la práctica, porque la torsión se presenta casi siempre acompañada de flexión y fuerza cortante. Sin embargo, para calcular la resistencia de un elemento sujeto a torsión combinada con flexión y cortante, es conveniente conocer previamente el comportamiento y la resistencia de un elemento sujeto a torsión simple.

8.3.1 Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto simple

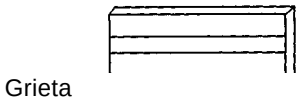
En una viga de concreto simple, la falla ocurre súbitamente para valores pequeños del ángulo de giro; es una falla de tipo frágil, similar a la de una viga ensayada a flexión. Para detectar el mecanismo de falla, Hsu (8.3) filmó el ensaye de una viga con una cámara de cine de alta velocidad. La proyección en cámara lenta de la película reveló el proceso de falla representado esquemáticamente en la figura 8.2. En tal proceso, la falla se inicia al formarse una grieta inclinada de tensión en una de las caras mayores de la viga. Esta grieta se abre rápidamente y se extiende a las caras menores de la viga. La falla ocurre finalmente por aplastamiento del concreto en la cara mayor opuesta.

El proceso de falla descrito es similar al de una viga de concreto simple ensayada a flexión, en la que la grieta de tensión se inicia en la cara inferior, se extiende después a las caras laterales, y se aplasta el concreto de la cara superior. Por consiguiente, puede afirmarse que la falla por tensión ocurre por flexión en un plano inclinado a 45° con respecto al eje longitudinal de la viga [8.3].

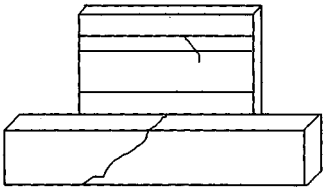
En la figura 8.3 se muestra la superficie de falla. Puede verse que la inclinación de las grietas en las dos caras mayores es aproximadamente la misma.



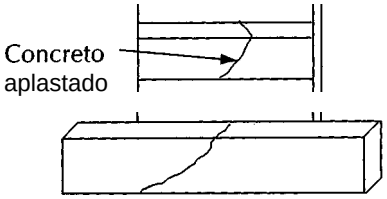
a) Sección media de una viga sometida a torsión. La cámara puede ver las caras superior y frontal directamente; la cara posterior se refleja en un espejo.



b) $^1/_{100}$ seg después de su aparición, la grieta diagonal se extiende a través de la cara frontal.



c) $^1/_{15}$ seg después de haber sido observada, la grieta se extiende y ensancha a través de la cara superior.



d) $^1/_5$ seg después de observada la grieta, el concreto se aplasta en la cara posterior, como se ve en el espejo.

Figura 8.2 Proceso de falla por torsión de una viga de concreto simple tomada con una cámara de cine con una velocidad de 1200 cuadros/seg [8.3].

8.3.2 Comportamiento y modos de falla en vigas de concreto reforzado

El comportamiento, modo de falla y resistencia de vigas con refuerzo longitudinal únicamente, es similar al de vigas de concreto simple. Por lo tanto, el refuerzo longitudinal, si no está combinado con refuerzo transversal, no constituye un refuerzo eficiente desde el punto de vista de la torsión. En vigas con refuerzo longitudinal y transversal, el comportamiento puede dividirse en dos etapas: una anterior al agrietamiento y otra posterior a él [8.4]. El comportamiento anterior

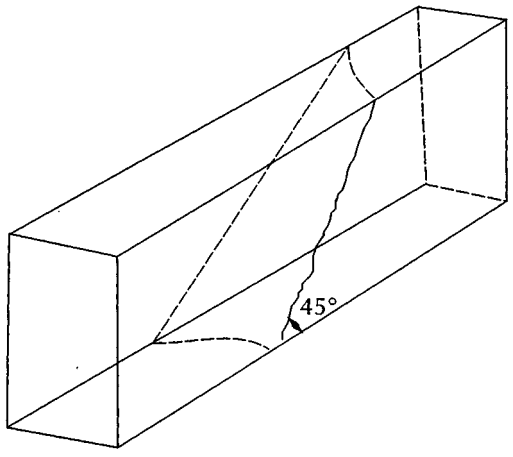


Figura 8.3 Superficie de falla de una viga de concreto simple [8.3].

al agrietamiento es similar al de una viga de concreto simple. La gráfica momento torsionante-giro es prácticamente lineal en esta etapa, como se ve en la figura 8.4, y los esfuerzos en el acero longitudinal y transversal son muy pequeños. Las primeras grietas de torsión se forman en una de las caras mayores. Cuando esto ocurre, el momento torsionante, T_{agr}, es igual o ligeramente mayor que el momento resistente de un elemento de concreto simple, T_{rs}.

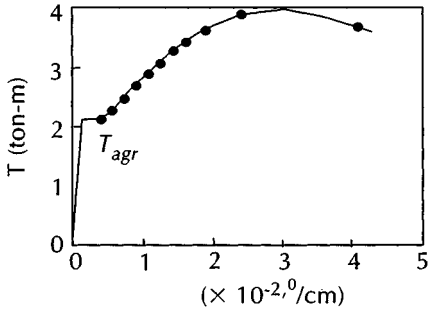
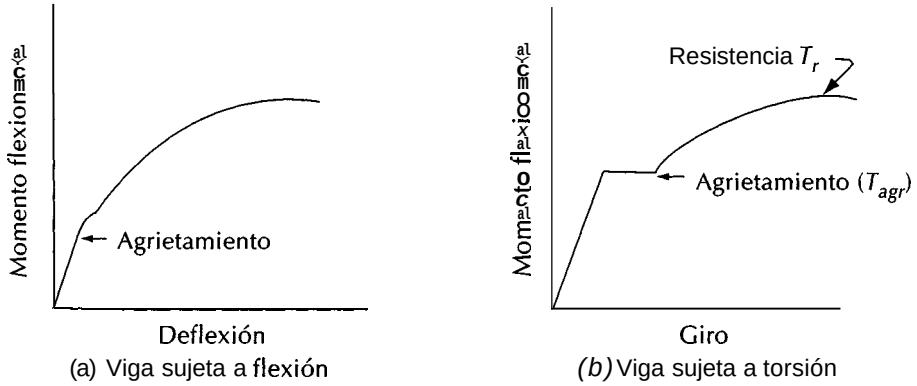


Figura 8.4 Gráfica momento torsionante-giro de un elemento con refuerzo transversal sujeto a torsión pura.

Cuando se agrieta el elemento, el giro, 8, aumenta rápidamente bajo un momento constante, T_{agr}, como indica la rama horizontal de la figura 8.4. Los esfuerzos en el refuerzo longitudinal y transversal también aumentan rápidamente [8.4]. La influencia del agrietamiento es diferente en vigas sujetas a flexión y en vigas sujetas a torsión. En las primeras, los esfuerzos en el refuerzo aumentan gradualmente antes y después del agrietamiento y la pendiente de la gráfica carga-deflexión se modifica ligeramente, como se ve en la figura 8.5*a*. Por el contrario, en vigas sujetas a torsión, el estado interno de equilibrio cambia totalmente al formarse la primera grieta. La pendiente de la gráfica momento torsionante-giro cambia bruscamente (figura 8.5*b*), y el momento externo que era resistido sólo por el concreto, es resistido ahora por el concreto y el acero conjuntamente.

Durante este cambio en el estado interno de equilibrio ocurre una transferencia de carga del concreto al acero. Como el momento externo permanece constante mientras ocurre esta transferencia, la fracción del momento total, que es resistida por el concreto después del agrietamiento, T_c, es menor que el momento de agrietamiento, T_{agr}, y, por lo tanto, menor que el momento resistente de un elemento de concreto simple de igual sección, T_{rs}.

Al finalizar la etapa de transferencia de carga del concreto al acero, el momento torsionante vuelve a aumentar, pero la rigidez del elemento es menor que antes del agrietamiento, como se ve en la figura 8.4. Tanto la rigidez como el momento resistente, T_r, dependen de los porcentajes de refuerzo longi-



(a) Viga sujeta a flexión (*b*) Viga sujeta a torsión

Figura 8.5 Comparación del efecto de agrietamiento en elementos sujetos a flexión y a torsión.

tudinal y transversal. Después de alcanzar el momento máximo, T_r, la gráfica momento-giro tiene una rama descendente que en los ensayes se desarrolla en segundos [8.4].

Cuando se alcanza la resistencia, T_r, el concreto de la cara mayor del elemento, opuesta a la cara con grietas de tensión, se aplasta, y el acero de refuerzo puede estar fluyendo o no, según su porcentaje. De acuerdo con esto, se distinguen tres tipos de elementos: 1) subreforzados, en los que fluyen el acero longitudinal y transversal; 2) sobrerreforzados, en los que el concreto se aplasta antes de que fluya el refuerzo, y 3) parcialmente sobrerreforzados, en los que sólo fluye el refuerzo longitudinal o el transversal.

8.3.3 *Evaluación de la resistencia de elementos de concreto simple*

Se han desarrollado varias teorías para calcular la resistencia en torsión de elementos de concreto simple. A continuación se exponen tres de ellas, a saber: la teoría elástica, la teoría plástica y la teoría de Hsu. En las dos primeras se supone que el concreto es un material perfectamente elástico o perfectamente plástico, respectivamente, al cual son aplicables los resultados de las teorías de elasticidad o de plasticidad. La tercera teoría se desarrolló a partir del comportamiento y modo de falla descrito en la sección 8.3.1.

a) TEORÍA ELÁSTICA*

Esta teoría, desarrollada por Saint Venant en 1855, permite calcular la resistencia de barras prismáticas de material elástico con cualquier sección transversal sujetas a momentos torsionantes en sus extremos. Se supone que al aplicar los momentos torsionantes, las secciones transversales experimentan una rotación y un alabeo. En Teoría de la Elasticidad se demuestra que, por condiciones de equilibrio, los esfuerzos normales f_x, f_y y f_z, y los esfuerzos cortantes, v_{xy}, son nulos, y que los esfuerzos cortantes v_{xz} y v_{yz} pueden calcularse con las expresiones

$$v_{xz} = \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad \text{y} \quad v_{yz} = \frac{\partial \Phi}{\partial x} \tag{8.1}$$

donde Φ es una función de x y y que se denomina función de esfuerzos. Esta función debe satisfacer la ecuación diferencial

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = -2G\theta \tag{8.2}$$

donde G es el módulo de elasticidad en cortante y 0 es el ángulo que gira la barra por unidad de longitud. Además, por condiciones de frontera, la función de esfuerzos, Φ, debe ser constante a lo largo del borde de la sección transversal de la barra. En Teoría de la Elasticidad se han encontrado funciones que satisfacen estas condiciones para diferentes formas de la sección transversal.

Una vez determinada la función de esfuerzos, @, el momento resistente de la barra puede calcularse, según se demuestra también en Teoría de la Elasticidad, por medio de la expresión

$$T = 2 \int \int \Phi \, dxdy \tag{8.3}$$

Prandtl señaló en 1902 la semejanza que existe entre la función de esfuerzos, Φ, y las deflexiones, z, que sufre una membrana colocada en el extremo de un tubo hueco en el interior del cual se aplica una presión. El contorno del tubo hueco es el mismo que el de la sección transversal de la barra (figura 8.6). Si 9 es la presión por unidad de área de

* El desarrollo completo de esta teoría puede consultarse en cualquier texto de Teoría de la Elasticidad o de Resistencia de Materiales Avanzada. Véase, por ejemplo, S. Timoshenko y J. N. Goodier, Theory of *Elasticity*.

la membrana y s la tensión por unidad de longitud del borde, por condiciones de equilibrio se obtiene la ecuación

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = -\frac{q}{s} \tag{8.4}$$

Esta ecuación resulta igual a la ecuación 8.2, si se sustituye z por Φ y q/s por $2G\theta$. Por consiguiente, los valores de la función de esfuerzos, Φ, pueden obtenerse de las deflexiones de la membrana, z, si se reemplaza el segundo miembro de la ecuación 8.4 por $2G\theta$. El momento torsionante resistente puede obtenerse reemplazando Φ por z en la ecuación 8.3. Se obtiene

$$T = 2 \int \int \Phi \, z dx dy \tag{8.5}$$

Esta ecuación indica que el momento resistente es el doble del volumen comprendido entre la membrana y el plano X – Y (figura 8.6).

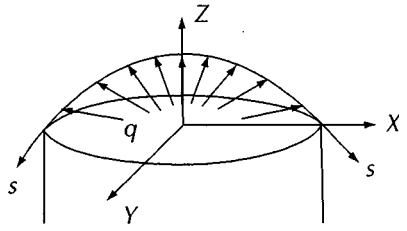


Figura 8.6 Analogía de la membrana.

También puede demostrarse que el esfuerzo cortante, $v_{máx}$, resultante de los esfuerzos v_{xz} y v_{yz} en cualquier punto de la sección transversal, es igual a la pendiente máxima de la membrana en ese punto, siempre que se haga la sustitución del término q/s por $2G\theta$.

Las similitudes anteriores se conocen con el nombre de analogía de la membrana y han sido de gran utilidad en el estudio de problemas de torsión elástica. Para el caso de secciones rectangulares, la analogía de la membrana indica que el momento resistente puede calcularse con la expresión

$$T = \kappa_e \, b^2 h v_{máx} \tag{8.6}$$

donde κ_e es un coeficiente que depende de la forma de la sección transversal y cuyos valores se presentan en la tabla 8.1; b es el lado menor del rectángulo, y h el lado mayor.*

Para el caso de secciones circulares, el momento resistente calculado con la teoría elástica es

$$T = \frac{\pi r^3}{2} v_{máx} \tag{8.7}$$

donde r es el radio de la sección.

La resistencia de secciones *I*, T o *L* es la suma de las resistencias de los rectángulos componentes, ya que el volumen comprendido entre la membrana y la sección transversal es aproximadamente la suma de los volúmenes comprendidos entre la membrana y cada rectángulo.

Tabla 8.1 Valores de las constantes κ_e y κ_p

h/b	κ_e	κ_p
2	0.23	0.41
4	0.27	0.44
6	0.29	0.45
8	0.30	0.46
10	0.31	0.47

Se mencionó en la sección *2.2.5* de este texto que en un elemento de concreto simple sujeto a un estado de esfuerzo cortante puro, como el que produce la torsión, se desarrollan tensiones principales de la misma magnitud

* En elementos sujetos a flexión, el lado b puede ser mayor que el lado h; pero en el presente texto, en elementos sujetos a torsión, b es siempre el lado menor y h el lado mayor.

que el esfuerzo cortante. Por lo tanto, la falla debe ocurrir cuando el esfuerzo $v_{máx}$ es igual a la resistencia en tensión del concreto, f_{tu}, y las resistencias de elementos de sección rectangular y circular serán, respectivamente,

$$T = \kappa_e \, b^2 h \, f_{tu} \tag{8.8}$$

$$T = \frac{\pi r^3}{2} f_{tu} \tag{8.9}$$

Se ha visto que las resistencias experimentales de elementos de concreto simple son del orden de 50 por ciento mayores que las calculadas con las ecuaciones 8.8 y 8.9.

Un caso importante es el de los elementos con sección transversal en forma de cajón de pared delgada o de tubo. Como se verá más adelante, la resistencia de secciones macizas puede calcularse a partir de la resistencia de secciones de este tipo. Cuando se aplica un momento torsionante a una sección en cajón, se producen esfuerzos cortantes en las paredes, como se indica en la figura 8.7*a*, con un sentido tal que equilibran al momento aplicado. En este tipo de vigas se puede suponer que los esfuerzos cortantes, τ, son uniformes en el ancho de la pared, t, y el producto del esfuerzo por el ancho se denomina flujo de cortante y se representa normalmente con la letra q, de tal manera que $q = \tau t$. El flujo de cortante es una fuerza por unidad de longitud de la pared. Analizando el elemento diferencial mostrado en la figura 8.7*b*, se puede ver que en una longitud diferencial ds, el flujo de cortante produce un momento alrededor del eje centroidal que vale

$$dT = q(ds)\,\rho \tag{8.10}$$

Pero el área $(ds)\,\rho$ es el doble del área del elemento triangular diferencial dA_0 mostrado en la figura 8.7*b*. Por lo tanto se puede escribir:

$$dT = q2dA_0 \tag{8.11}$$

Si se integran ambos miembros para obtener el momento torsionante total:

$$T = 2\oint qdA_0 = 2qA_0 \tag{8.12}$$

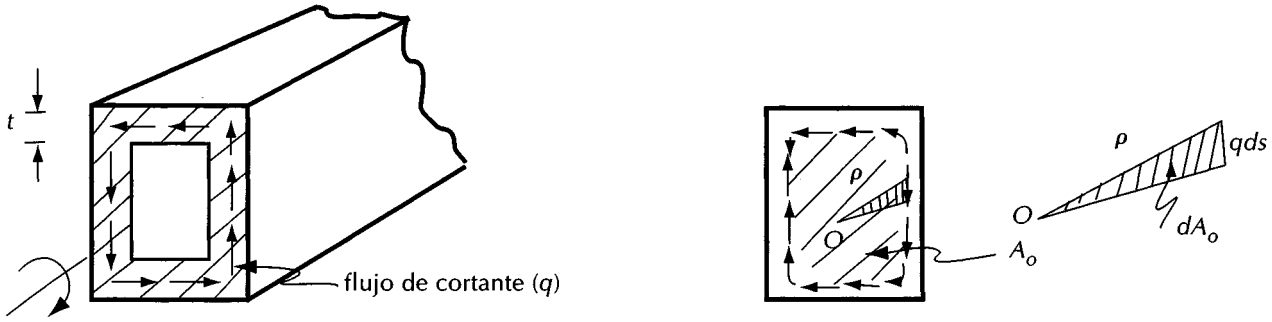
donde A_0 es el área sombreada mostrada en la figura 8.7*b*, o sea, la comprendida dentro de la línea por la que actúa el flujo de cortante. Esta ecuación indica que el momento torsionante que puede resistir una sección en cajón es igual al flujo de cortante q multiplicado por el doble del área comprendida dentro de la línea de acción del flujo. Si se considera que $q = \tau t$, como se dijo anteriormente, se puede escribir la ecuación:

$$T = 2\tau tA_0 \tag{8.13}$$

Esta ecuación se usará más adelante para calcular la resistencia de vigas de concreto reforzado.

b) TEORÍA PLÁSTICA

Esta teoría se aplica a materiales elastoplásticos o plásticos. La resistencia en torsión puede calcularse con la analogía del montón de arena, que es una extensión de la analogía de la membrana. La analogía del montón de arena se expone a continuación para un material elastoplástico cuya gráfica esfuerzo-deformación se muestra en la figura 8.8. Si el momento torsionante aplicado al elemento se incrementa hasta que el material alcanza su límite de fluencia, el esfuerzo es constante en toda la zona que fluye. Ya que el esfuerzo en un punto cualquiera es igual a la pendiente de la membrana en ese punto, como se vio en la sección anterior al estudiar la analogía de la membrana, dicha pendiente debe ser constante en toda la zona en que fluye el material. Es-



a) Viga en cajón

b) Momento resistente del núcleo

Figura 8.7 Resistencia a torsión de una viga con sección en cajón.

to equivale a que la membrana se vaya inflando hasta alcanzar la posición límite indicada con línea punteada en la figura 8.9. Cuando el material fluye en toda la sección transversal del elemento, la membrana toma una forma semejante a un montón de arena con pendiente uniforme; de aquí el nombre de la analogía.

El momento torsionante resistente es el doble del volumen del montón de arena, si se sustituye *2G8* por *q/s,* como en el caso de la teoría elástica.

La aplicación de la teoría plástica a elementos de concreto reforzado, suponiendo $v_{máx} = f_{tu}$, permite obtener los siguientes resultados:

Para secciones rectangulares,

$$T = \kappa_p \, b^2 \, h \, f_{tu} \qquad (8.14)$$

para secciones circulares,

$$T = \frac{2\pi \, r^3}{3} f_{tu} \qquad (8.15)$$

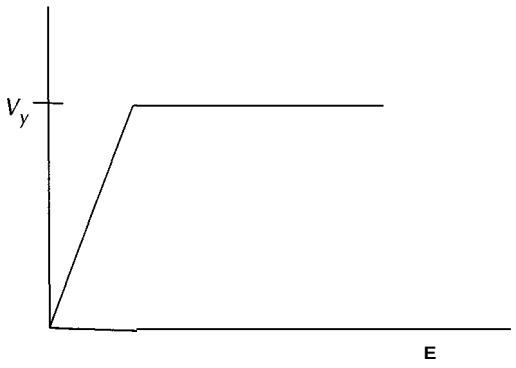


Figura 8.8 Gráfica esfuerzo-deformación de un material elastoplástico.

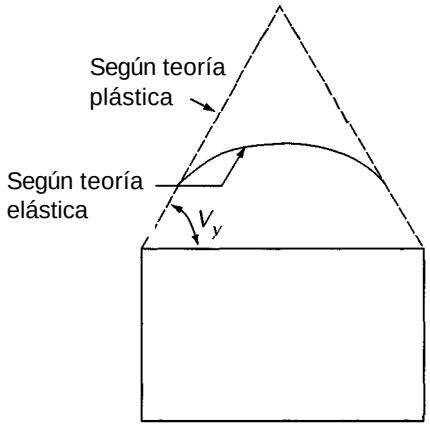


Figura 8.9 Analogía del montón de arena.

El coeficiente κ_p depende de la relación entre el lado mayor y el lado menor del rectángulo. En la tabla 8.1 se presentan valores de este coeficiente. Al igual que en teoría elástica, la resistencia de secciones T, I o L es la suma de las resistencias de los rectángulos componentes. Las resistencias experimentales de elementos de concreto simple concuerdan mejor con las calculadas con teoría plástica que con las calculadas con teoría elástica, a pesar de que la hipótesis básica de un comportamiento plástico del material es de dudosa aplicabilidad al concreto simple sujeto a esfuerzos cortantes o esfuerzos de tensión.

c) TEORÍA DE HSU

La teoría desarrollada por Hsu [8.3] está basada en el mecanismo de falla descrito en la sección 8.3.1, según el cual la falla ocurre por flexión en la superficie mostrada en la figura 8.3. En la teoría, la superficie de falla se idealiza por un plano inclinado a 45° con respecto al eje longitudinal del elemento (figura 8.10*a*) y se supone que la falla se produce por una componente del momento torsionante, T_2, en la figura 8.10*b*, que produce flexión en la sección de falla. Por lo tanto, la resistencia a torsión del elemento puede calcularse a partir de la resistencia a flexión de la sección indicada en la figura 8.10*a*, la que a su vez puede calcularse con la fórmula de flexión

$$M = f_r S \qquad (8.16)$$

El momento M es la componente T_2 que produce flexión en el plano inclinado; por lo tanto,

$$M = T_2 = T_{rs} \cos 45° = T_{rs} / \sqrt{2} \qquad (8.17)$$

S es el módulo de sección del plano inclinado de falla. La base de este plano es $h\sqrt{2}$, y la altura es el lado menor, b (figura 8.10*a*). Por lo tanto,

$$S = \frac{h\sqrt{2}\, b^2}{6} \qquad (8.18)$$

En la ecuación 8.16, f_r es el módulo de rotura, o sea, la resistencia a tensión del concreto simple, medida en un ensaye de flexión (sección 2.2.4). Sustituyendo las ecuaciones 8.13 y 8.14 en la 8.12 se obtiene

$$T_{rs} = \frac{b^2 h}{3} f_r \qquad (8.19)$$

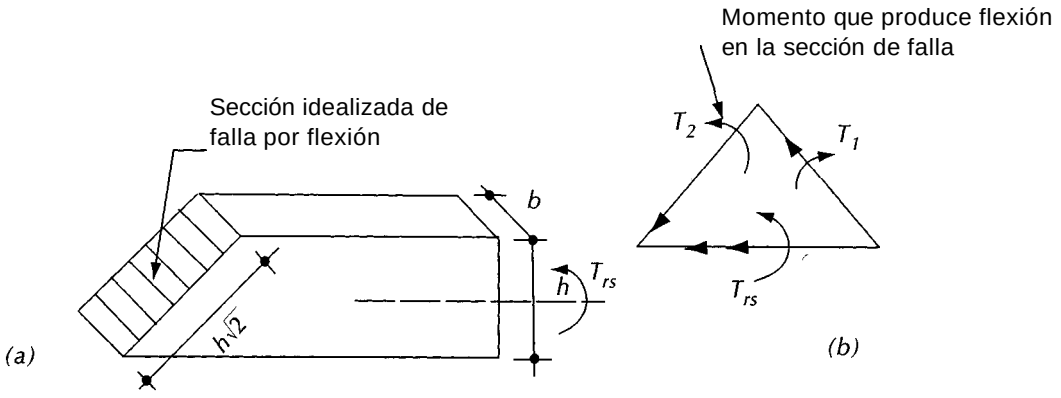


Figura 8.10 Teoría de Hsu de falla por flexión.

En el plano en que se inicia el agrietamiento existen, además de esfuerzos normales de tensión, esfuerzos normales de compresión perpendiculares a los de tensión y de igual magnitud. Experimentalmente se ha observado que para este estado de esfuerzos biaxiales, la resistencia a tensión del concreto se reduce en 15 por ciento aproximadamente.

Con base en esto, y por comparación con resultados experimentales [8.3], la ecuación 8.19 se modifica a

$$T_{rs} = \frac{b^2 h}{3}\left(0.85\, f_r\right) \qquad (8.20)$$

Es conveniente expresar la ecuación 8.20 en términos de la resistencia a compresión del concreto f'_c, que es el índice de resistencia usado normalmente. Para esto se necesita conocer la relación única entre estos valores, ya que el valor de f_r depende de todas las variables mencionadas en la sección 2.2.4. En forma aproximada se puede establecer la siguiente relación

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} \qquad (8.21)$$

$$f_r = 0.64\sqrt{f'_c} \qquad (8.21\ \text{SI})$$

Sustituyendo en la ecuación 8.20 se obtiene, aproximadamente,

$$T_{rs} = 0.6\, b^2 h\sqrt{f'_c} \qquad (8.22)$$

$$T_{rs} = 0.18\, b^2 h\sqrt{f'_c} \qquad (8.22\ \text{SI})$$

En la figura 8.11 se comparan los momentos torsionantes calculados con la ecuación 8.22, con los medidos en varias series de ensayes. La mayoría de los resultados experimentales cae en una franja de + 20 por ciento del valor calculado, por lo que puede considerarse que la correlación es satisfactoria. Utilizando expresiones más elaboradas que la ecuación 8.21 para la relación entre f'_c y f_r, puede mejorarse la comparación entre resultados experimentales y calculados [8.3].

La teoría de Hsu también puede aplicarse al cálculo de resistencia de secciones circulares. Por un procedimiento análogo al descrito anteriormente se llega a la expresión

$$T_{rs} = 0.1\ \pi d^3\sqrt{f'_c} \qquad (8.23)$$

$$T_{rs} = 0.03\ \pi d^3\sqrt{f'_c} \qquad (8.23\ \text{SI})$$

donde d es el diámetro de la sección.

Al igual que en las teorías elástica y plástica, la resistencia de secciones *I*, T o L es la suma de las resistencias de los rectángulos componentes.

Si se supone, para fines de comparación, que la resistencia a tensión del concreto, f_{tu}, que aparece en las ecuaciones 8.8 y 8.14, es igual al módulo de rotura, f_r, que aparece en la ecuación 8.19, se concluye que las expresiones para calcular la resistencia a torsión de elementos de sección rectangular obtenidas por las tres teorías expuestas, tienen la misma forma general

$$T = \kappa\, b^2 h f_{tu}$$

El factor κ depende de la relación b/h en las teorías elástica y plástica, y es constante en la teoría de Hsu. En la figura 8.12 se comparan las tres teorías en términos del parámetro $T/f_{tu}b^2h$, o sea, en términos del factor κ.

8.3.4 Evaluación de la resistencia de elementos de concreto reforzado

Se mencionó anteriormente que la componente T_2 del momento torsionante aplicado a un elemento .de concreto, produce esfuerzos de tensión por flexión en una de las ca-

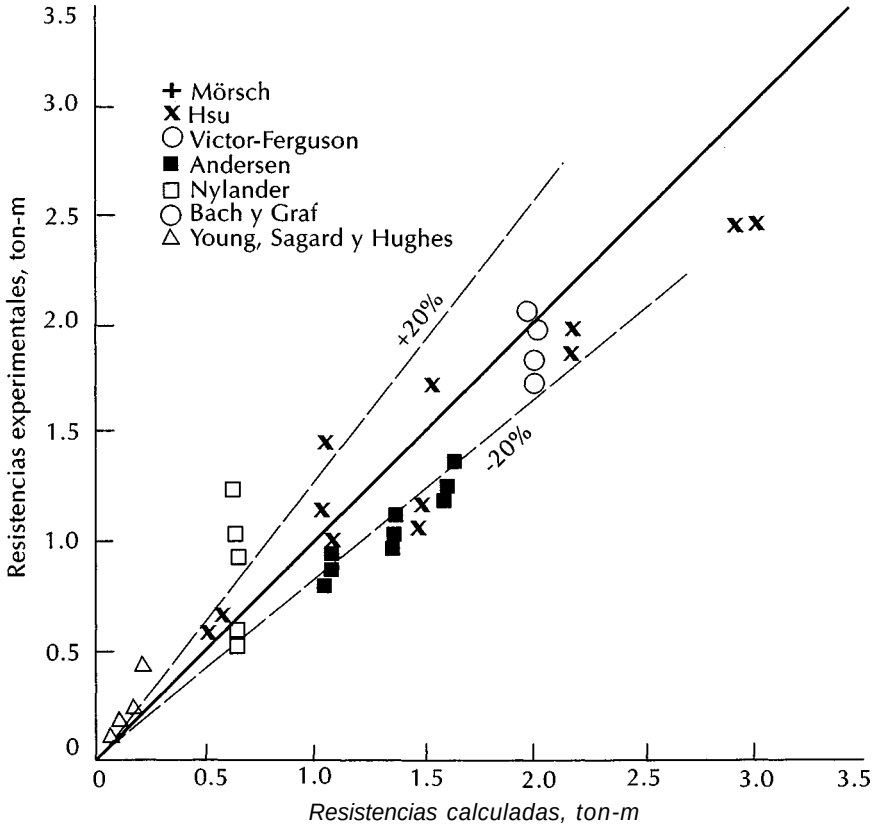


Figura 8.11 Comparación de resistencias experimentales a torsión simple con las calculadas con la ecuación 8.18.

ras mayores del elemento. Estos esfuerzos de tensión tienen una inclinación de 45° con respecto al eje longitudinal de la viga. En forma semejante, en las otras caras del elemento también existen esfuerzos inclinados de tensión producidos por las componentes del momento torsionante, como se muestra en la figura 8.13. La dirección de los esfuerzos en la cara anterior es perpendicular a la dirección de los esfuerzos de la cara posterior, y la dirección en la cara superior es perpendicular a la dirección en la cara inferior.

Existen dos alternativas para reforzar un elemento de concreto sujeto a torsión. La primera consiste en colocar el esfuerzo en dirección paralela a los esfuerzos de tensión. De esta manera, el refuerzo queda en forma helicoidal, como se muestra en la figura 8.14*a*, ya que los esfuerzos de tensión son perpendiculares entre sí en caras opuestas. Es necesario colocar varias hélices de tal manera que cada grieta potencial quede cortada por una barra de refuerzo. Si la dirección del momento torsionante puede cambiar, es necesario colocar dos series de hélices perpendiculares entre sí. Este tipo de refuerzo es poco empleado en la práctica por dificultades constructivas.

La segunda alternativa consiste en colocar refuerzo longitudinal y transversal como se muestra en la figura 8.14*b*. De esta manera, el refuerzo resiste las componentes longitu-

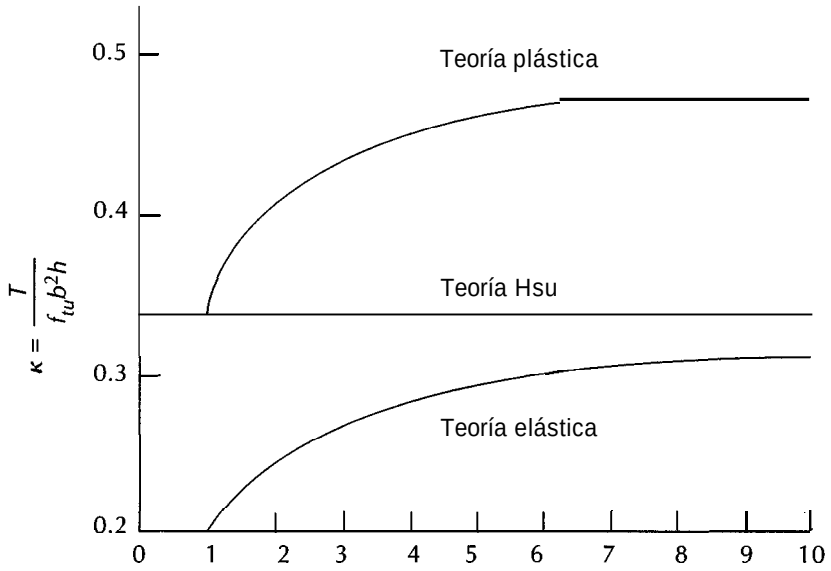


Figura 8.12 Valores de κ para las teorías elástica, plástica y de Hsu.

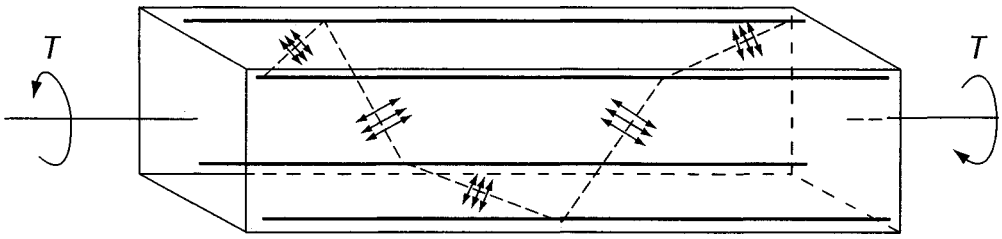
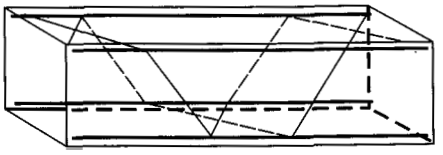


Figura 8.13 Dirección de los esfuerzos de tensión producidos por el momento torsionante, T.

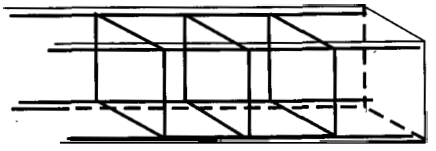
dinales y transversales de los esfuerzos de tensión. Éste es el tipo de refuerzo más usual en la práctica.

Hasta hace algunos años, se consideraba en los reglamentos del ACI y del .Distrito Federal, que la resistencia de un elemento de concreto reforzado sujeto a torsión podía calcularse como la suma de la resistencia del concreto y la resistencia del acero. Esta idea es equivalente a la utilizada todavía para calcular la resistencia a fuerza cortante. Recientemente este criterio ha cambiado y las disposiciones referentes al diseño por torsión se basan en una analogía que se explica a continuación, propuesta por MacGregor y Ghoneim [8.25] con base en trabajos anteriores de Rausch, en 1929, de Mitchell y Collins [8.20 y 8.231 y de Hsu [8.24].

Comparando ensayes a torsión de vigas de concreto reforzado con secciones macizas y con secciones en cajón de pared delgada, con las mismas dimensiones exteriores, se ha visto que su resistencia es semejante. Esto indica que la parte central de concreto contribuye poco a la resistencia después de que la sección se ha agrietado.

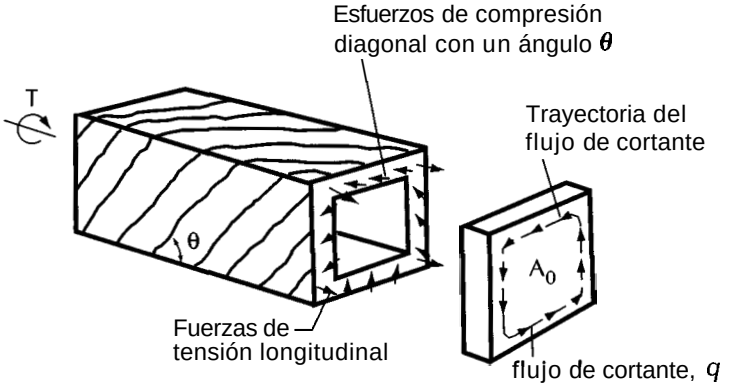


(a) Refuerzo helicoidal

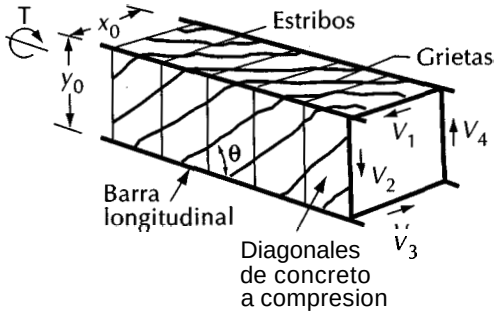


(b) Refuerzo longitudinal y transversal

Figura 8.14 Dos tipos de refuerzo para torsión.



(a) Analogía de la viga de pared delgada



(b) Analogía de la armadura en el espacio

Figura 8.15 Analogías de la viga de la pared delgada y de la armadura (según MacGregor y Ghoneim [8.25]).

Sobre esta base, se puede sustituir la viga original por otra viga de sección en cajón, como la mostrada en la figura 8.14a. El momento de torsión, T, aplicado a la viga produce grietas en forma de hélice a su alrededor, como las mostradas en la misma figura, y esfuerzos longitudinales y de compresión diagonal sobre la pared del cajón. Esta viga agrietada se puede modelar, a su vez, con una armadura equivalente en el espacio, como la mostrada en la figura 8.15b. El acero longitudinal de la viga equivale a las cuerdas horizontales de la armadura; el acero transversal, a las cuerdas verticales, y las zonas de concreto comprendidas entre grietas consecutivas, a las diagonales de compresión. Si se calcula el flujo de cortante, es posible determinar después las fuerzas V_1 a V_4 de la figura 8.15b, y a partir de ellas, calcular las fuerzas en la armadura equivalente. A continuación se indica cómo hacerlo.

Despejando q en la ecuación 8.12, y tomando en cuenta que $q = \tau t$, se obtiene:

$$q = \tau t = \frac{T}{2A_0} \tag{8.24}$$

Ya que q es una fuerza por unidad de longitud, las fuerzas V mostradas en la figura 8.15*b* serán iguales al valor de q por la longitud del lado correspondiente. Así, la fuerza V_2 en el lado anterior de la figura será:

$$V_2 = qy_0 = \frac{Ty_0}{2A_0} \tag{8.25}$$

Si se dibuja un diagrama de cuerpo libre del extremo de la armadura equivalente en el que actúa la fuerza V_2, como el mostrado en la figura 8.16, se puede ver que la grieta inclinada que limita el diagrama corta un número de estribos $n = y_0 \cot \theta/s$, donde y_0 es el lado de la armadura, θ es la inclinación de las grietas y s es la separación de los estribos. Si la fuerza en cada estribo es igual a su área por su límite de fluencia, $A_t f_y$, y si se toma en cuenta que la suma de las fuerzas en todos los estribos cortados por la grieta debe ser igual a la fuerza V_2, se puede plantear la ecuación:

$$V_2 = \frac{A_t f_y y_0 \cot \theta}{s} \tag{8.26}$$

Sustituyendo el valor de V_2 de la ecuación 8.25 en la ecuación 8.26 y despejando el valor del momento T:

$$T = \frac{2A_0 A_t f_y}{s} \cot \theta \tag{8.27}$$

Esta ecuación permite calcular el momento torsionante que puede resistir una sección si dicha resistencia está determinada por la capacidad de los estribos. Si lo que se conoce es el momento torsionante aplicado a una viga, permite calcular el área y la separación de los estribos necesarios. El ángulo θ puede considerarse de 45°, como en el caso de la analogía de la armadura para fuerza cortante.

La resistencia a torsión también puede quedar determinada por la fluencia del acero longitudinal o por el aplastamiento del concreto en las diagonales a compresión. En el primer caso, la resistencia puede calcularse a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 8.17. La fuerza longitudinal N_2 es

$$N_2 = V_2 \cot \theta \tag{8.28}$$

Fuerzas similares a N_2 existen en los otros tres lados de la armadura. Para una sección rectangular, la suma de todas estas fuerzas longitudinales es

$$N = 2(N_1 + N_2) \tag{8.29}$$

Sustituyendo el valor de V_2 de la ecuación 8.25 en la ecuación 8.28, calculando una ecuación similar a la 8.28 para N_1, sustituyendo N_1 y N_2 en la 8.29 y despejando T se obtiene:

$$T = \frac{2A_0 N}{2(x_0 + y_0)\cot \theta} \tag{8.30}$$

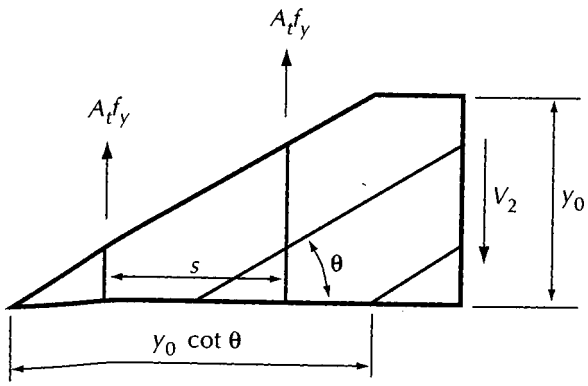


Figura 8.16 Diagrama de cuerpo libre de un extremo de la armadura.

El término $2(x_0 + y_0)$ es el perímetro de los estribos, p_h, como se ve en la figura 8.15. Si se asume que el acero longitudinal fluye, la fuerza longitudinal N será igual a $A_\ell f_y$, donde A_ℓ es el área total de acero longitudinal. Sustituyendo estos valores en la ecuación 8.30 se obtiene la resistencia a torsión determinada por la fluencia del acero longitudinal:

$$T = \frac{2A_0 A_\ell f_y}{p_h \cot 0} \qquad (8.31)$$

Como en el caso de la ecuación 8.27, si lo que se conoce es el momento torsionante, puede calcularse el acero longitudinal necesario para resistirlo despejando el término A_ℓ en la ecuación 8.31.

En las ecuaciones 8.27 y 8.31 aparece el término A_0, que se ha definido al deducir la ecuación 8.12 como el área comprendida dentro de la trayectoria del flujo de cortante, figura 8.76. En varios reglamentos se ha propuesto considerar que A_0 sea igual a 0.85 veces el área comprendida dentro del estribo cerrado más exterior, A_{oh}.

Los esfuerzos en las diagonales de compresión de concreto pueden calcularse a partir de la componente D_2 del diagrama de la figura 8.17. Por lo general, los esfuerzos resultantes son menores que la resistencia del concreto, por lo que este factor casi nunca determina la resistencia de la viga. De todas maneras, puede calcularse esta resistencia en forma similar a la utilizada para obtener la ecuación 8.31.

8.4 Torsión y flexión

Se han efectuado numerosos ensayes de elementos de concreto reforzado con el fin de determinar si la presencia de momento flexionante disminuye la resistencia a torsión. Los resultados se han expresado en forma de diagramas de interacción flexión-torsión, similares a los estudiados en el capítulo 6 para flexión y carga axial. En la figura 8.18 se presenta una recopilación de estos ensayes realizada por Hsu [8.15], en un formato adimensional para poder comparar los resultados. Los valores de M y de T en esta figura son los momentos flexionantes y torsionantes aplicados simultáneamente a los especímenes de ensaye, y los valores de M_r y de T_{rs} son resistencias calculadas en flexión pura y torsión pura, respectivamente.

En la figura 8.18 se puede apreciar una gran dispersión en los resultados obtenidos. Además, se puede concluir que para fines prác-

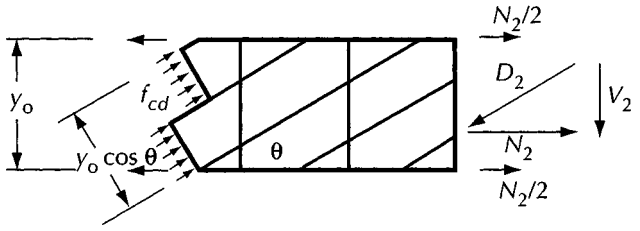


Figura 8.17 Componentes de la fuerza V_2.

ticos, no hay una interacción importante entre la flexión y la torsión, es decir, que no es necesario reducir la resistencia a torsión por efecto de una flexión aplicada simultáneamente.

La interacción flexión-torsión se puede analizar con la analogía de la armadura presentada en la sección anterior, de la siguiente manera. Al analizar el diagrama de fuerzas de la figura 8.17, se encontró que en la sección transversal actuaba una fuerza longitudinal N que se podía calcular con las ecuaciones 8.28 y 8.29. Esta fuerza longitudinal es tomada, en la analogía de la armadura, por el acero longitudinal mostrado en la figura 8.15*b*. Si actúa un momento flexionante junto con el torsionante, el primero produce tensiones en una cara de la viga y compresiones en la cara opuesta. En la cara donde se producen tensiones, el acero longitudinal requerido por flexión debe sumarse al requerido por torsión, mientras que en la cara opuesta, las fuerzas de compresión producidas por la flexión permiten reducir el acero longitudinal requerido por torsión.

8.5 Torsión y cortante

La fuerza cortante no puede existir en un elemento a menos que exista también momento flexionante. Por consiguiente, la interacción torsión-cortante se estudia siempre con la acción simultánea de momento flexionante. Por simplicidad se utiliza el término interacción torsión-cortante, pero debe entenderse que se trata en realidad de una interacción torsión-flexión-cortante.

Tanto la fuerza cortante como el momento torsionante producen esfuerzos cortantes en el elemento; en una cara se suman estos esfuerzos y en la otra se restan. En elementos de concreto resulta sumamente difícil calcular la distribución real de esfuerzos bajo la acción combinada de torsión y cortante, puesto que no se conoce esta distribución ni siquiera para el caso en que actúan aisladamente dichas acciones. El problema se ha atacado, por una parte, determinando experimentalmente diagramas de interacción momento torsionante-fuerza cortante, y por la otra, utilizando la analogía de la armadura planteada en la sección 8.3.3.

En la figura 8.19 se presentan los resultados experimentales de seis series independientes de ensayes de vigas, sin refuerzo transversal, sujetas a torsión y fuerza cortante, en un diagrama de interacción adimensional en el que V_r se calculó con la ecuación propuesta en el Reglamento ACI y T_{rs} con la analogía del montón de arena y un esfuerzo de 1.3 $\sqrt{f'_c}$. Se observa una gran dispersión en los resultados, debida en parte a que la resistencia a fuerza cortante sin torsión es mayor que la calculada en la mayoría de los ensayes (recuérdese que la ecuación del ACI es un límite inferior de mu-

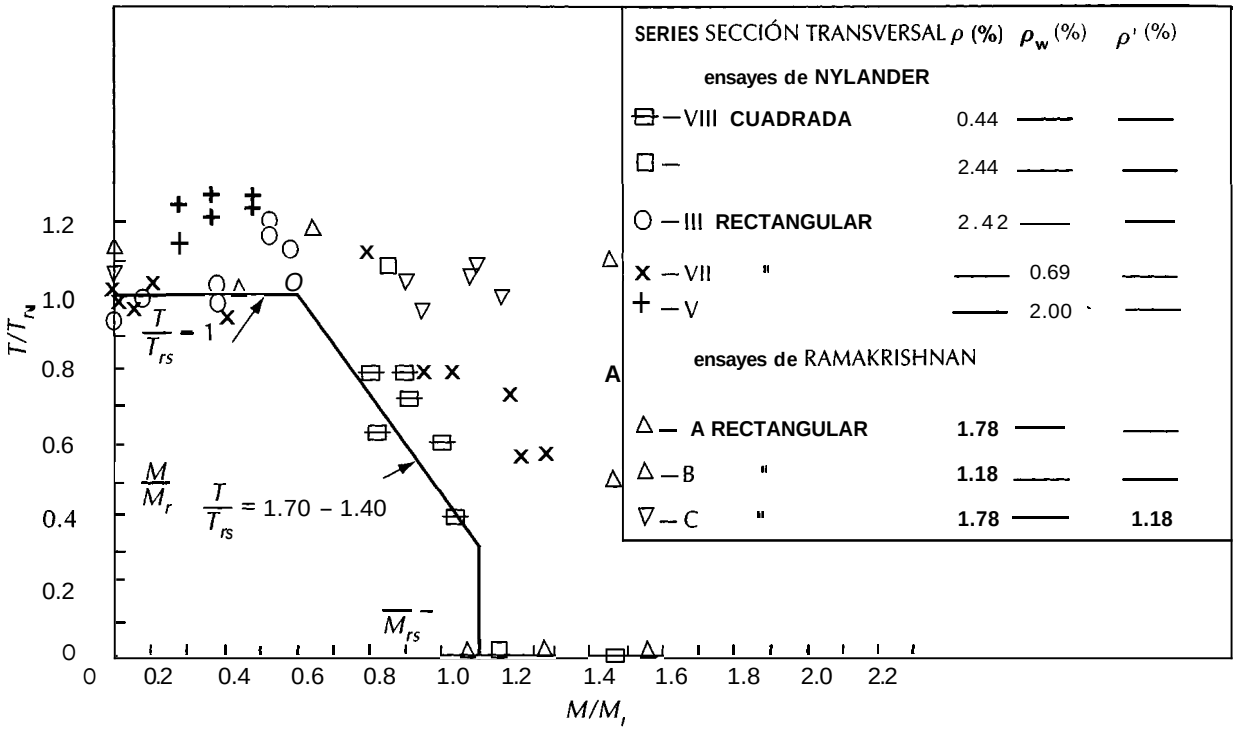


Figura 8.18 Diagrama de interacción adimensional torsión-flexión (según Hsu [8.15]).

chos resultados experimentales). A pesar de esta dispersión, se ha propuesto la ecuación de un círculo, como se indica en la figura, para representar la interacción torsión-cortante.

En una serie de ensayes de vigas con refuerzo transversal realizada por Klus [8.13], se obtuvo un diagrama de interacción diferente, figura 8.20. En estos ensayes, los valores de T_r y V_r no son calculados, sino que se obtuvieron experimentalmente ensayando especímenes en torsión pura y en cortante sin torsión, respectivamente.

El diagrama de interacción circular se usó durante varios años para fines de diseño por torsión combinada con fuerza cortante. Con base en esta interacción, el concreto resistía una parte de la fuerza cortante, V_c, y una parte del momento torsionante, T_c. Los valores de V_c y de T_c dependían de la relación entre la torsión y la fuerza cortante, según el diagrama de interacción circular. El procedimiento de diseño resultaba complicado y parecía tener poca justificación dada la gran dispersión de los resultados experimentales*. Por estas razones, recientemente se ha planteado que la resistencia a combinaciones de torsión y cortante se calcule suponiendo que la resistencia del concreto a fuerza cortante, V_c, es independiente de la torsión y que la resistencia del concreto a torsión, T_c, es igual a cero (MacGregor y Ghoneim [8.25]). De acuerdo con estas hipótesis, toda la resistencia a torsión la proporciona el acero de refuerzo, longitudinal y transversal, y se calcula con las analogías de la viga de pared delgada y de la armadura expuestas en la sección 8.3.4. Un método basado en estas hipótesis se ha usado durante varios años en los Reglamentos Europeo y Canadiense, y además se ha visto que los resultados experimentales concuerdan razonablemente bien con las resistencias así calculadas. En la sección 8.8 se presenta el método mencionado con detalle.

* Se puede consultar la tercera edición de este texto.

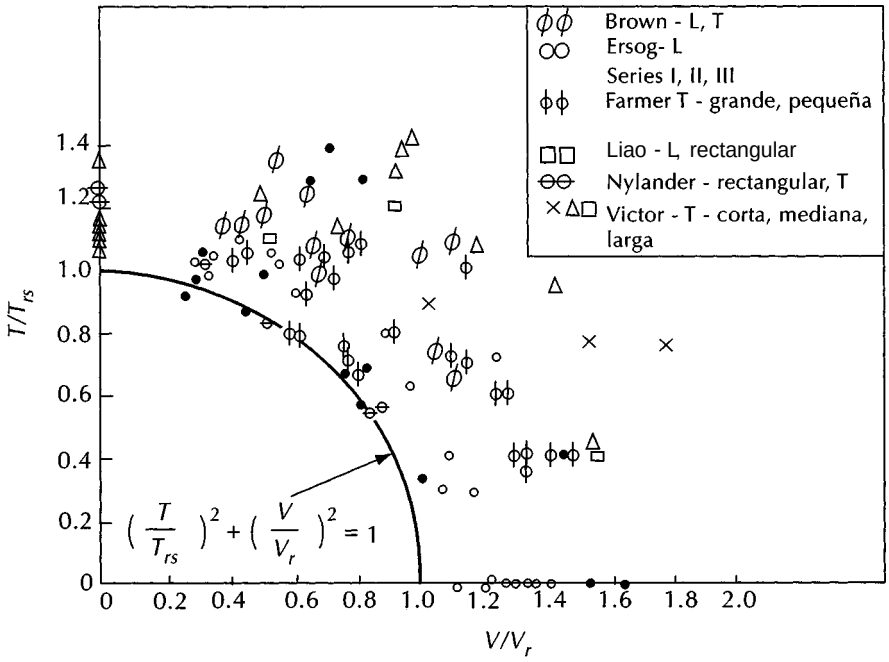


Figura 8.19 Diagrama de interacción torsión-cortante para varias series de ensayes (según Victor y Ferguson [8.12]).

8.6 Superficies de interacción torsión-flexión-cortante

Combinando el diagrama de interacción torsión-flexión con diagramas de interacción torsión-cortante para diferentes niveles del momento flexionante, se obtiene una superficie de interacción como la mostrada en la figura 8.21. Un punto de esta superficie representa la combinación de momento torsionante, momento flexionante y fuerza cortante que produce la falla del elemento.

Debido a las incertidumbres que se tienen en la determinación de los diagramas de interacción flexión-cortante y torsión-cortante, no ha sido posible determinar superficies de interacción que sean aceptadas por todos los investigadores. La superficie mostrada en la figura 8.21 con fines de ilustración únicamente, ha sido propuesta por Hsu [8.14], pero otros investigadores han sugerido superficies diferentes.

8.7 Torsión y carga axial

Esta combinación de acciones se presenta en dos tipos de elementos estructurales: columnas y miembros presforzados. Se han realizado ensayes en especímenes en los que la carga axial se aplica por medio de una máquina universal de carga, y en especímenes en que se aplica por medio de cables de presfuerzo, con resultados similares en ambos casos.

En la figura 8.22 se presentan los resultados de algunos ensayes llevados a cabo bajo esta combinación de acciones. En la escala de las ordenadas se han marcado los

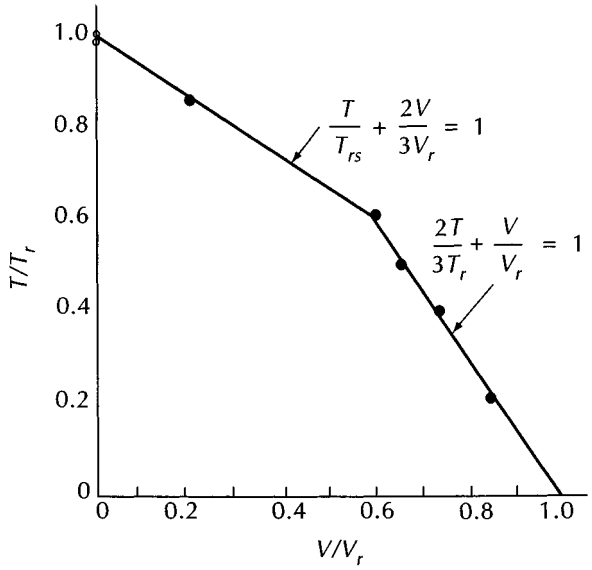


Figura 8.20 Interacción torsión-cortante en elementos con refuerzo transversal [8.13].

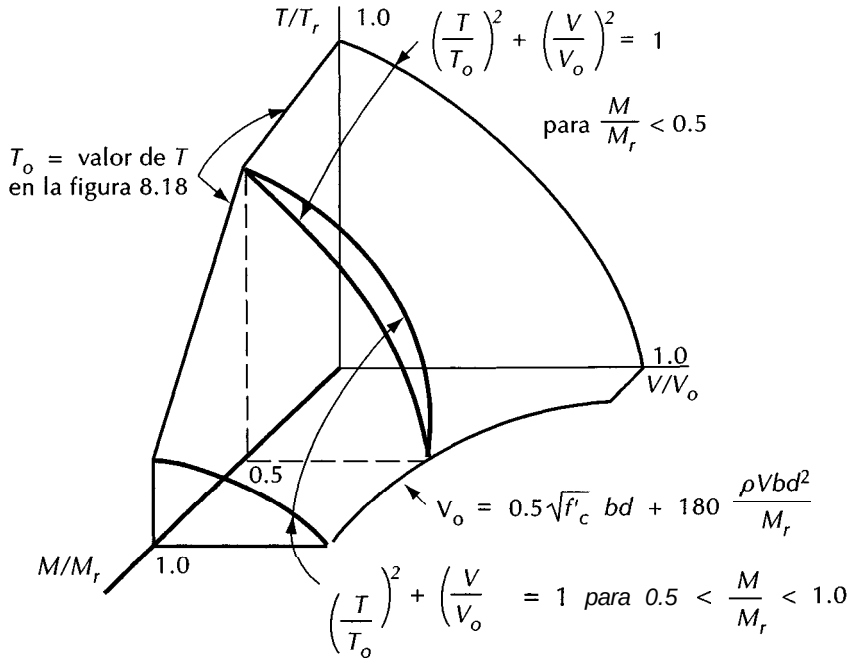


Figura 8.21 Superficie de interacción torsión-flexión-cortante (según Hsu [8.14]).

valores de la relación entre el momento torsionante medido y el momento resistente en torsión pura; y en la escala de las abscisas, los valores de la relación entre el esfuerzo promedio en la sección, f, y la resistencia del concreto, f'_c. El esfuerzo promedio f es el cociente de la carga axial, P, entre el área gruesa de la sección transversal. La relación f/f'_c es equivalente a la relación P/P_u para elementos sin refuerzo longitudinal. Es una medida de la magnitud de la carga axial. Se puede ver en esta figura que el efecto de la carga axial, o del presfuerzo, es aumentar el momento torsionante resistente del elemento, para valores de f/f'_c hasta de *0.7* aproximadamente. Para valores mayores, la resistencia a torsión tiende a disminuir.

Se ha visto que un efecto de la carga axial es disminuir el ángulo θ que expresa la inclinación de las grietas, figura 8.15. Entonces, este efecto puede tomarse en cuenta aplicando las analogías de la viga de pared delgada y de la armadura con un valor menor de 8. Se ha propuesto, para este fin, un valor de 37.5".

8.8 Expresiones de los reglamentos para valuar la resistencia a efectos de torsión

Los reglamentos del ACI y del Distrito Federal incluyen métodos para diseño por torsión basados en principios similares. Ambos establecen momentos torsionantes mínimos, a partir de los cuales es necesario diseñar por torsión, y ambos presentan expresiones basadas en las analogías de la sección de pared delgada y de la armadura en el espacio. A continuación se presentan estos métodos.

8.8.1 Expresiones del Reglamento ACI

Este reglamento establece que el efecto de la torsión debe tomarse en cuenta siempre que el

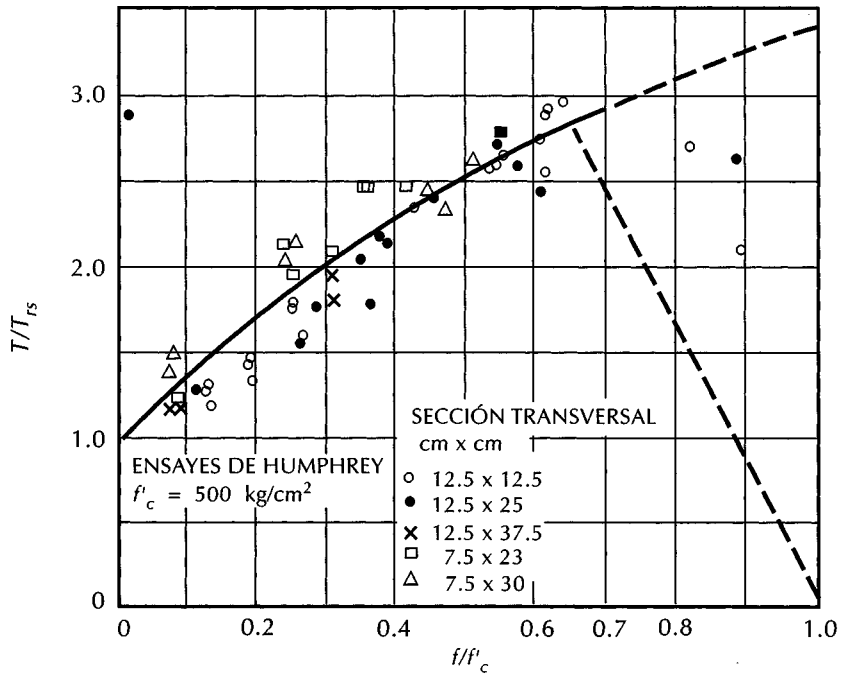


Figura 8.22 Interacción torsión-carga axial en elementos sin refuerzo transversal (según Hsu [8.15]).

momento de diseño por torsión, T_u, exceda la cuarta parte del momento torsionante que produce el agrietamiento del miembro. Este último momento puede calcularse de la siguiente manera. La ecuación 8.13, deducida en la sección 8.3.3*a*, expresa que el momento torsionante que puede resistir una viga de pared delgada es

$$T = 2\tau t A_0 \qquad (8.13)$$

Para poder aplicar esta ecuación, en el Reglamento ACI-02 se supone que el espesor, t, de la pared de la viga equivalente, figura 8.15a, es igual a $0.75A_{cp}/p_{cp}$, donde A_{cp} es el área incluida dentro del perímetro exterior de la sección transversal de la viga y p_{cp} es el perímetro exterior de esta sección transversal. También se supone que A_0 es igual a $2A_{cp}/3$ y que el esfuerzo τ correspondiente al agrietamiento del concreto es igual a $\sqrt{f'_c}$. En la figura 8.23 se aclaran estas definiciones. Sustituyendo los valores anteriores en la ecuación 8.13 se obtiene que el momento de agrietamiento, T_{ag}, es

$$T_{ag} = \sqrt{f'_c}\left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}}\right) \qquad (8.32)$$

Si el momento torsionante de diseño es igual o mayor que la cuarta parte del momento calculado con la ecuación 8.32, multiplicada por el factor de reducción, ϕ, la torsión debe tomarse en cuenta, o sea, siempre que

$$T_u \geq \phi 0.25\sqrt{f'_c}\left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}}\right) \qquad (8.33)$$

$$T_u \geq \phi 0.08\sqrt{f'_c}\left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}}\right) \qquad (8.33\ SI)$$

El factor de reducción ϕ es de 0.75, igual al correspondiente a fuerza cortante. Al calcular A_{cp} y p_{cp} en vigas T o L, en las que el patín se haya colado monolíticamente con el alma, se puede incluir una porción del patín igual a la proyección del alma por debajo o por arriba del patín, la que sea mayor, sin exceder cuatro veces el espesor del patín, a cada lado del alma de la viga.

Si se cumple la condición expresada por la ecuación anterior, el Reglamento ACI distingue dos casos. Si el momento torsionante debe ser resistido en su totalidad para mantener el equilibrio, como en las marquesinas de la figura 8.1*a*, los elementos estructurales deben ser diseñados para resistir el momento torsionante total. En cambio, si existe la posibilidad de una redistribución de momentos torsionantes a otro tipo de acciones internas, el momento torsionante de diseño puede reducirse. El segundo caso sería el correspondiente, por ejemplo, a la figura 8.1c, ya que

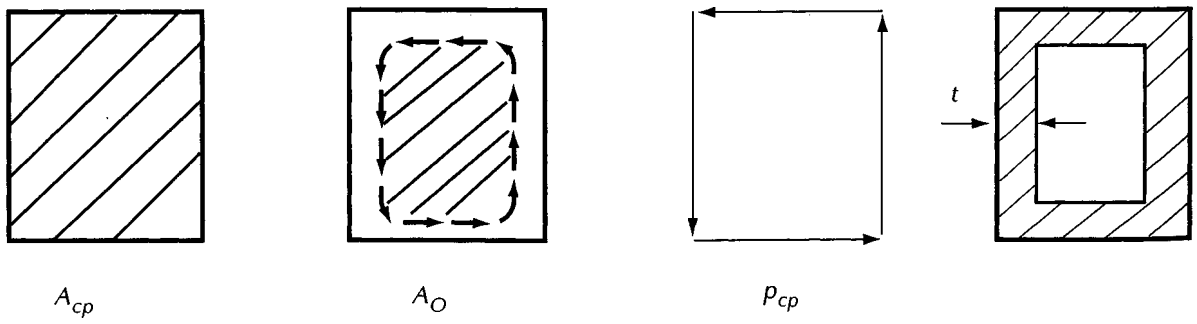


Figura 8.23 Definiciones de términos usados en el diseño por torsión

si se reduce el momento torsionante en la viga principal de borde, disminuye el momento flexionante en la viga secundaria en su unión con la viga principal, y aumenta dicho momento flexionante en los apoyos interiores de la viga secundaria. Para este segundo caso, el Reglamento **ACI** permite reducir el momento torsionante calculado a un valor igual al momento torsionante de agrietamiento multiplicado por el factor de reducción ϕ, o sea, que el momento torsionante de diseño sería

$$T_u = \phi \sqrt{f'_c} \left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}} \right) \qquad (8.34)$$

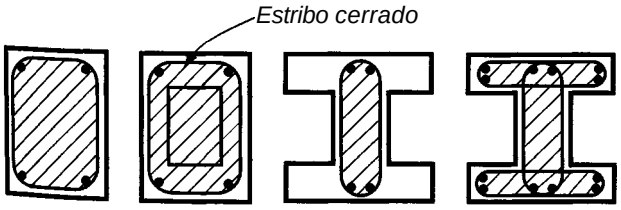
$$T_u = \phi\, 0.3 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}} \right) \qquad (8.34\ \text{SI})$$

Una vez definido el momento torsionante de diseño, debe verificarse el tamaño mínimo de la sección transversal en función de la fuerza cortante y del momento torsionante que actúan sobre ella. **A** este respecto, en el Reglamento **ACI** se plantean las siguientes ecuaciones. Para secciones sólidas se debe cumplir la desigualdad:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d} \right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}} \right)^2} \le \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \qquad (8.35)$$

y para secciones huecas, la desigualdad:

$$\left(\frac{V_u}{b_w d} \right) + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}} \right) \le \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \qquad (8.36)$$

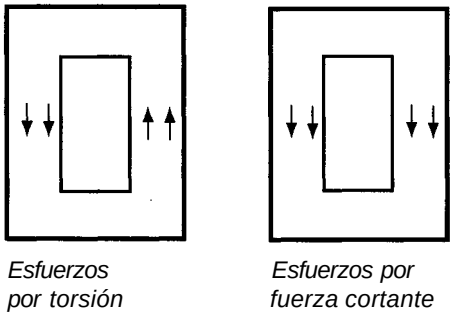


A_{oh} = área sombreada

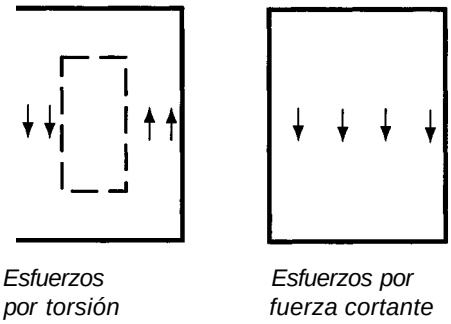
Figura 8.24 Definición de A_{oh}.

en las cuales A_{oh} es el área incluida dentro del estribo para torsión más exterior, considerando el centro de la barra, y p_h es el perímetro del mismo estribo. En la figura 8.24 se muestra la definición de A_{oh} y la manera en que puede tomarse en cuenta la existencia de patines en la sección transversal. Para usar las ecuaciones 8.35 y 8.36 en sistema SI, sustitúyanse los términos $2\sqrt{f'_c}$ por $0.67\sqrt{f'_c}$. En secciones huecas, si el espesor de la pared es menor que A_{oh}/p_h, el segundo término de la ecuación 8.36 debe tomarse como $T_u/1.7\, A_{oh} t$.

Las ecuaciones 8.35 y 8.36 se plantearon considerando que se suman los esfuerzos cortantes producidos por la fuerza cortante con los producidos por el momento torsionante, pero en una sección hueca, ambos esfuerzos actúan únicamente en las paredes de la viga, figura 8.25*a*, mientras que en una sección sólida, los producidos por la fuerza cortante ac-



(a) Sección hueca



(b) Sección sólida

Figura 8.25 Suma de esfuerzos por torsión y por fuerza cortante.

túan en toda la sección transversal, y en cambio los producidos por el momento torsionante sólo actúan en la pared de la viga equivalente, figura 8.256. Al ser más favorable la condición de la figura 8.256, en vez de sumar directamente ambos esfuerzos, se suman los cuadrados y se saca la raíz cuadrada del total, lo que da una cantidad menor.

. El objetivo de que el tamaño de la sección transversal sea tal que se cumplan las desigualdades expresadas por las ecuaciones 8.35 y 8.36, es limitar el ancho de las grietas y evitar la falla por aplastamiento de las diagonales de compresión de la armadura equivalente de la figura 8.156. Recuérdese que se había establecido que la resistencia a torsión de esta armadura podía estar determinada por la fluencia del refuerzo transversal, por la del refuerzo longitudinal o por el aplastamiento del concreto de las diagonales de compresión.

Una vez establecido el tamaño de la sección transversal, se calcula el refuerzo transversal necesario con la ecuación

$$T_n = \frac{2A_0 A_t f_{yv}}{s} \cot 0 \qquad (8.37)$$

que es la misma ecuación 8.27 deducida anteriormente, pero usando el momento torsionante nominal T_n y el esfuerzo de fluencia del acero de los estribos, f_{yv}. El Reglamento ACI establece que el valor de A_0 se determine por análisis o que se tome igual a 0.85 A_{oh}. También señala que el valor de θ puede suponerse entre 30° y 60°, pero se puede tomar igual a 45° en secciones de concreto reforzado.

El refuerzo longitudinal por torsión, según el Reglamento ACI, se calcula con la ecuación

$$A_\ell = \frac{A_t}{s} p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{y\ell}}\right) \cot^2 \theta \qquad (8.38)$$

que puede obtenerse sustituyendo el valor de T de la ecuación 8.27 en la ecuación 8.31 y despejando A_ℓ, para que el acero longitudinal quede expresado en función del acero transversal. El término $f_{y\ell}$ representa el esfuerzo de fluencia del acero longitudinal y el valor de 0 debe ser el mismo usado en la ecuación 8.37.

El acero por torsión calculado con las ecuaciones 8.37 y 8.38 debe sumarse al refuerzo necesario por flexión, fuerza cortante y carga axial. Es importante observar que el término A, representa el área transversal de todas las ramas de un estribo, mientras que el término A_t representa el área de una sola rama. Por lo tanto, para sumar el refuerzo transversal por cortante con el de torsión, puede usarse la siguiente expresión:

$$\left(\frac{A_{v+t}}{s}\right)_{total} = \frac{A_v}{s} + 2\frac{A_t}{s} \qquad (8.39)$$

También debe observarse que si existen estribos de más de dos ramas, sólo las ramas exteriores deben considerarse como eficaces para resistir la torsión, ya que son las únicas que quedan en la pared de la viga equivalente.

El Reglamento ACI especifica usar refuerzo por torsión en todos los casos en los que T_u exceda los valores obtenidos con la ecuación 8.33, o sea, cuando no son despreciables los momentos torsionantes. El área mínima de estribos cerrados es la calculada con la ecuación

$$A_v + 2A_t = \frac{0.20\sqrt{f'_c}\, b_w s}{f_{yv}} \qquad (8.40)$$

pero no menor que 3.5 $b_w s/f_{yv}$, y el área mínima de acero longitudinal por torsión, la calculada con

$$A_{\ell,mín} = \frac{1.3\sqrt{f'_c} A_{cp}}{f_{y\ell}} - \left(\frac{A_t}{s}\right) p_h \frac{f_{yv}}{f_{y\ell}} \qquad (8.41)$$

en la que el término A_t/s no debe tomarse menor a 1.75 b_w/f_{yv}. Para usar las ecuaciones anteriores en sistema SI, sustitúyanse los siguientes coeficientes: 0.20 $\sqrt{f'_c}$ por 0.067 $\sqrt{f'_c}$, 3.5 por 0.33, 1.3 $\sqrt{f'_c}$ por 0.42 $\sqrt{f'_c}$ y 1.75 por 0.17.

La separación del refuerzo transversal por torsión no debe ser mayor que $p_h/8$ ni que 30 cm. El refuerzo longitudinal debe distribuirse en el perímetro y las barras no deben estar separadas más de 30 cm. Se usarán barras del No. 3 como mínimo y el diámetro de las barras no debe ser menor que 1/24 de la separación de los estribos.

Al igual que en fuerza cortante, la sección crítica por torsión es la situada a una distancia igual a d del paño del apoyo. El refuerzo por torsión debe prolongarse una distancia igual a $(b_t + d)$ más allá del punto en que teóricamente ya no sea necesario, donde b_t es el ancho de la sección transversal que contiene a los estribos colocados para resistir la torsión.

8.8.2 Expresiones de las *NTC-04* del Reglamento del Distrito Federal

Las disposiciones de este reglamento son prácticamente iguales a las del Reglamento del ACI, con algunas pequeñas variaciones en los valores de algunos coeficientes y usando desde luego f^*_c en vez de f'_c. El factor de reducción, F_R, para torsión es de 0.8 igual al de fuerza cortante. Ya que las ecuaciones son muy parecidas a las del Reglamento ACI, no se reproducen en este texto, pero se presentan en el ejemplo 8.2.

8.9 Ejemplos

Ejemplo 8.1. En el ejemplo 8.1 se ilustra la aplicación de las expresiones del Reglamento ACI 318-02 al caso de una viga empotrada con un voladizo que introduce momento torsionante, momento flexionante y fuerza cortante. Para mayor sencillez, se considera en este ejemplo que la viga está perfectamente empotrada en ambos extremos, tanto en flexión como en torsión. Ésta es una condición ideal que rara vez se presenta en estructuras reales. Se supone que las dimensiones y el refuerzo de la viga están determinadas y se trata de encontrar su resistencia a torsión. Con el fin de poder incluir una parte del patín en los cálculos de resistencia, como se muestra en la figura 8.24, se colocaron estribos horizontales en dicho patín. Previamente se definió que la parte del patín que podía incluirse en los cálculos era de 45 cm, igual a la proyección de la viga por debajo del patín. Esta cantidad es menor que ocho veces el espesor del patín, que es el máximo admisible. El valor de p_h, que es el perímetro del estribo y que aparece en la ecuación 8.35, puede entonces tomarse como la suma de los perímetros de los dos estribos mostrados en el croquis de la sección de Datos en el ejemplo. Resulta un perímetro total de 304 cm, ya descontados los recubrimientos.

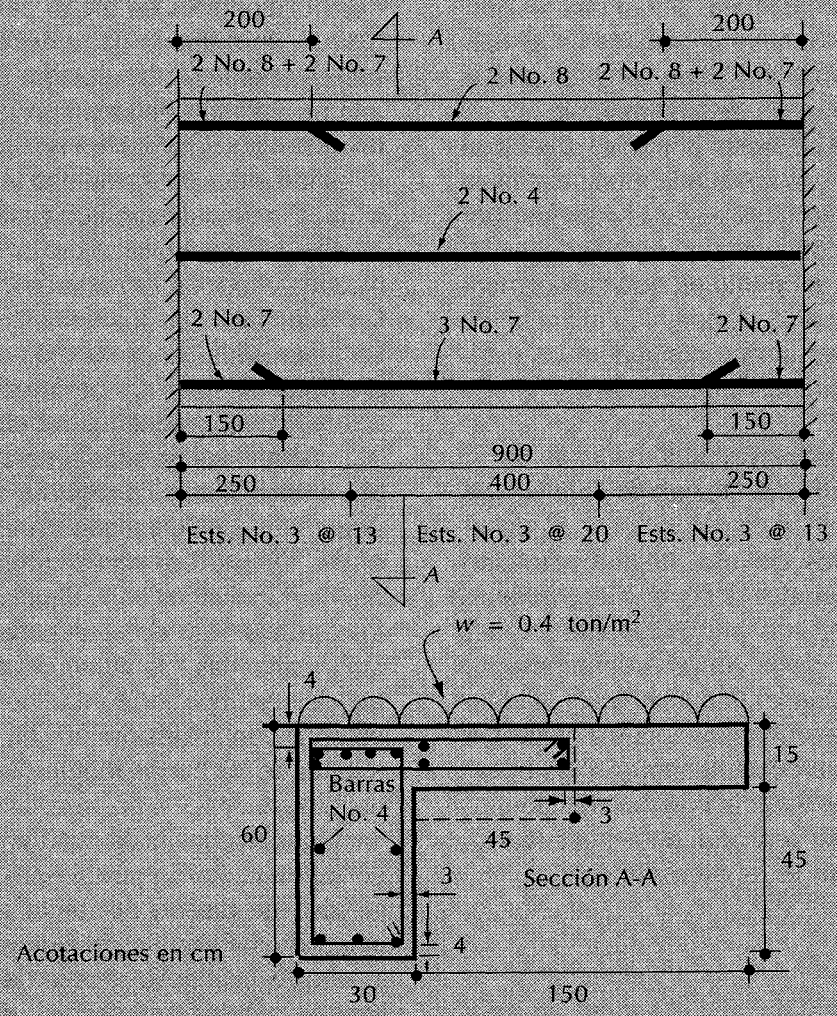
Obsérvese que las separaciones de estribos cumplen con los requisitos al respecto del Reglamento ACI, ya que no exceden de $p_h/8$ ni de 30 cm. (Los recubrimientos de 3 cm y de 4 cm indicados en la figura son al centro de los estribos.) Las dos barras del No. 4 que están localizadas a la mitad del peralte y al centro del estribo horizontal tienen por objeto cumplir con la disposición de que el espaciamiento de las barras longitudinales no exceda de 30 cm.

La carga viva de 0.4 ton/m^2 es la carga de servicio. Por lo tanto, para obtener la carga viva de diseño se afectó de un factor de carga de 1.6, que es el que señala el Reglamento ACI. El peso propio de la viga y de la losa se afectó, en cambio, de un factor de carga de 1.2 (véase la sección 1.7.2), que corresponde a peso muerto.

El momento torsionante se obtuvo multiplicando la resultante de la carga de la losa, carga viva más peso propio de la losa, por la distancia entre el punto de aplicación de esa resultante y el eje central de la viga. Este producto da el momento por unidad de longitud de la viga; para obtener el momento en el paño de apoyo, se multiplica el momento por unidad de longitud por la mitad del claro libre de la viga, ya que el momen-

EJEMPLO 8.1 ***Cálculo de la resistencia de un elemento sujeto a torsión, flexión y cortante según el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



Cargas

$w = 0.4$ ton/m^2 (carga de servicio, no incluye peso propio)
peso volumétrico del concreto = 2.4 ton/m^3
factores de carga = 1.2, carga muerta; 1.6, carga viva
w_u (carga viva) = $1.6 \times 0.4 = 0.64$ ton/m^2
w_u (peso losa) = $1.2 \times 0.15 \times 2.4 = 0.43$ ton/m^2
w_u (total) = $0.64 + 0.43 = 1.07$ ton/m^2
peso propio viga = $1.2 \times 0.30 \times 0.45 \times 2.4 = 0.39$ ton/m
carga total lineal sobre la viga = $1.07 \times 1.80 + 0.39 = 2.32$ ton/m

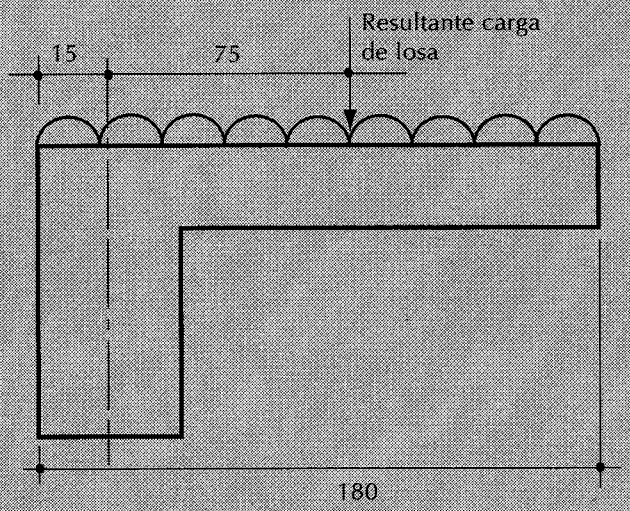
EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

Materiales

Concreto, $f'_c = 250$ kg/cm^2
Acero, $f_y = 4200$ kg/cm^2

CÁLCULO DE ACCIONES INTERNAS

Momento torsionante



Momento torsionante en paño apoyo =
$= 1.07 \times 1.80 \times 0.75 \times 4.50 = 6.5$ ton-m

Momento torsionante en sección crítica =
$= 1.07 \times 1.80 \times 0.75\ (4.50 - 0.55) = 5.7$ ton-m

Momento flexionante

En los apoyos: $\dfrac{w_u l^2}{12} = \dfrac{2.32 \times 9^2}{12} = 15.7$ ton-m

En el centro del claro: $\dfrac{w_u l^2}{24} = \dfrac{2.32 \times 9^2}{24} = 7.8$ ton-m

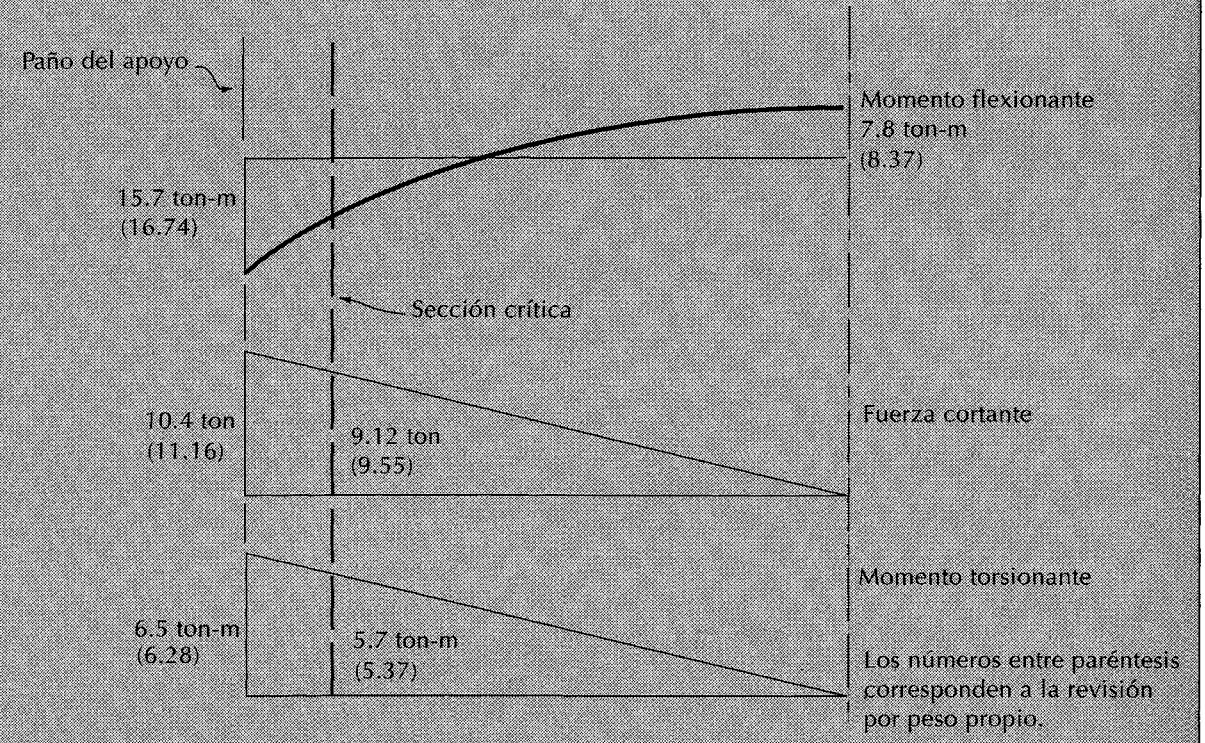
Fuerza cortante

En los apoyos: $\dfrac{w_u l}{2} = \dfrac{2.32 \times 9}{2} = 10.4$ ton

En la sección crítica $= 11.6 - w_u d = 10.4 - 2.32 \times 0.55 = 9.12$ ton

EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

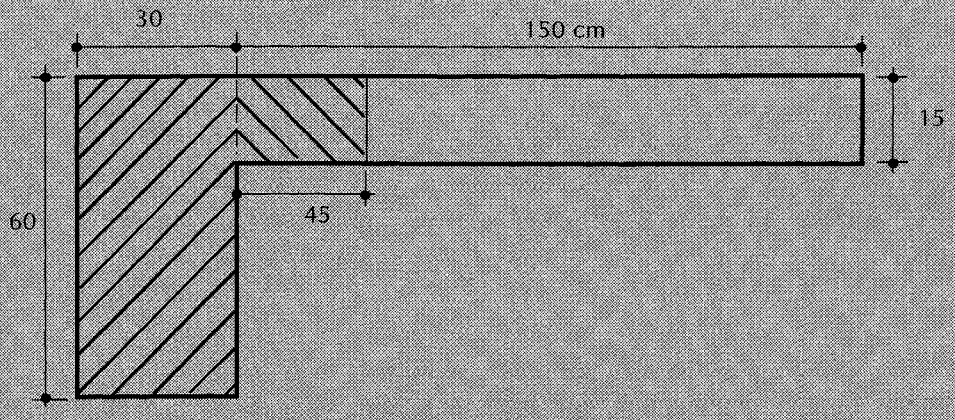
Diagramas de acciones internas



CÁLCULO DE LA RESISTENCIA A TORSIÓN

Valor a partir del cual se deben considerar efectos de torsión:

$$T_u > \phi\, 0.25\sqrt{f'_c}\ \left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}}\right) \qquad \text{(ecuación 8.33)}$$



EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

$A_{cp} = 60 \times 30 + 45 \times 15 = 2475 \text{ cm}^2$

$p_{cp} = 60 + 30 + 45 + 15 + 45 + 45 + 30 = 270 \text{ cm}$

$$\phi 0.25 \sqrt{f'_c} \left(\frac{A^2_{cp}}{p_{cp}} \right) = (0.75)(0.25) \sqrt{250} \left(\frac{2475^2}{270} \right) = 67{,}260 \text{ kg-cm}$$

$(T_u = 5.7 \text{ ton-m}) > 0.67 \text{ ton-m}$

Sí se deben considerar efectos de torsión.

Revisión del tamaño mínimo de la sección transversal

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d} \right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}} \right)^2} \leq \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c} \right) \qquad \text{(ecuación 8.35)}$$

$p_h = 304 \text{ cm}$

$V_c = (0.75)(0.5 \sqrt{f'_c})\, b_w\, d = (0.75)(0.5)(\sqrt{250})(30)(55) = 9783 \text{ kg}$

$A_{oh} = 52 \times 24 + 45 \times 7 = 1563 \text{ cm}^2$

EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9120}{30 \times 55}\right)^2 + \left(\frac{5.7 \times 10^5 \times 304}{1.7 \times 1563^2}\right)^2} = 42.1 \text{ kg/cm}^2$$

$$\phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c}\right) = 0.75\left(\frac{9783}{30 \times 55} + 2\sqrt{250}\right) = 28.2 \text{ kg/cm}^2$$

El tamaño de la sección es insuficiente. Se propone ampliar la sección a 35 × 70 cm.

Revisión de cargas

w_u (carga viva) = 0.64 ton/m^2 (sin cambio)

w_u (peso losa) = 0.43 ton/m^2 (sin cambio)

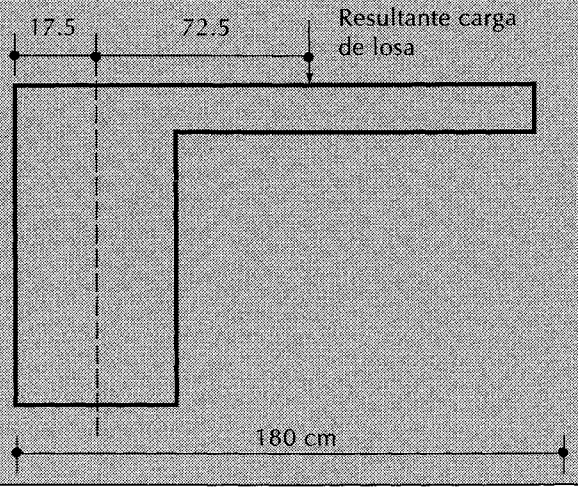
w_u (total) = 1.07 ton/m^2 (sin cambio)

peso propio viga = 1.2 × 0.35 × 0.55 × 2.4 = 0.55 ton/m

carga total lineal sobre la viga = 1.07 × 1.80 + 0.55 = 2.48 ton/m

REVISIÓN DE ACCIONES INTERNAS

Momento torsionante



EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

Momento torsionante en paño apoyo =
$= 1.07 \times 1.80 \times 0.725 \times 4.50 = 6.28$ ton-m

Momento torsionante en sección crítica =
$= 1.07 \times 1.80 \times 0.725\ (4.50 - 0.65) = 5.37$ ton-m

Momento flexionante

En los apoyos: $\dfrac{w_u l^2}{12} = \dfrac{2.48 \times 9^2}{12} = 16.74$ ton-m

En el centro del claro: $\dfrac{w_u l^2}{24} = \dfrac{2.48 \times 9^2}{24} = 8.37$ ton-m

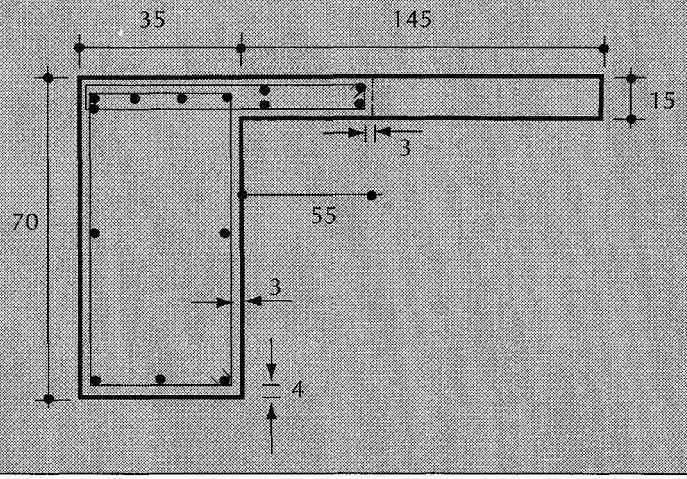
Fuerza cortante

En los apoyos: $\dfrac{w_u l}{2} = \dfrac{2.48 \times 9}{2} = 11.16$ ton

En la sección crítica: $11.16 - w_u\, d = 11.16 - 2.48 \times 0.65 = 9.55$ ton

Los valores están marcados entre paréntesis en el diagrama de acciones internas anterior.

REVISIÓN DE LA RESISTENCIA A TORSIÓN



EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

Revisión del tamaño mínimo de la sección transversal

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}}\right)^2} \le \phi \left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c}\right) \qquad \text{(ecuación 8.35)}$$

$p_h = 2(29 + 62) + 2(84 + 7) = 364$ cm
$V_c = 0.75\ (0.5)\ \sqrt{f'_c}\ b_w\ d = (0.75)\ (0.5)\ (\sqrt{250})\ (35)\ (65) = 13{,}489$ kg
$A_{oh} = 62 \times 29 + 55 \times 7 = 2183$ cm^2

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{b_w d}\right)^2 + \left(\frac{T_u p_h}{1.7 A^2_{oh}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{9550}{35\times 65}\right)^2 + \left(\frac{5.37\times 10^5 \times 364}{1.7\times 2183^2}\right)^2} = 24.5\ \text{kg/cm}^2$$

$$\phi\left(\frac{V_c}{b_w d} + 2\sqrt{f'_c}\right) = 0.75\left(\frac{15{,}288}{35\times 65} + 2\sqrt{250}\right) = 28.7\ \text{kg/cm}^2$$

La sección transversal es suficiente.

CÁLCULO DE LA RESISTENCIA POR ACERO TRANSVERSAL

Sustituyendo en la ecuación 8.37, suponiendo $\theta = 45°$ y tomando en cuenta que $A_o \le 0.85\ A_{oh}$:

a) En el tramo de estribos No. 3 @ 13:

$$T_n = \frac{2A_o\ A_t\ f_y}{s} \qquad \text{(ecuación 8.37)}$$

$$T_n = \frac{(2)\,(0.85)\,(2183)\,(0.71)\,(4200)}{13} = 8.5\times 10^5\ \text{kg-cm}$$

$$T_u = \phi\ T_n = 0.75 \times 8.5 = 6.38\ \text{ton-m}$$

EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

b) En el tramo de estribos No. 3 @ 20:

$$T_n = \frac{2\,(0.85)\,(2183)\,(0.71)\,(4200)}{20} = 5.5\times10^5 \text{ kg - cm}$$

$$T_u = \phi\, T_n = 0.75 \times 5.5 = 4.12 \text{ ton-m}$$

REVISIÓN DEL ACERO LONGITUDINAL

$$A_l = \frac{A_t}{s}\, p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_{yt}}\right) cot^2\,\theta \qquad \text{(ecuación 8.38)}$$

Con $\theta = 45°$, y $f_{yv} = f_{yt}$:

a) En el tramo de estribos No. 3 @ 13:

$$A_t = \frac{0.71\times364}{13} = 20 \text{ cm}^2$$

b) En el tramo de estribos No. 3 @ 20:

$$A_t = \frac{0.71\times364}{20} = 13 \text{ cm}^2$$

El acero requerido por flexión es el siguiente:

a) En los extremos, susponiendo z = 0.9 *d*,

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y z} = \frac{16.74\times10^5}{0.9\times4200\times0.9\times65} = 7.6 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

b) En el centro del claro,

$$A_s = \frac{M}{\phi f_y z} = \frac{8.37 \times 10^5}{0.9 \times 4200 \times 0.9 \times 65} = 3.8 \text{ cm}^2$$

Acero longitudinal total

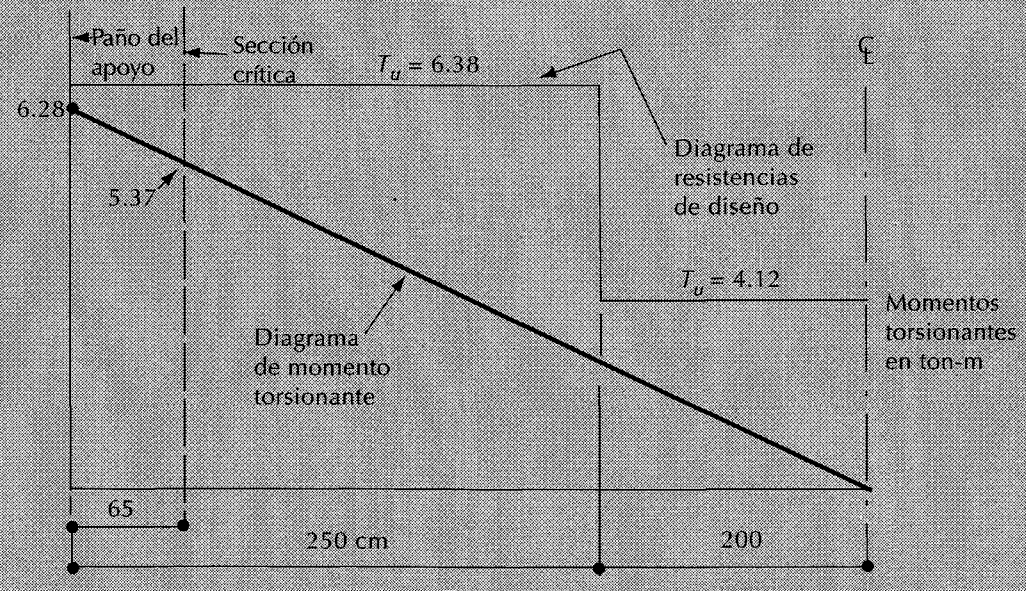
En los extremos:

Área total requerida = 20 + 7.6 = 27.6 cm²
Área proporcionada = 2 No. 8 + 4 No. 7 + 7 No. 4 = 2 × 5.07 + 4 × 3.88 + 7 × 1.27 = 34.55 cm²

En el centro del claro:

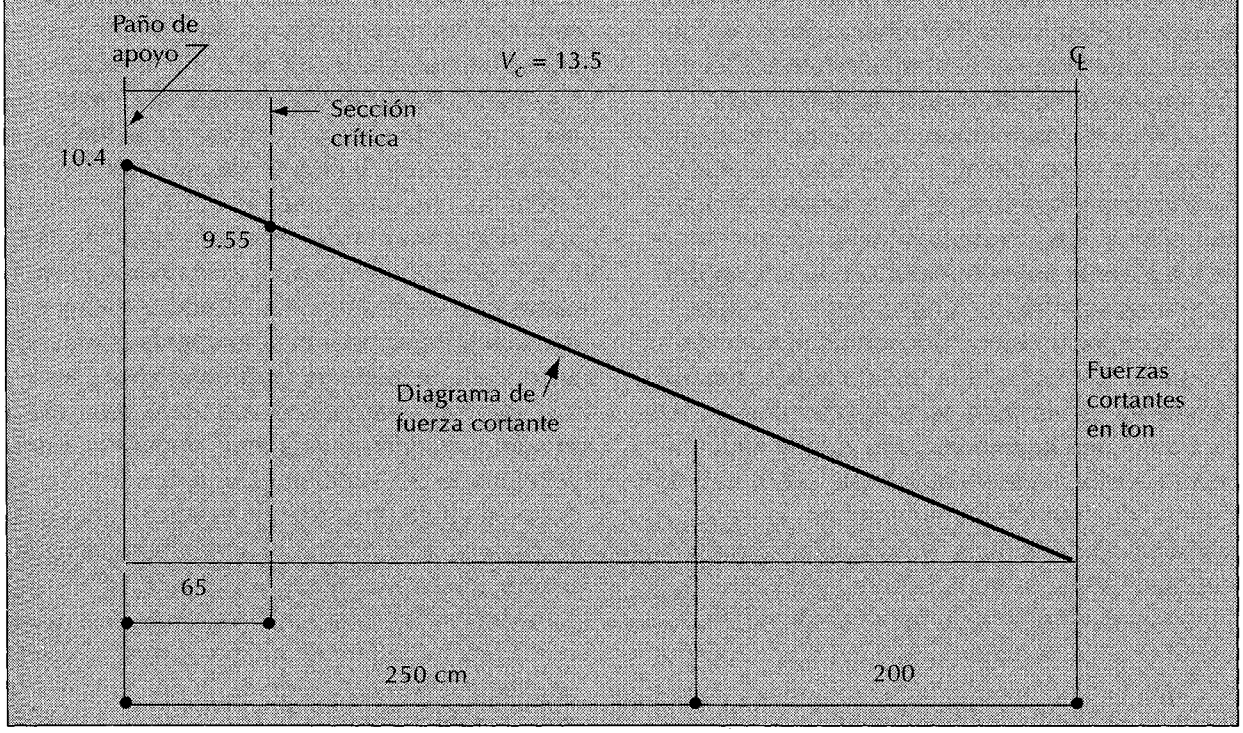
Área total requerida = 13 + 3.8 = 16.8 cm²
Área proporcionada = 3 No. 7 + 2 No. 8 + 7 No. 4 = 3 × 3.88 + 2 × 5.07 + 7 × 1.27 = 30.67 cm²

DIAGRAMA DE RESISTENCIA A TORSIÓN



EJEMPLO 8.1 ***(continuación)***

DIAGRAMA DE RESISTENCIA A FUERZA CORTANTE



to torsionante es nulo en el centro por condiciones de simetría.

Los momentos flexionantes y las fuerzas cortantes se obtuvieron de la manera usual. En el ejemplo se muestran los diagramas correspondientes. Los números que aparecen entre paréntesis corresponden a una revisión por peso propio que se muestra más adelante.

Para calcular la resistencia a torsión, se determinó en primer término si era necesario considerar los efectos de la torsión, de acuerdo con la ecuación 8.33. Los valores de A_{cp} y de p_{cp} que aparecen en esta ecuación son el área y el perímetro, respectivamente, de la parte sombreada de la sección transversal en el croquis mostrado al inicio de esta sección del ejemplo. Resultó que el momento torsionante que actúa sobre la viga en la sección crítica, 6.3 ton-m, es mucho mayor que el valor del miembro de la derecha de la ecuación 8.33, por lo que sí es necesario considerar los efectos de torsión.

A continuación se revisó si el tamaño de la sección transversal, incluyendo la parte del patín susceptible de tomarse en cuenta, era suficiente, de acuerdo con la ecuación 8.35. Recuérdese que esta revisión tiene por objeto evitar agrietamientos por torsión excesivos y falla por aplastamiento de las diagonales de compresión en la analogía de la armadura espacial. El valor de A_{oh} que aparece en esta ecuación se calculó como el área comprendida entre los estribos vertical y horizontal, de acuerdo con lo mostrado en la figura 8.24, pero sin duplicar el área común a ambos estribos. El valor de p_h es la suma de los perímetros

de ambos estribos. Al sustituir los valores correspondientes, se encontró que no se satisfacía la desigualdad expresada por la ecuación 8.35, lo cual indica que el tamaño de la sección no es suficiente para resistir el momento torsionante aplicado. Por esta razón, se propone en el ejemplo aumentar la sección a 35 por 70 cm y resolver de nuevo el problema.

Al aumentar la sección, fue necesario revisar el peso propio y calcular de nuevo las acciones internas. Éstas aumentaron ligeramente y los nuevos valores se muestran entre paréntesis en el mismo croquis en que aparecen los valores originales.

En rigor, hubiese sido necesario volver a revisar si el efecto de la torsión debía tomarse en cuenta con la nueva sección transversal. Sin embargo, la diferencia era tan grande en la primera revisión, que se obvió este paso, habida cuenta de que el incremento en la sección transversal era pequeño y no podía alterar mucho los resultados de la primera revisión.

Se aplicó de nuevo la ecuación 8.35 para verificar si el tamaño de la nueva sección era suficiente. Ahora sí se cumplió la desigualdad de la ecuación 8.35 con un margen razonable, por lo que se aceptó la sección propuesta.

Después se calculó la resistencia de la sección determinada por el acero transversal proporcionado (ecuación 8.37). Se supuso un valor de 8 de 45°; recuérdese que puede estar entre 30" y 60°, por lo que cot θ vale 1. El valor de A_0 se toma igual a 0.85 A_{oh}, valor este último ya calculado al aplicar la ecuación 8.35. En cuanto al valor de A_t, es importante observar lo siguiente. Los estribos verticales pueden resistir parte de la fuerza cortante y todo el momento torsionante. Pero en este ejemplo, la contribución del concreto, V_c, a la resistencia a fuerza cortante es mayor que la fuerza cortante en la sección crítica. La primera, calculada al aplicar la ecuación 8.35, es de 13,489 kg, mientras que la segunda es de 9550 kg. Esto significa que los estribos verticales no son necesarios para resistir fuerza cortante y pueden usarse en su totalidad para resistir la torsión. Por lo tanto, el valor de A, en la ecuación 8.37 es el área de una barra del No. 3, 0.71 cm^2. Obsérvese que el cálculo de resistencia se hizo por separado para el tramo en que la separación de estribos es de 13 cm y para aquel en que es de 20 cm.

Si V_c hubiese sido menor que la fuerza cortante en la sección crítica, se tendría que calcular el área A, requerida para tomar la diferencia, con la ecuación 7.14, calcular el área de una rama del estribo, por ejemplo la mitad de A_v si el estribo es de dos ramas, y restar esta área de la del estribo No. 3 (en el ejemplo), para tener el valor de A_t que puede contribuir a resistir el momento torsionante.

Ya habiendo calculado la resistencia a torsión, se revisó si el acero longitudinal proporcionado era suficiente. Se recordará que la ecuación 8.38 proporciona el valor mínimo de A_ℓ para garantizar que el acero transversal alcance su límite de fluencia antes de que lo haga el acero longitudinal. El valor de 8 usado en la ecuación 8.38 tiene que ser el mismo que el empleado en la ecuación 8.37. Por lo tanto, se tomó también de 45°. El límite de fluencia de los dos aceros, transversal y longitudinal, también se consideró igual. Al acero total requerido por torsión en cada uno de los dos tramos con diferente separación de estribos, se sumó el requerido por flexión. Este último se calculó con un brazo del par aproximado de 0.9 *d*, en los extremos, donde es máximo el momento flexionante negativo, y en el centro del claro, donde es máximo el positivo. La suma del acero longitudinal requerido por torsión y por flexión se comparó con el acero proporcionado. Obsérvese que al calcular el área del acero proporcionado, se incluyeron las siete barras No. 4 que se usaron para armar los estribos y para cumplir el requisito de un espaciamiento máximo de 30 cm entre barras del refuerzo longitudinal. En ambos casos el acero proporcionado fue suficiente.

Por último se muestra en el ejemplo el diagrama de resistencia de diseño a torsión

y se compara con el diagrama de momento torsionante. Como la estructura del ejemplo corresponde al primer caso, o sea, que la resistencia a torsión es necesaria para el equilibrio, el diagrama de resistencia debe compararse con el diagrama de momento torsionante sin afectar a éste de ninguna reducción. También se compara el diagrama de resistencia a fuerza cortante con el diagrama de fuerzas externas.

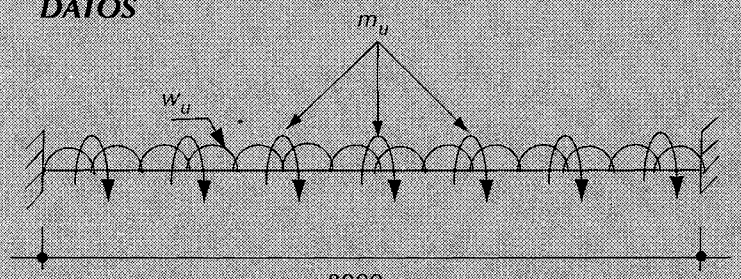
Ejemplo 8.2. En este ejemplo se ilustra la revisión de una viga de acuerdo con las NTC-04 y con el sistema de unidades SI. Se supone que la viga forma parte de una estructura más grande, no mostrada en el ejemplo, de tal manera que su resistencia a torsión no es necesaria para el equilibrio de la estructura completa. Podría ser, por ejemplo, una viga principal de borde como la de la figura 8.1c. Las acciones sobre la viga quedan representadas por una carga uniformemente distribuida de 10 N/mm y por un momento torsionante, también uniformemente distribuido a lo largo de la viga, de 5000 N-mm/mm. Nótese que las unidades de este momento son unidades de fuerza porque se trata de un momento por unidad de longitud.

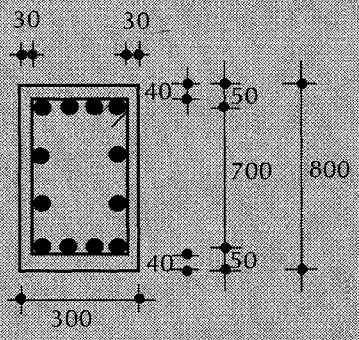
El cálculo de las acciones internas se efectuó de la misma manera que en el ejemplo anterior. Se muestran los diagramas correspondientes con los valores máximos y los valores en las secciones críticas a cortante y a torsión.

A continuación se determinó si el momento torsionante aplicado sobrepasa el umbral a

EJEMPLO 8.2 ***Revisión de una viga de acuerdo con las Normas Técnicas Complementarias NTC-04. Sistema SI.***

DATOS





A_s = 12 barras No. 6
Estribos No. 4 @ 200

CARGAS

w_u = 10 N/mm (incluye peso propio)
m_u = 5000 N-mm/mm (momento torsionante por unidad de longitud)

MATERIALES

Concreto f'_c = 25 MPa, $f^*_c = 0.8 \times 25 = 20$ MPa
Acero, f_y = 400 MPa

EJEMPLO 8.2 ***(continuación)***

CÁLCULO DE ACCIONES INTERNAS

Momento torsionante en paño del apoyo =

$$T = \frac{m_u \ell}{2} = \frac{5000 \times 8000}{2} = 20 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

Momento torsionante en sección crítica =

$$T_u = m_u \left(\frac{\ell}{2} - d \right) = 5000 \left(4000 - 750 \right) = 16.25 \times 10^6 \text{ N-mm}$$

Momento flexionante

En los apoyos: $\frac{w_u \ell^2}{12} = \frac{10 \times 8000^2}{12} = 53.33 \times 10^6$ N-mm

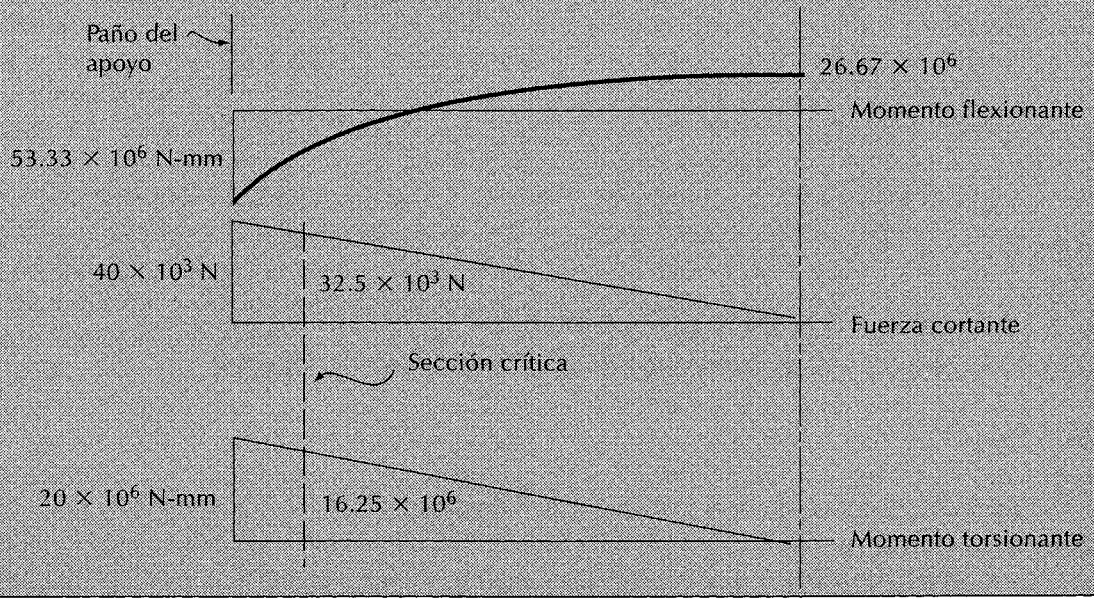
En el centro del claro: $\frac{w_u \ell^2}{24} = \frac{10 \times 8000^2}{24} = 26.67 \times 10^6$ N-mm

Fuerza cortante

En los apoyos: $\frac{w_u \ell}{2} = \frac{10 \times 8000}{2} = 40 \times 10^3$ N

En la sección crítica = 40×10^3 $w_u d = 40{,}000 - 10 \times 750 = 32.5 \times 10^3$ N

Diagramas de acciones internas



EJEMPLO 8.2 ***(continuación)***

REVISIÓN PARA DETERMINAR SI ES NECESARIO CONSIDERAR EL EFECTO DE TORSIÓN

Los efectos de torsión pueden despreciarse si

$$T_u \leq 0.083\ F_R \sqrt{f^*_c}\ \frac{A_g^{\ 2}}{p_{cp}}$$

(ecuación equivalente a la 8.33 SI)

$A_g = A_{cp} = 300 \times 800 = 240{,}000\ \text{mm}^2$

$p_{cp} = 800 \times 2 + 300 \times 2 = 2200\ \text{mm}$

$F_R = 0.8$

$$0.083\ F_R \sqrt{f^*_c}\ \frac{A_g^{\ 2}}{p_{cp}} = 0.083 \times 0.8 \times \sqrt{20}\ \frac{\left(24 \times 10^4\right)^2}{2\,200}$$

$$= 7.8 \times 10^6\ \text{N-mm} < (T_u = 16.25 \times 10^6)$$

No pueden despreciarse los efectos de torsión.

Como la resistencia a torsión no es necesaria para el equilibrio, el momento torsionante de diseño puede reducirse a:

$$T_u = 0.3\ F_R \sqrt{f^*_c}\ \frac{A_{cp}^{\ 2}}{p_{cp}} = 0.3 \times 0.8\ \sqrt{20}\ \times \frac{\left(24 \times 10^4\right)^2}{2\,200}$$

$$= 28 \times 10^6\ \text{N-mm}$$

(ecuación equivalente a la 8.34 SI)

Como este momento es mayor al momento torsionante en la sección crítica, se diseña para $T_u = 16.25 \times 10^6$ N-mm

EJEMPLO 8.2 ***(continuación)***

REVISIÓN DE LAS DIMENSIONES DE LA SECCIÓN

Se debe cumplir la siguiente relación, equivalente a la ecuación 8.35 en sistema SI:

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{bd}\right)^2+\left(\frac{T_u p_h}{1.7\,A_{oh}}\right)^2} \le F_R\left(\frac{V_{cR}}{bd}+0.67\sqrt{f^*_c}\right)$$

p_h = perímetro del estribo = 1920 mm
$A_{oh} = 240 \times 700 = 168{,}000$ mm^2
$V_{cR} = 0.3\,F_R\,bd\,(0.2 + 20\,p)\sqrt{f^*_c}$, para $p \le 0.015$
$V_{cR} = 0.3 \times 0.8 \times 300 \times 750\,(0.2 + 20 \times 0.005)\sqrt{20} = 72{,}449$ N

$$\sqrt{\left(\frac{V_u}{bd}\right)^2+\left(\frac{T_u p_h}{1.7A^2_{oh}}\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{32.5\times10^3}{300\times750}\right)^2+\left(\frac{16.25\times10^6\times1920}{1.7\times168{,}000^2}\right)^2}$$

$$= 0.67\frac{N}{mm^2}$$

$$0.8\left(\frac{V_{cR}}{bd}+0.67\sqrt{f^*_c}\right) = 0.8\left(\frac{72{,}449}{300\times750}+0.67\sqrt{20}\right) = 2.65 > 0.67$$

Las dimensiones de la sección son suficientes

REVISIÓN DEL REFUERZO TRANSVERSAL

a) Por torsión

$$A_t = \frac{T_u s}{F_R\,2A_0\,f_{yv}\cot\phi}$$

(equivalente a la ecuación 8.37)

$$A_t = \frac{16.25\times10^6\times200}{0.8\times2\times0.85\times168{,}000\times400\times1} = 36\text{ mm}^2$$

$(A_t)_{prop.} = 127$ mm^2

EJEMPLO 8.2 ***(continuación)***

b) Por cortante

Como $V_{CR} > V_U$, no se requiere refuerzo transversal

c) Refuerzo transversal mínimo

$$A_v + 2A_t = \frac{bs}{3\,f_{yv}} \qquad \text{(equivalente a la ecuación 8.40)}$$

$$A_v + 2A_t = \frac{300 \times 200}{3 \times 400} = 50\ \text{mm}^2$$

$$(A_V + 2A_t)_{\text{prop.}} = 4 \times 127 = 508\ \text{mm}^2$$

Los estribos proporcionados son suficientes

REVISIÓN DEL ACERO LONGITUDINAL

a) Por torsión

$$A_{st} = \frac{A_t}{s}\, p_h \left(\frac{f_{yv}}{f_y}\right) \cot^2 \phi \qquad \text{(equivalente a la ecuación 8.38)}$$

$$A_{st} = \frac{127}{200} \times 1920 \times 1 \times 1 = 1219\ \text{mm}^2$$

$$\left(A_{st}\right)_{min} = \frac{\sqrt{f'_c}\, A_{cp}}{2.4\, f_y} - \frac{A_t}{s}\, p_h \frac{f_{yv}}{f_y}$$

(equivalente a la ecuación 8.41 en sistema SI)

EJEMPLO 8.2 ***(continuación)***

$$(A_{st})_{mín} = \frac{\sqrt{20} \times 240,000}{2.4 \times 400} - \frac{127 \times 1920}{200} = -101\,\text{mm}^2$$

Sin embargo, $\frac{A_{st}}{s} \rightarrow$ deber ser igual o mayor que $\frac{b}{5.8\, f_{yv}}$

$$\frac{b}{5.8\, f_{yv}} = \frac{300}{5.8 \times 400} = 0.13$$

Usando este valor,

$$(A_{st})_{mín} = \frac{\sqrt{20} \times 240,000}{2.4 \times 400} - 0.13 \times 1920 = 868\ \text{mm}^2 < 1219\ \text{mm}^2$$

b) Por flexión

$$A_s = \frac{M_u}{F_R\, f_y z} = \frac{53.33 \times 10^6}{0.9 \times 400\,(0.9 \times 750)} = 220\ \text{mm}^2$$

c) Área requerida en el lecho superior:

$$220 + \frac{4}{12} \times 1219 = 626\ \text{mm}^2$$

Área proporcionada = 4 barras No. 6 = 4 × 285 = 1140 mm^2 > 626 mm^2

El acero longitudinal es suficiente.

partir del cual es necesario considerar los efectos de torsión. Con el Reglamento ACI esta revisión se hace con la ecuación 8.33 SI, y con las NTC, con una ecuación equivalente que incorpora f^*_c y que considera que para secciones macizas se usa el área gruesa A_g en vez de A_{cp}. Como en los datos del problema no se incluyen dimensiones de la losa perpendicular a la viga, se considera como área únicamente la sección rectangular sin ningún patín. Esta consideración es conservadora. Se obtuvo que en este caso sí se deben tomar en cuenta los efectos de torsión.

Ya que la resistencia a torsión de la viga no es necesaria para el equilibrio, según se plantea en el enunciado del problema, es posible reducir los momentos torsionantes que actúan sobre la viga. Sin embargo, el momento reducido calculado es mayor que el actuante, por lo que el diseño debe hacerse con este último. Por esta razón se usó el momento de 16.25 x 10^6 N-mm que actúa en la sección crítica.

Después se revisó si las dimensiones de la sección eran suficientes para el momento torsionante aplicado. Esta revisión se hizo con una ecuación prácticamente igual a la 8.35 del Reglamento ACI. Obsérvese que se usó la ecuación correspondiente a secciones macizas (raíz cuadrada de la suma de los cuadrados) y que el cálculo de la resistencia a fuerza cortante del concreto se hizo con la ecuación de las NTC que es diferente a la del Reglamento ACI. El resultado de la revisión fue que el tamaño de la sección era suficiente.

El cálculo del refuerzo transversal por torsión indicó que, si se colocaban estribos a cada 200 mm, el área de cada rama debía ser por lo menos de 36 mm^2. Como los estribos son del No. 4, el área proporcionada es de 127 mm^2. Y ya que no se requieren estribos por fuerza cortante, los estribos del No. 4 a cada 200 mm son suficientes. Este refuerzo es también mayor al refuerzo transversal mínimo. Al calcular este mínimo, se consideró que A_t es el área de una rama de estribo del No. 4 y que A_v es el área de las dos ramas de un estribo cerrado. Por eso $A_v + 2\,A_t$ son cuatro ramas.

Por último se revisó el acero longitudinal. El requerido por torsión se calculó con una ecuación igual a la 8.38 del Reglamento ACI. El requerido por flexión se calculó de manera aproximada con un brazo del par interno de 0.9 d y despreciando el acero de compresión. Se revisó el lecho superior de acero, que es el más desfavorable, sumando al requerido por flexión, la parte proporcional del acero por torsión que se encuentra en dicho lecho, o sea, cuatro barras de las doce que tiene en total la viga. El acero longitudinal proporcionado también resultó suficiente.

Referencias

8.1 –.*Analysis* of Structural Systerns for Torsion, Publicación Especial No. 35. Detroit, American Concrete Institute, 1973.

8.2 Klus, J. P, y C. K. Wang. "Torsion in Grid Frames", Torsion of *Structural* Concrete, Publicación Especial No. 18, Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.3 Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete-Plain Concrete Rectangular Section", *Torsion* of Structural Concrete, Publicación especial No. 18, Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.4 Hsu, T. T. C., "Torsion of Structural Concrete-Behavior of Reinforced Concrete Rectangular Members", Torsion of Structural Concrete,

Publicación Especial No. 18, Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.5 Victor, D. F, y P. M. Ferguson, Reinforced Concrete T-Beams Without Stirrups Under Cornbined Mornent and Torsion, *Journal* the Arnerican Concrete Institute, Detroit, enero 1968.

8.6 Lim, S. N., y M. S. Mirza, Discusión a Referencia 8.4, *Journal* of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, julio 1968.

8.7 Collins, M. P, P. F. Walsh, F. E. Archer y A. S. Hall, "Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Bending", Torsion of Structural Concrete, Publicación Especial No. 18. Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.8 Cowan, A. J., y S. Armstrong, Experirnents on the Strength of Reinforced and Prestressed Concrete Bearns and Concrete Encased Steel *Joists* in Combined Bending and Torsion, Magazine of Concrete Research. Londres, marzo 1955.

8.9 Mattock, A. H., "How to Design for Torsion", Torsion of *Structural* Concrete, Publicación Especial No. 18. Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.10 Zia, P., "Torsion Theories for Concrete Members", Torsion of *Structural* Concrete, Publicación Especial No. 18 Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.11 Ersoy, V., y P. M. Ferguson, "Concrete Beams Subjected to Combined Torsion and Shear-Experimental Trends", Torsion of *Structural* Concrete, Publicación Especial No. 18. Detroit, American Concrete Institute, 1968.

8.12 Victor D. J., y P. M. Ferguson. "Beams Under Distributed Load Creating Moment, Shear and Torsion", . *Journal* of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, abril 1968.

8.13 Klus, J.P. "Ultimate Strength of Reinforced Concrete Beams in Combined Torsion and Shear", *Journal* of the Arnerican Concrete *Institute,* Detroit, abril 1968.

8.14 Hsu, T. T. C. "Torsion of Structural Concrete Interaction Surface for Combined Torsion, Shear and Bending in Beams Without Stirrups", *Journal* of the Arnerican Concrete Institute, Detroit, enero, 1968.

8.15 Hsu, T. T. C. "Torsion of Structural Concrete-Uniformly Prestressed Rectangular Members Without Web Reinforcement", *Journal* of the Prestressed Concrete *Institute,* Chicago, abril 1968.

8.16 Bishara, A., y J. C. Peir, "Reinforced Concrete Rectangular Columns in Torsion", *Journal* of the *Structural Division,* ASCE, diciembre 1968.

8.17 Walsh, P. F, M. P. Collins y F. E. Archer, Design of Concrete Bearns for Torsion, Constructional Review, febrero 1968.

8.18 Comité ACI 438, "Tentative Recommendations for the Design of Reinforced Concrete Members to Resist Torsion", *Journal* of the American Concrete Institute, Detroit, enero 1969.

8.19 Robles, F, "Manual de Diseño de Obras Civiles, Sección H: Concreto Reforzado". México, D. F, Comisión Federal de Electricidad, 1969.

8.20 Mitchell, D., y M. P. Collins, "Diagonal Compression Field Theory – A Rational Model for Structural Concrete in Pure Torsion". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, agosto 1974.

8.21 Victor, D. J., y P. K. Aravindan, "Prestressed and Reinforced Concrete T-Beams under Combined Bending and Torsión". *Journal* of the *American* Concrete *Institute*. Detroit, octubre 1978.

8.22 Rangan, B. V., y A. S. Hall, "Design of Prestressed Concrete Beams Subjected to Combined Bending, Shear and Torsion". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, marzo 1975.

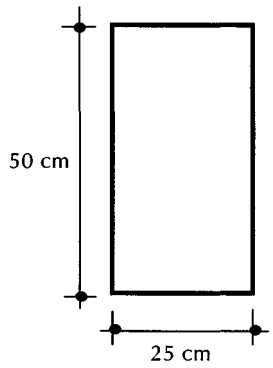
8.23 Collins, P. C., y D. Mitchell, "Shear and Torsion Design of Prestressed and Non-Prestressed Concrete Beams". *Journal* of the Prestressed Concrete Institute. Chicago, septiembre-octubre1980.

8.24 Hsu, T. T. C. "Softened Truss Model Theory for Shear and Torsion". ACI Structural *Journal*. Detroit, noviembre-diciembre 1988.

8.25 Mac Gregor, J. C., y M. G. Ghoneim. "Design for Torsion". ACI *Structural Journal*. Detroit, marzo-abril, 1995.

Ejercicios

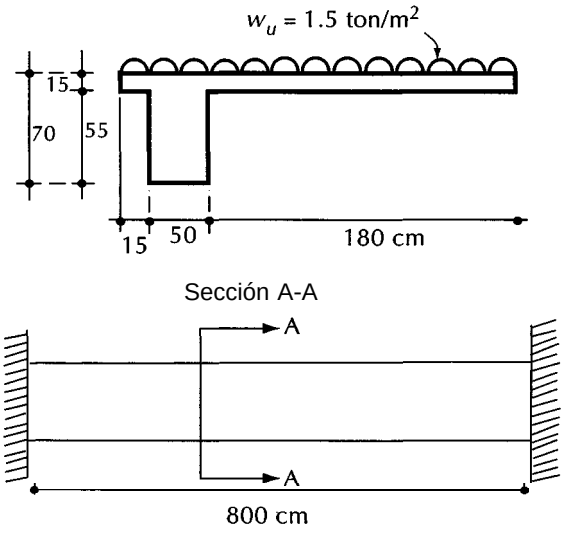
8.1 Calcular la resistencia a torsión pura de la siguiente sección de concreto simple. Supóngase una resistencia de concreto f'_c = 300 kg/cm^2. Úsese el Reglamento ACI 318-02.



8.2 Calcular la resistencia a torsión pura de la sección del problema anterior si se le adicionan estribos de dos ramas del No. 3 a cada 15 cm. ¿Cuántas barras longitudinales, y de qué diámetro, sería necesario colocar para que pueda desarrollarse la resistencia calculada? Supóngase f'_c = 300 kg/cm^2, f_y = 2800 kg/cm^2 y recubrimientos de 2 cm al centro de los estribos. Úsese el Reglamento ACI 318-02.

8.3 Calcular la resistencia a torsión de la sección del problema anterior, si se le aplica una carga axial de compresión de 150 ton simultáneamente con el momento torsionante.

8.4 Calcular el acero de refuerzo para el siguiente elemento de concreto reforzado. Supóngase que el acero calculado para la sección crítica se usa a todo lo largo del elemento. Usar las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal.



CAPÍTULO 9

Adherencia y anclaje

9.1 **Introducción.** ***19.2*** **Adherencia en anclaje.** ***19.3*** **Adherencia en flexión.** ***19.4*** **Naturaleza de la adherencia.** ***19.5*** **Estudios experimentales de adherencia. Longitudes de anclaje o desarrollo. /9.6 Normas para longitudes de desarrollo.** ***19.7*** **Ganchos estándar.** ***19.8*** **Desarrollo del acero positivo en los apoyos libres de vigas y en los puntos de inflexión.** ***19.9*** **Desarrollo del acero negativo en vigas empotradas y en vigas continuas.** ***19.1*** **0 Empalme de barras.** ***19.11*** **Corte y doblado de barras.** ***19.12*** **Anclaje del refuerzo transversal.** ***19.1*** **3 Ejemplos.**

9.1 Introducción

En elementos de concreto reforzado es necesario que exista adherencia entre el concreto y las barras de refuerzo, de manera que ambos materiales estén íntimamente ligados entre sí. De no existir adherencia, el comportamiento del elemento difiere del descrito en los capítulos anteriores. En la figura 9.1 se ilustra la diferencia en comportamiento entre un elemento con refuerzo adherido y otro en el que el refuerzo se encuentra libre dentro de la masa de concreto. En el primer caso (figura 9.1a) los esfuerzos en el acero varían a lo largo del elemento, ya que son prácticamente proporcionales a la magnitud del momento flexionante. En cambio, en el segundo caso el esfuerzo en el acero es constante a lo largo del claro, ya que, como las barras están libres, el elemento se comporta como un arco atirantado y no como una viga. En este caso es necesario anclar mecánicamente las barras en los extremos del elemento por medio de placas u otros dispositivos adecuados.

Se mencionó que en elementos con refuerzo adherido, los esfuerzos varían a lo largo de las barras de refuerzo. Para que pueda ocurrir esta variación, es necesario que se transmitan esfuerzos del refuerzo al concreto, como puede verse si se analiza un diagrama de cuerpo libre de un tramo de una barra. Por ejemplo, en la figura 9.1*c* se muestra el diagrama de cuerpo libre de una porción de la barra de la figura 9.1a. La fuerza de tensión en el extremo de la derecha es mayor que en el extremo de la izquierda, porque ahí es mayor el momento flexionante. Para que la barra esté en equilibrio, deben existir fuerzas distribuidas en su superficie, que son originadas por esfuerzos de adherencia, *u,* entre el concreto y el acero.

El logro de un comportamiento adecuado en adherencia es un aspecto importante del dimensionamiento de elementos de concreto reforzado. Sin embargo nuestro conocimiento del fenómeno de adherencia es relativamente escaso, especialmente en lo que se refiere a la determinación de los esfuerzos internos y a los mecanismos de fallas por adherencia. Experimentalmente se han encontrado métodos para estimar, en forma aproximada, los esfuerzos de adherencia en casos particulares; pero estos métodos no toman en cuentan todas las variables que intervienen, ya que sus efectos no han podido ser cuantificados en forma definitiva.

Los esfuerzos de adherencia se presentan en los elementos de concreto reforzado por dos causas: la necesidad de proporcionar anclaje adecuado para barras y la variación de fuerzas en éstas debido a la variación del momento a lo largo del elemento.

Estos dos aspectos se exponen en forma elemental en los incisos siguientes. En secciones posteriores se describirá con más detalle el comportamiento en adherencia de elementos de concreto reforzado y se describirá la forma en que los problemas de adherencia son tratados en los reglamentos. Se incluyen también consideraciones sobre el traslape, el anclaje, el corte y doblado de barras, ya

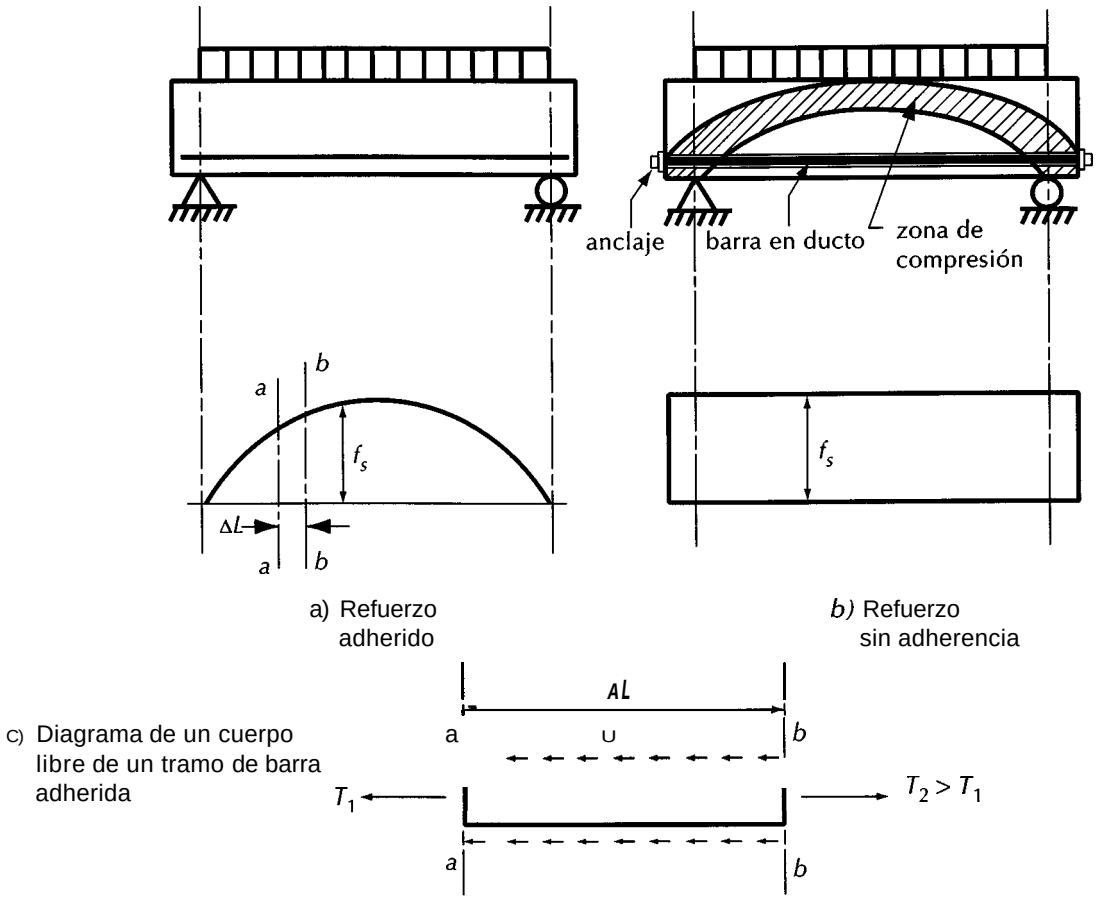


Figura 9.1 Diferencia entre el comportamiento de un elemento con refuerzo adherido y otro con refuerzo no adherido.

que en todos estos aspectos interviene la adherencia. La aplicación de algunas de las recomendaciones sobre estos aspectos del dimensionamiento se ilustra en los ejemplos de la sección 9.13.

Las recomendaciones sobre adherencia y anclaje expuestas en este capítulo se refieren principalmente a estructuras que no están sujetas a sismos. Los reglamentos dan reglas más conservadoras cuando es necesario prever acciones sísmicas significativas. Tampoco se han comentado los problemas particulares asociados a la adherencia en elementos de concreto ligero, barras recubiertas con resina epóxica y al empleo de haces o paquetes de barras, temas que también son tratados en los diversos reglamentos.

9.2 Adherencia en anclaje

Las barras de refuerzo deben estar ancladas en el concreto a ambos lados de la sección donde se requieran, de manera que pueda desarrollarse en ellas el esfuerzo requerido. Considérese, por ejemplo, una barra anclada en una masa de concreto, sujeta a una fuerza T (figura 9.2). Para que se conserve el equilibrio, al actuar esta fuerza deberán desarrollarse esfuerzos de adherencia en la superficie

de la barra. La ley de variación de estos esfuerzos a lo largo de la barra, como se apreciará en una sección posterior, es compleja, pero puede considerarse un esfuerzo uniforme promedio, u, equivalente a la variación real de la adherencia. Partiendo de consideraciones de equilibrio puede establecerse la siguiente expresión:

$$u\pi\ d_b L_{des} = \frac{\pi d^2_b f_s}{4}$$

donde

d_b = diámetro de la barra
L_{des} = longitud de la barra que penetra en el concreto
f_s = esfuerzo a desarrollar en el acero
u = esfuerzo de adherencia promedio

Despejando u resulta

$$u = \frac{f_s d_b}{4 L_{des}} \qquad (9.1)$$

Si se conoce el esfuerzo de adherencia último, u, la longitud, L_d, necesaria para desarrollar el esfuerzo de fluencia del acero, f_y, puede calcularse con la expresión

$$L_d = \frac{f_y d_b}{4u_u} \qquad (9.2)$$

9.3 Adherencia en flexión

Los esfuerzos de adherencia en flexión pueden calcularse teóricamente como se describe a continuación con referencia a la figura *9.3.* Considérese una viga con momento flexionante variable (figura 9.3*a*) y dos secciones *a-a* y *b-b* separadas entre sí una distancia Δx. Las fuerzas que actúan en el elemento de viga de longitud Δx, si se supone que el concreto no resiste tensiones, se muestran en el diagrama de cuerpo libre de la figura 9.3*b*. Las fuerzas de tensión en la barra en las secciones a-a y *b-b* se pueden calcular con las ecuaciones

$$T = \frac{M}{z} \quad \text{y} \quad T + \Delta T = \frac{M + \Delta M}{z}$$

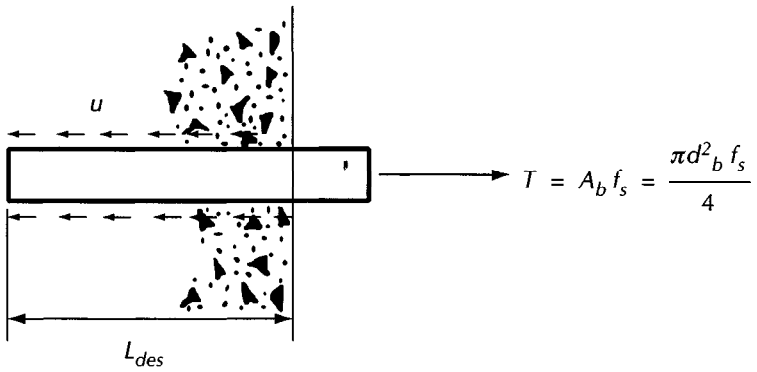


Figura 9.2 Adherencia en anclaje.

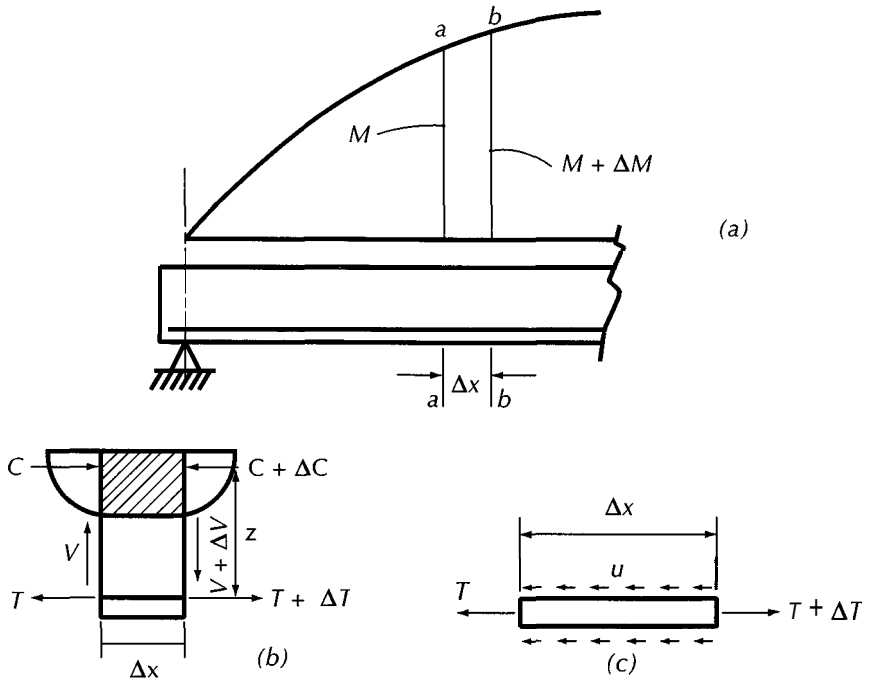


Figura 9.3 Adherencia en flexión.

de donde

$$\Delta T = \frac{\Delta M}{z} \qquad (9.3)$$

Se supone que el brazo de momentos, z, es constante. Para que la barra (o barras) esté en equilibrio al considerarla como cuerpo libre (figura 9.3c), como se vio en la sección 9.1, deberá existir una fuerza en la superficie de contacto entre el concreto y el acero de la barra correspondiente al esfuerzo de adherencia entre los dos materiales. A partir del equilibrio del cuerpo libre puede establecerse la siguiente igualdad

$$u \cdot \Sigma 0 \cdot \Delta x = \Delta T \qquad (9.4)$$

donde Σ0 es la suma de los perímetros nominales de las barras.

Despejando u, resulta

$$u = \frac{\Delta T}{\Sigma 0 \cdot \Delta x}$$

Sustituyendo el valor de *AT* dado por la ecuación 9.3 se obtiene

$$u = \frac{\Delta M}{z \cdot \Sigma 0 \cdot \Delta x}$$

y, tomando límites cuando $Ax \to 0$

$$u = \frac{dM}{dx} \cdot \frac{1}{z \cdot \Sigma 0}$$

Pero como $dM/dx = V$,

$$u = \frac{V}{z \cdot \Sigma 0} \qquad (9.5)$$

Esta ecuación indica que si la variación del momento es alta (es decir, cuando la fuerza cortante es grande) los esfuerzos de adherencia también serán altos. Sin embargo su validez es relativa, ya que la distribución de esfuerzos es más compleja de lo que ella indica. Aun en porciones de una viga donde el momento es constante y por tanto la fuerza cortante es nula, de manera que los esfuerzos de adherencia de acuerdo con la ecuación 9.5 también serían nulos, se ha comprobado experimentalmente que pueden presentarse esfuerzos de considerable magnitud debido a la presencia de grietas [9.1]. Considérese, por ejemplo, un tramo de viga sujeto a un momento constante, como el ilustrado en la figura 9.4*a*. En la figura 9.4*b* se muestra la variación de esfuerzos en el acero cuando existen grietas. Estos esfuerzos no son constantes, ya que entre grieta y grieta el concreto contribuye a resistir la fuerza de tensión. Por tanto, en estas regiones el esfuerzo en el acero será menor que en las secciones agrietadas. El cambio de esfuerzos en el acero produce necesariamente esfuerzos de adherencia. Del diagrama de cuerpo libre de la figura 9.1*c* se deduce que los esfuerzos promedio de adherencia pueden calcularse con la ecuación

$$u = \frac{T_2 - T_1}{L \cdot \Sigma 0} = \frac{\Delta T}{L \cdot \Sigma 0} \qquad (9.6)$$

Si las secciones están separadas una distancia dL, el esfuerzo promedio es:

$$u = \frac{dT}{dL}\ \frac{1}{\Sigma 0} = \frac{df_s}{dL} \cdot \frac{A_s}{\Sigma 0} \qquad (9.7)$$

La ecuación (9.7) indica que los esfuerzos de adherencia son proporcionales a la pendiente del diagrama de esfuerzos en el acero (figura 9.4*b*), ya que dicha pendiente es igual a df_s/dL. Por consiguiente, en las secciones que coinciden con grietas y en la sección

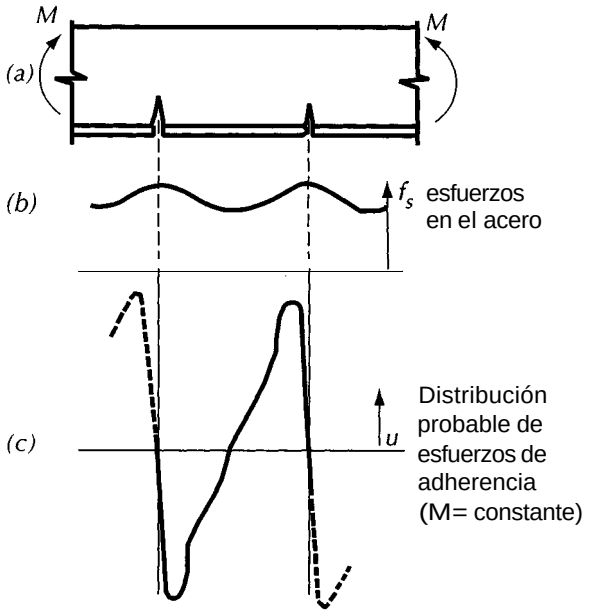


Figura 9.4 Distribución de esfuerzos en una viga con momento flexionante constante [9.2].

central entre grietas, los esfuerzos de adherencia son nulos, ya que la tangente al diagrama es horizontal, mientras que muy cerca de las grietas los esfuerzos son elevados, porque los esfuerzos en el acero cambian rápidamente y, por tanto, df_s/dL tiene un valor alto. La posible distribución de esfuerzos de adherencia se muestra cualitativamente en la figura 9.4*c*. De la grieta de la izquierda a la sección situada al centro de la distancia entre las dos grietas, los esfuerzos en el acero disminuyen, lo que produce esfuerzos de adherencia cuyo sentido es de izquierda a derecha. De la sección central a la grieta de la derecha, los esfuerzos en al acero aumentan y los esfuerzos de adherencia cambian de sentido. Convencionalmente se ha asignado a los primeros, signo negativo, y a los segundos, signo positivo.

Se han propuesto algunas ecuaciones para representar la distribución de esfuerzos de adherencia indicada en la figura 9.4*c*. Los planteamientos teóricos conducen a ecua-

ciones diferenciales en las que intervienen constantes que deben ser determinadas experimentalmente. Como se dispone de pocos datos experimentales, estas ecuaciones no han sido incorporadas a los reglamentos de construcción. Se puede consultar al respecto la referencia 9.25

En las porciones de viga con momento variable, la situación es aún más compleja puesto que los esfuerzos debidos a agrietamiento se sobreponen a los indicados por la ecuación (9.5).

9.4 Naturaleza de la adherencia

La adherencia o resistencia al deslizamiento tiene su origen en los fenómenos siguientes:

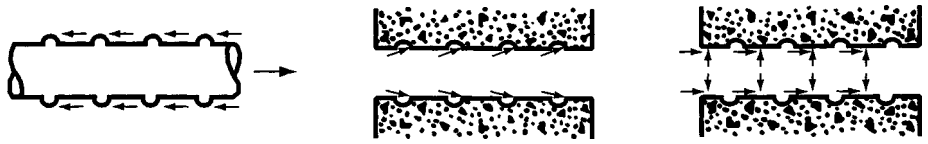
a) Adhesión de naturaleza química entre el acero y el concreto.
b) Fricción entre la barra y el concreto, que se desarrolla al tender a deslizar la primera.
c) Apoyo directo de las corrugaciones de las barras sobre el concreto que las rodea.

En barras lisas sólo existen las dos primeras contribuciones. Como su aportación a la resistencia al deslizamiento es mucho menor que la debida al apoyo de las corrugaciones sobre el concreto, la adherencia con frecuencia era un factor crítico en el diseño cuando las barras lisas eran de uso común. Por ello era importante contar con anclajes adecuados en los extremos de las vigas para lograr un comportamiento como arco atirantado semejante al ilustrado en la figura 9.1b, en caso de falla de adherencia. La introducción de las barras corrugadas ha aliviado considerablemente los problemas de adherencia. Además, el mejor comportamiento en adherencia de estas barras ha hecho menos crítico el anclaje en los extremos que con las barras lisas y ha disminuido los agrietamientos y deformaciones con respecto a los usuales en éstas.

No obstante estas mejoras, la adherencia sigue siendo un aspecto importante a considerar en el dimensionamiento de estructuras de concreto, sobre todo en el caso de barras con esfuerzos de fluencia de 6000 kg/cm^2 o aun mayores, cuyo uso es común en muchos países.

Aunque en las barras corrugadas la adhesión y la fricción también contribuyen a la adherencia, la aportación más importante corresponde a las corrugaciones. Es más, la adhesión se rompe al ocurrir pequeños deslizamientos de las barras dentro del concreto antes de que las corrugaciones se apoyen contra el concreto.

En la figura 9.5 se muestra en forma simplista el mecanismo mediante el cual se transmiten fuerzas entre el concreto y las barras, cuando éstas tienen corrugaciones. Las componentes normales a las barras de las fuerzas (figura 9.5*c*), originan tensiones que



a) Sobre la barra *b)* Sobre el concreto *c)* Componentes sobre el concreto

Figura 9.5 Fuerzas entre barras y concreto (según referencia 9.11).

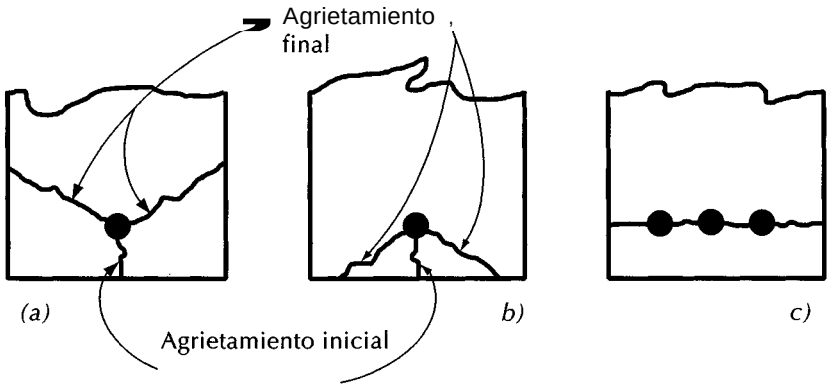


Figura 9.6 Diferentes configuraciones de agrietamiento longitudinal (según referencia 9.2).

tienden a producir agrietamientos longitudinales con configuraciones semejantes a las ilustradas en la figura 9.6. Las fallas de adherencia en barras corrugadas suelen ocurrir cuando estos agrietamientos longitudinales alcanzan una magnitud tal que permiten el deslizamiento de las barras. En general, como se apreciará posteriormente, la resistencia en adherencia es directamente proporcional a la resistencia en tensión del concreto, que, a su vez, depende de $\sqrt{f'_c}$, e inversamente proporcional al diámetro de las barras.

Orangun et *al.* [9.7], han explicado el fenómeno de agrietamiento por adherencia, suponiendo que se crea una condición de esfuerzos semejantes a la que existiría en un cilindro de concreto que rodeara a cada barra al actuar sobre él las componentes radiales .normales a las barras mostradas en la figura 9.5*c*. El diámetro interior del cilindro a considerar sería igual al diámetro de la barra, d_b, y su espesor, C, igual al menor de los siguientes valores: el recubrimiento libre respecto a la cara inferior (C_b) o la mitad de la distancia libre a la barra contigua (C_s) (figura 9.7). La resistencia al agrietamiento depende de la resistencia a tensión de este cilindro. Si $C_s < C_b$, se presenta un agrietamiento como el de la figura 9.6*c*. Si $C_s > C_b$, inicialmente se originan grietas verticales en el recubrimiento inferior (figuras 9.6*a* y 9.6*b*). Si C_s es sólo ligeramente mayor que C_b, el agrietamiento secundario se presentará en el plano de las barras, prolongándose hasta las caras laterales exteriores. Si C_s es considerablemente mayor que C_b, el agrietamiento secundario tendrá una configuración en cuña como la de la figura 9.6*b*.

Más recientemente, Kemp y su grupo [9.26] han utilizado este mismo modelo para desarrollar ecuaciones que permiten determinar la resistencia por adherencia tomando en cuenta los principales factores que intervienen en el fenómeno.

Como se mencionó anteriormente, el problema de adherencia, por su complejidad, ya que está interrelacionado con la fuerza cortante y el momento, ha sido estudiado sólo para casos particulares; no se dispone de una teoría general aplicable en todas las situaciones. Por ello el comportamiento de elementos que fallan por adherencia tiene que ser analizado también para casos particulares. En la sección siguiente se describen algunos de los estudios experimentales que han servido de base para la formulación de recomendaciones de dimensionamiento. Estos estudios pueden clasificarse en dos grupos: los basados en ensayes de extracción y los que recurren al ensaye de vigas.

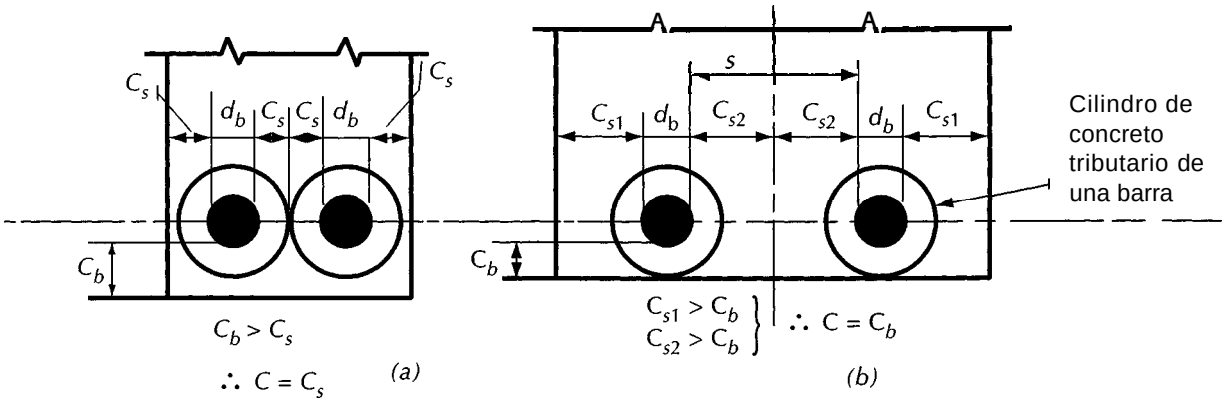


Figura 9.7 Hipótesis del cilindro de concreto para falla por agrietamiento longitudinal (según referencia 9.7).

9.5 Estudios experimentales de adherencia. Longitudes de anclaje o desarrollo

9.5.1 Ensayes de extracción

El espécimen en que se efectúa este tipo de ensaye consiste en una barra ahogada en un cilindro o prisma de concreto, con uno de sus extremos sobresaliendo del concreto (figura 9.8). El ensaye se realiza aplicando una fuerza

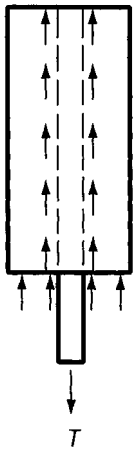


Figura 9.8 Ensaye de extracción.

de tensión al extremo libre de la barra, o sea, tratando de extraer la barra de la masa de concreto. El caso que se representa con este tipo de ensaye es el ilustrado en la figura 9.2.

El ensaye de extracción da una idea clara del concepto de anclaje: la longitud en que está ahogada la barra, es su longitud de anclaje. En el extremo cargado de la barra existen esfuerzos de tensión ($f_s = T/A_s$), mientras que el otro extremo de la barra está libre de esfuerzos. Por lo tanto, los esfuerzos en la barra cambian desde f_s hasta cero a lo largo de la longitud de anclaje. Obviamente, mientras mayor sea la longitud de anclaje, mayor será la fuerza T necesaria para extraer la barra y mayor será el esfuerzo f_s que puede alcanzarse en el extremo cargado.

La longitud de anclaje recibe también el nombre de longitud de desarrollo, es decir, la longitud de una barra requerida para desarrollar por adherencia un determinado esfuerzo en el acero. Ambos términos suelen emplearse indistintamente.

El comportamiento y el tipo de falla en ensayes de extracción dependen principalmente del tipo de barra ensayada. A continuación se analizan por separado los ensayes con barras lisas y con barras corrugadas, y se describe brevemente la distribución de es-

fuerzos a lo largo de las barras en varias etapas de carga.

BARRAS LISAS

Debido a que en un ensaye de extracción la barra está sujeta a esfuerzos de tensión mientras que el concreto está sujeto a esfuerzos de compresión, ocurre necesariamente un deslizamiento entre los dos materiales. Cuando el esfuerzo en la barra es bajo, del orden de *150* a *200* kg/cm^2, este deslizamiento se localiza en una longitud pequeña cerca del extremo cargado de la barra. En esta longitud se rompe la adhesión entre la barra y el concreto. Inmediatamente junto a la zona donde se ha registrado el deslizamiento, existen esfuerzos elevados de adherencia, producidos principalmente por adhesión (figura 9.9*a*). En la zona contigua a la de esfuerzos elevados, los esfuerzos de adherencia son pequeños, ya que la mayor parte de la fuerza de tensión se ha transmitido al concreto y la barra tiene esfuerzos de tensión muy pequeños.

Al aumentar los esfuerzos de tensión en la barra, aumenta la longitud de la zona que sufre deslizamiento y en la cual se rompe la adhesión. La fricción desempeña un papel más importante y el estado de esfuerzos de adherencia es el mostrado cualitativamente en la figura 9.9*b*. Cerca de la falla, el deslizamiento de la barra se extiende en casi toda la longitud de desarrollo. El estado de esfuerzos de adherencia en esta etapa se muestra cualitativamente en la figura 9.9*c*; el esfuerzo máximo se localiza cerca del extremo descargado [9.1].

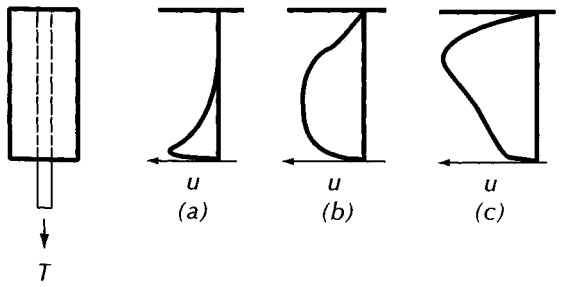


Figura 9.9 Distribución aproximada de esfuerzos en un ensaye de extracción con barra lisa.

La distribución de esfuerzos de adherencia, como se ve en la figura *9.9,* no es uniforme en ninguna etapa de carga. Puede calcularse un esfuerzo promedio uniforme dividiendo la fuerza de extracción, *T,* entre la superficie de la barra en contacto con el concreto. Esta superficie es igual al producto de la longitud de desarrollo, L_{des}, por el perímetro de la barra. Teniendo en cuenta que $T = \frac{\pi}{4} d^2_b f_s$ y que el perímetro, *CO,* es igual a $\Sigma \pi d_b$, el esfuerzo promedio viene dado por

$$u = \frac{T}{'0 \ .Les} = \frac{f_s d_b}{4 L_{des}} \qquad (9.1)$$

como se vio en la sección *9.2.*

La diferencia entre el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo depende de la etapa de carga y de la longitud de desarrollo. En las primeras etapas de carga la diferencia es mayor, porque la zona con esfuerzos pequeños es mayor en relación con la longitud de desarrollo, como puede verse comparando las figuras 9.9*a* y 9.9*c*. La diferencia también es mayor mientras mayor sea la longitud de anclaje, porque la zona alejada del extremo cargado, en la cual los esfuerzos son pequeños, es de mayor longitud, como se observa en las figuras *9.10a* y *9.10b*.

La falla en un espécimen de este tipo puede ocurrir de dos maneras. Si la barra tiene una superficie muy lisa, como la de las trabajadas en frío, sale de la masa de concreto dejando un agujero liso. Si la superficie es rugosa, como la de las barras laminadas en caliente, la fricción es mayor y la falla ocurre

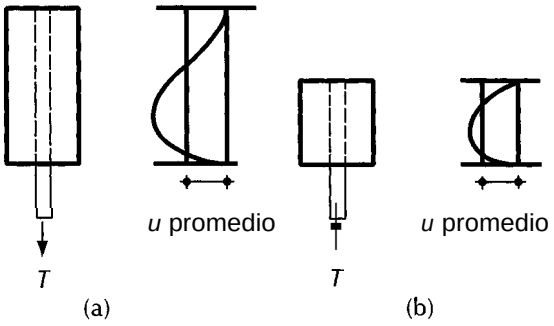


Figura 9.10 Efecto de la longitud del espécimen de ensaye en la distribución de esfuerzos de adherencia.

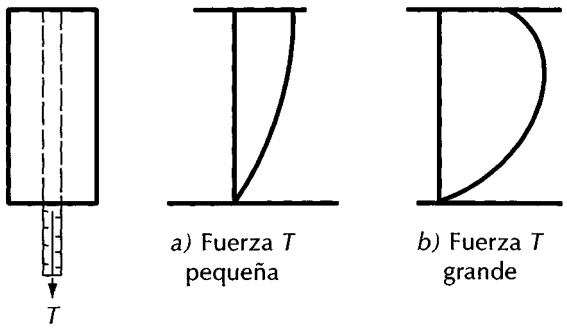


Figura 9.11 Distribución aproximada de esfuerzos en un ensaye de extracción con barra corrugada.

por rotura del elemento de concreto, como en el caso de barras corrugadas que se describe en la siguiente sección. La contracción del concreto también contribuye a aumentar la fricción y a que ocurra el segundo tipo de falla [9.2].

BARRAS CORRUGADAS

En este caso, al deslizar la barra dentro de la masa de concreto y romperse la adhesión entre los dos materiales, las corrugaciones reaccionan contra el concreto. Como se vio en la sección anterior, la fricción y la adhesión desempeñan un papel menos importante que el caso de barras lisas. En la figura *9.11* se muestran distribuciones idealizadas de esfuerzos de adherencia a lo largo de las barras para dos etapas de carga; la figura *9.11a* corresponde a esfuerzos bajos y la figura *9.11b* a esfuerzos elevados.

La falla en este tipo de espécimen ocurre al partirse longitudinalmente la masa de concreto en dos o tres segmentos (figura 9.12*a*). También se ha observado en algunos casos, especialmente en especímenes de concreto ligero, que la falla ocurre por cortante en una superficie cilíndrica, al desprenderse la zona de concreto que rodea a la barra (figura *9.126).* La clase de concreto, el recubrimiento y el diámetro de la varilla, son los parámetros que más influyen en el tipo de falla. Si el recubrimiento es muy grande y la varilla es pequeña, ocurre el segundo tipo de falla [9.2].

Se han efectuado algunos ensayes de extracción en prismas sujetos a cargas normales a la dirección de la barra. Estas cargas aumentan la fricción entre la barra y el concreto, así como la reacción del concreto contra las corrugaciones. Por lo tanto, para una longitud de desarrollo dada, puede aplicarse mayor fuerza de tensión en la barra que en el caso de especímenes sin cargas normales. Estas cargas evitan la formación de las grietas mostradas en la figura *9.12a* y

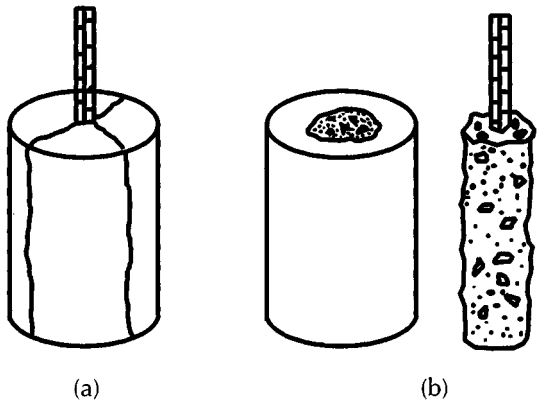


Figura 9.12 Dos tipos de falla en especímenes de extracción con barras corrugadas.

la falla ocurre por pulverización del concreto que rodea a las barras debido a la acción de las corrugaciones [9.12]. Un efecto semejante puede lograrse con el empleo de refuerzo helicoidal.

Al igual que en el caso de barras lisas, puede calcularse el esfuerzo promedio de adherencia en la longitud de desarrollo por medio de la ecuación 9.1. La diferencia entre el esfuerzo promedio y el esfuerzo máximo depende también de la etapa de carga y de la longitud del espécimen de ensaye.

El ensaye de extracción permite determinar la longitud de desarrollo de barras ahogadas en una masa de concreto y da una idea de los esfuerzos de adherencia en una viga.

Es útil también como medio para comparar la efectividad de distintos tipos de corrugaciones. Sin embargo no reproduce adecuadamente el comportamiento en adherencia de vigas de concreto. Esto se debe principalmente a que en ensayes de extracción la masa de concreto se encuentra sujeta a esfuerzos de compresión, mientras que en las vigas, el concreto tiene esfuerzos y grietas de tensión debidas a la flexión y a la fuerza cortante, que producen un efecto desfavorable, como pudo apreciarse en las secciones 9.3 y 9.4. Por ello las recomendaciones sobre adherencia de los reglamentos recientes suelen basarse en ensayes de vigas como los que se describen en la siguiente sección.

9.5.2 *Ensayes de vigas*

Los ensayes de adherencia en vigas libremente apoyadas, tienen el inconveniente de que la reacción del apoyo restringe el agrietamiento longitudinal del concreto, por lo que se sobreestima la resistencia en adherencia. Para evitar esto, se han ideado tres tipos especiales de especímenes, uno en la Universidad de Texas [9.13], otro en el National Bureau of Standards de los Estados Unidos de América [9.14] y otro en la Universidad de West Virginia [9.26].

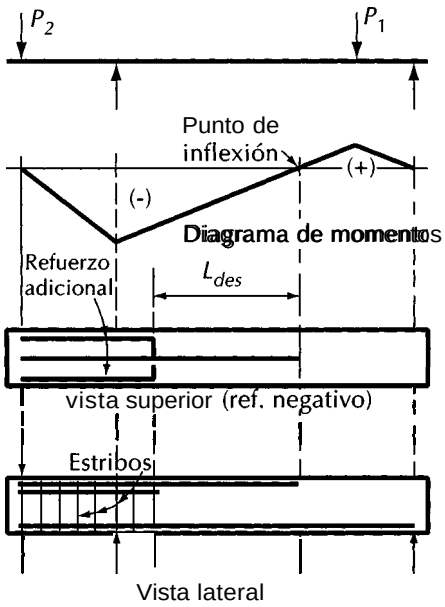


Figura 9.13 Espécimen de ensaye usado en la Universidad de Texas.

El espécimen de ensaye usado en la Universidad de Texas se muestra en la figura 9.13. Consiste en una viga con un extremo en voladizo y con cargas concentradas que le producen el diagrama de momento flexionante mostrado en la misma figura. Una de las barras de refuerzo negativo se prolonga desde la sección donde se interrumpe el resto del refuerzo negativo hasta el punto de inflexión. La longitud correspondiente es la longitud de desarrollo L_{des}. En el punto de inflexión, la barra tiene un esfuerzo nulo, por ser nulo el momento flexionante, mientras que en la sección donde se interrumpe el resto del refuerzo negativo, la barra tiene un esfuerzo f_s. Por lo tanto, el esfuerzo en la barra se desarrolla de cero a f_s en la longitud L_{des}.

El espécimen de ensaye usado en el National Bureau of Standards se muestra en la figura 9.14. El efecto de los esfuerzos de apoyo sobre el agrietamiento longitudinal se evita colocando los apoyos alejados de la barra ensayada. En este espécimen, la longitud de desarrollo es la distancia desde los

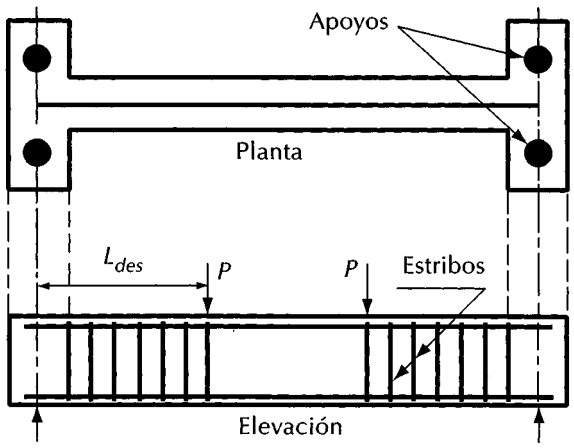


Figura 9.14 Espécimen de ensaye usado en el National Bureau of Standards.

apoyos (momento nulo) hasta la sección de aplicación de la carga (momento máximo). La falla por adherencia en ensayes de vigas ocurre por deslizamiento excesivo de la barra dentro de la masa de concreto, sin incremento apreciable de la carga aplicada, en la forma descrita en la sección 9.4. En la figura 9.15 se muestra un estado de agrietamiento típico propio de fallas por adherencia en ensayes de vigas.

En la Universidad de West Virginia han utilizado el espécimen mostrado en la figura 9.16 para un programa de investigación muy amplio sobre el fenómeno de la adherencia [9.26]. Este espécimen permite combinar una fuerza de extracción directa, que es la aplicada con el gato mostrado en la parte derecha de la figura, con un gradiente de esfuerzos producidos por el par que forman las dos fuerzas verticales. Además permite introducir el efecto de fuerzas de dovela sobre las barras; este efecto es el que se produce donde las grietas inclinadas de tensión diagonal intersectan a las barras de refuerzo longitudinales.

Si se tienen en cuenta los altos esfuerzos de adherencia que pueden presentarse en la vecindad de las grietas de flexión y de tensión diagonal (figura 9.4), resulta evidente que pueden presentarse fallas locales por adherencia bajo cargas muy inferiores a las que producen la falla. Estas pequeñas fallas se reflejan en un incremento del ancho de las grietas de flexión y tensión, así como de la deflexión. Sin embargo, no afectan la capacidad de carga de la viga mientras no se extiendan en toda la longitud de las barras, provocando su deslizamiento.

Pueden calcularse esfuerzos promedio de adherencia a partir de ensayes de vigas, dividiendo la diferencia de fuerzas de tensión en los dos extremos de la longitud de desarrollo entre el área de la barra en contacto con el concreto. Tanto en el espécimen de la figura 9.13 como en el de la figura 9.14, la fuerza de tensión es nula en un extremo de la longitud de desarrollo, porque el momento flexionante es nulo en ese extremo. Por consiguiente, siguiendo un razonamiento semejante al aplicado para las pruebas de extracción, el esfuerzo promedio de adherencia puede calcularse con la ecuación

$$u = \frac{T}{\Sigma 0 \cdot L_{des}} = \frac{f_s d_b}{4 L_{des}} \qquad (9.7)$$

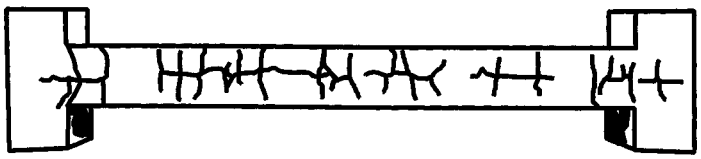


Figura 9.15 Viga típica después del ensaye (según referencia 9.14).

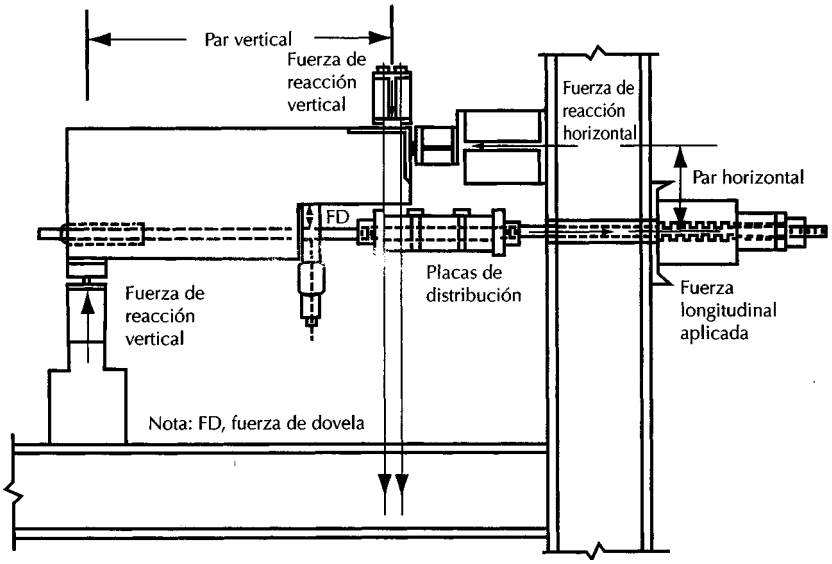


Figura 9.16 Espécimen de ensaye usado en la Universidad de West Virginia (referencia 9.26).

La fuerza T en la sección correspondiente al otro extremo de la longitud de desarrollo, puede calcularse dividiendo el momento flexionante en dicha sección entre el brazo del par, z, formado por las fuerzas de tensión y compresión. En el caso del espécimen de la figura *9.1* 6, se debe sumar la fuerza de tensión horizontal aplicada directamente. Por lo tanto,

$$u = \frac{M}{z\Sigma 0 \cdot L_{des}} \qquad (9.8)$$

El brazo del par, z, puede suponerse de $0.85d$ a $0.95d$, aproximadamente. Sustituyendo M por el momento flexionante máximo que resiste el espécimen de ensaye, se obtiene un valor de u que representa el esfuerzo promedio de adherencia para las condiciones del ensaye. En realidad, la intensidad del esfuerzo de adherencia varía a lo largo de la barra, dependiendo de la distribución de las grietas, de la distancia a la sección donde el esfuerzo de tensión en la barra es máximo y de otros factores.

Los valores últimos de los esfuerzos de adherencia, u, se pueden determinar a partir de ensayes de vigas como las de las figuras *9.1* 3 y *9.14* variando la longitud de desarrollo, L_{des}. Los valores de u serán los correspondientes a la longitud para la cual se produce el deslizamiento de la barra y se pueden calcular con las ecuaciones *9.1* y *9.8.* Los resultados de los ensayes descritos anteriormente indican que, de una manera aproximada, estos esfuerzos pueden expresarse como sigue

$$u_u = \frac{k\sqrt{f'_c}}{d_b} \qquad (9.9)$$

En esta ecuación, k es una constante que depende de diversos factores que se comentan más adelante. Los valores de k que se han propuesto en algunos reglamentos en que la adherencia se trataba fijando valores admisibles para los esfuerzos de adherencia, son del orden de seis, suponiendo que f'_c se expresara en kg/cm^2 y d_b en cm (del orden de *19* si f'_c se expresa en MPa y d_b en mm). Así, para un concreto con f'_c de *200* kg/cm^2 y barras del No. 8, resulta un esfuerzo de 33 kg/cm^2.

Con el espécimen de ensaye de la figura 9.16, los valores de u se obtienen directamente dividiendo la fuerza total T en el momento de la falla entre la longitud de desarrollo que tiene un valor constante en estos ensayes. En el programa de investigación de la Universidad de West Virginia se ha estudiado el efecto del diámetro de las barras longitudinales, de la separación entre barras paralelas, del recubrimiento de las barras, de la presencia de estribos transversales y del efecto de fuerzas de dovela. A partir de numerosos ensayes y de la utilización de un mecanismo de falla como el mostrado en la figura 9.7, se ha propuesto una ecuación que toma en cuenta todos estos parámetros. Para fines prácticos, se ha propuesto una ecuación simplificada que considera únicamente el espesor, C, del cilindro hueco de falla de la figura 9.7, el diámetro de la barra, d_b, la resistencia del concreto, f'_c, el área de los estribos transversales, A_{sv}, y su esfuerzo de fluencia, f_y, y la separación de estribos transversales, s. Esta ecuación es

$$u_u = 16 + 0.7\left(\frac{C}{d_b}\right)\sqrt{f'_c} + 0.2\left(\frac{A_{sv} f_y}{s d_b}\right) \quad (9.10)$$

o en sistema SI

$$u_u = 1.6 + 0.22\left(\frac{C}{d_b}\right)\sqrt{f'_c} + 0.2\left(\frac{A_{sv} f_y}{s d_b}\right) \quad (9.10\ \text{SI})$$

En forma semejante a lo expuesto en la sección 9.2, conocidos los valores de u es posible determinar la longitud necesaria para desarrollar un esfuerzo dado en el acero f_s. Denominando L_{des} a esta longitud, haciendo u = u y despejando de la ecuación 9.1 se obtiene

$$L_{des} = \frac{f_s d_b}{4u_u} \quad (9.11)$$

Sustituyendo en esta expresión el valor de u dado por la ecuación 9.9 y tomando $f_s = f_y$, la longitud de desarrollo, L_d, requerida para desarrollar la capacidad máxima de una barra, estará dada por

$$L_d = \frac{f_y d_b}{4 \times \dfrac{k\sqrt{f'_c}}{d_b}} = \frac{f_y d_b^2}{4k\sqrt{f'_c}} \quad (9.12)$$

Teniendo en cuenta que $A_b = \frac{\pi}{4} d^2_b$, la longitud de desarrollo puede también expresarse como sigue:

$$L_d = \frac{A_b f_y}{\pi k\sqrt{f'_c}} \quad (9.13)$$

Una expresión semejante puede obtenerse sustituyendo en la ecuación 9.11 el valor de u dado por la ecuación 9.10.

Se aprecia que en una viga como la de la figura 9.17 no habrá falla por adherencia siempre que la longitud L sea mayor que el valor de L_d dado por la ecuación 9.13. Si se cumple esto se dispondrá de una seguridad adecuada contra la falla por adherencia, independientemente de que la ecuación 9.5 indique esfuerzos altos o que los esfuerzos locales por agrietamiento sean importantes. En otras palabras, debe proporcionarse una longitud de anclaje o desarrollo adecuada a cada lado de todas las secciones donde se presenten esfuerzos máximos en el acero. En general son secciones críticas las de momentos máximos y aquellas donde se corta o dobla el acero de refuerzo. Cuando no se disponga de suficiente espacio para alojar la longitud de desarrollo requerida, es necesario prever anclajes consistentes en ganchos u otros dispositivos apropiados.

La ecuación 9.12 indica que las longitudes de anclaje o desarrollo son directamente proporcionales al cuadrado del diámetro de la barra. Por tanto, resulta evidente que cuando

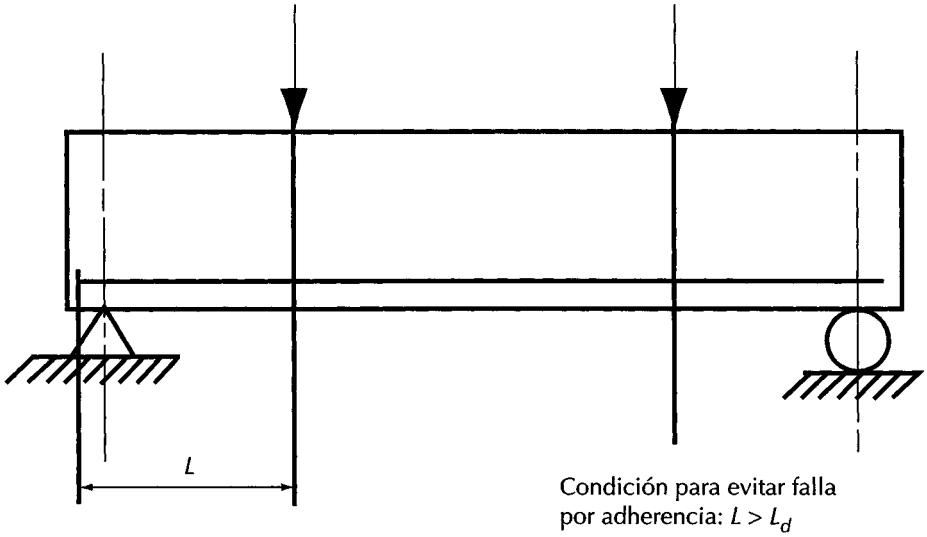


Figura 9.17 Longitud de desarrollo en una viga.

la longitud disponible para el desarrollo de las barras está restringida, para proporcionar el área de acero requerida por flexión conviene usar barras de diámetro pequeño en lugar de barras de diámetro grande.

Dada la importancia que tiene la resistencia en adherencia, u, en la determinación de las longitudes de anclaje necesario para desarrollar la capacidad de las barras de refuerzo, es oportuno hacer algunos comentarios sobre las variables de que depende.

Se vio ya que u_u varía con $\sqrt{f'_c}$ por la influencia que tiene la resistencia a tensión del concreto en el comportamiento por adherencia.

La posición del refuerzo es también una variable importante. Se ha observado mayor resistencia por adherencia en barras de lecho inferior que en barras de lecho superior. Esto se explica por efecto del fenómeno conocido como sangrado del concreto, que produce la acumulación de aire y agua debajo de las barras de lecho superior, debilitando su adherencia con el concreto. Cuanto mayor es el espesor de concreto debajo de las barras, mayor es el efecto del sangrado; aún no se ha podido relacionar cuantitativamente el espesor con la disminución de la resistencia. En los reglamentos de construcción se define en forma un tanto arbitraria qué barras deben considerarse como de lecho superior y se especifican longitudes de anclaje mayores para ellas. También cabe mencionar que la adherencia es mejor en barras verticales que en barras horizontales.

Evidentemente el tipo de corrugación tiene una influencia significativa en la adherencia. Según Rehm [9.15], una variable importante es la relación entre la altura de las corrugaciones, a, y su espaciamiento, c (figura 9.18). El valor más conveniente de la relación a/c parece ser del orden de 0.065. Los valores correspondientes a las corrugaciones previstas en la norma de Estados Unidos ASTM 305 varían de 0.057 a 0.072, valores próximos al dado por Rehm. Los correspondientes a las corrugaciones especificadas en las normas mexicanas (NMX-B-032, NMX-B-294 y NMX-B-457) son semejantes.

Orangun et al. (9.7), han tratado con detalle tres factores importantes que influyen en

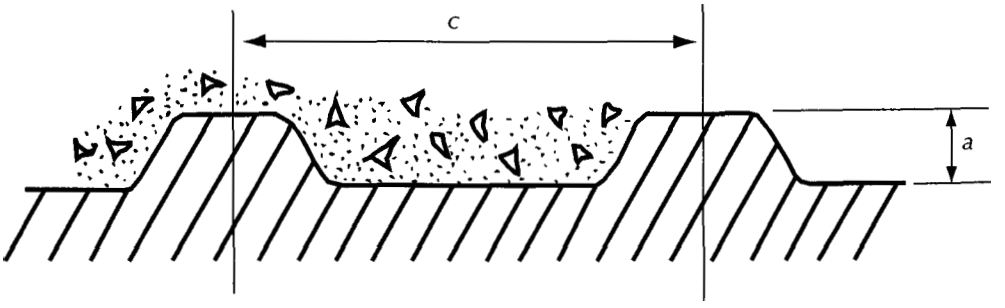


Figura 9.18 Geometría de corrugaciones de barras.

la resistencia por adherencia y por lo tanto en la longitud de desarrollo: el recubrimiento de las barras, el espaciamiento de éstas y la presencia de refuerzo transversal (generalmente estribos). De la figura 9.7 se deduce que, al aumentar el recubrimiento, aumentará el espesor del cilindro hipotético y, por consiguiente, la resistencia a la falla por tensión que ocasiona el agrietamiento longitudinal. Análogamente, en la figura 9.7*b* se aprecia que al aumentar la separación entre barras, aumentará también la cantidad de concreto que deberá agrietarse antes de que se produzca la falla. Si existen estribos como los mostrados en la figura 9.19, éstos proporcionan un confinamiento que restringe el agrietamiento en planos horizontales. El confinamiento debido a la presencia de fuerzas de compresión, como las que se presentan en los apoyos de vigas libremente apoyadas, también tiene un efecto favorable.

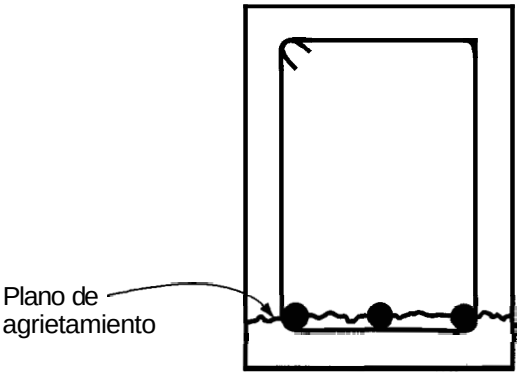


Figura 9.19 Efecto confinante de estribos.

Los numerosos ensayes efectuados por Kemp en la Universidad de West Virginia han confirmado la importancia de estos factores e inclusive han permitido cuantificarlos; adicionalmente han permitido estudiar los efectos de refuerzo longitudinal adicional al requerido por flexión y de las fuerzas de dovela en las barras longitudinales de refuerzo.

Por último, indudablemente influye también en los valores *u,* el tipo de ensaye utilizado para determinarlos. Las recomendaciones de los reglamentos modernos tienden a basarse en los resultados de los ensayes de vigas que reproducen el comportamiento en adherencia de las barras de las estructuras de concreto reforzado más fielmente que los ensayes de extracción.

Las consideraciones sobre anclaje y desarrollo que se han expuesto se refieren a barras en tensión. Las barras en compresión también deben contar con una longitud de desarrollo adecuada. Sin embargo, las longitudes requeridas son menores, ya que en las regiones en compresión de miembros de concreto no existen las grietas de flexión que agravan los problemas de adherencia.

9.6 Normas para longitudes de desarrollo

9.6.1 Reglamento ACI 318-02

Acero en tensión

En este reglamento se presentan ecuaciones muy sencillas, de un tipo similar a la ecuación 9.12 presentada anteriormente, que toman en cuenta las variables principales, como el tamaño de las barras, la resistencia del concreto y el límite de fluencia del acero, en forma explícita, y otras variables, como la posición de las barras y su recubrimiento o separación de otras barras, a partir de factores por los que se multiplica la longitud de desarrollo, denominada en el reglamento ℓ_d. En el Reglamento se presentan dos opciones: la primera, que es la más sencilla, se resume en la tabla 9.1[1].

El factor α se introduce para tomar en cuenta la posición de las barras. Si son altas, o sea, con más de 30 cm de concreto por debajo de ellas, α vale 1.3, y en otros casos vale 1.0. Se puede ver que de esta manera se aumenta la longitud de desarrollo de barras altas por lo comentado en la sección 9.5.2.

El factor β toma en cuenta la posibilidad de que las barras estén recubiertas con alguna resina epóxica, lo cual se hace en ocasiones para protegerlas de la corrosión. Se le debe asignar un valor de 1.5 cuando las barras estén recubiertas con resina y tengan un recubrimiento de concreto menor que $3d_b$ o una

Tabla 9.1 Longitudes de desarrollo según el Reglamento ACI 318-02

	Barras No. 6 o menores y alambres corrugados	Barras No. 7 y mayores
Separación libre entre las barras o los traslapes no menor que d_b, recubrimiento libre no menor que d_b, y estribos a lo largo de ℓ_d en cantidad no menor al mínimo especificado en el Reglamento	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{6.6\sqrt{f'_c}} d_b$	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{5.3\sqrt{f'_c}} d_b$
Separación libre de las barras o traslapes no menor que $2d_b$ y recubrimiento libre no menor que d_b.	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{2.1\sqrt{f'_c}} d_b$ (SI)	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{1.7\sqrt{f'_c}} d_b$ (SI)
Todos los otros casos	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{4.4\sqrt{f'_c}} d_b$	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{3.5\sqrt{f'_c}} d_b$
	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{1.4\sqrt{f'_c}} d_b$ (SI)	$\ell_d = \dfrac{f_y \alpha \beta}{1.1\sqrt{f'_c}} d_b$ (SI)

[1] En el Reglamento ACI se incluye otro factor, γ, que se refiere a concreto ligero y que no se ha incorporado en este texto por ser un tema no tratado.

separación entre barras paralelas menor que $6d_b$; de 1.2 cuando estén recubiertas con resina pero tengan recubrimientos de concreto o separaciones mayores que los anteriores; y de 1.0 si no están recubiertas con resina. Se ve que este factor hace aumentar la longitud de desarrollo si las barras están protegidas con resina, ya que esto disminuye su adherencia con el concreto.

Si se toma en cuenta que para la mayoría de los casos prácticos β es igual a 1, las ecuaciones de la tabla 9.1 son realmente muy sencillas de aplicar. El reglamento especifica que el producto $\alpha\beta$ no necesita tomarse como mayor a 1.7.

Comparando las ecuaciones de la tabla 9.1 pertenecientes a una misma columna, se puede ver que el efecto de no tener recubrimientos de concreto amplios, buenas separaciones entre barras paralelas, o suficientes estribos, es el de incrementar las longitudes de desarrollo necesarias en 50 por ciento. En la figura 9.20 se muestra un esquema de recubrimiento y separaciones de barras fácil de lograr en la práctica, que permite cumplir con los requisitos para usar las ecuaciones de la parte superior de la tabla, o sea, las que proporcionan longitudes de desarrollo menores, sin necesidad de revisar el refuerzo transversal.

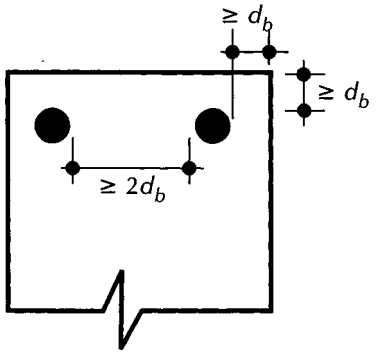


Figura 9.20 Separaciones y recubrimientos mínimos para usar las ecuaciones de la parte superior de la tabla 9.1.

La segunda opción que presenta el Reglamento ACI 318-02 consiste en aplicar una ecuación similar a las de la tabla 9.1, pero más general, ya que permite tomar en cuenta de manera directa y explícita el diámetro de las barras, el recubrimiento de concreto y la separación entre barras, y la cantidad de refuerzo transversal. Esta ecuación es la siguiente:[2]

$$\ell_d = \frac{1}{3.5}\frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}\frac{\alpha\beta\lambda}{\left(\frac{c+K_{tr}}{d_b}\right)}d_b \qquad (9.14)$$

$$\ell_d = \frac{1}{1.1}\frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}\frac{\alpha\beta\lambda}{\left(\frac{c+K_{tr}}{d_b}\right)}d_b \qquad (9.14\ \text{SI})$$

El nuevo factor λ vale 0.8 para barras No. 6 y menores y 1.0 para barras No. 7 y mayores. El término c es el menor de los valores entre la mitad de la separación centro a centro entre barras y la distancia del centro de la barra a la superficie libre de concreto más cercana, en cm; K_{tr} es un índice del acero transversal que se define como

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_y}{100\, sn} \qquad (9.15)$$

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_y}{10\, sn}$$

donde A_{tr} es el área total de todo el acero transversal ubicado dentro de la distancia s y que cruza el plano potencial de falla por adherencia, s es la máxima separación entre el refuerzo transversal dentro de la longitud de desarrollo y n es el número de barras que

[2] En el Reglamento ACI 318-02 aparece también el factor λ que se refiere a concreto ligero.

existen dentro de la longitud de desarrollo o que se traslapan. Según el Reglamento, el término $[(c + K_{tr})/d_b]$ no debe tomarse mayor a 2.5.

La primera opción del Reglamento, o sea, con las ecuaciones de la tabla 9.1, es mucho más sencilla de usar que la segunda. De hecho, las ecuaciones de la tabla se dedujeron de la ecuación más general, usando valores típicos de recubrimientos de concreto, separaciones entre barras y cantidad de refuerzo transversal. Se recomienda, por lo tanto, usar las ecuaciones de la tabla 9.1 para diseños normales y recurrir a la ecuación más general únicamente en casos especiales o cuando se requiera una gran precisión.

Si se proporciona mayor acero de tensión que el requerido en los cálculos de flexión, las longitudes de desarrollo calculadas por cualquiera de las dos opciones presentadas pueden reducirse multiplicándolas por el factor (A, requerida/A_s proporcionada). Esta reducción no puede hacerse si todo el acero puede alcanzar su límite de fluencia f_y. La longitud de desarrollo para acero en tensión nunca será menor de 30 cm.

Acero en compresión

Para este acero también se especifica una longitud básica de desarrollo que puede reducirse si se proporciona refuerzo transversal de confinamiento o acero longitudinal mayor que el requerido por flexión. El refuerzo de confinamiento, en su caso, consistirá en una hélice no menor al No. 2 y con un paso no mayor que 10 cm, o estribos del No. 4 con una separación no mayor que 10 cm. En ningún caso se especifica aumentar la longitud básica de desarrollo, que debe ser igual a $0.075\ d_b\ f_y/\sqrt{f'_c}$, pero no menor que $0.0043\ d_b\ f_y$. Estos valores en el sistema SI son $0.235\ d_b\ f_y/\sqrt{f'_c}$ y $0.0438\ d_b\ f_y$, respectivamente. Para este acero se especifica que la longitud de desarrollo nunca sea menor de 20 cm.

9.6.2 NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal

Las especificaciones de las NTC-04 son similares a las del Reglamento ACI. Se presenta una ecuación equivalente a la 9.14 para calcular una longitud básica L_{db} que es la siguiente:

$$L_{db} = \frac{a_s f_y}{3(c + K_{tr})\sqrt{f'_c}} \geq 0.11 \frac{d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} \qquad (9.16)$$

$$L_{db} = \frac{1.15 a_s f_y}{(c + K_{tr})\sqrt{f'_c}} \geq 0.36 \frac{d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad \textbf{(9.16 SI)}$$

El lector puede verificar que haciendo algunas operaciones aritméticas en la ecuación 9.14 se obtiene un coeficiente de 2.75 en vez del 3 de la ecuación 9.16. Las NTC permiten suponer K_{tr} igual a cero para sencillez en el diseño.

La notación y las unidades son las mismas que las utilizadas para las recomendaciones reseñadas anteriormente. Se limita la aplicabilidad de esta expresión a barras no mayores del No. 12. La longitud básica de desarrollo calculada con la ecuación 9.16 debe multiplicarse por los factores de la tabla 9.2 según la condición del refuerzo, pero la longitud de desarrollo final no debe ser menor de 30 cm.

Para barras en compresión se establece que la longitud de desarrollo de una barra debe ser al menos igual al 60 por ciento a la correspondiente en tensión. La longitud mínima se fija en 20 cm.

9.7 Ganchos estándar

En ocasiones no se dispone de suficiente espacio para alojar la longitud de desarrollo requerida. Se suele en estos casos hacer dobleces en el extremo de la barra, de manera que se formen ganchos o escuadras que requieren menos espacio para desarrollar un

Tabla 9.2 Factores que modifican la longitud básica de desarrollo.[1]

Condición del refuerzo	Factor
Barras de diámetro igual a 19.1 mm (número 6) o menor	0.8
Barras horizontales o inclinadas colocadas de manera que bajo ellas se cuelen más de 300 mm de concreto	1.3
Barras con f_y mayor de 412 MPa (4200 kg/cm^2)	$2-\frac{412}{f_y}$; $\left(2-\frac{4200}{f_y}\right)$
Barras torcidas en frío de diámetro igual o mayor que 19.1 mm (número 6)	1.2
Acero de flexión en exceso[2]	$\frac{A_{s,\text{requerida}}}{A_{s,\text{proporcionada}}}$
Barras lisas	2.0
Barras cubiertas con resina epóxica, o con lodo bentonítico:	
– Recubrimiento de concreto menor que $3d_b$, o separación libre entre barras menor que 6db	
– Otras condiciones	1.2
Todos los otros casos	1.0

[1] Si se aplican varias condiciones, se multiplican los factores correspondientes.
[2] Excepto en zonas de articulaciones plásticas y marcos dúctiles.

esfuerzo dado en el acero que una longitud recta. Si estos ganchos o escuadras reúnen determinadas características geométricas se denominan ganchos *estándar*. Se reseñan a continuación las recomendaciones al respecto del Reglamento ACI 318-02.

El Reglamento ACI 318-02 define una longitud de desarrollo, L_{dh}, para barras en tensión que terminan en gancho estándar. El significado de L_{dh}, así como las características geométricas de los ganchos estándar, pueden apreciarse en la figura 9.21. El valor de L_{dh}, en cm, se obtiene multiplicando por los factores de modificación de la tabla 9.3 el valor de una longitud de desarrollo básica, dado por la siguiente expresión:

$$L_{hb} = \frac{0.075 \beta f_y d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad (9.17)$$

$$L_{hb} = \frac{0.24 \beta f_y d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad (9.17\ \text{SI})$$

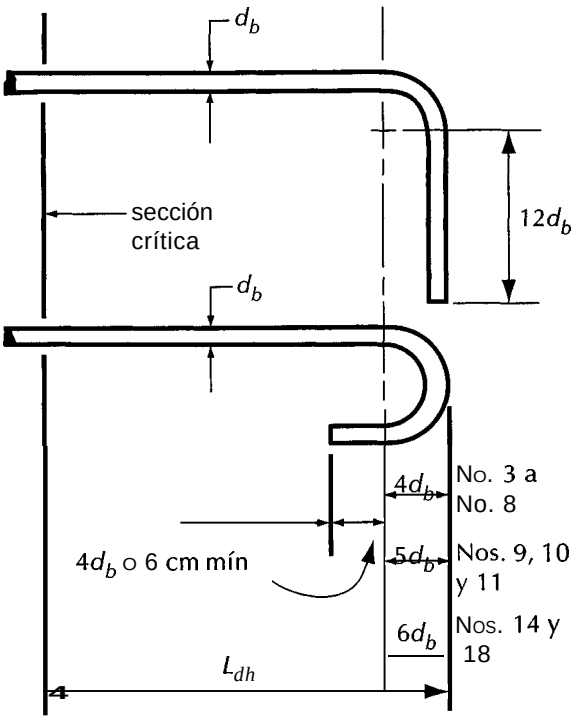


Figura 9.21 Detalles de ganchos estándar según ACI 318-02.

Tabla 9.3 Factores de modificación de los valores de L_{hb} (ACI 318-02)

Condición	Factor
Ganchos de barras del No. 11 o menores, con recubrimiento lateral (perpendicular al plano del gancho) no menor de 6 cm, y ganchos a 90° con un recubrimientode la parte recta al extremo del gancho no menor de 5 cm	0.7
Ganchos a 90° de barras del No. 11 o menores, confinados con estribos perpendiculares a la barra cuya longitud se desarrolla, espaciados a no más de $3d_b$ a lo largo de la longitud de desarrollo del gancho; o confinados con estribos paralelos a la barra, espaciados a no más de $3d_b$ a lo largo de la longitud de desarrollo del gancho	0.8
Ganchos a 180° de barras del No. 11 o menores, confinados con estribos perpendiculares a la barra cuya longitud se desarrolla, espaciados a no más de $3d_b$ a lo largo de la longitud de desarrollo del gancho	0.8
Cuando no se requiera la longitud de desarrollo para alcanzar f_y y haya refuerzo por flexión en exceso	A_s(req.)/A_s(prop.)

donde

L_{hb} = longitud básica de desarrollo para barras con gancho estándar, cm
d_b = diámetro de la barra, cm
f'_c = resistencia del concreto, kg/cm^2
β = 1.2 para barras recubiertas con resina epóxica y 1.0 para otros casos.

El valor de L_{dh} debe ser por lo menos igual al mayor de los siguientes valores: 8 d_b o 15 cm. Para barras con gancho estándar situadas en los extremos discontinuos de miembros en que el recubrimiento libre tanto lateral como superior o inferior es menor de 6 cm, se especifica que se proporcione confinamiento por medio de refuerzo transversal, con una separación máxima de $3d_b$ en toda la longitud L_{dh} (figura 9.22). En tal caso no son aplicables los factores de 0.8 indicados en la tabla 9.3. Esta situación es típica de los extremos de voladizos y de vigas libremente apoyadas.

El uso de ganchos para desarrollo se considera admisible únicamente para barras en tensión.

Las recomendaciones anteriores se basan en la propuesta sobre longitudes de desarrollo, empalmes y ganchos, formulada por el Comité ACI 408 [9.9, 9.10], que a su vez estuvo inspirada en los ensayes de Marques y Jirsa[9.17] y los estudios de Pinc et *al.* [9.18]. Estos estudios indican que la causa principal de las fallas a base de ganchos se debe al agrietamiento del recubrimiento perpendicular al plano del gancho y que este agrietamiento se inicia en la parte interior del gancho donde se presentan concentraciones de esfuerzos altos. Por esta razón la ecuación 9.17

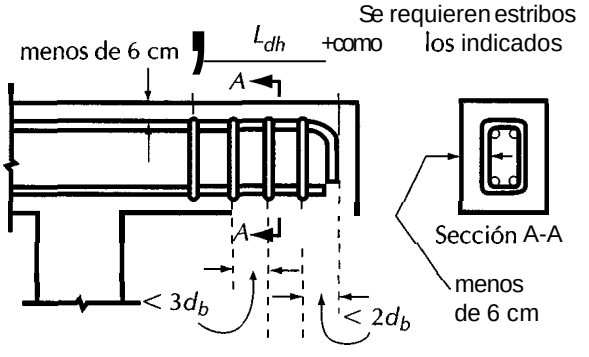


Figura 9.22 Confinamiento en los extremos discontinuos de miembros cuando el recubrimiento es inferior a 6 cm (ACI 318-02).

es función de d_b, ya que los esfuerzos de compresión en el interior del gancho dependen de este valor.

La forma de aplicar las recomendaciones del Reglamento **ACI** 318-02 se aclara en el ejemplo 9.3.

Las NTC-04 proporcionan recomendaciones semejantes para ganchos estándar. La longitud de desarrollo ya modificada por los factores correspondientes no será menor de 15 cm o de 8 d_b.

9.8 Desarrollo del acero positivo en los apoyos libres de vigas y en los puntos de inflexión

En los apoyos de vigas simplemente apoyadas y en los puntos de inflexión de vigas continuas, donde la fuerza cortante es grande y los esfuerzos de tensión son bajos, ya que el momento es teóricamente nulo, puede ser crítica la adherencia por flexión dada por la ecuación 9.5. En el Reglamento **ACI** 318-02 se presenta un artificio para calcular la longitud de desarrollo del refuerzo positivo, en forma tal que se obtengan los mismos resultados que se tendrían al aplicar el concepto de adherencia por flexión. Se evita así la necesidad de fijar valores admisibles de esfuerzos de adherencia, de manera que todos los requisitos de adherencia pueden formularse en función de longitudes de desarrollo.

El artificio citado consiste en suponer que el momento flexionante se incrementa linealmente (V, = constante), con lo que se obtiene el diagrama indicado con línea punteada en la figura 9.23. Puede demostrarse, entonces, que la longitud de desarrollo del refuerzo positivo es M_n/V_u y que esta longitud es la misma que la de una barra, cuyo perímetro, s, se calcula con la ecuación 9.5, haciendo $\Sigma 0 = s$.

En efecto, según la ecuación 9.2, la longitud de desarrollo de una barra es

$$L_d = \frac{f_y\, d_b}{4u_u} \qquad (9.2)$$

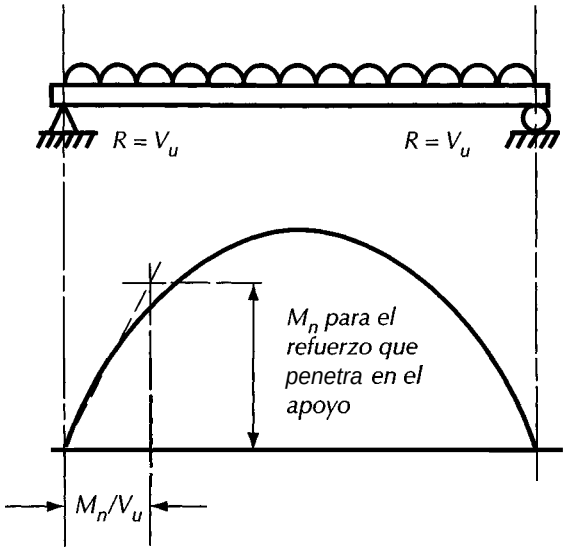


Figura 9.23 Desarrollo del acero positivo en apoyos libres de vigas.

de donde, considerando que $T = \pi d_b^2 f_y/4$ y que el perímetro es igual a s, se deduce que

$$L_d = \frac{T}{u_u s} \qquad (9.18)$$

Si el perímetro s se calcula con la ecuación 9.5, se obtiene

$$s = \frac{V_u}{z u_u} \qquad (9.19)$$

Sustituyendo este valor en la ecuación 9.18

$$L_d = \frac{Tz}{V_u} \qquad (9.20)$$

Al alcanzarse la resistencia de la sección

$$Tz = M_n \qquad (9.21)$$

Sustituyendo la ecuación 9.21 en la ecuación 9.20

$$L_d = \frac{M_n}{V_u} \qquad (9.22)$$

como se pretendía demostrar.

Con base en esto y siguiendo un criterio conservador, el Reglamento ACI 318-02 especifica que debe cumplirse la siguiente condición:

$$L_d \leq \frac{M_n}{V_u} + L_a \qquad (9.23)$$

Esto es, las barras del acero positivo deben tener un diámetro tal que su longitud de desarrollo, calculada como se describe en la sección 9.6.1, satisfaga el límite impuesto por la ecuación 9.23.

En esta expresión, M_n es el momento nominal resistente que pueden desarrollar las barras que pasan por la sección de apoyo o el punto de inflexión, calculado sin considerar el factor de reducción ϕ. V_u es la fuerza cortante última en la sección correspondiente. La longitud L_a es una longitud de anclaje adicional igual a la longitud de la barra a partir del centro del apoyo (figura 9.24). (No es necesario cumplir con la condición dada por la ecuación 9.23 si la barra está provista de un gancho estándar a partir del centro del apoyo.) En los puntos de inflexión, la longitud L_a no debe ser mayor que el peralte efectivo de la sección ni que 12 veces el diámetro de la barra (figura 9.25). Cuando las barras están confinadas por una fuerza de compresión, como ocurre en los extremos de vigas libremente apoyadas, se permite incrementar la relación M_n/V_u en 30 por ciento.

En las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal, el problema del anclaje de barras para momento positivo en los extremos de vigas libremente apoyadas, se prevé especificando que cada barra se prolongue más allá del centro del apoyo y se remate con un gancho de 90 o de 180 grados seguido por un tramo recto de $12d_b$ o de $4d_b$, respectivamente. Si no hay espacio suficiente, se debe usar un anclaje mecánico.

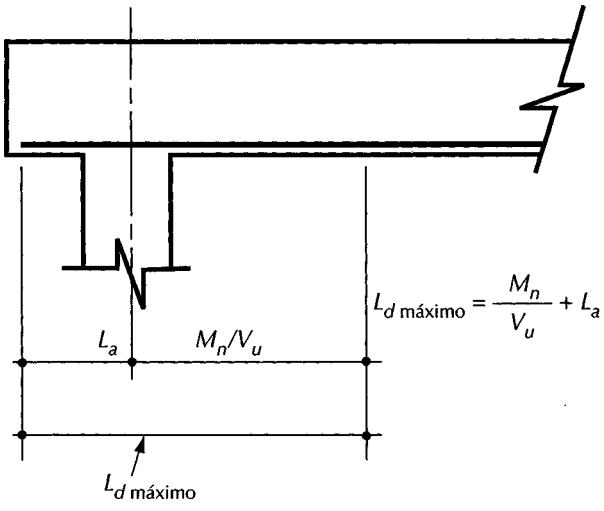


Figura 9.24 Longitud de desarrollo con anclaje final adicional (ACI 318-02).

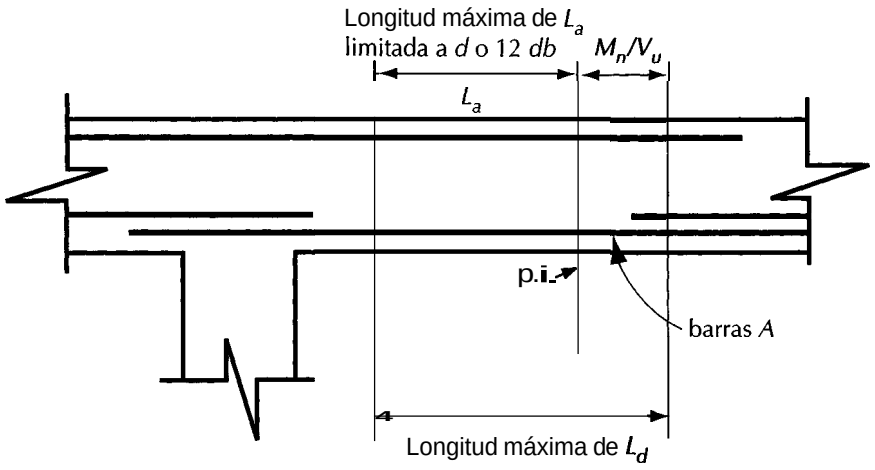


Figura 9.25 Longitudes de desarrollo para barras de acero positivo (barras A) en los puntos de inflexión (ACI 318-02).

Además de los requisitos anteriores, en los extremos libremente apoyados de vigas, los reglamentos suelen exigir que por lo menos la tercera parte de refuerzo positivo máximo se prolongue hasta dentro del apoyo. En los extremos continuos se requiere que se continúe por lo menos la cuarta parte del refuerzo positivo. Según el Reglamento ACI 318-02, la distancia de penetración mínima debe ser 15 cm.

9.9 Desarrollo del acero negativo en vigas empotradas y en vigas continuas

Ya que los esfuerzos máximos en el acero se presentan en la cara de las columnas a las que se unen las vigas, la longitud de desarrollo debe medirse a partir de dicha cara. En la figura 9.26*a* se muestra el caso de una viga que llega a una columna de borde y cuyo acero negativo termina en un gancho estándar ahogado en la columna. En la figura 9.266, el de una viga que atraviesa una columna. Se puede ver que para este segundo caso, la longitud de desarrollo puede extenderse hasta la viga del otro lado de la columna y que el acero negativo debe prolongarse más allá del punto de inflexión, hasta donde es necesario teóricamente, una distancia igual al peralte, a 12 veces el diámetro de la barra o a un dieciseisavo del claro, la que sea mayor.

9.10 Empalme de barras

Comúnmente las barras de refuerzo se fabrican en longitudes que varían de unos 12 a 18 m. Estas medidas no suelen ajustarse a las dimensiones de las estructuras, por lo que resulta necesario recurrir al empleo de empalmes. Por otra parte, por facilidad constructiva, las barras suelen cortarse con el fin de poder trabajar con piezas de menor longitud, lo que facilita su manejo.

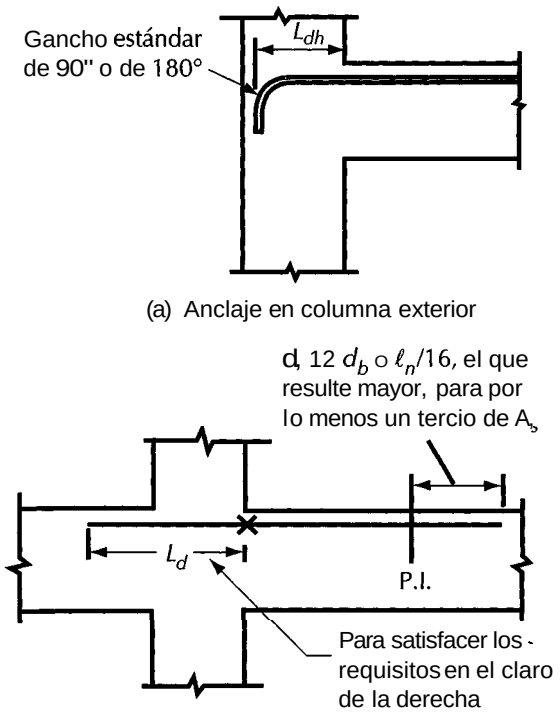


Figura 9.26 Desarrollo del acero negativo [9.24].

Hay diversas formas de efectuar el empalme de barras. La más común consiste en traslaparlas. Generalmente el traslape se efectúa con las barras traslapadas en contacto y amarradas con alambre, aunque también suele permitirse que quede cierto espacio entre ellas, siempre que esta separación sea inferior a la especificada por las normas.

El empalme por medio de traslape suele resultar práctico y económico para las barras de los diámetros menores. Para los diámetros mayores el empalme traslapado puede implicar un consumo alto de acero, por las longitudes de traslape requeridas, así como un congestionamiento exagerado del armado. Para evitar los inconvenientes de los traslapes se puede recurrir a empalmes soldados o empalmes a base de algún dispositivo mecánico. La elección del sistema apropiado depende de una comparación entre el costo del acero necesario para los traslapes y el costo de los empalmes a base de soldadura o de dispositivos mecánicos.

Los empalmes, cualquiera que sea su tipo, originan concentraciones de esfuerzos indeseables. Por otra parte, existe el riesgo de defectos en la realización del empalme. Por ello conviene evitar hacer empalmes en secciones críticas y que coincidan los empalmes de todas las barras de un elemento estructural en una misma sección.

Los diversos procedimientos para empalmar barras se tratan ampliamente en la referencia *9.19.*

9.10.1 Empalmes por traslape

En un traslape de una barra en tensión cada una de las barras debe desarrollar su esfuerzo de fluencia en la longitud de traslape (figura 9.27*a*); o sea, que la longitud de traslape es semejante a la longitud de desarrollo determinada en ensayes de vigas, como los de las figuras *9.13* y *9.14.* Así, la fuerza de una barra se transmite a la otra a través del concreto que rodea ambas barras por medio de adherencia. Por tanto, la integridad de un traslape depende del desarrollo de adherencia adecuada en la superficie de las barras. Influyen también la capacidad del concreto que las rodea para resistir las tensiones y esfuerzos cortantes generados en él y la presencia de refuerzo transversal que proporcione una acción confinante. Un aspecto importante del comportamiento de traslapes es el agrietamiento que se forma en las terminaciones de las barras debido a las concentraciones de esfuerzo creadas por la discontinuidad del refuerzo.

El efecto adverso del agrietamiento prematuro en las terminaciones de las barras, y el agrietamiento adicional de flexión que se forma dentro de la longitud de traslape, indicado por algunos estudios experimentales [9.16], han llevado a que las longitudes de traslape especificadas por algunos reglamentos, como el del ACI *318*-02, sean mayores que las lon-

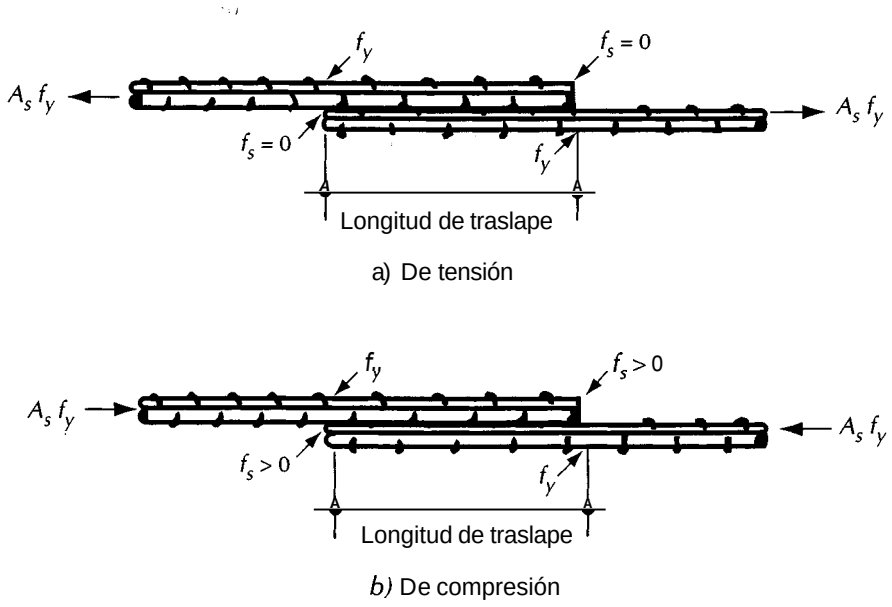


Figura 9.27 Empalmes por traslape.

gitudes de desarrollo. A ello ha contribuido también el hecho de que la distancia entre barras se reduce en la zona de traslape, pudiendo provocarse el agrietamiento ilustrado en la figura 9.6*c*. Sin embargo, según estudios más recientes [9.7, 9.9, 9.101, las longitudes requeridas para desarrollo y traslape son iguales, siempre que sean iguales el diámetro de la barra, el recubrimiento, el espaciamiento libre y la resistencia del concreto.

El comportamiento de traslapes de barras en compresión es más favorable que el de barras en tensión, por dos razones. Primero, no existe el agrietamiento de flexión. En segundo lugar, los extremos de las barras se apoyan directamente sobre el concreto (figura 9.276) y, por tanto, los esfuerzos no empiezan a desarrollarse desde un valor nulo, sino desde un valor que depende de los esfuerzos de apoyo directo. Se ha demostrado experimentalmente que este valor puede ser importante. Por estas razones, las especificaciones de los reglamentos son menos severas en el caso de traslapes de barras de compresión que en el de traslapes de barras de tensión.

Se resumen a continuación algunas recomendaciones típicas relativas a traslapes.

Reglamento ACI-318-02

Según este Reglamento, sólo se permite recurrir a empalmes por medio de traslapes en barras del No. 11 o menores.

Para traslapes de barras en tensión se distinguen dos tipos o clases de acuerdo con lo indicado en la tabla 9.4.

La longitud de traslape necesaria es función de la longitud de desarrollo, L_d, definida en la sección 9.6.1, de acuerdo con las siguientes reglas:

Traslape de clase A	1.0 L_d
Traslape de clase B	1.3 L_d

Se fija el traslape mínimo admisible en 30 cm.

Para barras en compresión, la longitud de traslape será igual a 0.0048 $f_y d_b$ [0.049 $f_y d_b$ en sistema SI] para acero con límite de fluencia de 4200 kg/cm^2 o menor; e igual a

Tabla 9.4 Tipos de traslapes de barras en tensión según el Reglamento ACI 318-02.

Acero disponible* / Acero requerido	Porcentaje máximo de acero traslapado dentro de la longitud de traslape requerida	
	50	100
Igual o mayor que 2	Clase A	Clase B
Menor que 2	Clase B	Clase B

*Relación entre el área disponible y el área requerida por análisis en la sección donde de efectúa el empalme.

(0.0086 f_y – 24) d_b [(0.088f_y – 24) d_b en sistema SI] para acero con límite de fluencia superior a 4200 kg/cm^2. En ningún caso la longitud de traslape será inferior a 30 cm, y los valores anteriores se incrementarán en un tercio si el concreto tiene una resistencia f'_c menor a 210 kg/cm^2.

La aplicación de estas recomendaciones implica que la localización y tamaño de los traslapes esté claramente indicada en los planos de construcción.

NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal

Para barras en tensión este Reglamento especifica que la longitud de traslape no debe ser menor que 1.33 veces la longitud de desarrollo calculada según la sección 9.6.3, ni menor que (0.01f_y – 6) d_b, en donde f_y se expresa en kg/cm^2 [(0.102 f_y – 6) d_b sistema SI]. Cuando se traslapa más de la mitad del refuerzo en un tramo de 40 diámetros, se recomienda que se tomen precauciones especiales, tales como aumentar la longitud de traslape y utilizar refuerzo transversal con separaciones pequeñas.

Para barras en compresión se recomienda que la longitud traslapada no sea menor que la longitud de desarrollo para estas barras según lo indicado en la sección 9.6.2 ni menor que (0.01 f_y – 10) d_b [(0.32 f_y – 10) d_b en sistema SI].

9.10.2 Empalmes soldados o por medio de dispositivos mecánicos

Para empalmar barras de diámetros grandes, es aconsejable evitar los empalmes por traslape y recurrir a empalmes a base de soldadura o por medio de dispositivos mecánicos apropiados. Los reglamentos suelen exigir que los empalmes de esta clase sean capaces de desarrollar el 125 por ciento del esfuerzo de fluencia cuando se utilizan en regiones donde el refuerzo está sujeto al esfuerzo máximo. En regiones donde el esfuerzo del acero es bajo, no es necesario cumplir con este requisito.

Según el Reglamento ACI 318-02, los empalmes soldados deben realizarse de acuerdo con las recomendaciones de la American Welding Society 19.201. Debe tenerse especial cuidado en el caso de barras de alta resistencia trabajadas en frío.

Existe una gran variedad de dispositivos mecánicos para empalme de barras tanto en tensión como en compresión. En la referencia 9.21 se describen algunos de los más importantes. En el caso de barras en compresión, cuando no exista riesgo de que puedan presentarse tensiones, se permite la transmisión de esfuerzos por contacto directo de los extremos, siempre que éstos sean planos y normales al eje de las barras y que se mantengan en posición mediante dispositivos adecuados.

9.11 Corte y doblado de barras

El refuerzo longitudinal de vigas de concreto reforzado puede variarse a lo largo de su longitud de acuerdo con la variación del momento. Esto puede efectuarse cortando barras o doblándolas a 45° y haciéndolas continuas con el refuerzo del lado opuesto.

La capacidad para resistir momento de una sección, puede expresarse por medio de la ecuación

$$M_n = A_s f_y z \qquad (9.24)$$

donde z es el brazo del par interno, formado por la fuerza de tensión desarrollada por el acero y la fuerza de compresión correspondiente al concreto. (Esto será cierto siempre que se cuente con una longitud de desarrollo adecuada a cada lado de la sección en estudio.) El brazo del par interno, z, varía poco y nunca es menor que el correspondiente a la sección de momento máximo. Por tanto, puede suponerse que el acero requerido en las diversas secciones es directamente proporcional al momento correspondiente; o, de otra manera, que el diagrama del acero necesario en las distintas secciones tiene la misma forma que el diagrama de momentos. Esto permite determinar fácilmente los puntos teóricos donde pueden cortarse o doblarse barras.

Considérese, por ejemplo, la viga simplemente apoyada con carga uniformemente repartida de la figura 9.28. Supóngase que se desea cortar primero la barra central, luego otras dos barras y prolongar las dos barras restantes hasta los apoyos. (Es aconsejable hacer los cortes de barras de manera que el refuerzo quede simétrico en todas las secciones de una viga.) Puesto que el diagrama de momentos es parabólico, es sencillo determinar analíticamente las distancias x_1 y x_2 correspondientes, respectivamente, a los puntos teóricos de corte de la primera barra cortada y al par de barras siguientes. También es posible determinar estos puntos gráficamente trazando líneas horizontales en la forma indicada en la figura; las intersecciones de estas horizontales con el diagrama definen los puntos deseados.

En el ejemplo de la figura 9.28 se supuso que el área de acero propuesta coincidía con la teóricamente necesaria. En el voladi-

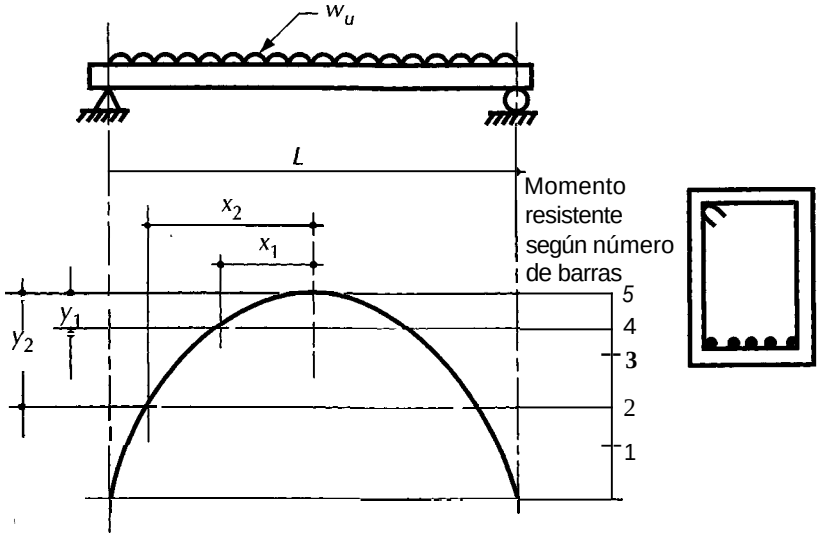


Figura 9.28 Corte de barras en una viga simplemente apoyada con carga uniforme.

zo de la figura 9.29 el área del refuerzo es mayor que la que pide el cálculo. Se trata aquí de cortar dos de las cuatro barras propuestas. La forma de proceder es semejante a la descrita para la viga simplemente apoyada. Cuando los diagramas de momento no corresponden a una ley matemática sencilla, los métodos.gráficos son los apropiados.

Las barras de refuerzo no deben cortarse en las secciones donde dejan de ser necesarias de acuerdo con los diagramas teóricos de momento flexionante. Se debe esto a las incertidumbres que se tienen sobre la magnitud y distribución de las cargas actuantes, a las aproximaciones usuales en el análisis estructural, a los efectos de asentamientos diferenciales de los apoyos y otros efectos similares. Por otra parte, como se señaló en el inciso 7.3.1 y se aprecia en la figura 7.7, las grietas inclinadas debidas a tensión diagonal producen un desplazamiento del esfuerzo en el acero. Por estas razones los códigos recomiendan que las barras se prolonguen una cierta distancia más allá de los puntos teóricos de corte. El Reglamento ACI 318-02, por ejemplo, indica que la longitud adicional sea por lo menos igual al peralte efectivo, d, o 12 veces el diámetro de la barra, d_b. Algunos autores, como Winter [9.22] y Ferguson [9.23], son aún más conservadores y opinan que estos valores deben sumarse a la longitud de desarrollo L_d.

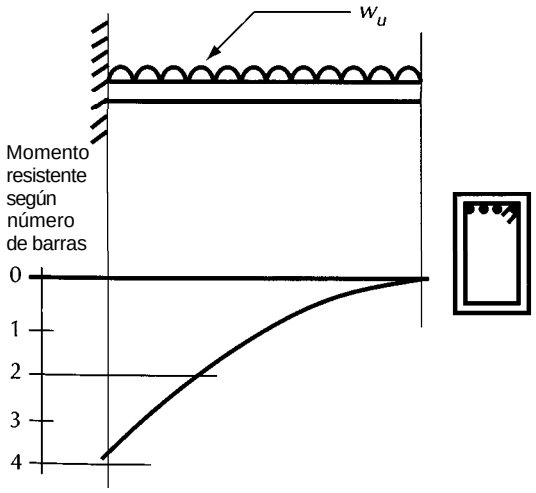


Figura 9.29 Corte de barras en un voladizo en que el refuerzo propuesto es superior al teóricamente necesario.

Además de lo anterior, los reglamentos suelen establecer algunos requisitos adicionales. Así, por ejemplo, el Reglamento ACI 318-02 recomienda que el refuerzo que queda, una vez que se han cortado una o varias barras, se prolongue una distancia igual a L_d más allá de la sección donde el esfuerzo interrumpido no se requiere para resistir momento. En cambio, según las NTC-04, esta distancia debe ser igual a L_d + d. Según el Reglamento ACI 318-02, por lo menos la tercera parte del refuerzo negativo debe prolongarse más allá del punto de inflexión una distancia no inferior al mayor de los siguientes valores: el peralte efectivo del miembro, 12 veces el diámetro de las barras, o 1/16 del claro libre.

En la figura 9.30, basada en la referencia 9.24, se muestran los principales requisitos del Reglamento ACI 318-02 relativos al corte de barras.

Como se indicó en la sección 7.6.1b, el corte de barras en las regiones de las vigas sujetas a tensión produce concentraciones de esfuerzos que pueden ocasionar agrietamientos prematuros. Por ello los códigos suelen establecer alguna restricción a esta práctica. El Reglamento ACI 318-02, por ejemplo, sólo la permite si se cumple alguna de las siguientes condiciones que fueron brevemente reseñadas en la sección citada:

a) La fuerza cortante actuante en la sección donde se efectúa el corte de barras no es superior a las dos terceras partes de la resistencia de diseño a cortante de la sección.
b) Se proporciona refuerzo transversal adicional a lo largo de la barra interrumpida en un tramo igual a 0.75 veces el peralte efectivo medido desde el punto de corte. El refuerzo transversal adicional requerido A_s está dado por

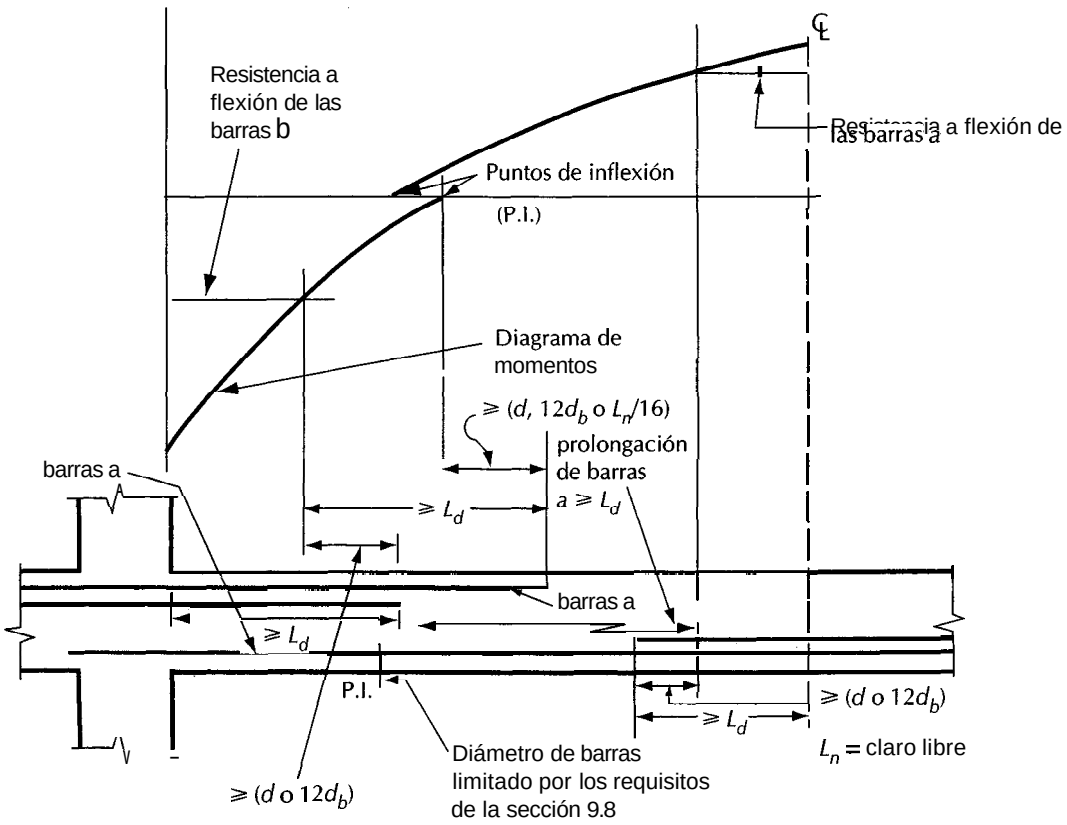


Figura 9.30 Requisitos principales para el corte de barras según ACI 318-02.

$$A_v = \frac{4.2\,bs}{f_y} \qquad (9.25)$$

$$A_v = \frac{0.41\,bs}{f_y} \qquad (9.25SI)$$

Suponiendo conocido A_v, el espaciamiento máximo será:

$$s = \frac{A_v f_y}{4.2\,b} \qquad (9.26)$$

$$s = \frac{A_v f_y}{0.41\,b} \qquad (9.26SI)$$

Por lo tanto, el número de estribos a colocar en la distancia 0.75 d será:

$$N = \frac{0.75\,d}{s} + 1 \qquad (9.27)$$

$$N = \frac{0.75\,d}{A_v f_y / 4.2\,b} + 1 \qquad (9.28)$$

$$N = \frac{0.75\,d}{A_v f_y / 0.41\,b} + 1 \qquad (9.28SI)$$

$$N = \frac{3.15\,bd}{A_v f_y} + 1 \qquad (9.29)$$

$$N = \frac{0.31\,bd}{A_v f_y} + 1 \qquad (9.29SI)$$

Además, el espaciamiento s no debe ser superior a $d/8\beta_b$, donde β_b es la relación entre el área del refuerzo que se corta y el área total del refuerzo en la sección. Por tanto se tendrá

$$N = \frac{0.75\,d}{(d/8\beta_b)} + 1 = 6\beta_b + 1 \qquad (9.30)$$

$$N = \frac{0.31\,bd}{A_v f_y} + 1 = 6\beta_b + 1 \qquad (9.30SI)$$

Regirá el mayor número de estribos dado por las expresiones *9.29* y *9.30.*

c) El refuerzo que continúa proporciona el doble del área requerida por flexión en la sección de corte y la fuerza cortante actuante es inferior a *0.75* de la resistencia de diseño a fuerza cortante disponible.

La aplicación de estos requisitos se ilustra en el ejemplo *9.3.*

Con frecuencia, en lugar de intentar satisfacer alguna de estas condiciones resulta preferible prolongar la barra o barras que se cortan hasta alcanzar una zona comprimida, doblarlas para anclarlas en el lado opuesto o hacerlas continuas con el refuerzo de este lado.

9.12 Anclaje del refuerzo transversal

El refuerzo transversal requerido por fuerza cortante o torsión debe estar anclado de manera que se disponga de su capacidad máxima a medio peralte de la viga. Para un comportamiento adecuado, este refuerzo debe llegar tan cerca de las caras de compresión y de tensión como lo permitan los del recub y l i d de otro refuerzo, y terminarse en ganchos estándar para estribos de acuerdo con lo mostrado en la 9.31 Las barras longitudinales que se doblan para utilizarlas como refuerzo del alma, deben continuarse como refuerzo longitudinal cerca de la cara opuesta si esta zona está en tensión. Si se trata de una zona en compresión, la barra deberá prolongarse una longitud L_d, más allá del medio peralte de la viga. Las recomendaciones de las *NTC-04* son semejantes. En las *NTC* se especifican estribos cerrados con dobleces de *135* grados en sus extremos.

9.13 Ejemplos

En los siguientes ejemplos se ilustran algunos aspectos del detallado del refuerzo y de la revisión de los requisitos de anclaje. El capítulo sobre dimensionamiento contiene ejemplos adicionales.

Ejemplo 9.1

La viga de este ejemplo es una viga libremente apoyada con una carga uniforme, por

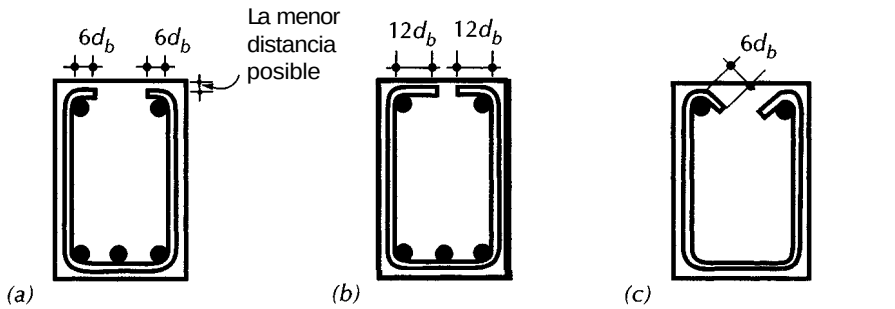


Figura 9.31 Anclaje de refuerzo transversal de acuerdo con el Reglamento ACI 318-02.

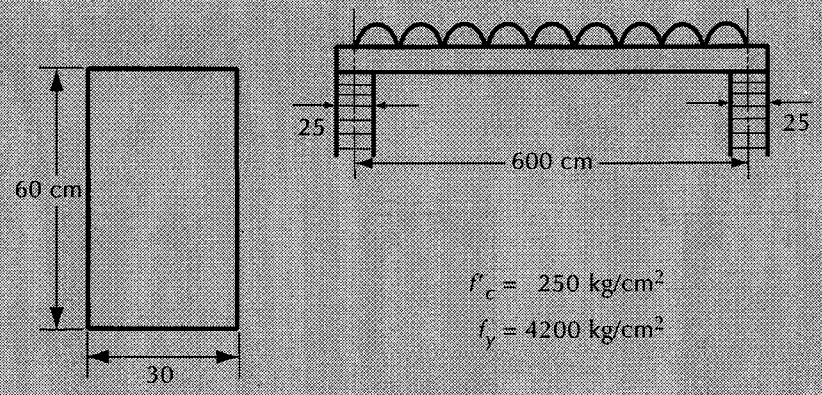
lo que la sección crítica por momento está situada en el centro del claro. De acuerdo con un cálculo previo, el acero requerido en el centro del claro es A_s = 22 cm^2. Se trata de proponer un armado tal que la longitud de desarrollo necesaria sea inferior a la longitud disponible, que en el ejemplo es igual a la distancia desde el centro del claro hasta el centro del apoyo, más la longitud adicional que puede prolongarse el esfuerzo más allá del centro del apoyo. Esta longitud adicional es igual a la distancia desde el centro del apoyo hasta el extremo de la viga menos el recubrimiento que se considere conveniente, cinco centímetros en este caso.

Como armado se propusieron tres barras del No. 10, que dan un área de acero, A_{sp} = 23.8 cm^2, ligeramente superior a la requerida. Suponiendo un recubrimiento libre de 5 cm, se comprobó que la distancia centro a centro de barras es 8.4 cm. El espaciamiento libre se calculó después como la diferencia entre el espaciamiento centro a centro y el diámetro de las barras.

Después se calculó la longitud de desarrollo requerida por las barras longitudinales de la viga. Ya que no se cumple ninguno de los mínimos mostrados en la figura 9.20 para separaciones entre barras y recubrirnientos, y para no revisar los requisitos mínimos para estribos, se usó la ecuación de la parte inferior de la tabla 9.1 correspondiente a barras del No. 7 y mayores. Los valores de a y β son iguales a 1, ya que son barras bajas, o de lecho inferior, y no están recubiertas con resina. La longitud de desarrollo requerida resultó menor que la disponible, por lo que las barras pueden desarrollar su esfuerzo de fluencia en la longitud disponible. Si no hubiese sido el caso, se podría haber revisado si se satisfacen los requisitos mínimos de estribos, para usar la ecuación de la parte superior de la tabla 9.1, o usar la ecuación 9.14. Con ambas alternativas se obtienen menores longitudes de desarrollo requeridas. En la parte final del ejemplo, se calculó la longitud de desarrollo con la ecuación 9.14, con fines de ilustración.

EJEMPLO 9.1 ***Requisitos de anclaje en la sección de una viga libremente apoyada.***

DATOS



f'_c = 250 kg/cm^2

f_y = 4200 kg/cm^2

Estribos del No. 3 @ 20 cm en toda la longitud de la viga

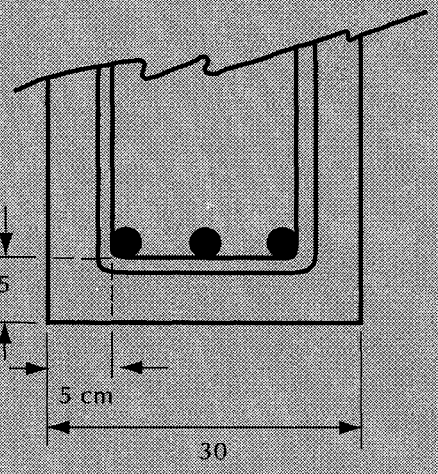
Recubrimiento libre del refuerzo principal: 5 cm < ($2d_b$ = 6.4 cm)

Acero requerido por flexión:

A_{sr} = 22 cm^2

EJEMPLO 9.1 ***(continuación)***

ARMADO PROPUESTO



Ensayar 3 barras No. 10

A_{sp} = 23.8 cm^2

d_b = 3.18 cm

A_b = 7.92 cm^2

Espaciamiento centro a centro de las barras:

$$\text{esp.} = \frac{30 - 2 \times 5 - 3.18}{2} = 8.4 \text{ cm}$$

espaciamiento libre = 8.4 − 3.18 = 5.22 < ($2d_b$ = 6.36 cm)

LONGITUD DE DESARROLLO SEGÚN REGLAMENTO ACI 318-02

$$L_d = \frac{f_y\,\alpha\beta}{3.5\sqrt{f'_c}}\,d_b$$ (Tabla 9.1)

$$L_d = \frac{3.18 \times 4200 \times 1.0 \times 1.0}{3.5\sqrt{250}}$$

L_d = 241 cm

$$\text{Longitud disponible} = \frac{600}{2} + (12.5 - 5) = 307.5 \text{ cm} > 241 \text{ cm}$$

EJEMPLO 9.1 *(continuación)*

LONGITUD DE DESARROLLO USANDO LA ECUACIÓN 9.14

$$L_d = \frac{1}{3.5}\frac{f_y}{\sqrt{f'_c}}\frac{\alpha\beta\lambda}{\left(\frac{c+K_{tr}}{d_b}\right)}d_b \qquad \text{(ecuación 9.14)}$$

$$\alpha = 1, \quad \beta = 1, \quad \lambda = 1$$

$$c = \begin{cases} 5.0 + 1.6 = 6.6 \\ 8.4/2 = 4.2 \end{cases}$$

$$K_{tr} = \frac{A_{tr} f_y}{100\, sn} \qquad \text{(ecuación 9.15)}$$

$$A_{tr} = 2 \times 0.71 = 1.42 \text{ cm}^2$$

$$s = 20 \text{ cm}$$

$$n = 3$$

$$K_{tr} = \frac{1.42 \times 4200}{100 \times 20 \times 3} = 0.994$$

$$L_d = \frac{3.18 \times 4200 \times 1 \times 1 \times 1}{3.5 \times \sqrt{250}\left(\frac{4.2 + 0.994}{3.18}\right)} = 148 \text{ cm}$$

$$\frac{4.2 + 0.994}{3.18} = 1.63 < 2.50$$

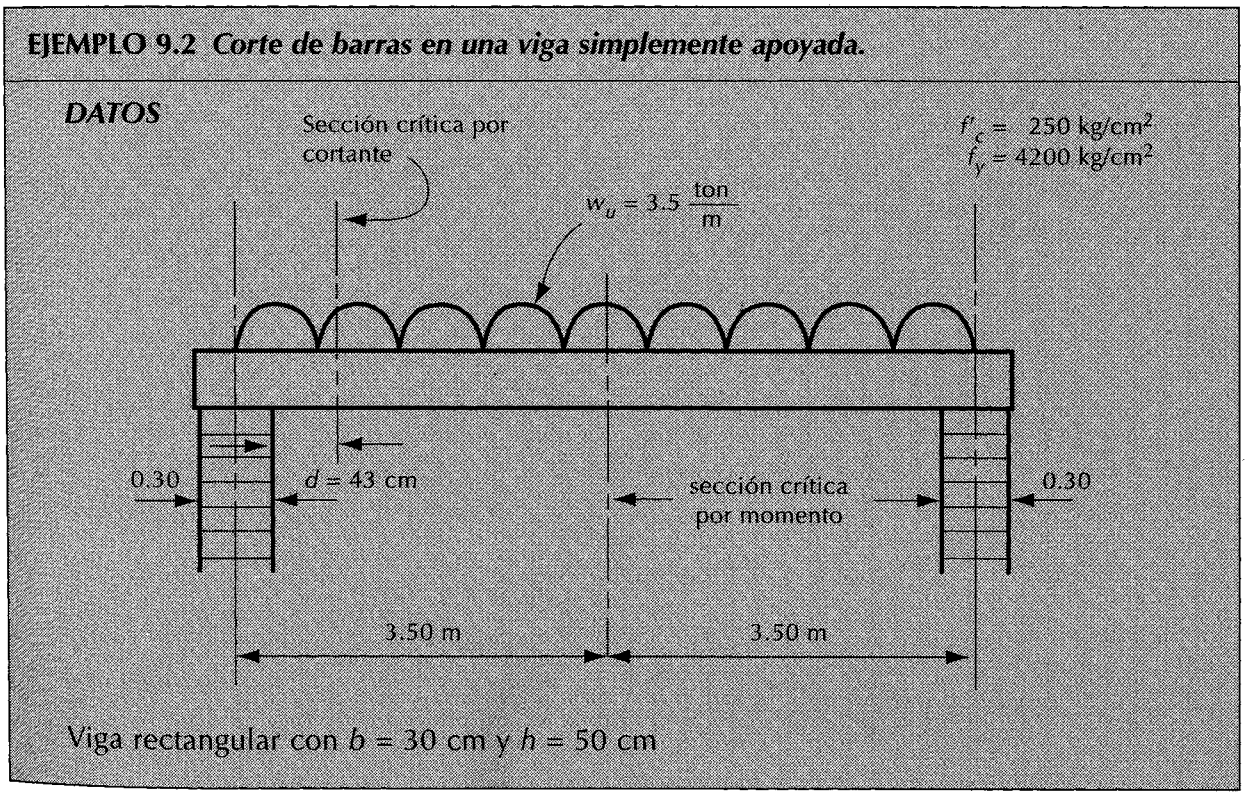
En la ecuación 9.14, los valores de α, β y λ son iguales a la unidad, ya que son barras bajas, no están recubiertas con resina y son mayores que el No. 7. El valor de c se calculó como las distancias del centro de la barra a los paños lateral e inferior de la viga, que son iguales, y la mitad centro a centro de barras. Se tomó el menor valor que correspondió al segundo caso. Para calcular el índice K_{tr}, el término A_{tr} se tomó como dos veces el área de una barra No. 3, ya que esto corresponde a estribos de dos ramas; la separación de estribos, s, es la indicada en los datos, o sea, 20 cm; y n es el número de barras longitudinales, o sea, 3. De esta manera se obtuvo un valor de K_{tr} de 0.994 y uno de L_d de 148 cm. Se puede ver que para este caso particular, la longitud de desarrollo calculada con la ecuación 9.14 resultó significativamente menor que la calculada con la ecuación más sencilla de la tabla 9.1. Obsérvese que en este ejemplo no se hizo ninguna corrección por ser el área de acero longitudinal proporcionada mayor que la requerida, ya que la diferencia es muy pequeña.

Ejemplo 9.2

Se trata en este ejemplo de ilustrar la determinación de los puntos de corte de barras en una viga simplemente apoyada. Los cálculos se hicieron de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI 318-02. El refuerzo requerido para la sección dada fue 14.83 cm^2. Como armado se propusieron cuatro barras del No. 7 que dan un área de 15.48 cm^2, colocadas en un lecho. Se determinó el punto donde teóricamente dejan de ser necesarias dos de las barras con base en las propiedades de la parábola, puesto que el diagrama de momentos de la viga del ejemplo es parabólico. Para ello fue necesario calcular la resistencia desarrollada por dos barras. El procedimiento seguido se aprecia en el croquis de la tercera hoja de cálculo. Como mínimo las barras cortadas deben prolongarse más allá del punto teórico una distancia igual al mayor de los valores del peralte efectivo y de 12 veces el diámetro de la barra. Rigió en el ejemplo el peralte efectivo, resultando así la distancia de corte a partir del centro de la viga igual a 2.77 m.

Para comprobar si las longitudes disponibles eran suficientes para desarrollar la capacidad requerida se calculó la longitud de desarrollo que resultó de 106 cm. Ya que se satisfacen los requisitos de la figura 9.20, se usó la ecuación de la parte superior de la tabla 9.1, correspondiente a barras No. 7 y mayores. El valor de 106 cm se necesitó también para revisar los requisitos de anclaje en los apoyos. En el croquis de la hoja de cálculo 4 se muestra el armado propuesto y el diagrama de momento resistente correspondiente a este armado. Obsérvese que se supuso que las barras desarrollan su capacidad linealmente en una longitud igual a la longitud de desarrollo a partir de su extremo. Se aprecia que el diagrama de momento resistente requerido teóricamente queda ampliamente cubierto por el de resistencia a momento proporcionado por el armado pro-

EJEMPLO 9.2 ***Corte de barras en una viga simplemente apoyada.***



EJEMPLO 9.2 ***(continuación)***

FUERZA CORTANTE Y MOMENTO EN LAS SECCIONES CRÍTICAS

$$V_u = w_u \left(\frac{L}{2} - 0.15 - 0.43 \right) = 3.5 \times 2.92 = 10.22 \text{ ton}$$

$$M_u = \frac{w_u L^2}{8} = \frac{3.5 \times 7^2}{8} = \underline{\underline{21.4}} \text{ ton-m}$$

CÁLCULO DEL ACERO REQUERIDO

$$\frac{M_u}{\phi\, bd^2 f'_c} = \omega (1 - 0.59\ \omega)$$

$d = h$ – recubrimiento = 50 – 7 = 43 cm

$$\frac{M_u}{\phi\, bd^2 f'_c} = \frac{21.4 \times 10^5}{0.9 \times 30 \times 43^2 \times 250} = 0.171$$

$$0.171 = \omega - 0.59\ \omega^2$$

$$\omega^2 - 1.695\ \omega + 0.291 = 0$$

$$\omega = 0.194$$

$$\rho = \omega \frac{f'_c}{f_y} = 0.194 \frac{250}{4200} = 0.0115$$

$$A_{sr} = 0.0115 \times 30 \times 43 = \underline{\underline{14.83}} \text{ cm}^2$$

Usar 4 barras del No. 7 = 15.48 cm^2 = A_{sp}

$A_b = 3.87$ cm^2; $d_b = 2.22$ cm

ESTRIBOS

$$V_c = 0.5 \sqrt{f'_c}\ bd$$

$$= 0.5 \sqrt{250} \times 30 \times 43 = 10{,}200 \text{ kg} \doteq 10{,}220 \text{ kg}$$

Usar estribos del No. 2.5 @ 20 cm $< \frac{d}{2}$

$$A_{v\min} = \frac{3.5\, bs}{f_y} = \frac{3.5 \times 30 \times 20}{4200} = 0.5 \text{ cm}^2 < 0.98 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 9.2 ***(continuación)***

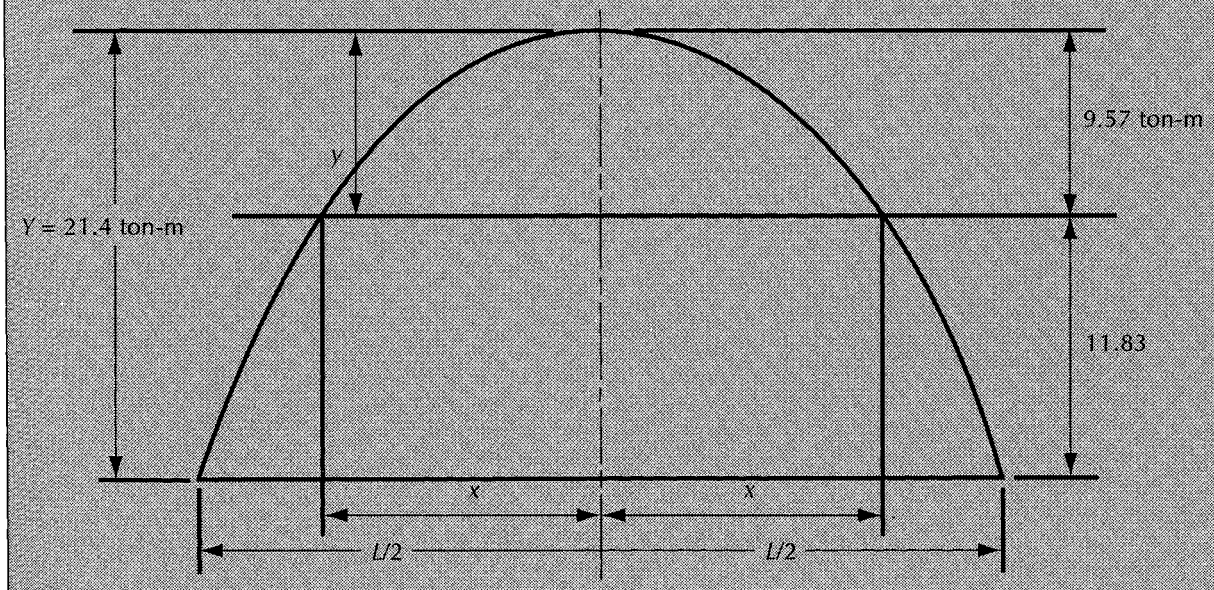
PUNTO TEÓRICO DE CORTE DE DOS BARRAS

Capacidad para resistir momento de 2 barras

$M_{u\ 2\ \text{barras}} = \phi\ bd^2\ f'_c\ \omega(1 - 0.59\ \omega)$

$$\omega = \rho\ \frac{f_y}{f'_c} = \frac{2 \times 3.87}{30 \times 43} \times \frac{4200}{250} = 0.1008$$

$$M_{u\ 2\ \text{barras}} \begin{cases} = 0.9 \times 30 \times 43^2 \times 250 \times 0.1008\ (1 - 0.59 \times 0.1008) \\ = 1{,}183{,}240\ \text{kg-cm} = 11.83\ \text{ton-m} \end{cases}$$



$$M_{u\ 4\ \text{barras}} \begin{cases} = 2 \times 11.83 \\ = 23.66\ \text{ton-m} \end{cases}$$

$$\frac{y}{Y} = \frac{x^2}{(L/2)^2};\ \frac{9.57}{21.4} = \frac{x^2}{3.5^2}$$

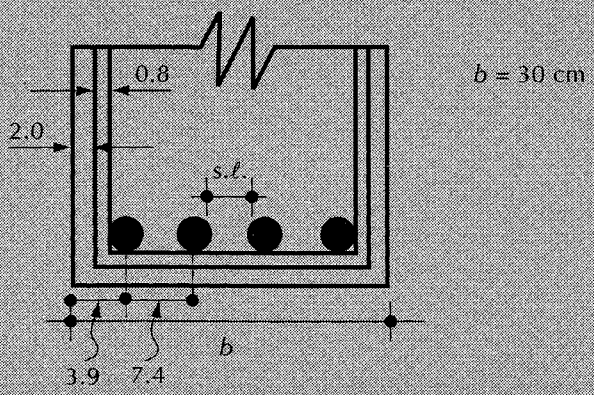
$x = 2.34$ m

$$\begin{cases} d = 43\ \text{cm} \\ 12\ d_b = 12 \times 2.22 = 26.6 < 43\ \text{cm} \end{cases}$$

Distancia de corte a partir del centro = 2.34 + 0.43 = 2.77 m

EJEMPLO 9.2 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE SEPARACIONES Y RECUBRIMIENTOS



$$s.\ell. = \frac{1}{3}\,[30 - (2 \times 2.0) - (2 \times 0.8) - (4 \times 2.22)] = 5.2 \text{ cm} > (2d_b = 4.44 \text{ cm})$$

Recubrimiento mínimo = 2.8 cm > (d_b = 2.22 cm)

LONGITUD DE DESARROLLO

(Según ACI 318-02)

$$L_d = \frac{f_y\,\alpha\beta}{5.3\sqrt{f'_c}}\,d_b$$

$$L_d = \frac{2.22 \times 4200 \times 1 \times 1}{5.3\sqrt{250}}$$

$$L_d = 111 \text{ cm}$$

Corrección por acero proporcionado:

$$L_d = \frac{14.83}{15.48} \times 111 = 106 \text{ cm}$$

EJEMPLO 9.2 ***(continuación)***

REVISIÓN DE LOS REQUISITOS DE ANCLAJE EN LOS APOYOS

$$L_d \leq 1.3\,\frac{M_n}{V_u} + L_a$$

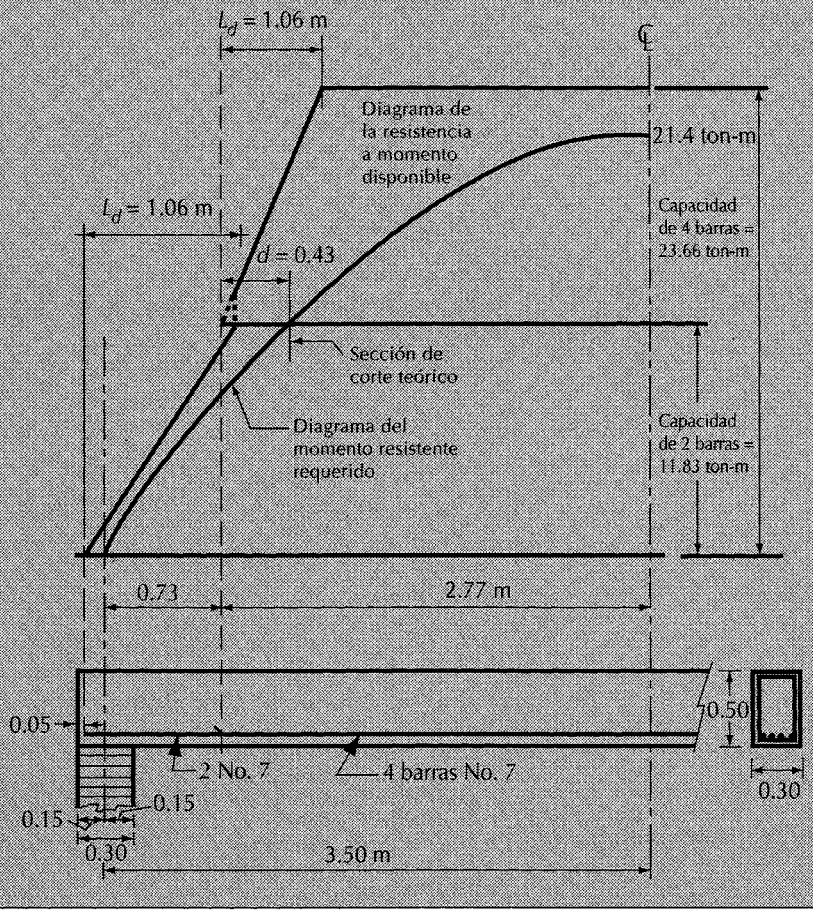
$$M_n = \frac{11.83}{\phi} = \frac{11.83}{0.9} = 13.14 \text{ ton-m}$$

L_a = 15 cm – recubrimiento = 15 – 5 = 10 cm

$$1.3\,\frac{13.14}{10.22} + 0.10 = 1.77 \text{ m} > L_d = 1.06 \text{ m}$$

Por lo tanto el anclaje en el apoyo es adecuado. Se cumple también que por lo menos la tercera parte del acero penetra una distancia de 15 cm en el apoyo, ya que la mitad del acero se prolonga hasta el apoyo y penetra en el mismo a una distancia igual a 30 – 5 = 25 cm.

DIAGRAMA DE RESISTENCIA Y CROQUIS DE CORTE DE BARRAS



EJEMPLO 9.2 ***(continuación)***

REVISIÓN REQUISITOS ACI 318-02 POR CORTE DE BARRAS EN LA ZONA DE TENSIÓN

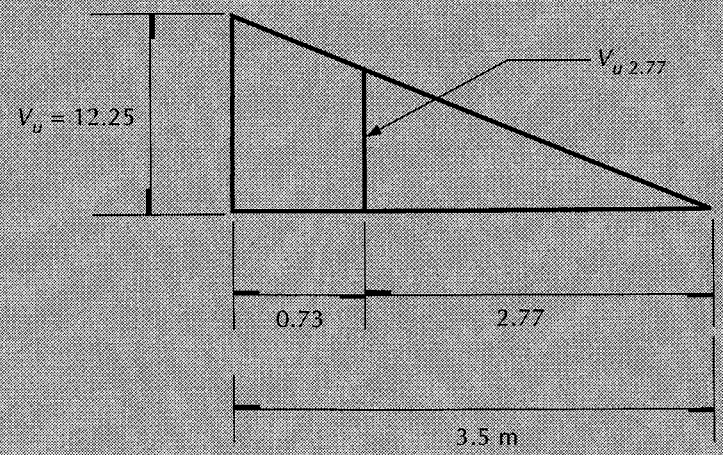
$V_n = V_c + V_s$

$V_c = 10{,}200$ kg

$$V_s = \frac{A_v f_y d}{s} = \frac{0.98 \times 4200 \times 43}{20} = 8850 \text{ kg}$$

$V_n = 10{,}200 + 8850 = 19{,}050$ kg

V_u en sección de corte:



$$V_u = 12.25 \frac{2.77}{3.50} = 9.70 \text{ ton}$$

$$\frac{V_u}{\phi V_n} = \frac{9.70}{0.85 \times 19.05}$$

$$= 0.60 < \frac{2}{3}$$

$\therefore$ No se requiere refuerzo transversal adicional.

puesto. Es interesante observar que las dos barras que se continúan hasta el apoyo desarrollan su esfuerzo de fluencia en una longitud de 106 cm, lo cual lleva a una sección localizada más allá de la sección de corte de las otras dos barras. Sin embargo, esta sección se localiza antes de la sección de corte teórico.

Para revisar los requisitos de anclaje en los apoyos se utilizó la ecuación 9.23 incrementando la relación M_n/V_u en 30 por ciento, puesto que existe una acción de compresión que produce un efecto confinante. El valor de M_n se calculó suponiendo el área de acero real utilizada.

Puesto que el corte se efectuó en una zona de tensión, fue necesario satisfacer alguno de los requisitos reseñados en las secciones 7.6.1b y 9.11. Se comprobó que el cortante en la sección donde se cortan las barras es inferior a las 2/3 partes de la resistencia a cortante disponible, por lo que no fue necesario proporcionar refuerzo transversal adicional.

Se comprobó también que las barras penetran en el apoyo más de los 15 cm que exige el Reglamento ACI 318-02, en apoyos libres, para al menos la tercera parte del refuerzo positivo total.

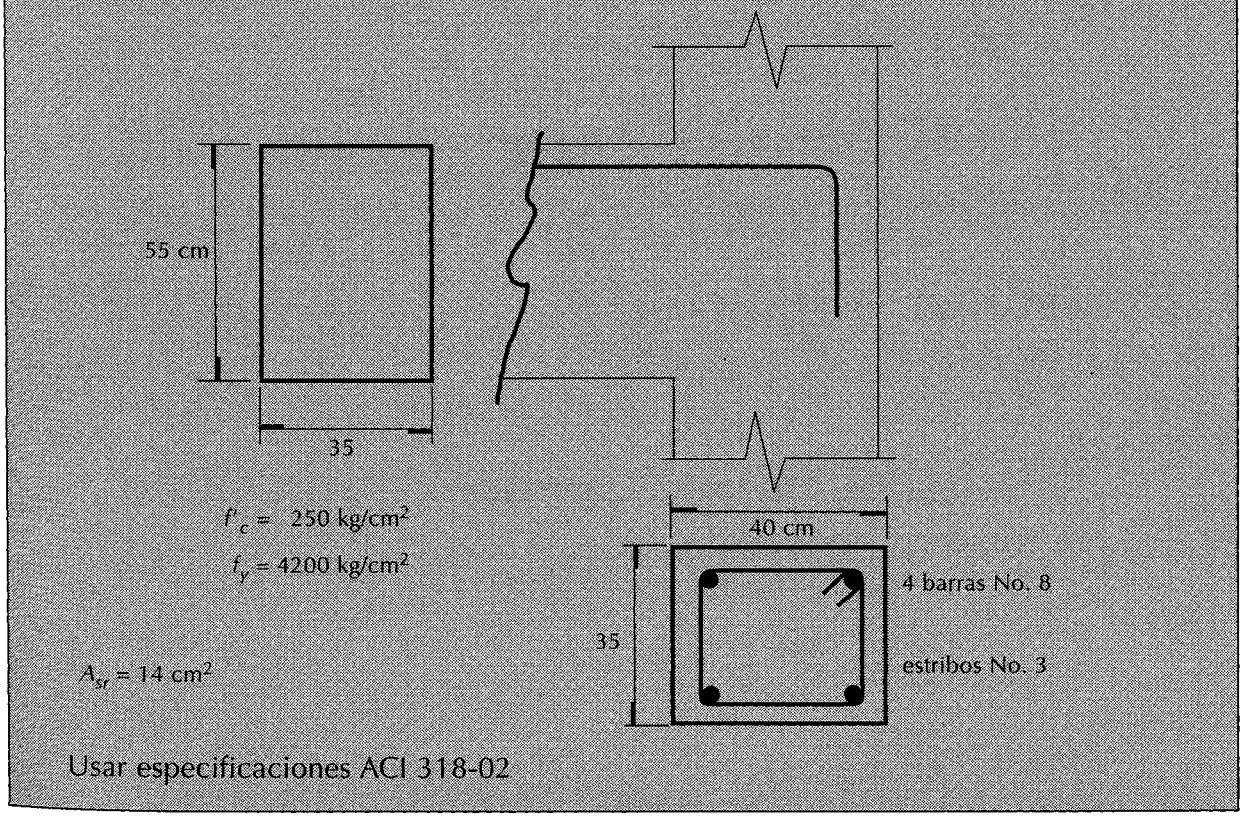
Ejemplo **9.3**

Se revisan en este ejemplo los requisitos de anclaje en la unión de una viga con una colum-

EJEMPLO 9.3 ***Anclaje en la unión de una viga con una columna.***

DATOS

Recubrimiento libre de barras principales de la columna = 5 cm



f'_c = 250 kg/cm²

f_y = 4200 kg/cm²

A_{sr} = 14 cm²

Usar especificaciones ACI 318-02

EJEMPLO 9.3 *(continuación)*

1a. ALTERNATIVA

Ensayar 2 barras del No. 10.

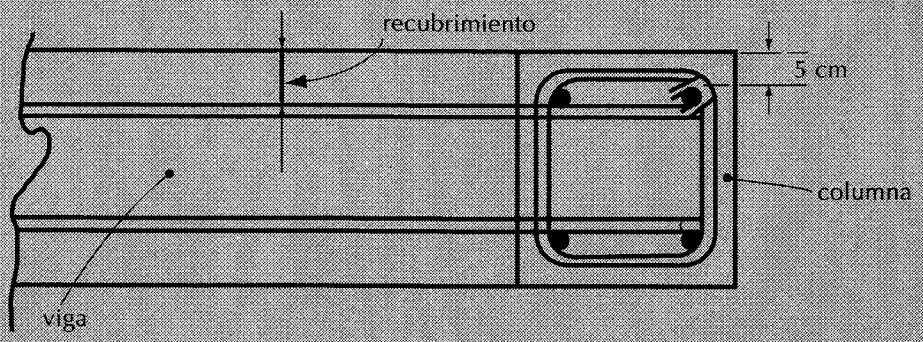
$$\begin{cases} A_{sp} = 15.88 \text{ cm}^2 \\ A_b = 7.94 \text{ cm}^2 \\ d_b = 3.18 \text{ cm} \end{cases}$$

Anclaje en la columna usando gancho estándar de 90°

$$L_{hb} = \frac{0.075\beta f_y d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad \text{(ecuación 9.17)}$$

$$L_{hb} = \frac{0.075 \times 4200 \times 3.18}{\sqrt{250}} = 63 \text{ cm}$$

Factores de modificación:



recubrimiento = 5 + 2.54 = 7.54 > 6 cm

$\therefore$ aplicar factor de modificación = 0.7

Por $A_{st} < A_{sp}$:

$$\frac{A_{st}}{A_{sp}} = \frac{14}{15.88} = 0.88$$

Longitud de desarrollo del gancho:

$$L_{dh} = 0.7 \times 0.88 \times L_{hb} = 0.7 \times 0.88 \times 63$$
$$L_{dh} = \underline{\underline{39}} \text{ cm}$$

Longitud disponible = 40 − 5 = $\underline{35}$ cm < $\underline{\underline{39}}$ cm

Por lo tanto la longitud disponible no es suficiente y deberán utilizarse barras de menor diámetro.

EJEMPLO 9.3 ***(continuación)***

2a. ALTERNATIVA

Ensayar 3 barras del No. 8.

$$\begin{cases} A_{sp} = 15.21\,\text{cm}^2 \\ A_b = 5.07\,\text{cm}^2 \\ d_b = 2.54\,\text{cm} \end{cases}$$

Anclaje con gancho estándar de 90°

$$L_{hb} = \frac{0.075 \times 4200 \times 2.54}{\sqrt{250}} = 51\,\text{cm}$$

Factores de modificación:

Por recubrimiento: 0.7

Por $A_{sr} < A_{sp}$: $\dfrac{A_{sr}}{A_{sp}} = \dfrac{14}{15.21} = 0.92$

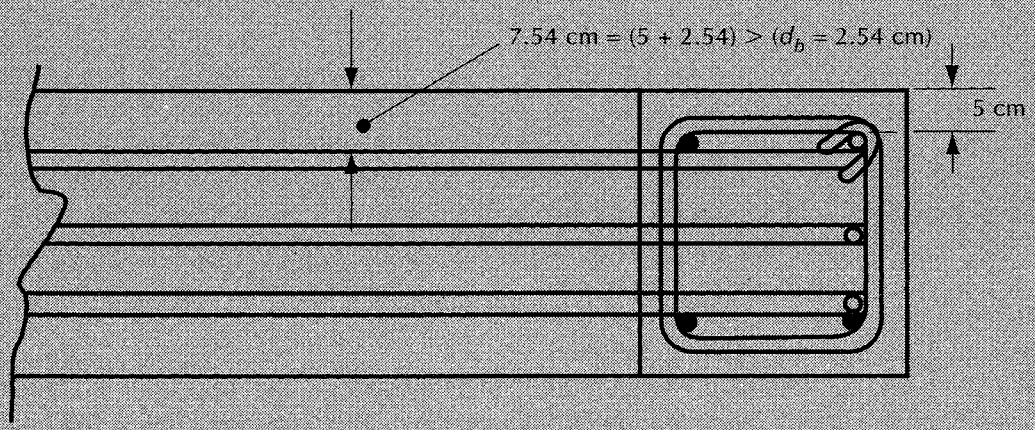
Longitud de desarrollo del gancho

$$L_{dh} = 0.7 \times 0.92 \times L_{hb} = 0.7 \times 0.92 \times 51$$
$$L_{dh} = \underline{\underline{33}}\ \text{cm}$$

Longitud disponible = $\underline{\underline{35}}$ cm > 33 cm

Por tanto esta alternativa es aceptable.

RECUBRIMIENTO Y ESPACIAMIENTO



EJEMPLO 9.3 ***(continuación)***

Separación libre entre barras:

$$s = \frac{35 - 2 \times 7.54 - 3 \times 2.54}{2} = 6.1 \text{ cm} > (2d_b = 5.08 \text{ cm})$$

LONGITUD DE DESARROLLO A LA IZQUIERDA DEL PAÑO DE LA COLUMNA

$$L_d = \frac{f_y \alpha \beta}{5.3\sqrt{f'_c}} d_b$$

$$\alpha = 1.3, \quad \beta = 1$$

$$L_d = \frac{2.54 \times 4200 \times 1.3 \times 1}{5.3\sqrt{250}} = 165 \text{ cm}$$

Corrección por área de acero proporcionada mayor que la requerida:

$$L_d = \frac{14}{15.21} \times 165 = 152 \text{ cm}$$

na siguiendo las indicaciones del Reglamento ACI 318-02. De acuerdo con un cálculo previo el refuerzo teóricamente requerido es $A_{sr} = 14 \text{ cm}^2$.

Se determinó primero el anclaje en la columna considerando que se recurrirá a un gancho de 90°. En una primera alternativa se ensayó un refuerzo consistente en dos barras del No. 10. Al comprobarse que el espacio disponible no era suficiente para alojar la longitud de desarrollo necesaria se ensayó un refuerzo con barras de un diámetro menor: tres barras del No. 8. Esta alternativa resultó adecuada.

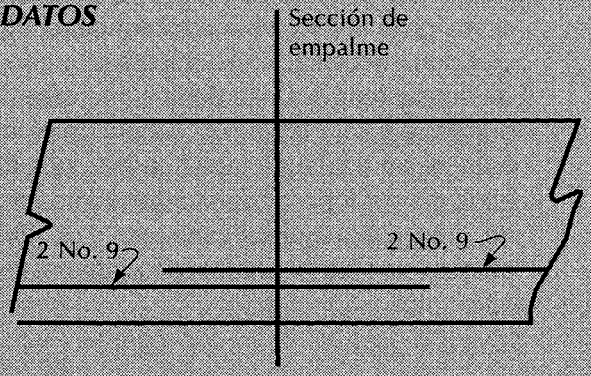
Se determinó también la longitud de desarrollo requerida para las barras del No. 8 a la izquierda de la unión de la viga con la columna. Aplicando los factores de modificación adecuados se obtuvo una longitud de 152 cm.

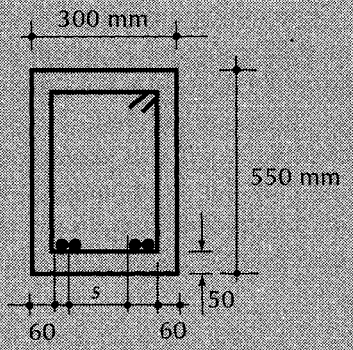
Ejemplo 9.4

Se ilustra en este ejemplo el cálculo de la longitud de traslape con el Reglamento ACI 318-02, usando el sistema SI. Se trata de

EJEMPLO 9.4 ***Longitud de traslape – Sistema SI.***

DATOS





Acero requerido en la sección de empalme:

$A_{sr} = 10 \times 10^2$ mm^2

Acero propuesto:

2 barras del No. 9
$A_{sp} = 12.84 \times 10^2$ mm^2
$A_b = 6.42 \times 10^2$ mm^2
$d_b = 28.6$ mm

Refuerzo transversal: estribos del No. 3 a cada 150 mm

$f'_c = 20$ MPa ; $f_y = 280$ MPa

LONGITUD DE TRASLAPE SEGÚN REGLAMENTO ACI 318-02

separación libre $= s = 300 - 120 - 3 \times 28.6 = 94.2$ mm $> 2\ d_b$

recubrimiento $= 50$ mm $> d_b$

Como se cumplen las condiciones de la figura 9.20:

$$L_d = \frac{28.6 \times 280 \times 1 \times 1}{1.7\sqrt{20}} = 1053 \text{ mm}$$

Determinación del tipo de traslape según la tabla 9.3

$$\frac{A_{sp}}{A_{sr}} = \frac{12.84}{10} = 1.28 < 2$$

Porcentaje de acero traslapado = 100 %

El traslape es Clase B

Longitud de traslape $= 1.3\ L_d = 1.3 \times 1053 = 1369$ mm

traslapar las dos barras del No. 9 que se han propuesto para reforzar la sección de una viga en la que el área de acero teóricamente necesaria es de 1000 mm^2.

Como se cumplen las condiciones de la figura 9.20, se usó la ecuación de la parte superior de la tabla 9.1 correspondiente a barras mayores del No. 7 y sistema SI. Los parámetros α y β son iguales a 1.

Al calcular la separación libre entre barras, se siguió una disposición del Reglamento ACI que establece que dicha separación debe ser igual a la separación libre fuera de la zona de traslape menos un diámetro de barra, d_b.

Después se calcularon la relación entre el acero propuesto y el acero requerido, A_{sp}/A_{sr}, y el porcentaje de acero traslapado, con el fin de determinar la clase de traslape que corresponde según la tabla 9.3. Se encontró que se trata de un traslape clase B, por lo que la longitud de traslape debe ser igual a la longitud de desarrollo multiplicada por 1.3. De esta manera se obtuvo una longitud de traslape de 1369 mm.

Referencias

9.1 Mains, R. M. "Measurement of the Distribution of Tensile and Bond Stresses along Reinforcing Bars". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, noviembre 1951.

9.2 Comité ACI 408. "Bond Stress - The State of the Art". Iournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, noviembre 1966.

9.3 Comité ACI 408. "Opportunities in Bond Research". Iournal of the Arnerican Concrete *Institute*. Detroit, noviembre 1970.

9.4 Goto, Y. "Cracks Formed in Concrete around Deformed Tension Bars". Iournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, abril 1971.

9.5 Lutz, LA., y P. Gergely. "Mechanics of Bond and Slip of Deformed Bars in Concrete". Iournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit,' noviembre 1967.

9.6 Comité ACI 408. "A Guide for the Determination of Bond Strength in Beam Specimens". Iournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, febrero 1964.

9.7 Orangun, C. D., J. O. Jirsay J. E. Breen. "A Reavaluation of Test Data on Development Length and Splices". Iournal of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, marzo 1977.

9.8 Minor, J. y J. O. Jirsa. "Behavior of Bent Bar Anchorages". Iournal of the Arnerican Concrete *Institute*. Detroit, abril 1975.

9.9 Jirsa, J. O., L A. Lutz y P. Gergely. "Rationale for Suggested Development, Splice, and Standard Hook Provisions for Deformed Bars in Tension". Concrete International. Detroit, julio 1979.

9.10 Comité ACI 408. "Suggested Development, Splice, and Standard Hook Provisions for Deformed Bars in Tension". Concrete International. Detroit, julio 1979.

9.11 Ferguson, P. M., R. D. Turpin y J. N. Thompson, "Minimum Bar Spacing as a Fuction of Bond Shear Strength". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, junio 1954.

9.12 Untrauer, R E, y R. L. Henry. "Influence of Normal Pressure on Bond Strength", *Journal* of the *American* Concrete Institute. Detroit, mayo 1965.

9.13 Ferguson, P. M., y J. N. Thompson. "Development Length of High Strength Reinforcing Bars in Bond". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, julio 1962.

9.14 Mathey, R.C., y D. Watstein. "Investigation of Bond in Beam and Pull-Out Specimens with High Yield Strength Deformed Bars". *Journal* of the Arnerican Concrete Institute. Detroit, marzo 1961.

9.15 Rehm, G. The Basic *Principles* of the Bond *between Steel* and Concrete. Traducción No. 134. Londres, Cement and Concrete Association, 1968.

9.16 Ferguson, P. M., y C. N. Krishnaswamy. *Tensile* Lap Splices, Part 2: *Design* Recornrnendations for *Retaining* Wall Splices and Large Bar Splices, Research Report No. 113-3. Austin, Center for Highway Research, University of Texas, abril 1971.

9.17 Marques, J. L, y J. O. Jirsa. "A Study of Hooked Bar Anchorages in Beam-Column Joints". Iournal of *the* Arnerican Concrete Institute. Detroit, mayo 1975.

9.18 Pinc, R. L., M. D. Walkins y J. O. Jirsa. Strength of Hooked Bar Anchorages in Bearn Colurnn *Joints,* CESRL Report No. 77-3. Austin, University of Texas, noviembre 1977.

9.19 —. Reinforcernent Anchorages and Splices. Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 1980.

9.20 —. Structural Welding Code-Reinforcing Steel (D 1.4-98). Miami, American Welding Society, 1998.

9.21 Comité ACI 439. "Mechanical Connections of Reinforcing Bars". Concrete International, Detroit, enero 1983.

9.22 Winter, G., y A. H. Nilson. Design of Concrete Structures (sección *4.6),* 9a. edición. Nueva York, McGraw-Hill, 1979.

9.23 Ferguson, P. M. Reinforced Concrete *Fundamentals* (sección 7.1*1),* 4a. edición. Nueva York, Wiley, 1979.

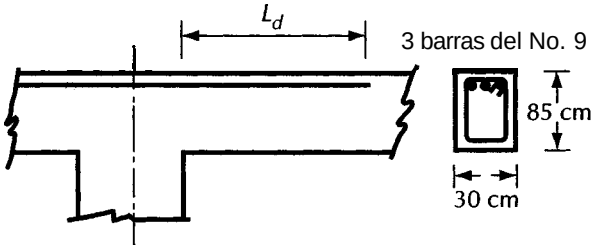
9.24 Comité ACI 318. "Commentary on Building Code Requeriments for Reinforced Concrete". Detroit, Arnerican Concrete Institute, 2002.

9.25 Yang, S, y J. Chen. "Bond Slip and Crack Width Calculations of Tension Members". ACI *Structural Journal.* Detroit, julio-agosto 1988.

9.26 Kemp, E.L. "Bond in Reinforced Concrete: Behavior and Design Criteria". ACI Structural *Journal.* Detroit, enero-febrero 1986.

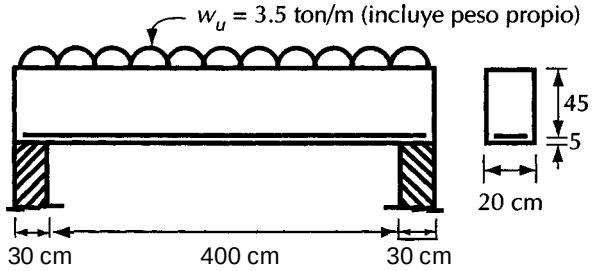
Ejercicios

9.1 Calcular la longitud de desarrollo, L_d, requerida para las barras del No. 9 de la viga de la figura, según el Reglamento ACI 318-02. Considerar f_y = 4200 kg/cm^2 y f'_c = 250 kg/cm^2.



Estribos del No. 3 @ 15 cm
Recubrimiento libre del acero principal = 5 cm

9.2 ¿Cuál es el diámetro máximo de barra que puede utilizarse en la siguiente viga si el área de acero necesaria por flexión es 5 cm^2?

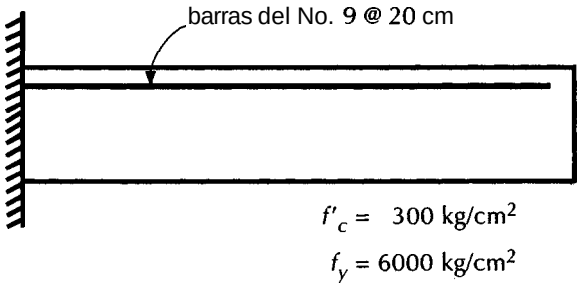


f'_c = 200 kg/cm^2 f_y = 4200 kg/cm^2

Usar Reglamento ACI 318-02

9.3 Determinar el anclaje requerido para las barras del croquis. Suponer que las barras son "altas". Usar el Reglamento ACI 318-02. Considerar los siguientes casos:

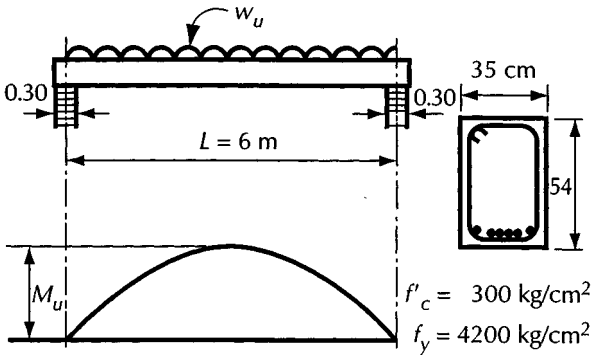
a) Anclaje recto
b) Gancho de 90"
c) Gancho de 180"



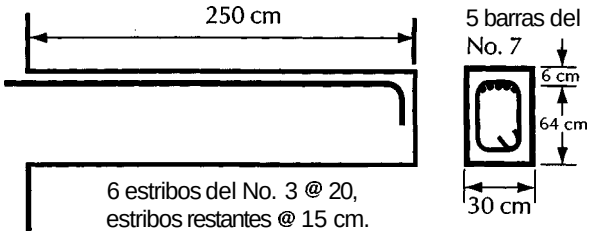
9.4 Una viga de concreto rectangular tiene un peralte efectivo d = 50 cm. Suponer f_y = 3000 kg/cm^2 y f'_c = 200 kg/cm^2. El recubrimiento libre es 3.5 cm. Revisar el anclaje requerido, según el Reglamento ACI 318-02, para estribos en U del No. 3, de dos ramas si se emplean ganchos de 90".

9.5 Proponer cortes de barras para la viga del croquis de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI 318-02. Suponer que el acero dado es

igual al requerido. (No hay acero en exceso.) Revisar requisitos de anclaje en los apoyos.



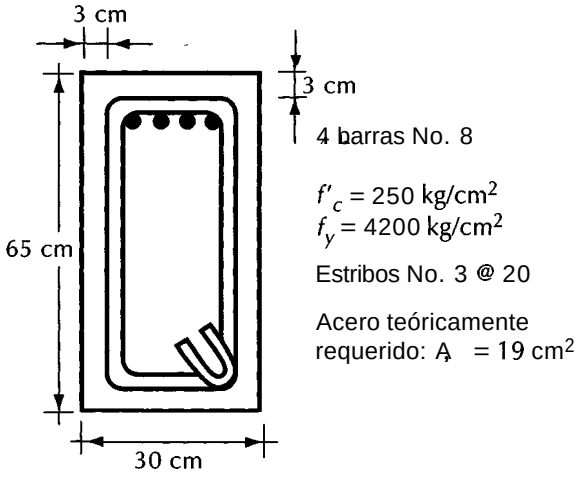
9.6 Para la viga del croquis determinar: a) los diagramas de V_u y M_u b) el punto donde se pueden cortar dos de las barras del armado propuesto; *c)* el diagrama de capacidad de momento de la viga; *d)* el anclaje requerido a la izquierda del empotramiento con tramo recto y con gancho de 90°. Seguir las recomendaciones del Reglamento ACI 318-02. Revisar los requisitos por corte de barras en zona de tensión y, en caso necesario, hacer las modificaciones requeridas en el refuerzo.



w_{cv} = 3 ton/m
w_{cm} = 5 ton/m (incluye peso propio)
f'_c = 250 kg/cm², f_y = 4200 kg/cm²

9.7 Determinar la longitud de desarrollo requerida para las barras de tensión de la viga del croquis:

a) Según Reglamento ACI 318-02
b) Según las NTC-04
c) Teniendo en cuenta la presencia de estribos.



CAPÍTULO 10

Agrietamiento

10.1 **Introducción.** ***110.2*** **Formación y desarrollo de grietas.** ***110.3*** **Mecanismos de agrietamiento.** ***/10.4*** **Expresiones para la predicción de agrietamiento.** ***110.5*** **Agrietamiento en losas.** ***110.6*** **Anchos permisibles de grietas.** ***/10.7*** **Sección transformada.** ***110.8*** **Recomendaciones sobre agrietamiento de diversos reglamentos.** ***110.9*** **Ejemplos.**

10.1 Introducción

Debido a la baja resistencia a la tensión del concreto, los elementos de este material tienden a agrietarse.

Son diversas las causas que conducen al agrietamiento del concreto, siendo las fundamentales las deformaciones debidas a cambios volumétricos y los esfuerzos ocasionados por fuerzas de tensión, por momentos flexionantes, o por las fuerzas cortantes.

Los cambios volumétricos ocasionados por variaciones en la temperatura y por contracción producen esfuerzos de tensión en los elementos estructurales cuando existe algún tipo de restricción. Cuando estos esfuerzos son superiores a los que soporta el concreto se presentan agrietamientos. Estos agrietamientos pueden controlarse ya sea por medio de refuerzo apropiadamente distribuido, generalmente especificado por los reglamentos con bases empíricas, o ya sea disponiendo juntas de control que hacen que el agrietamiento aparezca en lugares definidos. En capítulos anteriores se hacen algunas indicaciones al respecto. El agrietamiento por cambios volumétricos es especialmente importante en elementos de concreto simple o concreto masivo.

Las fuerzas axiales de tensión, los momentos flexionantes o las combinaciones de estas acciones producen grietas normales a los ejes de los elementos estructurales. Este tipo de agrietamiento puede ser crítico cuando se utiliza acero de refuerzo con valores del esfuerzo de fluencia iguales o superiores a 4000 kg/cm^2 o cuando las cuantías de acero son excepcionalmente altas. Aunque el agrietamiento no puede eliminarse por completo, en estructuras adecuadamente diseñadas con un detallado conveniente del refuerzo, las grietas son de ancho pequeño, generalmente del orden de 0.1 mm y raras veces superiores a 0.5 mm, de manera que no afectan a la resistencia ni a la durabilidad de los elementos. La mayor parte de este capítulo se refiere al agrietamiento debido a fuerzas de tensión o a momentos flexionantes, y a la forma de controlarlo.

La presencia de fuerzas cortantes y de las tensiones diagonales ocasionadas por éstas da origen a grietas inclinadas. El desarrollo excesivo de estas grietas se contrarresta por medio de refuerzo en el alma dimensionado de acuerdo con los principios establecidos en el capítulo 7. El agrietamiento por tensión diagonal ha sido menos estudiado que el debido a flexión o a fuerzas de tensión, y aún no se cuenta con métodos prácticos para estimar el ancho y la separación de grietas.

Son dos las razones por las que se requiere controlar el agrietamiento: la apariencia y el riesgo de corrosión del refuerzo. El tratamiento del problema en el diseño de estructuras de concreto tiene un doble aspecto. Por una parte, debe contarse con métodos para predecir la separación y, en particular, el ancho de las grietas. Este aspecto, como podrá apreciarse en incisos poste-

riores, parece estar satisfactoriamente resuelto para efectos prácticos. Por otra parte, es necesario establecer límites aceptables del ancho de grietas. Esto presenta dificultades por los factores subjetivos que intervienen en la determinación de anchos aceptables desde un punto de vista estético y las incertidumbres existentes en cuanto a la influencia del ancho en la corrosión del refuerzo. En el inciso 10.6 se presentan algunos valores de anchos permisibles que han sido sugeridos.

Para un tratamiento más exhaustivo del agrietamiento de elementos estructurales de concreto del que es posible en el presente texto, consúltense las referencias 10.3, 10.11, 10.15, 10.18, 10.20 y 10.21.

10.2 Formación y desarrollo de grietas

Se han desarrollado técnicas de laboratorio para investigar la formación y desarrollo de grietas en el interior de una masa de concreto [10.1]. A continuación se describe el fenómeno de agrietamiento que se ha observado usando estas técnicas.

10.2.1 Elementos sujetos a tensión

El tipo de espécimen usado consiste en un cilindro o prisma de concreto con una barra longitudinal en cuyos extremos se aplican fuerzas de tensión (figura 10.1a). El fenómeno de agrietamiento se desarrolla de la siguiente manera [10.1].

Cuando los esfuerzos en el refuerzo alcanzan un valor del orden de 500 kg/cm^2, empiezan a desarrollarse grietas perpendiculares al refuerzo que atraviesan toda la sección transversal. Estas grietas reciben el nombre de grietas primarias y se han señalado con el número 1 en la figura 10.1*b*. Las primeras grietas se forman en las secciones en que el concreto es más débil a tensión. Debido a la variabilidad natural del material, la localización de estas secciones es un fenómeno aleatorio y en dos especimenes aparentemente iguales las grietas se forman en secciones diferentes.

Si los esfuerzos en el refuerzo se aumentan a una magnitud del orden de 1500 kg/cm^2, se observan nuevas grietas que se desarrollan entre las grietas primarias existentes, pero que no alcanzan la superficie exterior del espécimen. Estas grietas se han denominado grietas secundarias y se señalan con el número 2 en la figura 10.1*b*.

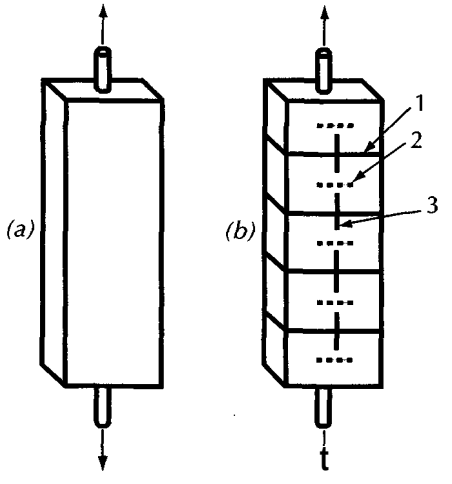


Figura 10.1 Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a tensión (según Broms [10.1]).

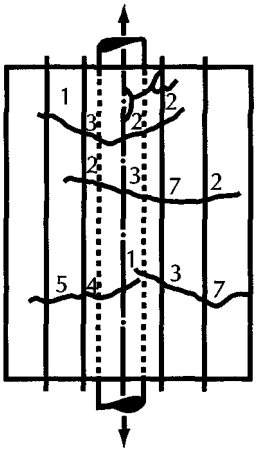


Figura 10.2 Agrietamiento de un espécimen de concreto sujeto a tensión (según Broms [10.2]).

Para esfuerzos mayores se forman pequeñas grietas longitudinales que se desarrollan desde las grietas primarias y secundarias existentes; estas grietas se señalan con el número 3 en la figura 10.1b. En esta etapa no se forman nuevas grietas transversales, pero las existentes aumentan su ancho.

En la figura 10.2 se muestra el estado de agrietamiento de un cilindro de concreto de 15 × 30 cm con una varilla del No. 8 colocada longitudinalmente [10.2]. En ensayes de este tipo se ha visto que las grietas que se extienden hasta la superficie del espécimen alcanzan su ancho máximo en la superficie, mientras que las grietas que se desarrollan únicamente dentro de la masa de concreto alcanzan su ancho máximo en la cara del refuerzo. Los números de la figura 10.2 indican el orden de aparición de las grietas.

10.2.2 Elementos sujetos a flexión

La formación y desarrollo de grietas en la zona de tensión de un elemento sujeto a flexión (figura 10.3) son semejantes a los de un espécimen sujeto a tensión. Las grietas primarias (1 en la figura 10.3) se forman a cargas relativamente bajas y se prolongan hasta el eje neutro. Las grietas secundarias (2 en la figura 10.3) son visibles en la cara lateral y se prolongan hasta una altura menor que la del eje neutro. En algunos casos se observan grietas secundarias muy pequeñas hasta la altura del refuerzo (3 en la figura 10.3). Las grietas longitudinales (4 en la figura 10.3) se forman a cargas cercanas a la resistencia del elemento, a la altura del refuerzo de tensión. En algunos ensayes se ha observado que las grietas primarias se dividen en dos ramas horizontales (5 en la figura 10.3), o que se forman grietas horizontales a la altura del eje neutro (6 en la figura 10.3). Esto sucede cuando está a punto de alcanzarse la resistencia del elemento.

10.3 Mecanismos de agrietamiento

Se han propuesto algunos mecanismos de agrietamiento que sirven de base para calcular la separación y el ancho de grietas. Los mecanismos difieren entre sí por las hipótesis hechas sobre la distribución de esfuerzos en el concreto, la que depende a su vez de la forma en que se supone que se transfieren los esfuerzos de adherencia del acero al concreto. Esta transferencia de esfuerzos no se ha podido determinar con precisión, por las razones expuestas en el capítulo 9.

10.3.1 Mecanismo clásico de agrietamiento [10.3]

En este mecanismo se supone una distribución uniforme de esfuerzos de tensión en un

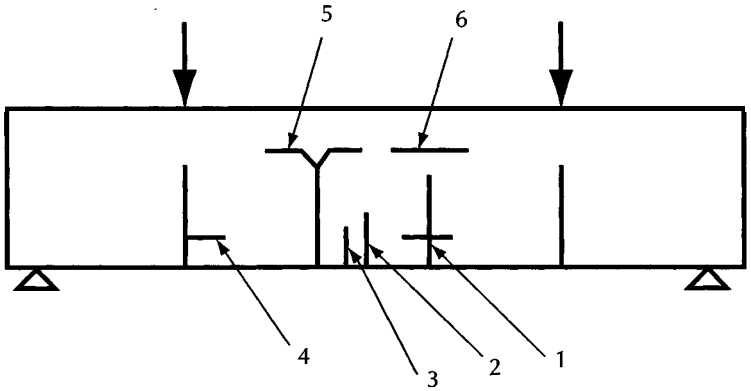


Figura 10.3 Configuración de agrietamiento de un espécimen sujeto a flexión (según Broms [10.2]).

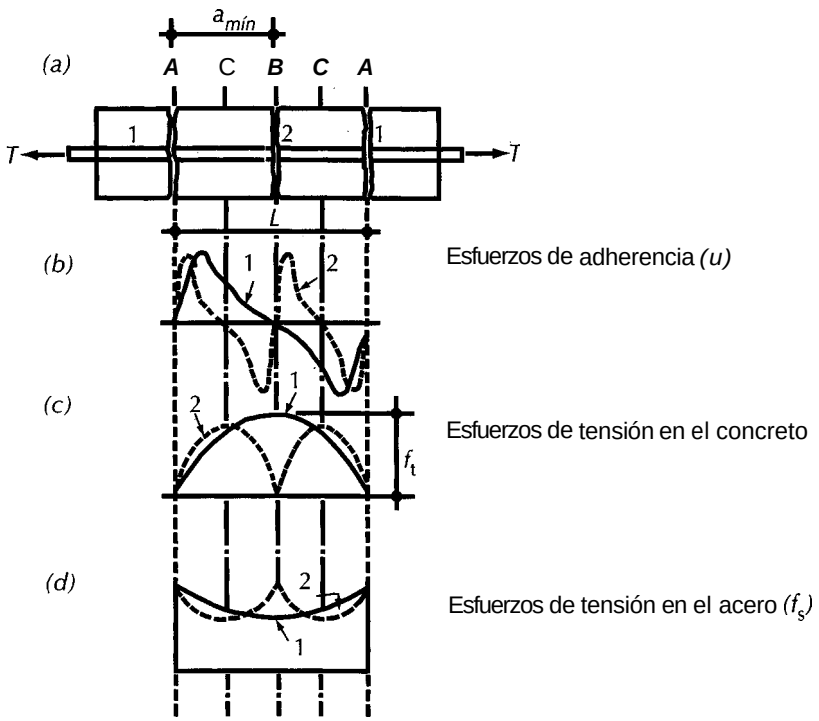


Figura 10.4 Mecanismo clásico de agrietamiento.

área efectiva de concreto y una cierta distribución de esfuerzos de adherencia a lo largo del refuerzo. La formación de grietas se explica de la siguiente manera.

Al aplicar la fuerza de tensión, *T,* aparecen las grietas primarias *(1* en la figura *10.4)* en las secciones más débiles del elemento, secciones A, localizadas al azar. En las secciones que coinciden con estas grietas, el esfuerzo en el acero es f_s = TIA,. En otras secciones el esfuerzo en el acero es menor, ya que la fuerza de tensión se transmite parcialmente al concreto por adherencia. En la figura *10.46* se indica con trazo lleno una distribución aproximada de los esfuerzos de adherencia en esta etapa, y en las figuras 10.4*c* y 10.4*d* se indican con trazo lleno las distribuciones de esfuerzos en el concreto y en el refuerzo, respectivamente.

Si la transmisión de esfuerzos de tensión al concreto es tal que se alcanza la resistencia del material, se forma una nueva grieta en una sección situada aproximadamente al centro entre las dos grietas existentes (grieta 2 en la figura 10.4*a*). Al formarse esta nueva grieta, cambia la distribución de esfuerzos de adherencia a la forma indicada con línea punteada en la figura *10.46.* También cambian las distribuciones de esfuerzos de tensión en el concreto y en el acero (figuras 10.4*c* y 10.4*d*). Si con la nueva distribución de esfuerzos de tensión en el concreto se alcanza la resistencia del material, se forman nuevas grietas en las secciones C de la figura 10.4*a*. Pero si la distancia entre las secciones *A* y *B* es tal que la fuerza de tensión que se transmite por adherencia de la sección A a la sección *C* es menor que la resistencia del material, entonces no se forman nuevas grietas en las secciones C. Éste es el caso representado en la figura 10.4*c*. La distancia entre las secciones A y B es la

separación mínima de grietas, que se denomina $a_{mín}$. Esta distancia es la longitud mínima en que puede desarrollarse por adherencia la resistencia a tensión del concreto.

El mecanismo clásico indica que el fenómeno de agrietamiento está sujeto a una gran variabilidad. En efecto, si la separación L entre las secciones A es ligeramente mayor que $2a_{mín}$, se forma una nueva grieta en la sección B, como se muestra en la figura 10.4*a*. En este caso, la separación entre grietas es $a = L/2 = a_{mín}$. Pero si la separación L es ligeramente menor que $2a_{mín}$, no alcanza a formarse otra grieta y $a = L = 2a_{mín}$. Por consiguiente, la separación puede variar entre $a_{mín}$ y $2a_{mín}$, con un promedio de $1.5a_{mín}$. Si se representa la separación promedio por a_{prom}, entonces

$$a_{máx} = \frac{4}{3}\ a_{prom} \quad y \quad a_{mín} = \frac{2}{3}\ a_{prom}$$

La variabilidad en fabricación y métodos de curado puede incrementar aún más esta dispersión natural en la separación de grietas.

El valor de $a_{mín}$ puede calcularse igualando la resistencia en tensión del elemento de concreto con la fuerza de tensión transferida por adherencia:

$$\text{Resistencia en tensión} = A_c f_t \qquad (10.1)$$
$$\text{Tensión transferida} = a_{mín}\ \gamma u \Sigma s \qquad (10.2)$$

y en sistema SI:

$$\text{Tensión transferida} = 0.98\ a_{mín}\ \gamma u \Sigma s \qquad (10.2\ \text{SI})$$

donde

A_c = área de la sección transversal del elemento
f_t = resistencia en tensión del concreto
γ = factor que depende de la distribución de esfuerzos de adherencia
u = esfuerzo máximo de adherencia
Σs = perímetro de las barras de refuerzo

Igualando las ecuaciones *10.1* y *10.2* y despejando $a_{mín}$ se obtiene

$$a_{mín} = \frac{f_t}{\gamma u}\ \frac{A_c}{\Sigma s} \qquad (10.3)$$

y en sistema SI

$$a_{mín} = \frac{10 f_t}{\gamma u}\ \frac{A_c}{\Sigma s} \qquad (10.3\ \text{SI})$$

Sustituyendo $\Sigma s = 4A_s/d_b$ y $p = A_s/A_c$ en la ecuación *10.3*

$$a_{mín} = \frac{f_t}{4\gamma u} \cdot \frac{d_b}{\rho} \qquad (10.4)$$

y en sistema SI:

$$a_{mín} = \frac{10 f_t}{4\gamma u} \cdot \frac{d_b}{\rho} \qquad (10.4\ \text{SI})$$

El ancho de grieta, w, es igual a la elongación del acero entre dos grietas menos la elongación del concreto. Debido a que la elongación del concreto es muy pequeña comparada con la del acero, se puede despreciar y se obtiene:

$$w_{mín} = \varepsilon_s\, a_{mín} = \frac{f_s}{E_s}\, a_{mín} \qquad (10.5)$$

y en sistema SI

$$w_{mín} = \frac{1}{10}\, \varepsilon_s\, a_{mín} = \frac{f_s}{10 E_s}\, a_{mín} \qquad (10.5\ \text{SI})$$

Sustituyendo la ecuación *10.4* en la ecuación *10.5:*

$$w_{mín} = \frac{f_t\, d_b\, f_s}{4\,\gamma u\, \rho\, E_s} \qquad (10.6)$$

Generalmente interesa conocer el ancho máximo de grietas, $w_{máx}$, en vez del ancho mínimo, $w_{mín}$. Teniendo en cuenta que $a_{máx} = 2a_{mín}$, se obtiene

$$a_{máx} = \frac{f_t d_b}{2\gamma u \rho} \qquad (10.7)$$

$$a_{máx} = \frac{5 f_t d_b}{\gamma u \rho} \qquad (10.7\ SI)$$

$$w_{máx} = \frac{f_t d_b f_s}{2\gamma u \rho E_s} \qquad (10.8)$$

Las ecuaciones 10.7 y 10.8 pueden aplicarse también a vigas sujetas a flexión, si la cuantía de refuerzo, p, se define respecto a un área efectiva, **A** , que tiene el mismo centroide que el refuerzo de tensión (figura 10.5). El valor de A_e es **A,** $= 2b(h-d)$.

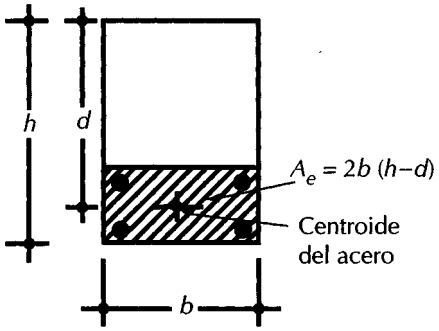


Figura 10.5 Definición de área efectiva en elementos sujetos a flexión.

El mecanismo clásico de agrietamiento permite obtener una idea clara de la influencia de algunas variables importantes. Sin embargo, la hipótesis de una distribución uniforme de esfuerzos en el área de la sección transversal de elementos sujetos a tensión, *o* en el área efectiva de elementos sujetos a flexión, es sumamente simplista, por lo que los anchos y separaciones de grietas calculados con las ecuaciones 10.7 y 10.8 no concuerdan satisfactoriamente con resultados experimentales. Se ha visto que estas ecuaciones sobrestiman especialmente la influencia del diámetro de las barras, d_b [10.4].

10.3.2 Mecanismo basado en el estado interno de esfuerzos

Se ha mencionado que es sumamente difícil determinar la distribución de esfuerzos de adherencia a lo largo del refuerzo. Ya que esta distribución influye en el estado interno de esfuerzos en el concreto, tampoco es fácil determinar dicho estado de esfuerzos. Sin embargo, se han hecho análisis basados en la Teoría de la Elasticidad [10.1] en los que se supone que la fuerza de tensión actúa distribuida linealmente en la superficie de la grieta y al nivel del acero de refuerzo (figura 10.6). Estos análisis elásticos indican que al formarse las primeras grietas ocurre una redistribución de esfuerzos en el concreto, por lo que éstos ya no son uniformes en la sección transversal, como se supone en el mecanismo clásico de agrietamiento. Los resultados de los análisis señalan que dentro

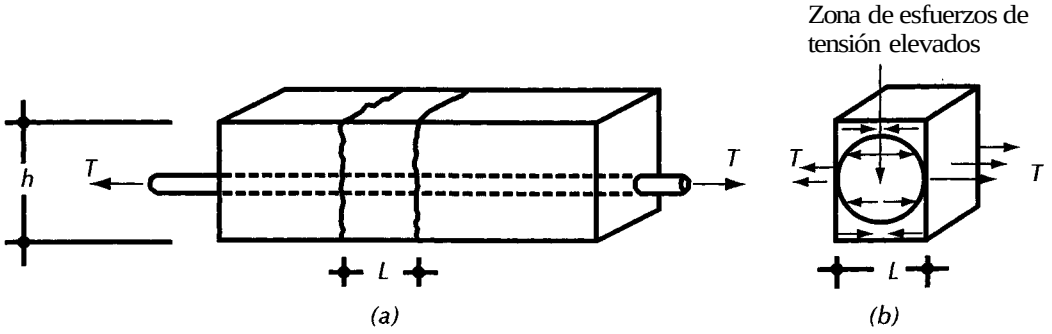


Figura 10.6 Redistribución de esfuerzos por efecto del agrietamiento (según Broms [10.1]).

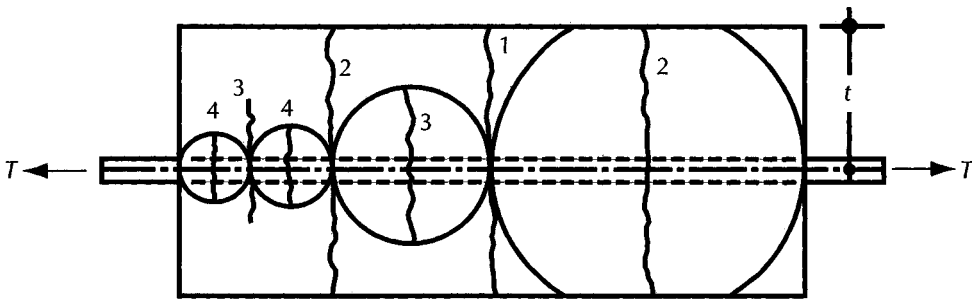


Figura 10.7 Agrietamiento de un elemento sujeto a tensión según el mecanismo propuesto por Broms [10.2]).

de un círculo inscrito entre las superficies de las grietas, existen esfuerzos de tensión elevados, mientras que fuera del círculo los esfuerzos son de compresión o son de tensión, pero muy pequeños (figura 10.6*b*). Basándose en este estado de esfuerzos, Broms [10.1, 10.2] ha propuesto un mecanismo de agrietamiento según el cual la grieta se desarrolla únicamente en la zona de esfuerzos de tensión elevados. Esta zona depende de la relación L/h (figura 10.6). Si esta relación es menor que 1, el círculo inscrito no alcanza a cortar la cara superior del espécimen y, por consiguiente, la grieta no es visible en el exterior. Si la relación es mayor que 1, el círculo corta la cara superior y la grieta se desarrolla hasta el exterior.

En la figura 10.7 se muestran, en forma idealizada, el desarrollo y orden de aparición de grietas en un espécimen sujeto a tensión. La grieta 1 se forma en una sección localizada al azar donde los esfuerzos de tensión exceden la resistencia del concreto. Después de la aparición de esta grieta se redistribuyen los esfuerzos en el concreto y las zonas de esfuerzos elevados de tensión son las que quedan en los círculos inscritos entre la grieta y los extremos del espécimen. (En la figura se muestra únicamente el círculo del lado derecho.) Las grietas 2 se forman aproximadamente al centro de los círculos inscritos.

Como estos círculos alcanzan a cortar las caras laterales del espécimen, las grietas se prolongan hasta dichas caras, por lo que son visibles en el exterior. Al formarse las grietas 2, ocurre una nueva redistribución de esfuerzos y las zonas de esfuerzos elevados de tensión se localizan dentro de los círculos inscritos entre la grieta 1 y las grietas 2, y entre éstas y los extremos del espécimen de concreto. Las grietas 3 se forman aproximadamente al centro de los nuevos círculos inscritos, y ya que éstos no alcanzan las caras laterales del espécimen, las grietas no son visibles en el exterior, como se indica en la figura 10.7. El proceso de agrietamiento continúa en la forma descrita, hasta que la separación de las grietas es tal que la resistencia del concreto no puede desarrollarse por adherencia entre grietas consecutivas.

La separación de grietas superficiales, según este mecanismo de agrietamiento, varía de t a 2t, donde t es el recubrimiento de concreto medido desde el eje longitudinal de la varilla. El valor de 2t ocurre cuando los círculos inscritos son tangentes a las caras laterales y el valor de t cuando los círculos intersectan ligeramente dichas caras. Por consiguiente, la separación de grietas está sujeta a una gran variabilidad, al igual que en el mecanismo clásico. Las expresiones para calcular la separación son más sencillas, ya que

$$a_{máx} = 2t;\ a_{mín} = t;\ a_{prom} = 1.5t \qquad (10.9)$$

Los anchos de grietas respectivos son

$$w_{máx} = \varepsilon_s a_{máx} = 2t\varepsilon_s$$
$$w_{mín} = \varepsilon_s a_{mín} = t\varepsilon_s$$
$$w_{prom} = \varepsilon_s a_{prom} = 1.5t\varepsilon_s \qquad (10.10)$$

En una serie de ensayes, efectuada para comprobar esta teoría, se encontró una separación promedio de grietas de $2.0t$, en vez de la separación promedio teórica de $1.5t$. La diferencia se debe a las hipótesis simplistas en que se basa el cálculo del estado interno de esfuerzos en el concreto.

El proceso de agrietamiento de un elemento sujeto a flexión, según este mecanismo, es semejante al de un elemento sujeto a tensión y se ilustra en la figura *10.8.*

Si se comparan las expresiones para el cálculo de separación y ancho de grietas obtenidas con el mecanismo clásico y con el propuesto por Broms, se ve que son completamente diferentes. La diferencia se origina en las distintas hipótesis sobre la distribución de esfuerzos en el concreto. Las expresiones recomendadas para la evaluación práctica del agrietamiento de elementos de concreto reforzado, que se presentan en la siguiente sección, son modificaciones de las obtenidas de los mecanismos de agrietamiento y se basan principalmente en resultados experimentales.

10.4 Expresiones para la predicción de agrietamiento

A través de estudios experimentales se han determinado los factores que mayor influencia tienen en el ancho de las grietas y se ha encontrado que dicho ancho

a) es mayor cuando se utilizan barras lisas que con barras corrugadas

b) depende en forma importante del espesor del recubrimiento

c) aumenta con el esfuerzo en el acero, siendo esta variable la más importante

d) depende del área de concreto que rodea a las barras en la zona de tensión, disminuyendo cuanto mejor distribuido se encuentre el refuerzo en dicha zona.

Estas variables se reflejan en las numerosas fórmulas propuestas para predecir el ancho de grietas. Se consideran aquí únicamente cuatro de ellas: la de la Portland Cement Association (P.C.A.), la de la Cement and Concrete Association (C.A.C.A.), la de Gergely y Lutz, y una propuesta recientemente por Frosch.

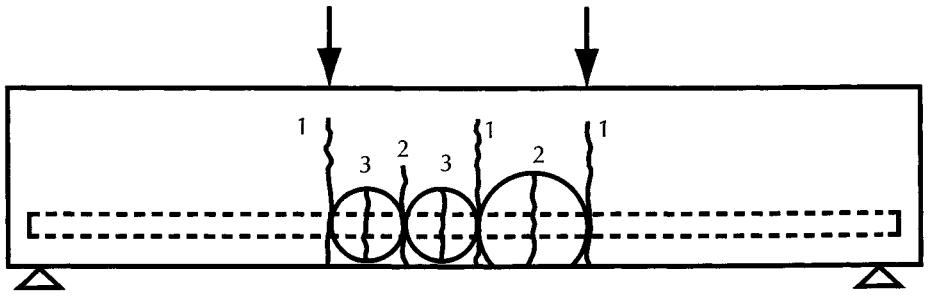


Figura 10.8 Agrietamiento de un elemento sujeto a flexión según el mecanismo propuesto por Broms [10.2].

10.4.1 Fórmula propuesta por la *P.C.A. [10.4]*

La ecuación propuesta por la **P.C.A.** para calcular el ancho máximo de grietas al nivel del acero de refuerzo es la siguiente

$$w_{máx} = 2.6\sqrt[4]{A}\, f_s \times 10^{-6}\ (\text{cm}) \qquad (10.11)$$

y en sistema SI

$$w_{máx} = 83.8\sqrt[4]{A}\, f_s \times 10^{-6}\ (\text{mm}) \qquad (10.11\ \text{SI})$$

Esta ecuación se obtuvo de tres series de ensayes en las que se observó que la ecuación 10.8, deducida del mecanismo clásico, sobrestima la influencia del diámetro, y que el ancho de la grieta depende principalmente del esfuerzo en el acero, f_s, y del área efectiva de concreto que rodea a cada barra, A. El valor de A puede obtenerse dividiendo el área efectiva, A_e (figura 10.5) entre el número de varillas ($A = A_e/N$). El esfuerzo del acero, f_s, puede calcularse con la ecuación

$$f_s = \frac{M}{A_s z}$$

en la que se puede suponer un valor aproximado de $z = 7d/8$. La ecuación 10.11 es aplicable siempre que f_s sea menor que el esfuerzo de fluencia, f_y, que el valor de A esté comprendido entre 20 y 320 cm^2, y que las barras de refuerzo sean corrugadas.

10.4.2 Fórmula propuesta por la C.A.C.A. *[10.5]*

En una investigación realizada en la **C.A.C.A.** se encontró que el ancho máximo de las grietas ocurre al nivel de las fibras en tensión más alejadas del eje neutro y que este ancho se puede calcular con la ecuación

$$w_{máx} = \eta r \frac{f_s}{E_s} \frac{h-c}{d-c}\ (\text{cm}) \qquad (10.12)$$

donde η es una constante que vale 3.3 para barras corrugadas y 4 para barras lisas; r es la distancia desde la arista longitudinal de la viga hasta la superficie de la barra más cercana (figura 10.9*a*); h, el peralte total; d, el peralte efectivo, y c es la profundidad del eje neutro. El valor de c se determina usando el concepto de sección transformada que se describe en la sección 10.7.

Para determinar el ancho máximo a la altura del refuerzo de tensión, la ecuación 10.12 se simplifica a

$$w_{máx} = \eta r \frac{f_s}{E_s}\ (\text{cm}) \qquad (10.13)$$

En este caso, r es el recubrimiento lateral libre (figura 10.9*b*).

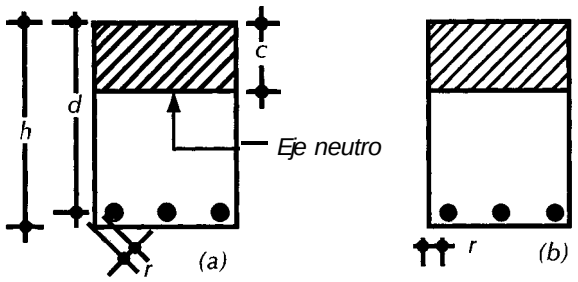


Figura 10.9 Parámetros que intervienen en la ecuación propuesta por la **C.A.C.A.**

Estas ecuaciones se obtuvieron de una serie muy extensa de ensayes y están apoyadas también por un análisis teórico semejante al de Broms. La ecuación 10.13 es similar a la ecuación 10.10, pero la definición del recubrimiento es diferente. En la ecuación 10.13 el recubrimiento se toma desde la superficie exterior de la barra hasta la cara del elemento, mientras que en la ecuación 10.10 se toma desde el centro de la barra hasta la cara del elemento.

10.4.3 Fórmulas de Cergely y Lutz *[10.6]*

Estos autores proponen ecuaciones para calcular el ancho máximo de grietas en la

fibra extrema en tensión y al nivel del acero de refuerzo. Las ecuaciones son, respectivamente,

$$w_{máx} = \sqrt[3]{t_b A}\,\Psi f_s \times 10^{-6}\,(\text{cm}) \qquad (10.14)$$

$$w_{máx} = \frac{\sqrt[3]{t_s A}}{1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{t_s}{h_1}} f_s \times 10^{-6}\,(\text{cm}) \qquad (10.15)$$

o bien en sistema SI:

$$w_{máx} = 10.2\sqrt[3]{t_b A}\,\Psi f_s \times 10^{-6}\,(\text{mm}) \qquad (10.14\ \text{SI})$$

$$w_{máx} = \frac{10.2\sqrt[3]{t_s A}}{1 + \dfrac{2}{3}\dfrac{t_s}{h_1}} f_s \times 10^{6}\,(\text{mm}) \qquad (10.15\ \text{SI})$$

En estas ecuaciones, A es el área de concreto que rodea a cada barra definida en la misma forma que para la ecuación 10.11 ($A = A_e/N$); t_b es el recubrimiento inferior medido desde el centro de la varilla más baja (figura 10.10); $Y = \dfrac{h_2}{h_1}$ (h_1 y h_2 se definen en la figura 10.10); y t_s es el recubrimiento lateral definido en la figura 10.10.

Las ecuaciones 10.14 y 10.15 se obtuvieron por análisis estadístico de cinco series de ensayes.

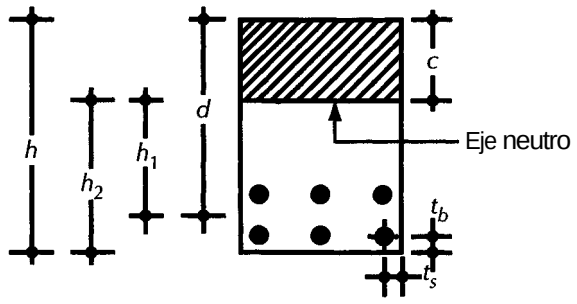


Figura 10.10 Parámetros que intervienen en las ecuaciones propuestas por Gergely y Lutz.

10.4.4 Fórmulas de *Frosch [10.21]*

Este autor utiliza la teoría clásica (sección 10.3.1) para calcular el ancho de las grietas y los resultados obtenidos por Broms (sección 10.3.2) para calcular la separación de las grietas. De acuerdo con esto, el ancho de la grieta al nivel del acero de refuerzo, figura 10.11, estaría dado por la ecuación

$$w = \varepsilon_s a \qquad (10.16)$$

que es la misma ecuación 10.5 obtenida anteriormente. Si se desea el ancho al nivel del lecho inferior de la viga, se puede obtener multiplicando el valor anterior por el factor

$$\beta = \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} = \frac{h-c}{d-c} \qquad (10.17)$$

donde los términos están definidos en la figura 10.11.

Para poder calcular los anchos de grietas con estas ecuaciones, es necesario determinar la separación de grietas, *a.* Esta separación, de acuerdo con Broms, depende del recubrimiento de concreto, d_c o d_s, de la separación entre barras, *s,* y se puede calcular con la ecuación

$$a = \Psi_s d^* \qquad (10.18)$$

donde d^* y los términos anteriores están definidos en la figura 10.12, y el factor Y, vale

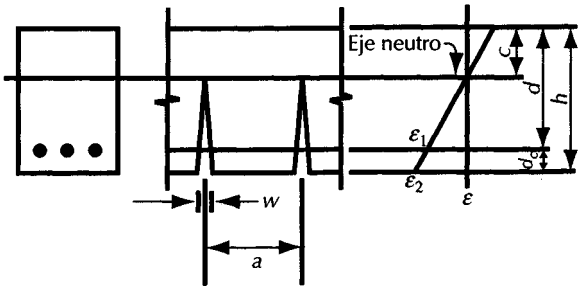


Figura 10.11 Viga agrietada y diagrama de deformaciones unitarias, [10.21].

1 para la separación mínima, 1.5 para la separación promedio y 2 para la separación máxima. Este factor toma en cuenta la variabilidad a la que está sujeto el fenómeno del agrietamiento, según lo explicado en la sección 10.3.1.

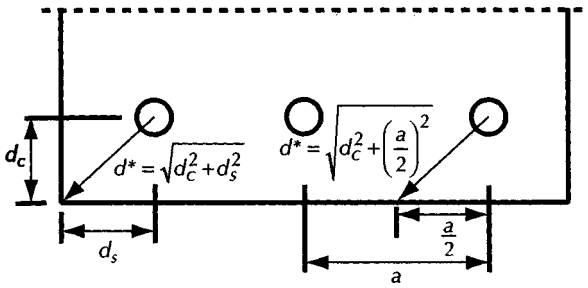


Figura 10.12 Definición de recubrimientos.

Si se sustituye la ecuación 10.18 en la 10.16, haciendo $\varepsilon_s = f_s/E_s$ y d^* por el valor mostrado en la figura 10.12 (el de la derecha es normalmente mayor), el ancho máximo de grieta en el lecho inferior de la viga queda determinado por la ecuación

$$w_{máx} = 2\frac{f_s}{E_s}\beta\sqrt{d_c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad (10.19)$$

La propuesta de Frosch consiste en fijar un valor razonable del ancho máximo de grieta y, despejando el valor de a en la ecuación anterior, calcular valores máximos permisibles de la separación entre las barras de refuerzo longitudinal. La ecuación que se obtiene despejando a es la siguiente:

$$a = 2\sqrt{\left(\frac{w_{máx}E_s}{2f_s\beta}\right)^2 - d_c^2} \qquad (10.20)$$

Se pueden trazar gráficas de la separación entre barras, a, contra el recubrimiento de concreto, d_c, para valores fijos de $w_{máx}$. Frosch recomienda usar valores de $w_{máx}$ entre 0.4 y 0.5 mm. Si se trazan las curvas correspondientes, se puede ver que una buena aproximación se logra con una regla muy sencilla que consiste en especificar una separación máxima constante de 30 cm para recubrimientos d_c que vayan de 0 a 7.5 cm y reducir linealmente la separación hasta 0 para un recubrimiento de 15 cm. Desde luego que este último valor no se presenta en la práctica. Los resultados se muestran en la figura 10.13, para acero de 4200 kg/cm^2 de límite de fluencia. Lo que indica la línea horizontal en esta figura es que si la separación entre barras de refuerzo no excede de 30 cm y el recubrimiento no excede de 7.5 cm, el ancho máximo de grietas estará comprendido entre 0.4 y 0.5 mm. La línea recta inclinada define una reducción en la separación entre barras si el recubrimiento es mayor de 7.5 cm. Si se desea calcular el ancho máximo de grietas para una separación dada entre las barras de refuerzo, deberá usarse la ecuación 10.19. Al usar esta ecuación, el valor de la profundidad del eje neutro, c, puede calcularse con el artificio de la sección transformada, sección 10.7, y el esfuerzo en el refuerzo, f_s, con este mismo artificio o de manera aproximada como se ha explicado para los otros métodos.

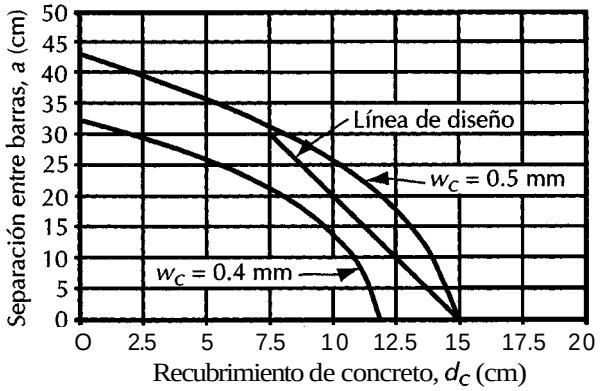


Figura 10.13 Propuesta de diseño de Frosch [10.21].

10.4.5 Comentarios sobre las fórmulas para cálculo de ancho de grietas

Las cuatro fórmulas que se han presentado anteriormente difieren no sólo en los coeficientes numéricos, sino también en las variables que intervienen. La correlación entre resultados de ensayes y resultados calculados es semejante para las tres ecuaciones, aunque Frosch [10.21] señala que las tres primeras ecuaciones se compararon con ensayes de vigas que tenían recubrimientos pequeños. Esta correlación no es tan buena como en el caso de cálculos de resistencia, por la variabilidad misma del fenómeno de agrietamiento y por los muchos factores que en él intervienen (tipo de barra, resistencia del concreto, recubrimiento, tipo de curado, condiciones, ambiente, etcétera).

La diversidad entre las ecuaciones se origina de la falta de una teoría que explique y que permita incorporar de manera integrada los distintos factores que influyen en el agrietamiento. En la actualidad se están efectuando estudios en este sentido que se enfocan a analizar el desarrollo de grietas a nivel microscópico, microagrietamiento, y a la aplicación de la Teoría de la Mecánica de Fracturas al concreto. Estos estudios todavía no tienen una repercusión directa en los reglamentos de construcción, por lo que no se incluyen en este texto. El lector interesado puede consultar la referencia 10.15.

Por lo pronto, debido a la naturaleza aleatoria del agrietamiento, los cálculos de ancho de grietas deben usarse meramente como una guía para lograr una disposición apropiada de las barras de refuerzo y no como valores a comparar con anchos de grietas medidos en las estructuras.

10.5 Agrietamiento en losas

El número de estudios para determinar el agrietamiento en losas perimetralmente apoyadas es muy reducido. Esto se debe principalmente a que el agrietamiento de losas no ha sido un factor importante en la práctica. Se ha realizado un número limitado de ensayes en losas reforzadas con malla soldada de alambre [10.8, 10.17] en los que se encontró que pueden formarse, bajo cargas de trabajo, las dos configuraciones de agrietamiento mostradas en las figuras 10.14*a* y 10.146. En la primera de estas configuraciones, las grietas se forman siguiendo las líneas de refuerzo, mientras que en la segunda, las grietas se forman siguiendo líneas diagonales. La formación de una u otra configuración depende del valor de un parámetro llamado índice de malla, que se define como

$$l = d_b s_t / \rho_t$$

donde l es el índice de malla, d_b es el diámetro de los alambres de refuerzo en dirección longitudinal, s_t es la separación de los alambres transversales, y ρ_t es la cuantía de refuerzo en dirección longitudinal. Cuando el valor de l es menor que 1000 cm^2 se forma la configuración ortogonal mostrada en la figura 10.14*a*, y cuando es mayor, se forma la configuración diagonal mostrada en la figura 10.14*b*.

El ancho máximo de grietas puede estimarse a partir del índice de malla, mediante la siguiente ecuación

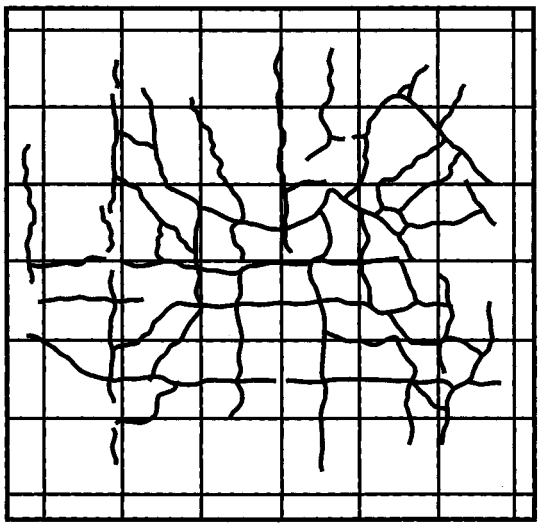
$$w_{máx} = 0.16\,\Psi\sqrt{l}\,f_s \times 10^{-6}\ (\text{cm}) \qquad (10.21)$$

o en sistema SI

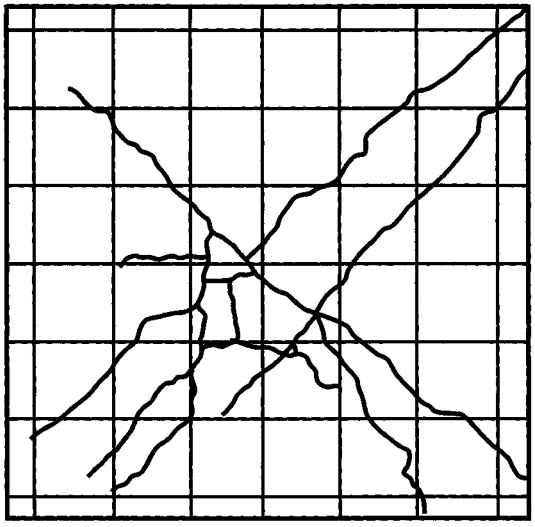
$$w_{máx} = 1.63\,\Psi\sqrt{l}\,f_s \times 10^{-6}\ (\text{mm}) \qquad (10.21\ \text{SI})$$

donde Y, es el factor definido en la sección 10.4.3.

Debido al número limitado de ensayes a partir de los cuales se obtuvo esta fórmula, los reglamentos de construcción no especifican actualmente disposiciones referentes al agrietamiento de losas.



(a) Configuración ortogonal



(b) Configuración diagonal

Figura 10.14 Configuraciones de agrietamiento en losas (según Orenstein y Nawy [10.81).

10.6 Anchos permisibles de grietas

Se mencionó anteriormente que existen dos razones principales para limitar el agrietamiento de elementos de concreto reforzado: apariencia de la estructura y corrosión del refuerzo. Respecto a la apariencia, se han hecho pocos estudios para relacionar el estado de agrietamiento con la apreciación subjetiva de la estructura o con una calificación cuantitativa de la misma [10.9]. Algunos autores opinan que una grieta con un ancho de 0.15 a 0.30 mm es perceptible a simple vista y no debe ser aceptada por razones estéticas (Halvorsen, citado en la referencia 10.15). Respecto a la corrosión del acero de refuerzo, aún es tema de debate si existe alguna relación entre el ancho de las grietas y el peligro de corrosión. Por una parte, las grietas favorecen la carbonatación y permiten la penetración de cloruros, humedad y oxígeno hasta el acero de refuerzo.

Sin embargo, la corrosión resultante está muy localizada y, con el tiempo, los cloruros y el agua penetran de todas maneras y provocan una corrosión más generalizada. La mayoría de los investigadores se inclinan a pensar actualmente que no hay relación entre el agrietamiento y la corrosión, y que el ancho de las grietas sólo debe limitarse por razones estéticas [10.15, 10.21]. En especial señalan que de acuerdo con la teoría, a menor recubrimiento, menor ancho de grieta, pero que para fines de evitar la corrosión es preferible dar recubrimientos grandes y compactar bien el concreto.

Algunos investigadores y algunos reglamentos de construcción establecen límites en los anchos de grietas que son del orden de 0.1 a 0.2 mm para ambientes agresivos, y de 0.2 a 0.4 mm para ambientes normales. En la tabla 10.1 se presenta un resumen de los anchos permisibles de grietas, según distintos investigadores y reglamentos.

Tabla 10.1 Anchos permisibles de grietas

Investigador o reglamento	Condiciones de exposición	Anchos máximos permisibles, mm
Brice [10.12]	Severa	0.10
	Agresiva	0.20
	Normal	0.30
Rüsch [10.12]	Agresiva (agua salada)	0.20
	Normal	0.12-0.30
Efsen [10.12]	Severa o agresiva	0.05-0.15
	Normal (exterior)	0.15-0.25
	Normal (interior)	0.25-0.35
Reglamento ACI 318-89	Exterior	0.33
	Interior	0.40
Eurocódigo EC2	Normales	0.30
CFE (Manual de Diseño de Obra Civiles, Comisión Federal de Electricidad) [10.7]	Interior	0.30
	Agresivo	0.20
	Agresivo cuando se requiere impermeabilidad	0.10
	Cargas accidentales	0.40
Comité ACI 224 [10.15]	Aire seco o membrana protectora	0.40
	Aire húmedo, contacto con el suelo	0.30
	Productos químicos descongelantes	0.18
	Agua de mar, mojado y secado alternado	0.15
	Estructuras para almacenamiento de agua	0.10

El ancho de grietas no puede reducirse disminuyendo los recubrimientos, ya que éstos suelen fijarse en los reglamentos de construcción según las condiciones ambientales para tener una protección adecuada. Debe observarse que en la resistencia a la corrosión influyen no sólo las grietas de flexión, sino también las grietas longitudinales que se presentan cuando los recubrimientos son insuficientes.

10.7 Sección transformada

El concepto de sección transformada suele usarse en la actualidad para calcular algunas propiedades geométricas de una sección, como la profundidad del eje neutro y el momento de inercia de secciones de vigas sujetas a cargas de servicio. Estas propiedades geométricas se requieren para el cálculo de esfuerzos, agrietamiento y deflexiones.

El artificio de la sección transformada se utilizó en el pasado en el análisis de esfuerzos en vigas bajo cargas de trabajo, considerando un comportamiento elástico de los materiales, para reducir el problema de una sección compuesta de dos materiales (concreto y acero) al de una sección homogénea (generalmente de concreto).

Para obtener la sección transformada de una viga, se sustituye el área de acero por un área equivalente de concreto, que se determina multiplicando el área de acero por la relación entre el módulo de elasticidad del acero y el del concreto. Esta relación modular se representa usualmente con la letra n.

Para ilustrar el empleo de la sección transformada, supóngase la viga mostrada en la figura 10.15a. En la figura 10.15*b* se muestran las distribuciones de deformaciones unitarias y las fuerzas internas resultantes en la sección. Bajo cargas de servicio, el esfuerzo en el acero es menor que el límite

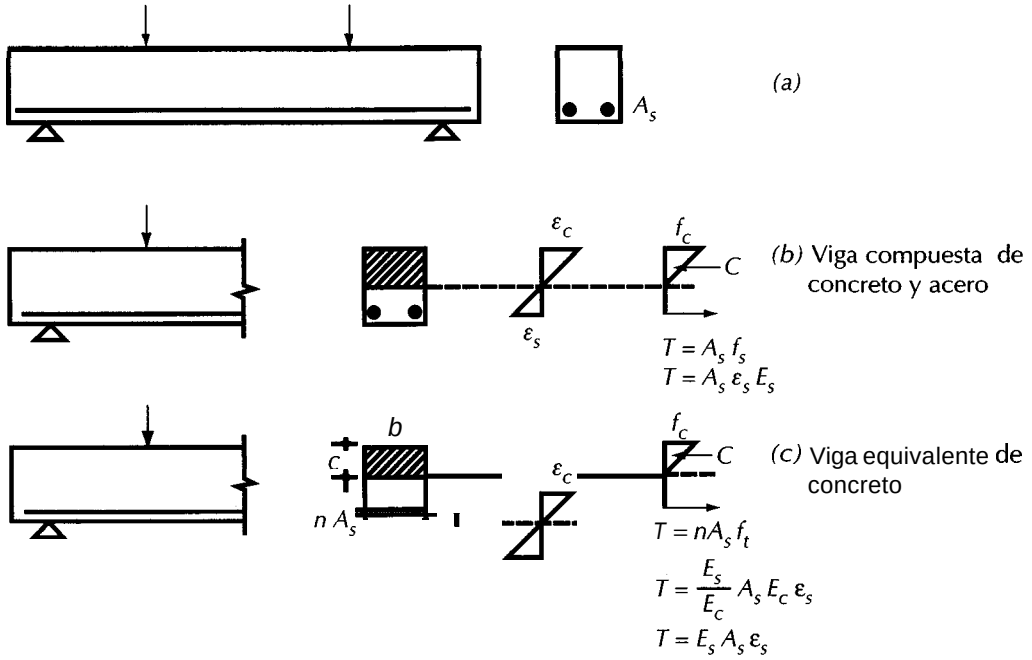


Figura 10.15 Artificio de la sección transformada.

de fluencia, por lo que puede calcularse con la ecuación $f_s = E_s\,\varepsilon_s$. La distribución de esfuerzos de compresión en el concreto puede suponerse lineal, ya que dichos esfuerzos son relativamente pequeños (del orden de $0.5\,f'_c$). En la figura 10.15c se muestra la viga equivalente, en la que se ha sustituido el área de acero A_s por un área de concreto igual a nA_s. La sección transversal resultante recibe el nombre de *sección transformada.* La fuerza de tensión en la sección transformada puede obtenerse multiplicando el área nA_s por el esfuerzo f_t; éste, a su vez, puede calcularse multiplicando la deformación unitaria al nivel correspondiente, ε_s, por el módulo de elasticidad del concreto, E_c, ya que se supone que el acero se ha sustituido por concreto. Puede verse que la fuerza de tensión en la viga de la figura 10.15b es igual a la fuerza de tensión en la sección transformada de la figura 10.15c. Por lo tanto, los esfuerzos y la profundidad del eje neutro son iguales en la sección real y en la sección transformada de la viga.

El artificio de la sección transformada puede emplearse para calcular la profundidad del eje neutro, c, dato necesario para aplicar las ecuaciones de ancho de grietas presentadas anteriormente. Para ello se calcula la posición del centroide de la sección transformada, igualando el momento de primer orden del área de concreto a compresión con el momento de primer orden del área de acero transformada. Por ejemplo, en la sección transformada de la figura 10.15c, se obtiene

$$bc\left(\frac{c}{2}\right) = nA_s\,(d - c)$$

Despejando el valor de c de esta ecuación se obtiene la profundidad del eje neutro. En el ejemplo 10.1 se ilustra este procedimiento.

En vigas con refuerzo de compresión, se sustituyen tanto el refuerzo de tensión como el de compresión por las áreas transformadas nA_s y nA'_s, respectivamente, como se muestra en la figura 10.16. Para tener en cuenta el área de concreto desplazado por las barras de compresión, puede emplearse el término $(n - 1)\,A'_s$ en vez de nA'_s y así evitar la duplicación de áreas en la zona de compresión. En el cálculo de la profundidad del eje neutro es suficientemente preciso considerar únicamente el acero de tensión al establecer la sección transformada, con lo cual se simplifican los cálculos numéricos.

La validez del artificio de la sección transformada depende de que el concreto y el acero tengan exactamente las mismas deformaciones unitarias, lo cual sólo puede lograrse si existe adherencia perfecta entre los dos materiales.

El artificio de la sección transformada se puede usar también para la revisión de esfuerzos bajo cargas de trabajo en elementos sujetos a compresión o a tensión axial. Sin embargo, se tiene el problema de que el módulo de elasticidad del concreto, y por lo

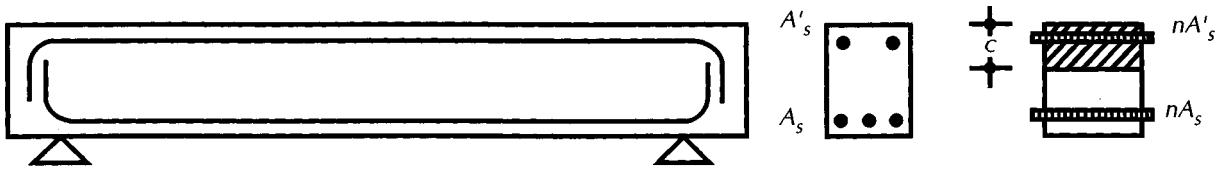


Figura 10.16 Sección transformada de un elemento con refuerzo de tensión y compresión.

tanto el valor de la relación modular *n,* varían con el tiempo y otros factores. Algunos reglamentos toman esto en cuenta modificando el valor de *n* que debe usarse para transformar el acero de compresión.

10.8 Recomendaciones sobre agrietamiento de diversos reglamentos

Las recomendaciones de los reglamentos sobre agrietamiento siguen dos enfoques diferentes. Uno de ellos consiste en dar fórmulas para estimar anchos de grietas y valores de los anchos permisibles, según las diversas condiciones de servicio. Véanse, por ejemplo, las recomendaciones del Manual de la Comisión Federal de Electricidad [10.7]. Según el otro enfoque, teniendo en cuenta que las fórmulas para cálculo de ancho de grietas sólo tienen valor indicativo, se trata el problema en forma indirecta, estableciendo reglas que conduzcan a un detallado del refuerzo que evite agrietamiento excesivo. En general no se considera la separación posible de las grietas, puesto que ésta no influye significativamente en la apariencia ni en el riesgo de corrosión. A continuación se reseñan algunas recomendaciones típicas.

10.8.1 Reglamento ACI 318-02

Este reglamento está basado en la propuesta de Frosch [10.21 y figura 10.131. Se establece una ecuación que limita la separación máxima entre las barras longitudinales en función del espesor de su recubrimiento de concreto. Esta ecuación es:

$$s = \frac{96{,}500}{f_s} - 2.5c_c \le 30\left(\frac{2520}{f_s}\right) \qquad (10.22)$$

$$s = \frac{95{,}000}{f_s} - 2.5c_c \le 300\left(\frac{250}{f_s}\right) \quad (10.22\ \text{SI})$$

en donde:

s = separación centro a centro entre las barras más cercanas a una superficie en tensión, en cm (mm en SI).

f_s = esfuerzo de trabajo en el acero, en kg/cm^2 (MPa en SI), que puede tomarse como 0.6 f_y o calcularse con el artificio de la sección transformada.

c_c = recubrimiento en cm (mm en SI) de la cara de la viga más cercana en tensión a la superficie exterior de la barra, o sea, el menor de los valores mostrados en la figura 10.17.

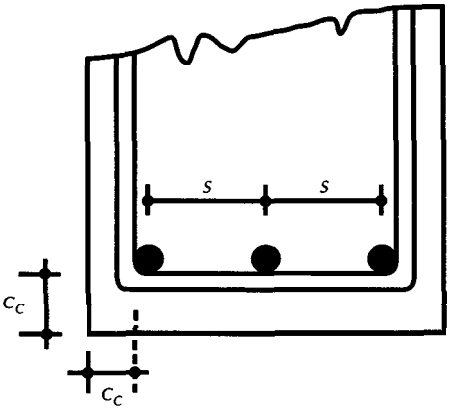


Figura 10.17 Significado de la notación utilizada en la ecuación 10.22.

La ecuación 10.22 representa aproximadamente la línea de diseño propuesta por Frosch en la figura 10.13. Con un valor usual de 5 cm para el recubrimiento libre, c_c, y con un esfuerzo f_s del 60 por ciento de 4200 kg/cm^2, la separación, s, resulta de 26 cm, mientras que en la figura 10.13 sería de 30 cm. Para recubrimientos pequeños, la separación máxima sería de 30 cm, que es la parte horizontal de la figura 10.13. En el ejemplo 10.2 se ilustra la aplicación de este método que, como se verá, resulta muy sencilla.

10.8.2 NTC-04

Las disposiciones de este reglamento están basadas en la propuesta de Gergely y Lutz (ecuación 10.14). Se establece que el valor del término

$$f_s \sqrt[3]{d_c A}\,\frac{h_2}{h_1}$$

no exceda de 20,000 kg/cm para condiciones severas de exposición, de 30,000 kg/cm para condiciones intermedias y de 40,000 kg/cm para condiciones normales. El significado de los parámetros de esta expresión son los mostrados en la figura 10.10 y en la explicación de la ecuación 10.14, sustituyendo t_b por d_c. La definición de las condiciones de exposición se presenta en el capítulo de Durabilidad de las NTC.

Como se puede ver, lo que se hace en este reglamento es limitar, de manera indirecta, el ancho de las grietas esperadas a valores que van de 0.2 a 0.4 mm, según las condiciones de exposición.

10.8.3 Manual de la Comisión Federal de Electricidad *(10.7)*

En el Manual de la Comisión Federal de Electricidad se ha adoptado la ecuación (10.14) propuesta por Gergely y Lutz para el cálculo del ancho de grietas. Los anchos admisibles según estas recomendaciones aparecen en la tabla 10.1.

10.9 Ejemplos

Ejemplo *10.1* Cálculo de ancho de grietas

En este ejemplo se ilustra la aplicación de los cuatro métodos de predicción de ancho máximo de grietas presentados en la sección 10.4. Se estudia el caso de una viga libremente apoyada sujeta a una carga de servicio o carga de trabajo de 2 ton/m. En los cuatro métodos se requiere conocer el esfuerzo en el acero, f_s, correspondiente a las cargas de servicio. Para obtener este valor se calculó primero el momento flexionante, que tiene un valor de 9 ton-m. Para calcular f_s puede usarse el artificio de la sección transformada descrito en la sección 10.7. Sin embargo, dado el carácter poco preciso de los cálculos de agrietamiento, suele ser suficiente utilizar un valor aproximado de z; el valor utilizado en el ejemplo fue $(7/8)d$. El cálculo de la profundidad del eje neutro se hizo usando el artificio de la sección transformada.

Al final del ejemplo se presenta un resumen de los resultados obtenidos que indica que las diferencias son poco significativas.

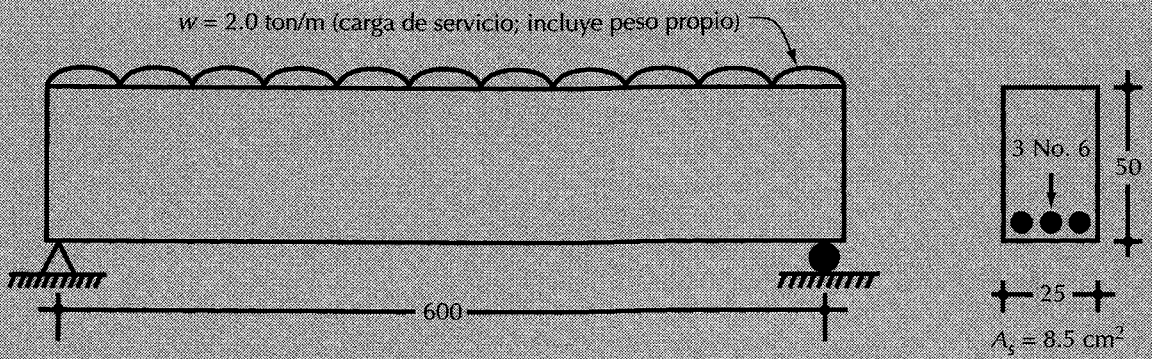
Ejemplo *10.2* Revisión de agrietamiento según el Reglamento ACI 3*18-02*

En este ejemplo se comprueba si la sección mostrada cumple con los requisitos del Reglamento ACI 318-02. Se trata de una viga reforzada con 5 barras del número 8, para la cual se ha fijado un recubrimiento lateral de los estribos de 3 cm y un recubrimiento libre inferior de 5 cm para las barras longitudinales.

Primero se calcula el valor de c_c con respecto a la cara lateral de la viga. El valor resultante es igual a los 3 cm del recubrimiento libre de los estribos más el diámetro de los estribos que es de 1 cm. Después, el valor de c_c correspondiente a la cara inferior de la viga. Éste es el valor especificado de 5 cm. La separación centro a centro entre las barras de la viga resulta de 12.2 cm. El valor de 2.3 cm que aparece en este cálculo es igual al diámetro del estribo más el radio de la barra longitudinal. El esfuerzo de trabajo en el refuerzo de tensión se calculó como $0.6f_y$. Después se calculó el valor de s con la ecuación 10.22 usando el menor valor de c_c, o sea, el correspondiente al recubrimien-

EJEMPLO 10.1 ***Cálculo de ancho de grietas.***

DATOS Estribos No. 3



Nota: acotaciones en cm

recubrimiento libre = 3 cm

MATERIALES

Concreto, f'_c = 300 kg/cm² (concreto clase 1)

Acero, f_y = 4200 kg/cm²

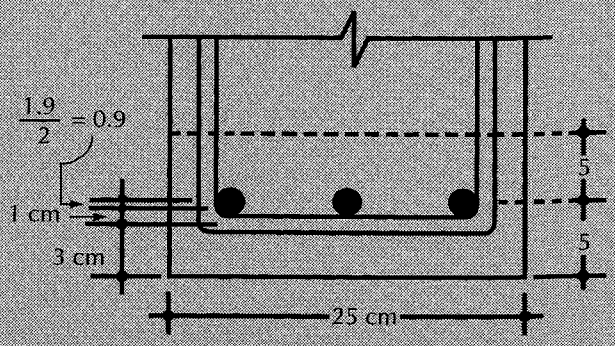
CÁLCULO DEL AGRIETAMIENTO

I) *Criterio de la PCA*

a) Ancho máximo de las grietas a nivel del acero de refuerzo en tensión.

$$w_{máx} = 2.6 \sqrt[3]{A}\, f_s \times 10^{-6} \text{ (cm)} \qquad \text{(ecuación 10.11)}$$

Cálculo de *A*:



$3 + 1 + 0.9 \simeq 5$ cm

$A_e = 25 \times 10 = 250$ cm²

$A = \frac{250}{3} = 83.3$ cm²

$d = h - 5 = 45$ cm

EJEMPLO 10.1 (*continuación*)

Cálculo de f_s:

$$\text{Momento flexionante máximo} = \frac{w\ell^2}{8} = \frac{2.0 \times 6^2}{8} = 9.0 \text{ ton-m} = 9.0 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$f_s = \frac{M}{A_s z};\quad z = 7d/8$$

$$f_s = \frac{9.0 \times 10^5}{8.5 \times \frac{7}{8} \times 45} = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s = 2700 \text{ kg/cm}^2$$

Ancho máximo de la grieta

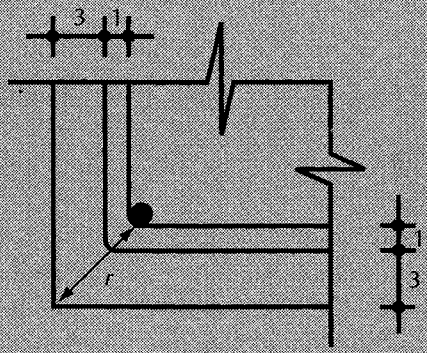
$$w_{máx} = 2.6 \sqrt[3]{83.3 \times 2700 \times 10^{-6}} = 0.021 \text{ cm}$$

$$\boxed{w_{máx} = 0.021 \text{ cm}}$$

II) *Criterio de la C.A.C.A.*

a) Ancho máximo de la grieta al nivel de las fibras en tensión más alejadas del eje neutro.

$$w_{máx} = \eta \times r \times \frac{f_s}{E_s} \times \frac{h-c}{d-c} \qquad \text{(ecuación 10.12)}$$



$\eta = 3.30$ para barras corrugadas

$r = \sqrt{4^2 + 4^2} = 5.7$ cm

$f_s = 2700$ kg/cm^2

$E_s = 2.0 \times 10^6$ kg/cm^2

$h = 50$ cm

$d = 45$ cm

c = profundidad del eje neutro

EJEMPLO 10.1 (*continuación*)

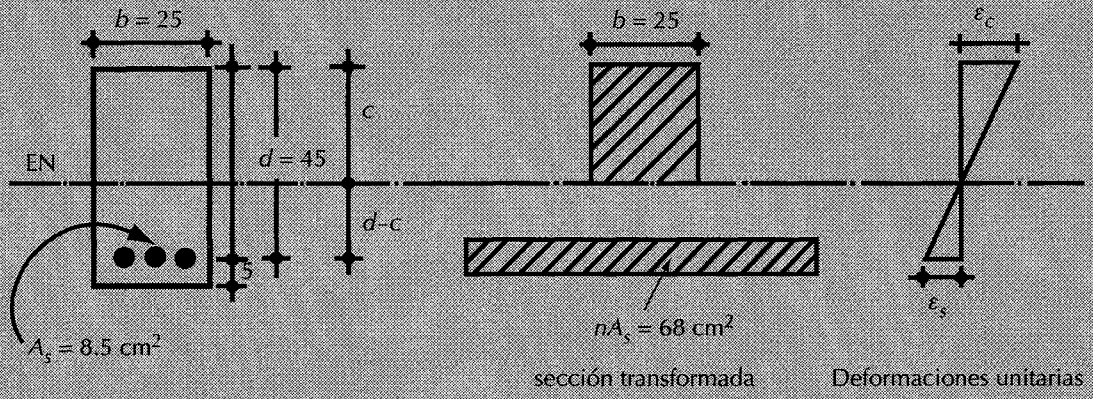
Cálculo de la profundidad del eje neutro, usando el artificio de la sección transformada y agrietada

$$n = \frac{E_s}{E_c}$$

$$E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c} = 14{,}000\sqrt{300} = 242{,}500 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{2.0 \times 10^6}{2.425 \times 10^5} = 8.2 \simeq 8$$

$$A_t = nA_s = 8 \times 8.5 = 68 \text{ cm}^2$$



Tomando momentos estáticos de las áreas con respecto al eje neutro:

$$bc\frac{c}{2} = nA_s \text{ (d–c)}$$

Sustituyendo valores:

$$25\,\frac{c^2}{2} = 68\ (45 - c)$$

$$c^2 + 5.44c - 245 = 0$$

$$c = 13.2$$

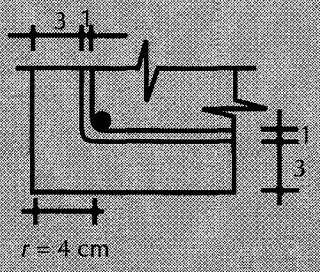
EJEMPLO 10.1 (*continuación*)

Ancho máximo de la grieta:

$$w_{máx} = \frac{3.3 \times 5.7 \times 2700\ (50 - 13.2)}{2.0 \times 10^6\ (45 - 13.2)}$$

$$\boxed{w_{máx} = 0.029 \text{ cm}}$$

b) Ancho máximo de la grieta al nivel del acero de refuerzo en tensión.



$$w_{máx} = \eta \times r \times \frac{f_s}{E_s} \qquad \text{ecuación (10.13)}$$

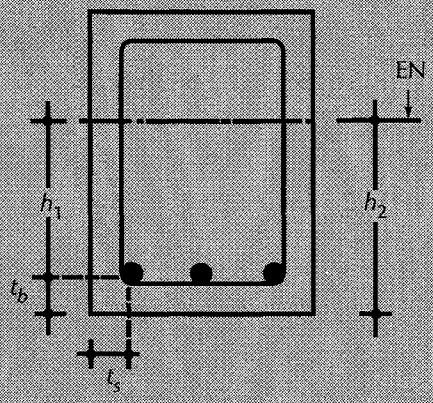
$$w_{máx} = 3.30 \times 4 \times \frac{2700}{2.0 \times 10^6} = 0.0178 \text{ cm}$$

$$\boxed{w_{máx} = 0.018 \text{ cm}}$$

III) *Método de Gergely y Lutz*

a) Ancho máximo de la grieta en la fibra extrema de tensión.

$$w_{máx} = \sqrt[3]{t_b \times A} \times \Psi \times f_s \times 10^{-6} \qquad \text{(ecuación 10.14)}$$



$t_b = 5$ cm

$h_2 = 50 - 13.2 = 36.8$ cm

$h_1 = h_2 - t_b$

$h_1 = 36.8 - 5 = 31.8$ cm

$$\Psi = \frac{h_2}{h_1} = \frac{36.8}{31.8} = 1.16$$

$A = 83.3 \text{ cm}^2$

Sustituyendo valores:

$$w_{máx} = \sqrt[3]{5 \times 83.3} \times 1.16 \times 2700 \times 10^{-6} = 0.0234 \text{ cm}$$

$$\boxed{w_{máx} = 0.023 \text{ cm}}$$

EJEMPLO 10.1 (*continuación*)

b) Ancho máximo de la grieta al nivel del acero de refuerzo.

$$w_{máx} = \frac{\sqrt[3]{t_s \times A}}{1 + \frac{2}{3}\frac{t_s}{h_1}} f_s \times 10^{-6} \qquad \text{(ecuación 10.15)}$$

$t_s = 5$ cm

$$w_{máx} = \frac{\sqrt[3]{5 \times 83.3}}{1 + \frac{2}{3}\frac{5}{31.8}} \times 2700 \times 10^{-6}$$

$$\boxed{w_{máx} = 0.018 \text{ cm}}$$

IV) *Método de Frosch*

Con la ecuación 10.19 se calcula el ancho en el lecho inferior de la viga.

$$w_{máx} = 2\frac{f_s}{E_s}\beta\sqrt{d_c^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} \qquad \text{(ecuación 10.19)}$$

$f_s = 2700$ kg/cm^2 (calculado en el inciso I)
$E_s = 2 \times 10^6$ kg/cm^2

$$\beta = \frac{h-c}{d-c} \qquad \text{(ecuación 10.17)}$$

$$\beta = \frac{50-13.2}{45-13.2} = 1.16$$

(El valor de c se calculó en el inciso II)

$$d_c = 5 \text{ cm}$$

$$a = \left[25 - (2 \times 3 + 2 \times 1 + 3 \times 1.9)\right]\frac{1}{2} = 5.6 \text{ cm}$$

Sustituyendo en la ecuación 10.19:

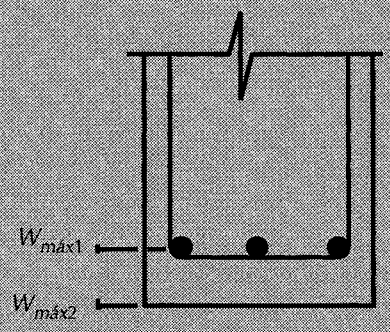
$$w_{máx} = \frac{2 \times 2700}{2 \times 10^6} \times 1.16\ \sqrt{5^2 + 2.8^2} = 0.018 \text{ cm}$$

Al nivel del acero de refuerzo:

$$w_{máx1} = \frac{0.018}{\beta} = 0.015 \text{ cm}$$

EJEMPLO 10.1 (*continuación*)

RESUMEN

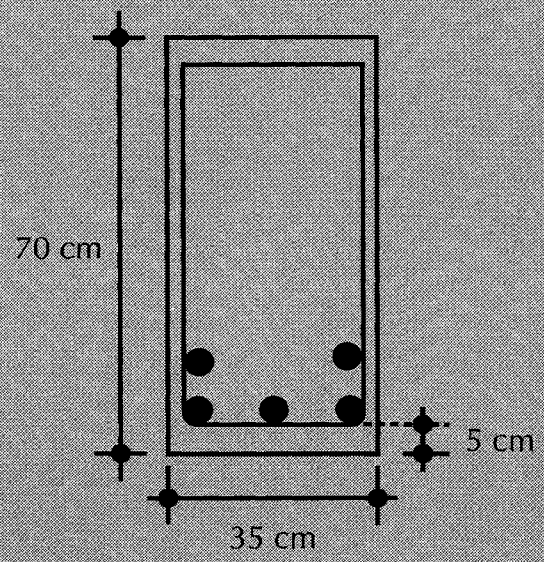


	P.C.A.	*C.A.C.A.*	*Gergely y Lutz*	*Frosch*
$w_{máx1}$	0.021	0.018	0.018	0.015
$w_{máx2}$	–	0.029	0.023	0.018

(valores en cm)

EJEMPLO 10.2 ***Revisión de agrietamiento según el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



$f_c' = 250$ kg/cm^2

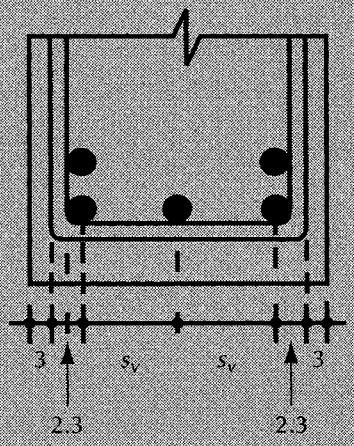
$f_y = 4200$ kg/cm^2

5 barras del No. 8 = 25.3 cm^2

Estribos No. 3 con recubrimiento libre lateral de 3 cm

EJEMPLO 10.2 (*continuación*)

REVISIÓN



$$c_c = 3 + 1 = 4 \text{ cm (lateral)}$$

$$c_c = 5 \text{ cm (inferior)}$$

$$s_{viga} = \frac{35 - 2\,(3 + 2.3)}{2} = 12.2 \text{ cm}$$

$$f_s = 0.6\, f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$s = \frac{96{,}500}{f_s} - 2.5\, c_c \text{ (ecuación 10.22)}$$

$$s = \frac{96{,}500}{2520} - 2.5 \times 4 = 28 \text{ cm} > s_{viga}$$

to lateral. El valor calculado resulta mucho mayor que la separación entre las barras de la viga, por lo que se cumple ampliamente con el Reglamento.

Obsérvese en este ejemplo que la ecuación 10.22 no incluye el efecto de la resistencia del concreto. Tampoco se toma en cuenta, como en versiones anteriores del Reglamento, si las vigas son exteriores o interiores. Los valores calculados con la ecuación 10.22 resultan por lo general muy grandes en comparación con las separaciones entre barras usuales en la práctica, para el caso de vigas. Por lo tanto, es raro que no se cumplan los requisitos de agrietamiento de este reglamento.

Ejemplo 10.3

La sección de este ejemplo fue dimensionada para resistir un momento a nivel de cargas de servicio igual a 20 ton-m. El valor del esfuerzo del acero fue calculado por medio de la sección transformada. Podría haberse estimado suponiéndolo igual a 0.6 f_y = 3600 kg/cm^2, o aplicando la ecuación

$$f_s = \frac{M}{zA_s}$$

en donde z es el brazo del par interno, que puede tomarse igual a 0.9 *d.* Para los datos del ejemplo:

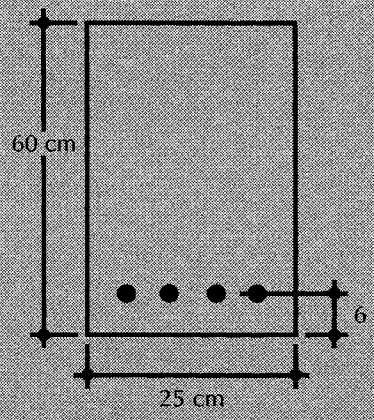
$$f_s = \frac{20 \times 10^5}{0.9 \times 54 \times 11.4} = 3610 \text{ kg/cm}^2$$

Se aprecia que cualquiera de estos procedimientos da valores semejantes al obtenido recurriendo al artificio de la sección transformada, por lo que no suele justificarse la labor numérica que implica la aplicación de este último método.

El valor de $f_s \sqrt[3]{d_c A}\, \frac{h_2}{h_1}$ calculado fue inferior al de 40,000 kg/cm especificado por las NTC-04 como límite superior para condiciones normales de exposición.

EJEMPLO 10.3 ***Revisión de agrietamiento según NTC-04.***

DATOS



Momento debido a las cargas (nivel de servicio):

$M = 20$ ton-m

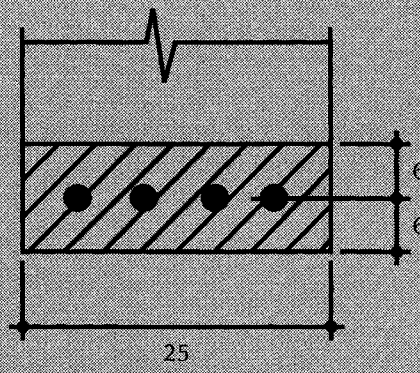
Condición de exposición normal

$f_c' = 300$ kg/cm^2 (concreto clase 1)

$f_y = 6000$ kg/cm^2

4 barras No. 6 = 11.4 cm^2

REVISIÓN



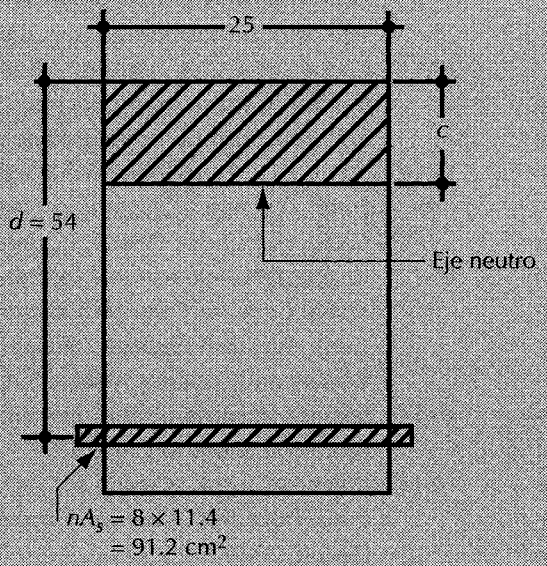
Cálculo de $f_s \sqrt[3]{d_c A}\,\frac{h_2}{h_1}$

$d_c = 6$ cm

$A = \frac{2 \times 6 \times 25}{4} = 75$ cm^2

EJEMPLO 10.3 (*continuación*)

Cálculo de f_s por medio de la sección transformada:



$$E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c} = 14{,}000\sqrt{300}$$

$$E_c = 242{,}500 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2\times 106}{242{,}500} = 8$$

Profundidad eje neutro:

$$\frac{25}{2}c^2 - 91.2(54 - c) = 0$$

$$c^2 + 7.3c - 394 = 0$$

$$c = 16.5 \text{ cm}$$

Momento de inercia (con respecto al eje neutro):

$$I = \frac{1}{3}\times 25 \times 16.5^3 + 91.2(54 - 16.5)^2 = 165{,}700 \text{ cm}^4$$

Cálculo de esfuerzo en el acero:

$$f_s = nf_t = n\frac{M}{I}(d - c) = 8\frac{20\times 10^5}{165{,}700}(54 - 16.5)$$

$$f_s = 3620 \text{ kg/cm}^2$$

$$f_s \sqrt[3]{d_c A}\frac{h_2}{h_1} = 3620\sqrt[3]{6\times 75}\frac{(60 - 16.5)}{(54 - 16.5)}$$

$$= 32{,}179 < 40{,}000 \text{ kg/cm}$$

$\therefore$ El refuerzo propuesto es adecuado.

Referencias

10.1 Broms, B. B. "Stress Distribution in Reinforced Concrete Members with Tension Cracks". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, septiembre 1965.

10.2 Broms, B. B. "Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Members". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, octubre 1965.

10.3 Saillard, Y., y J. C. Maldague. "Proposition de la théorie générale de synthèse de fissuration des pièces en béton armé". Bulletin *d'Information* No. 12 *du* Comité Européen *du* Béton. París, febrero 1959.

10.4 Hognestad, E. "High Strength Bars as Concrete Reinforcement, Part 2, Control of Flexural Cracking". *Journal* of the Portland Cement Association Research and Development *Laboratories*, Vol. 4, No. 1. Skokie, Ill., enero 1962.

10.5 Base, G. D., y A. W. Beeby. An Investigation of the Crack Control Characteristics of Various *Types* of Bar in Reinforced Concrete Beams, Research Report 18, Part 1. Londres, Cement and Concrete Association, diciembre 1966.

10.6 Gergely, P., y L. A. Lutz. "Maximum Crack Width in Reinforced Flexural Members". Causes, Mechanism and Control of Cracking in Concrete (SP-20). Detroit, American Concrete Institute, 1968.

10.7 Robles, F. Manual de Diseño de Obras Civiles, Sección H: Concreto Reforzado. México, D.F., Comisión Federal de Electricidad, 1970.

10.8 Orenstein, G.S., y E.G. Nawy. "Crack Width Control in Reinforced Concrete Two-Way Slabs Subjected to a Uniformly Distributed Load". Journal of the American Concrete *Institute*. Detroit, enero 1970.

10.9 Díaz Padilla, J. y F. Robles "Human Response to Cracking in Slabs". En Cracking, Deflection and *Ultimate* Load of Concrete Slab Systems (SP-30). Detroit, American Concrete Institute, 1971.

10.10 Beeby, A. W. "Cracking, Cover and Corrosion of Reinforcement". Concrete International De*sign* and Construction. Detroit, febrero 1983.

10.11 Comité ACI 224. Causes, Mechanism *and* Control of Cracking in Concrete (SP-20). Detroit, American Concrete Institute, 1968.

10.12 Nawy, E.G. "Crack Control in Reinforced Concrete Structures". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, octubre 1968.

10.13 Comité Euro-International du Béton. *CEB-FIP* Model Code for Concrete Structures (3a. edición). Wexham Springs, Slough, Inglaterra, Cement and Concrete Association, 1978.

10.14 Jiménez Montoya, P. et al. Hormigón armado. Barcelona, Gustavo Gili, 1979.

10.15 Comité ACI-224. "Control of Cracking in Concrete Structures", American Concrete Institute, Detroit, 2001.

10.16 Beeby, A. W. "The Prediction and Control of Flexural Cracking in Reinforced Concrete Members". En Cracking, Deflection and *Ultimate* Load of Concrete Slab Systems (SP-30). Detroit, American Concrete Institute, 1971.

10.17 Nawy, E. C., y K. W. Blair. "Further Studies in Flexural Crack Control in Structural Slab Systems". En Cracking, Deflection and *Ultimate* Load of Concrete Slab Systems (SP-30). Detroit, American Concrete Institute, 1971.

10.18 Watstein, D., y B. Bresler. "Bond and Cracking in Reinforced Concrete". En Reinforced Concrete Engineering (Vol. 1), editado por B. Bresler, Nueva York, Wiley, 1974.

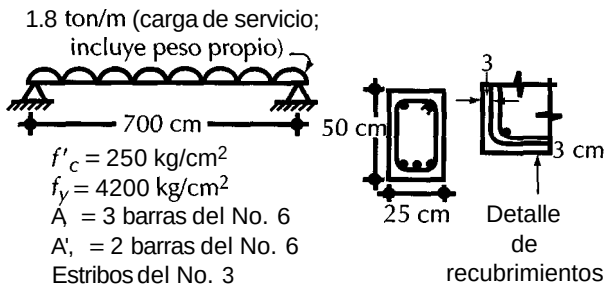
10.19 Lutz, L. A. "Crack Control Factor for Bundled Bars and for Bars of Different Sizes". *Journal of the* American Concrete Institute. Detroit, enero 1974.

10.20 Oh, Byung H., y Young-Jin Kang. "New Formula for Maximum Crack Width and Crack Spacing in Reinforced Concrete Flexural Members". *ACI* Structural *Journal*. Detroit, marzo-abril, 1987.

10.21 Frosch, R. J. "Another Look at Cracking and Crack Control in Reinforced Concrete". *ACI* Structural Journal, Detroit, mayo-junio, 1999.

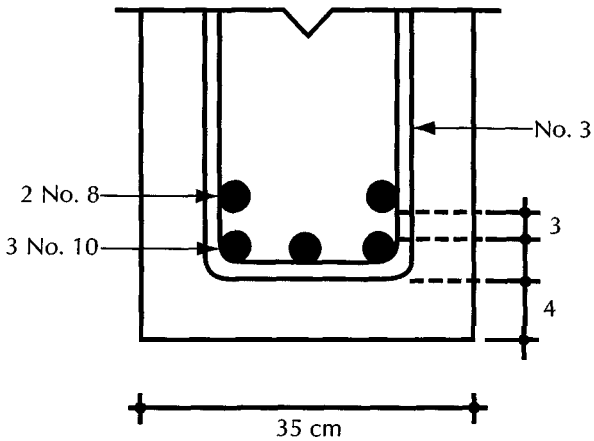
Ejercicios

10.1 Calcular los anchos de grietas de la siguiente viga por medio de los cuatro criterios expuestos en la sección 10.4.



$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
A = 3 barras del No. 6
A', = 2 barras del No. 6
Estribos del No. 3

10.2 Revisar si en la siguiente sección se cumple la especificación del Reglamento ACI 318-02 para control de agrietamiento. Suponer uso exterior.



$f_y = 6000$ kg/cm^2

Estribos del No. 3

CAPÍTULO 11

Deflexiones

11.1 Introducción. /11.2 Deflexiones bajo cargas de servicio de corta duración. /11.3 Deflexiones bajo cargas de servicio de larga duración (deflexiones diferidas). /11.4 Deflexiones permisibles. /11.5 Ejemplos de cálculos de deflexiones.

11.1 Introducción

Los adelantos recientes en los métodos de análisis y diseño plástico, y en el desarrollo de aceros y concretos de alta resistencia, permiten obtener miembros esbeltos y estructuras flexibles en los cuales son significativas las deflexiones. El cálculo de deflexiones también es importante para la estimación de las rigideces de elementos estructurales.

El cálculo de deflexiones tiene dos aspectos. Por un lado, es necesario calcular las deflexiones de miembros estructurales bajo cargas y condiciones ambientales conocidas; por otro, deben establecerse criterios sobre límites aceptables de deflexiones. Ambos aspectos son complejos por las siguientes consideraciones.

En relación con el primer aspecto, se han hecho numerosas investigaciones sobre el método para el cálculo de deflexiones, algunas de las cuales se presentan más adelante. Sin embargo, hasta la fecha el problema ha sido estudiado principalmente en forma determinística, mientras que en realidad es de naturaleza probabilista, ya que las deflexiones medidas en ensayes de vigas teóricamente iguales presentan una gran dispersión, inclusive cuando se ensayan en el laboratorio. Por consiguiente, el cálculo de deflexiones debería abarcar no solamente la estimación del valor medio esperado de las deflexiones en varias vigas, sino también la determinación de la probabilidad de obtener una deflexión dada, dentro de cierto intervalo de valores; se han hecho muy pocos estudios de dicho tipo [11.17, 11.18, 11.33]. El problema de calcular las deflexiones de miembros de estructuras reales es aún más difícil que el de estimar las deflexiones de vigas ensayadas en laboratorios. Los siguientes son algunos de los factores más importantes que lo complican. El comportamiento del concreto es función del tiempo y, por consiguiente, en cualquier enfoque riguroso debe tenerse en cuenta la historia de carga del miembro investigado. En la práctica, esto no es posible generalmente, ya que las condiciones de carga son muy variables, tanto en magnitud como en el tiempo de aplicación. También son difíciles de predecir las variaciones de humedad y temperatura con el tiempo, las cuales tienen influencia sobre las deflexiones a largo plazo. No es fácil calcular los efectos de la interacción del miembro considerado con otros elementos estructurales y no estructurales. La distribución aleatoria de las grietas a lo largo del miembro produce variaciones en los momentos de inercia que deben considerarse en el cálculo de las deflexiones. Aún más, no resulta práctico tomar en cuenta las variaciones reales del momento de inercia debidas a cambios en la cantidad del acero de una sección a otra.

El segundo aspecto, o sea, la limitación de deflexiones, es importante desde dos puntos de vista. En primer lugar, las deflexiones excesivas de un miembro pueden producir daños en otros miembros estructu-

rales o, más frecuentemente, en los elementos no estructurales, como muros divisorios, o acarrear problemas, como acumulación de aguas en azoteas. Los valores de las deflexiones permisibles dependen, desde este punto de vista, de varios factores, tales como el tipo de elementos no estructurales, tipo de conexión entre el miembro estructural y otros elementos, estructurales o no, y del método de construcción utilizado. En segundo lugar, a veces es significativa la respuesta humana ante las deflexiones de los miembros. Las deflexiones excesivas no son toleradas por los usuarios de la estructura, ya porque producen una sensación de inseguridad, ya por razones de orden estético.

La determinación de límites aceptables para las deflexiones desde estos dos puntos de vista han recibido poca atención por parte de los investigadores, aunque se han establecido algunas reglas empíricas que limitan las relaciones deflexión/claro, o bien, los valores absolutos de las deflexiones. En la sección 11.4 se comentan algunas de las reglas que han sido propuestas.

Las consideraciones anteriores se refieren a las deflexiones bajo cargas de servicio. Las deflexiones al colapso de un elemento también son de interés para ciertos aspectos del diseño estructural, ya que son una medida de la capacidad de estructuras hiperestáticas para absorber energía. Este tema no se trata en este texto.

En las siguientes secciones se exponen métodos para el cálculo de deflexiones de vigas bajo cargas de servicio de corta y larga duración. No se incluye el cálculo de deflexiones de losas. El tratamiento de este problema puede consultarse en las referencias 11.1, 11.2 y 11.19. Se recomienda especial-

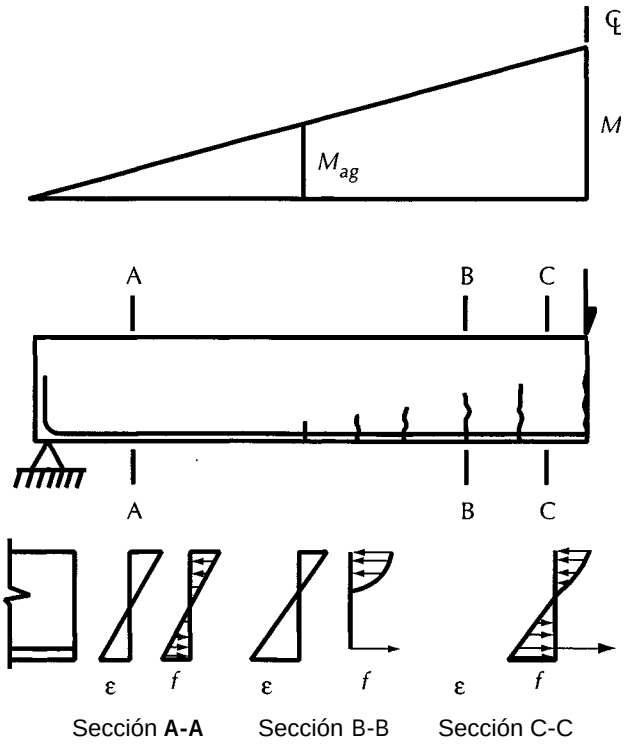


Figura 11.1 Distribuciones de agrietamiento, deformaciones unitarias y esfuerzos de una viga bajo carga de servicio.

mente la referencia 11.34, ya que presenta un método sencillo que permite tomar en cuenta los factores más importantes.

11.2 Deflexiones bajo cargas de servicio de corta duración

11.2.1 Descripción del fenómeno y variables principales

En la figura 11.1 se muestran esquemáticamente los estados de agrietamiento, esfuerzos y deformaciones unitarias en varias secciones transversales de una viga sujeta a flexión. Estos estados corresponden a cargas de servicio.

En la región en que el momento externo es menor que el que produce el agrietamiento del concreto en la zona de tensión, M_{ag}, el elemento no tiene grietas, el concreto trabaja a tensión y contribuye a resistir el momento externo, y las deformaciones unitarias son pequeñas: sección A-A.

En la región en que el momento externo es mayor que el de agrietamiento, se distinguen dos casos. El primero, sección B-B, es el de las secciones transversales en que se han formado grietas de tensión. En estas secciones, el concreto de la zona de tensión no contribuye apreciablemente a resistir el momento externo. El segundo caso, sección C-C, corresponde a secciones que no coinciden con grietas de tensión. En estas secciones, el concreto de la zona de tensión contribuye parcialmente a resistir el momento externo, y los esfuerzos y deformaciones son menores que los de una sección que coincide con una grieta.

Si se conoce el estado de deformaciones unitarias en una sección transversal es posible calcular la curvatura en esa sección dividiendo la deformación unitaria en la fibra de concreto más alejada, ε entre la profundidad del eje neutro, c, siempre que se acepte una distribución lineal de deformaciones unitarias a lo largo del peralte. En la figura 11.2 se presenta la distribución aproximada de curvaturas a lo largo de la

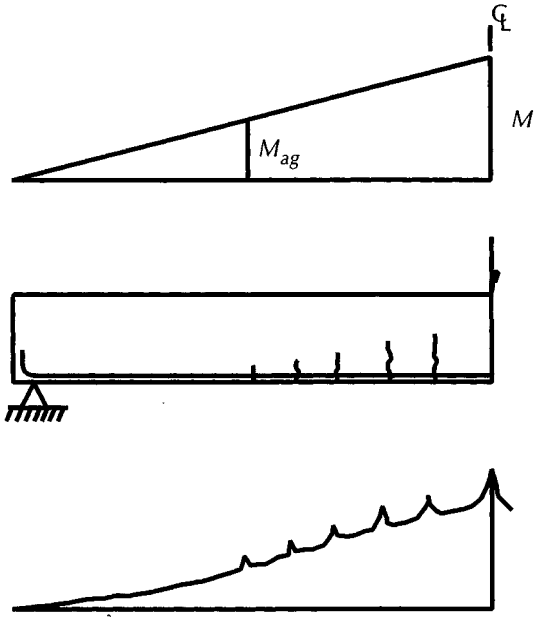


Figura 11.2 Distribución de curvaturas en la viga de la figura 11.1.

viga, correspondiente a los estados de deformaciones de la figura 11.1. Esta distribución es irregular, pues se presentan curvaturas mayores en las secciones que coinciden con grietas. Una vez conocida la magnitud y distribución de curvaturas a lo largo de la viga, es posible calcular las deflexiones por medio de los métodos clásicos, como los teoremas de área-momento o de la viga conjugada.*

El cálculo de deflexiones a partir de los diagramas de curvaturas no es práctico para elementos de concreto reforzado, por lo laborioso de calcular las curvaturas de diferentes secciones y porque no se conoce con precisión la distribución de curvaturas en las zonas vecinas a las grietas de flexión. Tampoco pueden predecirse con precisión los lugares en que se forman las grietas de flexión. Por lo tanto, se han propuesto métodos simplificados, que se describen en la sección 11.2.2, donde se toman en cuenta las variables principales que influyen en las deflexiones.

Las variables principales, según se deduce de la descripción del comportamiento, son las siguientes:

a) *Resistencia a la tensión del concreto.* A mayor resistencia, menores deflexiones, porque es mayor la zona que no tiene grietas y es mayor la contribución al momento resistente del concreto a tensión.
b) *Módulo de elasticidad del concreto.* A mayor módulo, menores deflexiones, porque las deformaciones unitarias y por consiguiente, las curvaturas, son menores.
c) *Porcentaje de refuerzo a tensión.* A menor porcentaje, mayores deflexiones, porque los esfuerzos y deformaciones unitarias en el concreto y en el acero son mayores.
d) *Agrietamiento del elemento.* A mayor agrietamiento, mayores deflexiones, porque los picos de curvaturas (figura 11.2) son mayores. Las principales variables que influyen en el agrietamiento se describen en el capítulo 10 de este texto.

En la siguiente sección se presentan algunos métodos para el cálculo de deflexiones de vigas bajo cargas de servicio de corta duración, y se exponen métodos simplificados para considerar las variables mencionadas. Con rigor, lo que se pretende calcular son las deflexiones "inmediatas", es decir, las que se presentan inmediatamente después de aplicadas las cargas.

11.2.2 Métodos simplificados para el cálculo de deflexiones inmediatas

En los métodos simplificados, las deflexiones se calculan como si se tratase de un elemento de un material homogéneo y elástico, para el cual fueran aplicables las siguientes ecuaciones de Mecánica de Materiales [11.20]:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EI} \tag{11.1}$$

$$y = \iint \frac{M}{EI}\, dx \cdot dx \tag{11.2}$$

Con esta hipótesis, ya no es necesario calcular la magnitud y distribución de curvaturas a lo largo del elemento.

Las diferencias entre los distintos métodos consisten básicamente en los valores del módulo de elasticidad, E, y del momento de inercia, I. Ambas cantidades resultan difíciles de determinar para un elemento de concreto reforzado.

La siguiente descripción se limita, pues, a la forma en que se propone calcular estos valores en cada método.

*** Para un tratamiento amplio de estos teoremas, véase, por ejemplo, la referencia** 11.20.

Métodos de *Yu* y Winter *[11.18]*

Estos autores han propuesto dos métodos. En el primero se considera que E es el módulo de elasticidad del concreto, E_c, y que I es el momento de inercia de la sección agrietada transformada. (En la sección 10.7 se explica el concepto de sección transformada.) En vigas libremente apoyadas se usa el valor de momento de inercia, I, en el centro del claro, 'mientras que en vigas continuas se usa el promedio de los valores de I en las zonas de momento positivo y negativo. En este primer método no se toma en cuenta que el comportamiento de una viga de concreto reforzado es esencialmente diferente antes y después de agrietarse el concreto de la zona de tensión. Tampoco se considera la contribución del concreto que trabaja a tensión entre grieta y grieta.

El segundo método es un refinamiento del primero que toma en cuenta la contribución del concreto que trabaja a tensión entre grieta y grieta. Para no pasar por alto esta contribución, las deflexiones calculadas con el primer método, o sea, con el momento de inercia de la sección agrietada transformada, se multiplican por el siguiente factor correctivo:

$$\left(1 - b\,\frac{M_1}{M_{máx}}\right) \qquad (11.3)$$

donde:

b = ancho del alma en la zona de tensión
$M_{máx}$ = momento máximo bajo cargas detrabajo
M_1 = $0.04\,(f'_c)^{2/3}\,h\,(h-c)$
M_1 = $0.018\,(f'_c)^{2/3}\,h(h-c)$ en sistema SI
h = peralte total
c = profundidad del eje neutro (sección 10.7)

Los métodos de Yu y Winter fueron verificados con los resultados de noventa ensayes. Las deflexiones experimentales, en su mayoría, no difieren de los valores calculados en más de 20 por ciento. La verificación indicó que el segundo método proporciona mejores resultados que el primero, pero la diferencia entre ambos es pequeña.

Método del Reglamento ACI 318-02

Este método está basado en los estudios realizados por Branson [11.1, 11.2, 11.5, 11.14], según los cuales el efecto del agrietamiento del concreto puede tomarse en cuenta usando en los cálculos un momento de inercia efectivo promedio, I_e, a lo largo del elemento. El valor de I_e que se presenta en el Reglamento ACI es el siguiente

$$I_e = \left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3\right] I_{ag} \le I_g \qquad (11.4)$$

M_{ag} es el momento de agrietamiento de la sección homogénea de concreto. El valor de M_{ag} se obtiene de la fórmula de flexión:

$$M_{ag} = \frac{f_r I_g}{y_t} \qquad (11.5)$$

donde f_r es el módulo de rotura, que se toma como $2\sqrt{f'_c}$ ($0.63\sqrt{f'_c}$ en sistema SI); I_g es el momento de inercia de la sección completa, sin considerar el refuerzo, y y_t es la distancia del centroide a la fibra más alejada en tensión. $M_{máx}$ es el momento máximo correspondiente al nivel de carga para el cual se estima la deflexión. I_{ag} es el momento de inercia de la sección agrietada transformada.

Mediante el uso del momento de inercia efectivo, I_e, se pretende proporcionar una transición entre I_g e I_{ag} en función del nivel de agrietamiento reflejado por la relación $M_{ag}/M_{máx}$.

Puesto que la carga viva actúa junto con la carga permanente, para obtener la parte de la deflexión correspondiente a ella, deberán calcularse primero las deflexiones debidas a la carga permanente sola y a la carga permanente más la carga viva. Estas deflexiones se calculan con los valores del momento de inercia efectivo, I_e, correspondiente a cada uno de los niveles de carga. La deflexión por carga viva será la diferencia entre los dos valores. El valor de la deflexión debida a carga viva se requiere porque algunas de las limitaciones de deformación que establece el Reglamento ACI 318-02 se dan en función de dicho valor.

Para vigas continuas, el Reglamento ACI 318-02 indica que se tome como valor del momento de inercia efectivo, I_e, el promedio de los valores correspondientes a las zonas de momento positivo y momento negativo. Así, para una viga con momentos en ambos extremos se tendría

$$I_e = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{e1} + I_{e2}}{2} + I_c\right) \qquad (11.6)$$

donde I_{e1} e I_{e2} son los momentos de inercia efectivos para los extremos, e I_c, el momento efectivo de la zona central. Si la viga tiene momento en un extremo solamente, el momento efectivo promedio será

$$I_e = \frac{1}{2}\left(I_{ex} + I_c\right) \qquad (11.7)$$

donde I_{ex} es el momento de inercia efectivo en el extremo continuo.

Si la viga es de sección constante se permite tomar como I_e el correspondiente al centro del claro para vigas libremente apoyadas y vigas continuas, y el del apoyo para voladizos. Esto simplifica considerablemente los cálculos sin que se afecte la precisión significativamente, puesto que experimentalmente se ha comprobado que la rigidez de la zona central es la que mayor influencia tiene en la deformación [11.21, 11.221.

Según el Comité ACI 435 [11.21], con base en los estudios de Branson [11.1], puede obtenerse una mayor precisión que con los métodos anteriores, si se utiliza un momento de inercia efectivo promedio determinado con las siguientes expresiones.

Para vigas con continuidad en ambos extremos

$$I_e = 0.70\, I_c + 0.15\,(I_{e1} + I_{e2}) \qquad (11.8)$$

Para vigas con continuidad en un extremo

$$I_e = 0.85\, I_c + 0.15\, I_{ex} \qquad (11.9)$$

donde I_e, I_c, I_{e1}, I_{e2} e I_{ex} tienen el mismo significado que en las ecuaciones 11.6 y 11.7.

Las referencias 11.16, 11.31 y 11.36 proporcionan tablas y gráficas que facilitan el cálculo de los momentos de inercia de secciones transformadas tanto agrietadas como sin agrietar para vigas rectangulares y vigas T.

Una vez determinado un valor promedio de I_e, la deflexión se puede calcular con cualquiera de los métodos clásicos como los de área-momento o viga conjugada mencionados anteriormente [11.20]. Generalmente es suficiente calcular la deflexión a la mitad del claro, que aproxima el valor máximo aun cuando no exista simetría de cargas y condiciones de apoyo.

Con base en recomendaciones formuladas por Branson en la referencia 11.1, en lugar de recurrir a los métodos clásicos que acaban de mencionarse, cuya aplicación puede resultar tediosa en algunos casos, las deflexiones inmediatas al centro del claro de vigas libremente apoyadas y de vigas conti-

nuas y en el extremo de voladizos pueden estimarse con un grado de precisión aceptable para fines prácticos por medio de la siguiente ecuación

$$a_i = K\frac{5}{48}\frac{ML^2}{E_c I_e} \qquad (11.10)$$

donde M es el momento en el empotramiento, para voladizos, y el momento a la mitad del claro, para vigas libremente apoyadas y vigas continuas. Para cargas uniformes K = 12/5 para voladizos; la unidad, para vigas libremente apoyadas; y $(1.20 - 0.20\ M_o/M_m)$ para vigas continuas. M_o es el momento isostático a la mitad del claro y M, es el momento neto en la misma sección. E_c es el módulo de elasticidad del concreto. Para otros tipos de carga véanse las referencias 11.1, 11.12 y 11.25.

Método de las *NTC-04*

En las Normas Técnicas Complementarias se presentan dos métodos. El primero es el mismo del Reglamento ACI que consiste en usar un momento de inercia efectivo calculado con la ecuación 11.4. Para el módulo de rotura, f_r, denominado f_t en las NTC, se especifica un valor de $2\sqrt{f'_c}$ para concreto clase 1 y de $1.4\sqrt{f'_c}$ para concreto clase 2.

El segundo método, considerado como una simplificación del anterior, consiste en usar un momento de inercia calculado con la sección agrietada transformada. En vigas continuas se indica que se utilice un valor promedio del momento de inercia calculado con la expresión

$$I_e = \frac{I_{e1} + I_{e2} + 2I_c}{4} \qquad (11.11)$$

donde I_{e1} e I_{e2} son los momentos de inercia de la sección transformada agrietada de los extremos del claro de estudio, e I_c es el de la sección central. Si la viga es continua únicamente en uno de los extremos, el momento de inercia correspondiente al tramo discontinuo se supone igual a cero y como denominador de la expresión 11.11 se utiliza 3.

Otros métodos

Además de los métodos presentados anteriormente, se han propuesto otros que difieren entre sí por el grado de refinamiento con que se considera la influencia de las variables principales. Las referencias 11.12 y 11.26 contienen reseñas detalladas de los métodos de mayor importancia desarrollados hasta la década de 1960. El Comité Euro-Internacional del Concreto y la FIP presentan otro método que consiste en usar una gráfica carga-deformación de los elementos bilineal [11.27]. Otros métodos se basan en calcular el diagrama momento-curvatura de distintas secciones transversales de la viga y determinar las deflexiones a partir de las curvaturas, por ejemplo, cargando la viga conjugada con el diagrama de curvaturas, como se comentó con referencia a la figura 11.2. Este enfoque ha sido utilizado por Duan et al [11.33] en un método que tiene la ventaja de poder considerar la existencia de patines tanto en la zona de compresión como de tensión. La correlación de las deflexiones calculadas con este método con las medidas en varias series de ensayes es bastante buena. Park et al [11.37] y Ghali y Favre [11.38] también presentan métodos basados en este enfoque. Una de las ventajas más importantes de los métodos basados en curvaturas es que permiten el cálculo de deflexiones hasta la falla de los elementos y no sólo bajo cargas de servicio. Este cálculo, que no se incluye en este texto, es importante para medir la ductilidad de los elementos, la cual es fundamental para el diseño de estructuras en zonas sísmicas.

11.3 Deflexiones bajo cargas de servicio de larga duración (deflexiones diferidas)

11.3.1 Descripción del fenómeno y variables principales

Si una viga se deja bajo carga sostenida durante un largo periodo de tiempo, se observa que se forman nuevas grietas, se abren más las grietas existentes y las deflexiones aumentan hasta duplicar o triplicar su magnitud. La explicación de todo esto se encuentra en los fenómenos de contracción y flujo plástico del concreto que se analizan en el capítulo 2 de este texto (véase también la referencia 11.10). A continuación se describe la forma en que influyen con el tiempo la contracción y el flujo plástico en el incremento de deflexiones.

Efecto de la contracción

Este efecto se ilustra en la figura 11.3 para una viga libremente apoyada con refuerzo de tensión únicamente. Las fibras superiores se acortan libremente, mientras que las fibras al nivel del acero de refuerzo se acortan menos por la restricción del refuerzo. Las curvaturas, y por lo tanto las deflexiones, debidas a la contracción de este tipo de elementos son del mismo signo que las producidas por cargas transversales.

En elementos con refuerzo de tensión y de compresión, las fibras superiores ya no se acortan libremente, y las curvaturas y deflexiones son menores que en el caso de refuerzo de tensión únicamente. Si la sección es simétrica y con iguales porcentajes de refuerzo de tensión y compresión, el acortamiento es el mismo en las caras superior e inferior del elemento y, por lo tanto, no existen curvaturas ni deflexiones debidas a contración, excepto las ocasionadas por las variaciones naturales en el concreto y en la colocación de las varillas.

Las principales variables que influyen en las deflexiones por contracción, además de la relación entre porcentajes de refuerzo de tensión y de compresión, son las mismas que influyen en la contracción del concreto simple, ya que a mayor deformación unitaria, ε_{sh} (figura 11.3), son mayores las deflexiones del elemento. Las deflexiones por contracción ocurren aun cuando el elemento se encuentre descargado.

Efecto del flujo plástico

El efecto del flujo plástico en el cambio de curvaturas se ilustra en la figura 11.4. La línea A representa los estados de deformaciones y de esfuerzos instantáneos, y la línea *B* las deformaciones y esfuerzos después de transcurrido cierto tiempo. Las deformaciones del concreto aumentan con el tiempo, mien-

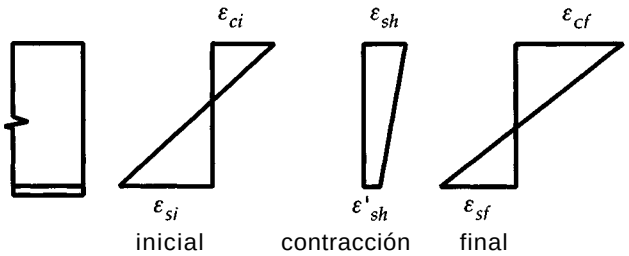


Figura 11.3 Efecto de la contracción en una viga con refuerzo de tensión.

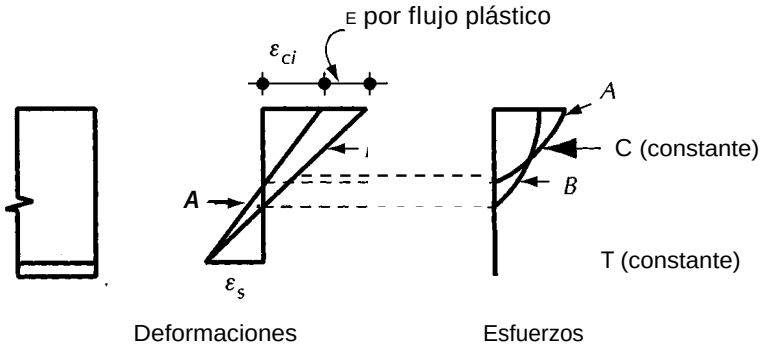


Figura 11.4 Efecto del flujo plástico en una viga con refuerzo de tensión.

tras los esfuerzos disminuyen, porque el eje neutro de la sección se mueve hacia abajo. Las deformaciones al nivel del acero de refuerzo permanecen prácticamente constantes, según se ha podido comprobar experimentalmente [11.28].

El incremento de deformaciones del concreto simple por flujo plástico se analiza en el capítulo 2. En un elemento de concreto reforzado, el incremento de deformaciones ocurre bajo un estado de esfuerzos variable debido al cambio de posición del eje neutro, el cual, como se señaló anteriormente, hace que disminuyan los esfuerzos de compresión.

En un elemento con refuerzo de compresión, además de la disminución de esfuerzos en el concreto por el cambio de posición del eje neutro, hay otra disminución por la transferencia de esfuerzos de compresión del concreto al acero. Por consiguiente, la disminución de esfuerzos en el concreto es mayor que en el caso de elementos con refuerzo de tensión únicamente. Ahora bien, el incremento de deformaciones por flujo plástico es mayor mientras mayores sean los esfuerzos aplicados (capítulo 2). Entonces, en un elemento con refuerzo de compresión, las deformaciones por flujo plástico son menores, porque los esfuerzos disminuyen más rápidamente que en un elemento con refuerzo de tensión únicamente.

Las principales variables que influyen en las deformaciones por flujo plástico son el porcentaje de refuerzo de compresión, la magnitud de los esfuerzos aplicados y todas las variables que influyen en las deformaciones por flujo plástico del concreto simple. Estas variables se estudian en el capítulo 2.

A diferencia del incremento de deformaciones por contracción, es necesario que un elemento se encuentre cargado para que ocurran deformaciones por flujo plástico.

11.3.2 Métodos para el cálculo de deflexiones bajo cargas de servicio de larga duración

Las variables que influyen en las deformaciones por contracción y flujo plástico son demasiado numerosas para poder involucrarlas todas en un método sencillo y riguroso. Por consiguiente, los métodos propuestos consideran únicamente algunas de esas variables y esto de manera simplista.

Los efectos de la contracción y del flujo plástico se consideran, por lo general, simultáneamente, aunque existen métodos para calcular por separado dichos efectos [11.1, 11.2, 11.14, 11.29]. En los métodos que se presentan a continuación, esos efectos están considerados simultáneamente.

Tabla 11.1 Módulos de elasticidad modificados [11.8].

f'_c (kg/cm²)	140			175			210			280			350		
Edad al aplicar la carga (días)	7	14	28	7	14	28	7	14	28	7	14	28	7	14	28
Duración de la carga: 30 días	0.55	0.66	0.79	0.58	0.71	0.86	0.60	0.75	0.91	0.63	0.79	0.97	0.66	0.83	1.04
90 días	0.41	0.51	0.63	0.43	0.54	0.67	0.45	0.56	0.70	0.46	0.58	0.73	0.47	0.61	0.77
1 año	0.28	0.36	0.44	0.29	0.37	0.47	0.30	0.38	0.48	0.30	0.39	0.50	0.31	0.40	0.51
3 años	0.23	0.29	0.37	0.24	0.30	0.38	0.24	0.31	0.39	0.24	0.31	0.40	0.25	0.32	0.42
5 años o más	0.22	0.28	0.35	0.22	0.29	0.37	0.23	0.29	0.38	0.23	0.30	0.39	0.24	0.31	0.40

Los módulos modificados son iguales a los módulos instantáneos multiplicados por los factores de esta tabla.

Métodos de Yu y Winter [11.8]

Estos autores presentan dos métodos. En el primero, el efecto del tiempo se toma en cuenta usando un módulo de elasticidad reducido, E_{ct}. En la tabla 11.1 se presentan los valores recomendados. El momento de inercia se calcula usando la sección agrietada y transformada, con la relación modular $n_1 = E_s/E_{ct}$.

El segundo método consiste en multiplicar el valor de las deflexiones instantáneas por un factor que depende del porcentaje de acero de compresión y de la duración de la carga aplicada. Este factor se obtuvo estadísticamente a partir de resultados de 68 ensayes. En la tabla 11.2 se presentan los factores recomendados.

Método del Reglamento ACI 318-02

El Reglamento ACI 318-02 propone un procedimiento para calcular la deformación adicional diferida debida a la carga muerta y a la parte de la carga viva que se considere será de larga duración. El procedimiento consiste en multiplicar la deflexión inmediata debida al total de la carga que actúe en forma continua por el factor λ dado por la siguiente ecuación

$$\lambda = \frac{T}{1+50\,\rho'} \qquad (11.12)$$

Tabla 11.2 Deflexiones totales de larga duración [11.8].

Duración de la carga	8 $A'_s = 0$	8 $A' = \frac{1}{2} A$	8 $A' = A$	Duración de la carga	8 $A' = 0$	8 $A' = \frac{1}{2} A$	8 $A' = A$
1 mes	1.58	1.42	1.27	2 años	2.65	2.15	1.80
3 meses	1.95	1.77	1.55	2 ½ años	2.72	2.16	1.81
6 meses	2.17	1.95	1.69	3 años	2.78	2.18	1.81
9 meses	2.31	2.03	1.73	4 años	2.87	2.20	1.82
1 año	2.42	2.08	1.78	5 años	2.95	2.21	1.82
1 ½ años	2.54	2.12	1.80				

Las deflexiones de larga duración son iguales a las deflexiones instantáneas multiplicadas por los factores θ de esta tabla.
Las deflexiones que se obtienen con estos factores incluyen las deflexiones instantáneas.

donde ρ' es la cuantía de acero de compresión al centro del claro para claros libremente apoyados o continuos, y en el empotramiento, para voladizos. El factor T, que refleja el efecto de la duración de la carga, está dado para determinados tiempos en la tabla 11.3. Para otras duraciones de carga puede recurrirse a la figura 11.5. El denominador del segundo término de la ecuación 11.12 refleja la influencia del acero de compresión, que tiende a reducir las deflexiones diferidas. Para vigas continuas puede utilizarse un valor promedio determinado como en el caso de los momentos de inercia efectivos.

Tabla 11.3 Factor de duración de carga T.

Duración	T
5 años o más	2.0
12 meses	1.4
6 meses	1.2
3 meses	1.0

La ecuación 11.12 fue formulada empíricamente por Branson en la referencia 11.30,

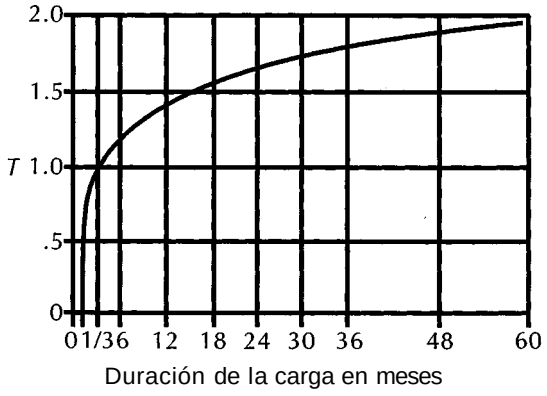


Figura 11.5 Valores de T para la ecuación 11.12 (según la referencia 11.8).

con base en el análisis de numerosos datos de deformaciones de vigas.

Métodos de las NTC-O4

Las NTC estipulan un método fundamentalmente igual al Reglamento ACI, pero distinguen entre concretos clase 1 y clase 2, ya que como se ha visto, los efectos del tiempo son mayores mientras menor sea el módulo de elasticidad del concreto. Así, para concretos clase 1, las deflexiones adicionales se obtienen multiplicando las inmediatas, calculadas como se indicó anteriormente, por el factor

$$\frac{2}{1+50\rho'} \qquad (11.13)$$

que como puede verse es igual al factor de la ecuación 11.12 con el valor máximo de T. Para concretos clase 2, el numerador de la ecuación 11.13 debe tomarse igual a 4. Para tramos continuos se indica que se utilice un valor promedio de ρ' determinado en forma semejante a la aplicada según las NTC para determinar un valor promedio del momento de inercia efectivo I_e.

Otros métodos

Para procedimientos para estimar deflexiones diferidas más refinados que los que se acaban de exponer, consúltense las referencias 11.3, 11.26 y 11.36. También de interés son los métodos propuestos por el Comité Euro-Internacional del Concreto, especialmente el método bilineal, al que se ha hecho referencia [11.271.

11.4 Deflexiones permisibles

Se ha mencionado anteriormente que las deflexiones de elementos estructurales deben

limitarse por dos razones: por la posibilidad de que provoquen daños en otros elementos de la estructura, y por motivos de orden estético.

El valor de las deflexiones permisibles para evitar daños en otros elementos, depende principalmente del tipo de elementos y de construcción empleados. Por ejemplo, si existe un cancel de vidrio por debajo de una viga, y dicho cancel está unido rígidamente a la viga, las deflexiones permisibles deberán ser prácticamente nulas, pues por pequeñas que sean pueden causar la rotura del cancel. En cambio, si se ha previsto cierta holgura entre la viga y el cancel, las deflexiones permisibles pueden ser mayores. En estos casos, las deflexiones permisibles deben especificarse como un valor absoluto. Como otro ejemplo, considérese que por arriba de la viga existe un muro con acabado de yeso. Si las deflexiones de la viga son excesivas, puede agrietarse el acabado del muro. En este caso, es más conveniente especificar las deflexiones permisibles como una fracción de la distancia entre los puntos de inflexión de la viga, ya que de esta manera se limitan mejor las curvaturas de la viga, parámetro con el cual puede relacionarse el agrietamiento del muro. Para fijar el valor de las deflexiones permisibles, también debe considerarse el procedimiento de construcción. Por ejemplo, si los muros se construyen varios meses después de que se ha terminado la estructura, ya se habrá desarrollado un porcentaje grande de las deflexiones a largo plazo, y se reduce la probabilidad de que se agrieten los muros. En este caso, sólo interesan las deflexiones producidas por la carga viva.

Desde el punto de vista estético, el valor de las deflexiones permisibles depende principalmente del tipo de estructura y de la existencia de líneas de referencia que permitan apreciar las deflexiones. Es obvio que las deflexiones permisibles en una residencia deben ser menores que en una bodega. Cuando existe una línea horizontal de referencia, las deflexiones permisibles deben fijarse como un valor absoluto, mientras que si no existe dicha referencia, es más conveniente fijar las deflexiones permisibles como una fracción del claro de la viga.

La posibilidad de dar contraflechas es otro factor que debe tomarse en cuenta al establecer las deflexiones permisibles. El valor de la contraflecha puede restarse de la deflexión calculada, y la diferencia compararse con la deflexión permisible. Sin embargo, no deben darse contraflechas excesivamente grandes.

Las consideraciones anteriores indican que es difícil establecer reglas sencillas sobre deflexiones permisibles. En los incisos siguientes se resumen las especificaciones al respecto del Reglamento ACI 318 y del Reglamento del Distrito Federal.

11.4.1 Control de deflexiones según el Reglamento ACI 318-02

El Reglamento ACI 318-02 permite prescindir del cálculo de deflexiones de vigas y de losas que trabajan en una dirección siempre que se satisfagan los peraltes mínimos dados en la tabla 11.4 y que se trate de elementos cuya deformación no perjudique a elementos no estructurales. Pueden aceptarse peraltes menores si se calculan las deformaciones y éstas cumplen con las limitaciones de la tabla 11.5. Las limitaciones de la tabla 11.4 no garantizan que en algunas situaciones no lleguen a registrarse deformaciones excesivas, de manera que en elementos estructurales de importancia y en condiciones de carga poco usuales, es recomendable calcular las deflexiones con el fin de compararlas con los valores admisibles, aun cuando se cumplan los requisitos de la tabla 11.4 citada. Evidentemente siempre será necesario hacer cálculos de deformaciones cuando existe riesgo de perjudicar elementos no estructurales.

Tabla 11.4 Peraltes totales mínimos de vigas y losas que trabajan en una dirección cuando no se calculan las deflexiones y cuando las deformaciones de dichos elementos no perjudican a elementos no estructurales.

Elemento	Peralte mínimo, h			
	Libremente apoyada	Un extremo continuo	Ambos extremos continuos	Voladizo
Losas macizas	L/20	*L*/24	*L*/28	*L*/10
Vigas y losas nervuradas	L/16	L/18.5	L21	*L*/8

Nota: estos valores se aplican para concreto de peso normal y acero con límite de fluencia f_y de 4200 kg/cm^2. Para otros valores de f_y, multiplíquense los valores de esta tabla por el factor 0.4 + 0.00014 f_y. El símbolo *L* representa el claro.

Tabla 11.5 Deflexiones calculadas permisibles.

Tipo de miembro	Deflexión a considerar	Deflexión permisible
Azoteas que no soportan o que no están ligadas a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes.*	Deflexión inmediata debida a la carga viva	*L*/180
Pisos que no soportan o que no están ligados a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes.	Deflexión inmediata a la carga viva.	*L*/360
Azoteas o pisos que soportan o que están ligados a elementos no estructurales que puedan dañarse por deflexiones grandes.	La parte de la deflexión total que ocurre después de que se ligan los elementos no estructurales (la suma de la deflexión de larga duración debida a todas las cargas sostenidas y la deflexión inmediata debida a cualquier carga viva adicional).	*L*/480
Azoteas o pisos que soportan o que están ligados a elementos no estructurales que no puedan sufrir daños por deflexiones grandes.		*L*/240

*Este límite puede no ser suficiente para evitar el encharcamiento del agua. El símbolo L representa el claro.

11.4.2 Control de deflexiones según el Reglamento del Distrito Federal

El Reglamento del Distrito Federal [11.32] establece limitaciones de deformación iguales para todos los materiales de construcción. La deflexión máxima de vigas y losas, incluyendo los efectos a largo plazo, se fija en 0.5 cm más el claro entre 240. Si la deformación de la viga o losa puede perjudicar a elementos no estructurales, la deflexión que pueda presentarse después de la colocación de dichos elementos se limita a 0.3 cm más el claro entre 480. Para elementos en voladizo, los límites anteriores se pueden duplicar.

11.4.3 Recomendaciones adicionales para el control de deflexiones

Tanto en la etapa de diseño estructural como durante la construcción, se pueden seguir algunas recomendaciones sencillas para reducir las deflexiones.

En el diseño resulta conveniente utilizar relaciones de refuerzo relativamente bajas, ya que esto conduce a vigas más peraltadas con momentos de inercia grandes. El comité ACI 435 recomienda relaciones de refuerzo entre 0.25 y 0.40 de la relación balanceada ρ_b [11.36]. También recomienda usar acero de compresión aunque no se requiera por resistencia, ya que este acero reduce las deflexiones de larga duración producidas por la contracción y el flujo plástico, según se explicó en la sección 11.3.1.

En la etapa de construcción, es importante que el curado del concreto se empiece lo más pronto posible y se matenga tanto como se pueda. De esta manera, el concreto adquiere su resistencia y su módulo de elasticidad a edades menores y, por otra parte, se reducen la contracción y el flujo plástico. También se recomienda retrasar la aplicación de las primeras cargas tanto como sea posible, para dar tiempo a que aumente el módulo de elasticidad del concreto. Especial cuidado debe tenerse en que el apuntalamiento de un piso no induzca cargas excesivas en el piso inferior, sobre todo cuando el concreto no ha alcanzado su resistencia de diseño.

11.5 Ejemplos de cálculos de deflexiones

Ejemplo *11.1* Cálculo de las deflexiones de una viga de concreto libremente apoyada por los métodos de Yu y Winter.

En este ejemplo se ilustra el procedimiento de cálculo de deflexiones de una viga libremente apoyada, usando los dos métodos de Yu y Winter. Se calculan deflexiones bajo cargas de corta duración y deflexiones a largo plazo.

La deflexión máxima de una viga libremente apoyada y con carga uniformemente distribuida [11.20] obtenida mediante la resolución de la ecuación 11.1, es

$$a_{máx} = \frac{5}{384} \cdot \frac{wL^4}{EI} \qquad (11.14)$$

Para calcular el valor de E se usó la siguiente ecuación propuesta en las NTC-04 para concreto clase 1

$$E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c}$$

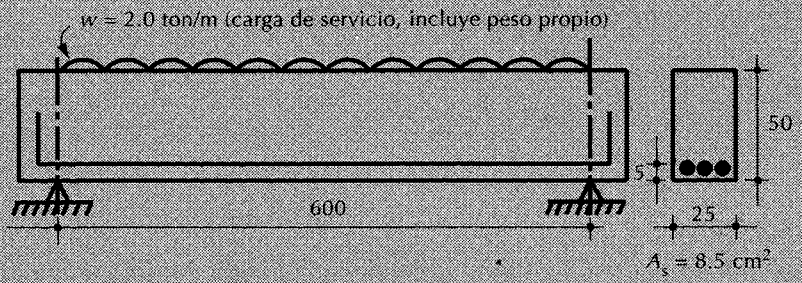
El valor del momento de inercia, I, se calculó con las ecuaciones propuestas en los distintos métodos empleados. Cuando fue necesario calcular el momento de inercia de la sección agrietada y transformada, se utilizaron los principios expuestos en la sección 10.7.

Los dos métodos de Yu y Winter para cargas de corta duración dan resultados semejantes. El segundo método pretende tener en cuenta el hecho de que las vigas no se agrietan en toda su longitud.

Para calcular la deflexión de larga duración por el primer método de Yu y Winter es necesario conocer la edad del concreto al aplicar la carga y la duración de la carga. En el ejemplo se supuso que la edad del concreto era de 28 días y la duración de la carga de un año. En la expresión para calcular la deflexión debe utilizarse el momento de inercia de la sección agrietada y transformada. Para determinar el valor de la relación modular, n_1, necesaria en estos cálculos, debe usarse el módulo de elasticidad reducido, E_{ct}, que se obtiene de la tabla 11.1 para las condiciones del problema.

EJEMPLO 11.1 ***Cálculo de las deflexiones de una viga de concreto libremente apoyada por los métodos de Yu y Winter.***

DATOS



Acotaciones en cm
Edad del concreto al aplicar la carga = 28 días
Duración de la carga sostenida = un año

MATERIALES

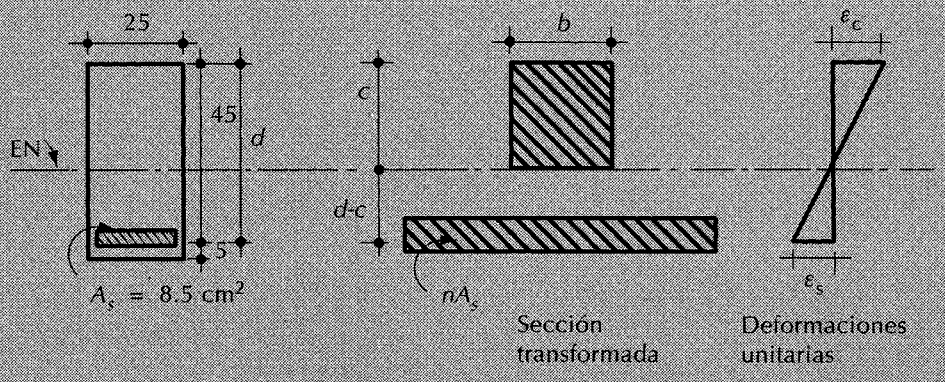
Concreto clase 1, $f'_c = 300$ kg/cm²
Acero, $f_y = 4000$ kg/cm²

CÁLCULO DE DEFLEXIONES DE CORTA DURACIÓN

a) Primer método de Yu y Winter

$$a = \frac{5}{384}\frac{wL^4}{EI}$$

Momento de inercia de la sección transformada y agrietada



EJEMPLO 11.1 ***(continuación)***

$$E_c = 14{,}000\sqrt{f'_c} = 14{,}000\sqrt{300}$$
$$E_c = 242{,}000 \text{ kg/cm}^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2.0\times10^6}{2.42\times10^5} = 8.3 \qquad \boxed{n \simeq 8}$$

$$A_t = nA_s = 8 \times 8.5 \qquad \boxed{A_t = 68 \text{ cm}^2}$$

Profundidad del eje neutro

$$\frac{b(c)^2}{2} = nA_s(d-c)$$

Sustituyendo valores

$$\frac{25\,(c)^2}{2} = 68\,(45-c)$$

$$(c)^2 + 5.44\,(c) - 244.8 = 0 \qquad \boxed{c = 13.16 \text{ cm}}$$

Cálculo del momento de inercia con respecto al eje neutro:

$$I_{ag} = \frac{b(c)^3}{3} + nA_s(d-c)^2$$

Sustituyendo valores:

$$I_{ag} = \frac{25\,(13.16)^3}{3} + 68\,(45-13.16)^2 \qquad \boxed{I_{ag} = 87{,}930 \text{ cm}^4}$$

EJEMPLO 11.1 ***(continuación)***

Deformación:

$w = 2$ ton/m $= 20$ kg/cm

$$a_{cd1} = \frac{5 \times 20(600)^4}{384 \times 2.42 \times 10^5 \times 87{,}930}$$

$a_{cd1} = 1.6$ cm

b) Segundo método de Yu y Winter

Las deflexiones calculadas por medio del primer método se multiplican por el factor

$$\left(1 - b\frac{M_1}{M_{máx}}\right) \qquad \text{(ecuación 11.3)}$$

$b = 25$ cm

$$M_{máx} = \frac{wL^2}{8} = \frac{2(6)^2}{8} = 9 \text{ ton-m} = 9.0 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$M_1 = 0.04\ (f'_c)^{2/3}\ h\ (h - c)$$

$$M_1 = 0.04(300)^{2/3} \times 50(50 - 13.16) = 0.033 \times 10^5 \text{ kg}$$

$$1 - b\frac{M_1}{M_{máx}} = 1 - 25\frac{0.033}{9.0} = 1 - 0.09 = 0.91$$

Deformación

$a_{cd2} = 0.91\ a_{cd1}$

$a_{cd2} = 0.91 \times 1.6$

$a_{cd2} = 1.5$ cm

CÁLCULO DE DEFLEXIONES DE LARGA DURACIÓN

a) Primer método de Yu y Winter

$E_{ct} = 0.50\ E_c$ (Tabla 11.1)

$E_{ct} = 0.50 \times 242{,}000 = 121{,}000$ kg/cm^2

$$n_1 = \frac{E_s}{E_{ct}} = \frac{E_s}{0.5\,E_c}$$

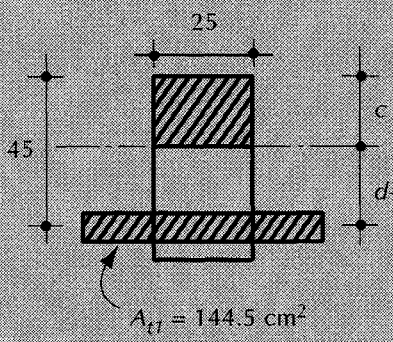
$n_1 \simeq 17$

$A_{t1} = n_1 A_s = 17 \times 8.5$

$A_{t1} = 144.5$ cm^2

EJEMPLO 11.1 *(continuación)*

Profundidad del eje neutro



$$(c)^2 \frac{b}{2} = A_{t1}\,(d - c)$$

$$(c)^2 + 11.56\,(c) - 520.2 = 0$$

$$c = 17.7 \text{ cm}$$

Cálculo del momento de inercia con respecto al eje neutro:

$$I_{ag} = \frac{b(c)^3}{3} + A_{t1}\,(d - c)^2$$

$$I_{ag} = \frac{25(17.7)^3}{3} + 144.5\,(45 - 17.7)^2$$

$$I_{ag} = 153{,}904 \text{ cm}^4$$

Deformación

$$a_{ld2} = \frac{5 \times 20\,(600)^4}{384 \times 1.21 \times 10^5 \times 1.539 \times 10^5}$$

$$a_{ld1} = 1.8 \text{ cm}$$

b) Segundo método de Yu y Winter

Factor de la tabla 11.2:
Duración de la carga: un año

$$A'_s = 0$$

$$\theta = 2.42$$

$$a_{ld2} = a_{cd1}\theta$$

$$a_{ld2} = 1.6 \times 2.42$$

$$a_{ld2} = 3.9 \text{ cm}$$

Ejemplo 11.2 Revisión de la deflexión de una viga continua según el Reglamento ACI 318-02

En este ejemplo se muestra cómo comprobar si se satisfacen los requisitos en cuanto a deflexión admisible que establece el Reglamento ACI 318-02 para vigas cuya deformación puede afectar a elementos no estructurales. En el ejemplo se considera que dichos elementos se colocan inmediatamente después del descimbrado. Así la deformación que puede dañarlos será exclusivamente la diferida debido a la carga sostenida, es decir, la carga muerta y la porción de carga viva que se estima actuará en forma continua (en este caso 50 por ciento) y la deflexión inmediata debida a la carga viva. La deflexión inmediata debida a carga muerta se registra antes de colocados los elementos no estructurales de manera que no los afecta. (Por sencillez se supone que el peso de los elementos no estructurales es despreciable.) Por otra parte, una posible deformación inmediata excesiva debida a carga muerta puede compensarse previendo una contraflecha adecuada. El Reglamento limita a U480 el valor de la suma de la deflexión inmediata debida a la carga viva y la deflexión diferida debida a la carga sostenida, siendo L la longitud del claro.

Para poder determinar las deflexiones inmediatas de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI, se calcularon los momentos de inercia efectivos en las zonas de momento positivo y negativo de la viga para tres niveles de carga: carga muerta únicamente, carga muerta más el total de la carga viva y carga sostenida (carga muerta más el 50 por ciento de la carga viva). Los momentos negativos utilizados son los correspondientes a los paños de los apoyos; pueden también emplearse los momentos negativos en los centros de los apoyos, sin que resulten diferencias significativas.

El momento de inercia efectivo promedio para el cálculo de la deflexión inmediata debida a la carga muerta, resultó igual al de la sección no agrietada, I_g. El requerido para el cálculo de la deflexión inmediata debida a carga muerta más el total de la carga viva se determinó de tres maneras; A con la ecuación 11.6, B considerándolo igual al de la zona de momento positivo, y C con la ecuación 11.8. Los valores obtenidos con los métodos A y C son parecidos, mientras que el correspondiente al método B, el más sencillo, fue algo menor, lo que da resultados conservadores. En el ejemplo, las deflexiones inmediatas tanto para esta condición de carga como para la correspondiente a la carga sostenida, se calcularon con base en el método C.

La deflexión inmediata debida a carga viva se calculó como la diferencia entre la correspondiente a la carga muerta más el total de la carga viva y la correspondiente a la carga muerta. Este criterio implica el mayor nivel de agrietamiento posible, lo que conduce a resultados conservadores. La deflexión inmediata debida a carga sostenida se determinó para poder estimar la deformación diferida ocasionada por ella.

Los cálculos de deflexiones inmediatas se efectuaron con la expresión:

$$a = \frac{5L^2}{48EI}\left[M_c - \frac{1}{10}(M_i + M_d)\right] \qquad (11.15)$$

donde

M_c = momento al centro del claro
M_i = momento en el apoyo izquierdo
M_d = momento en el apoyo derecho

Esta expresión, que da la deflexión al centro del claro, puede deducirse a partir del principio de la viga conjugada. Véase, por ejemplo, el inciso 14.2 de la referencia 11.23. Puede también utilizarse la ecuación 11.10.

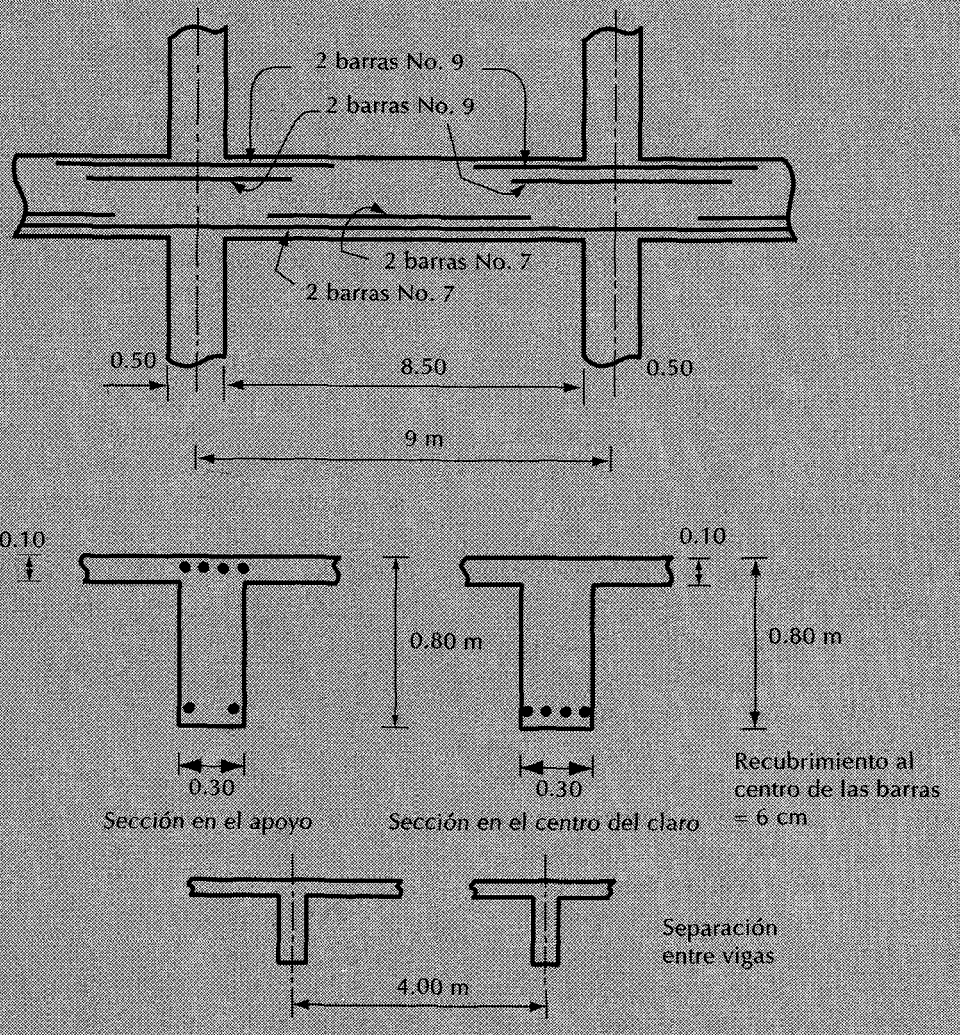
El efecto diferido de la carga sostenida se calculó con un valor promedio de los valores de λ correspondientes a las zonas de momento negativo y momento positivo. El

promedio se obtuvo con un criterio análogo al dado por la ecuación 11.8 para estimar un valor promedio del momento de inercia efectivo. Al aplicar la ecuación 11.12 se utilizó un valor de T igual a 2, según la tabla 11.3, que corresponde a una duración de 5 años o más.

La deflexión calculada de 0.99 cm resultó inferior a la permisible para las condiciones del ejemplo, $L/480 = 1.88$ cm.

EJEMPLO 11.2 ***Revisión de la deflexión de una viga continua según el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



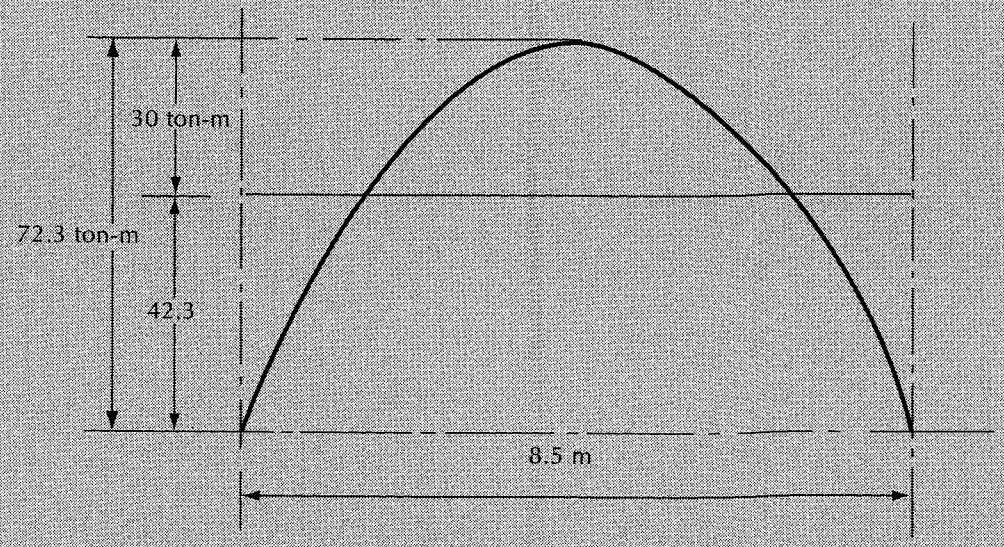
$f'_c = 300$ kg/cm^2; $f_y = 6000$ kg/cm^2
Carga viva: $w_{cv} = 5$ ton/m
Carga muerta: $w_{cm} = 3$ ton/m

EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

Considerar que el 50 por ciento de la carga viva actúa en forma continua.

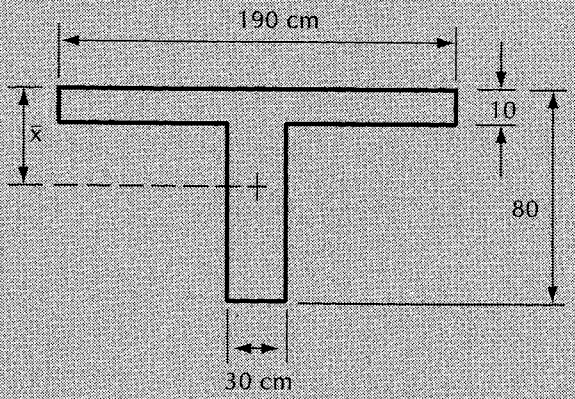
La viga forma parte de un sistema de piso y su deformación puede perjudicar a elementos no estructurales. Suponer que los elementos no estructurales se colocan inmediatamente después del descimbrado.

Diagrama de momentos a nivel de servicio debidos a $w_{cv} + w_{cm} = 8$ ton/m



CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

Cálculo de I_g



Ancho efectivo $\begin{cases} 16t + b' = 190 \\ L/4 = \dfrac{900}{4} = 225 \\ c.a.c. = 400 \end{cases}$

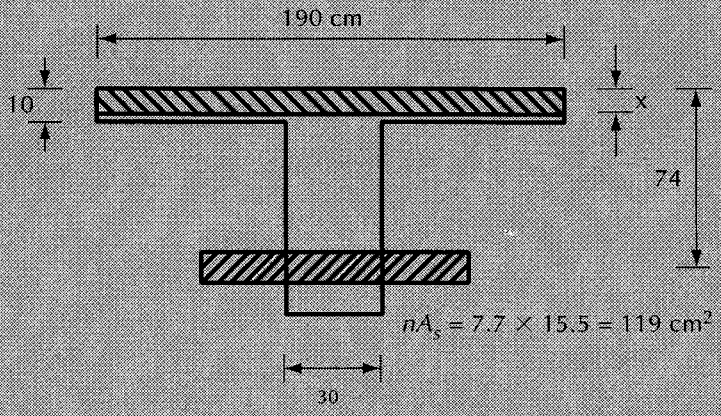
EJEMPLO 11.2 *(continuación)*

$$\bar{x} = \frac{160\times10\times5 + 30\times80\times40}{160\times10 + 30\times80} = 26 \text{ cm}$$

$$I_g = \frac{1}{12}\times160\times10^3 + 160\times10\,(26-5)^2 + \frac{1}{12}\times30\times80^3 + 30\times80\,(26-40)^2$$

$$\boxed{I_g = 2.469 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

Cálculo de I_{ag} para la zona de momento positivo



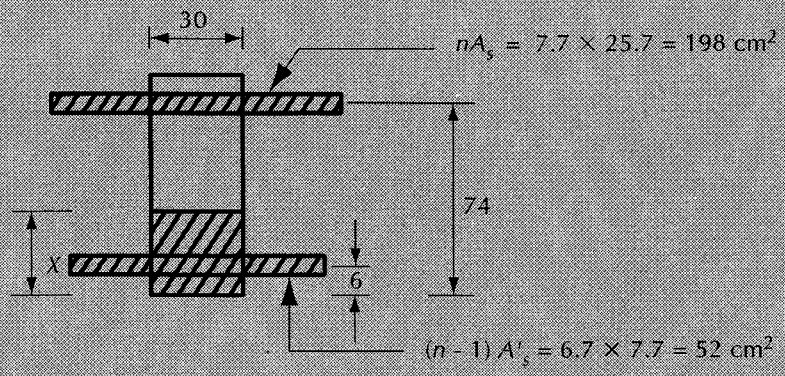
$$E_C = w^{1.5}\ 4000\ \sqrt{f'_c}$$
$$= 2.4^{1.5} \times 4000\ \sqrt{300}$$
$$= 258{,}000 \text{ cm}^2$$
$$n = \frac{E_s}{E_C} = 7.7$$

$$190\left(\frac{x^2}{2}\right) = 119\,(74 - x)\ ; \quad x = 9 \text{ cm}$$

$$(I_{ag})_{pos} = \frac{190\times9^3}{3} + 119\,(74-9)^2$$

$$\boxed{I_{ag\,pos} = 0.5489 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

Cálculo de I_{ag} para la zona de momento negativo



EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

$$30\left(\frac{x^2}{2}\right) + 52\,(x-6) = 198\,(74-x); \quad x = 24.3 \text{ cm}$$

$$(I_{ag})_{neg} = \frac{30 \times 24.3^3}{3} + 52\,(24.3-6)^2 + 198\,(74-24.3)^2$$

$$\boxed{(I_{ag})_{neg} = 0.6500 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

CÁLCULO DE MOMENTOS DE AGRIETAMIENTO

$$f_r = 2\sqrt{f'_c} = 34.6 \text{ kg/cm}^2$$

En la zona de momento positivo

$$(M_{ag})_{pos} = \frac{f_r I_g}{(y_t)_{pos}} = \frac{34.6 \times 2.469 \times 10^6}{(80-26)}$$

$$\boxed{(M_{ag})_{pos} = 15.82 \times 10^5 \text{ kg-cm}}$$

En la zona de momento negativo

$$(M_{ag})_{neg} = \frac{f_r I_g}{(y_t)_{neg}} = \frac{34.6 \times 2.469 \times 10^6}{26}$$

$$\boxed{(M_{ag})_{neg} = 32.86 \times 10^5 \text{ kg-cm}}$$

CÁLCULO DE LOS MOMENTOS DE INERCIA EFECTIVOS

$$I_e = \left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3 I_g + \left[1 - \left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3\right] I_{ag} \leq I_g$$

Para carga muerta

En la zona de momento positivo:

$$M_{máx} = \frac{3}{8} \times 30 = 11.3 \text{ ton-m}$$

$M_{ag} > M_{máx}$ $\therefore$ usar $I_e = I_g$

EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

En la zona de momento negativo:

$$M_{máx} = \frac{3}{8} \times 42.3 = 15.9 \text{ ton-m}$$

$$M_{ag} > M_{máx} \therefore \text{ usar } I_e = I_g$$

Para carga muerta más el total de la carga viva

En la zona de momento positivo:

$$\left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3 = \left(\frac{15.82}{30}\right)^3 = 0.1466$$

$$I_e = 0.1466 \times 2.469 \times 10^6 + (1 - 0.1466)\, 0.5489 \times 10^6$$

$$\boxed{I_e = 0.8304 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

En la zona de momento negativo:

$$\left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3 = \left(\frac{32.86}{42.3}\right)^3 = 0.4688$$

$$I_e = 0.4688 \times 2.469 \times 10^6 + (1 - 0.4688)\, 0.6500 \times 10^6$$

$$\boxed{I_e = 1.503 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

Para carga sostenida

$$w_{sost} = w_{cm} + 0.50\, w_{cv} = 3 + 0.5 \times 5 = 5.5 \text{ ton/m}$$

En la zona de momento positivo:

$$M_{máx} = \frac{5.5}{8} \times 30 = 20.6 \text{ ton-m}$$

$$\left(\frac{M_{ag}}{M_{máx}}\right)^3 = \left(\frac{15.82}{20.6}\right)^3 = 0.4529$$

$$I_e = 0.4529 \times 2.469 \times 10^6 + (1 - 0.4529)\, 0.5489 \times 10^6$$

$$\boxed{I_e = 1.419 \times 10^6 \text{ cm}^4}$$

EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

En la zona de momento negativo:

$$M_{máx} = \frac{5.5}{8} \times 42.3 = 29.1 \text{ ton-m}$$

$M_{ag} > M_{máx}$ ∴ usar $I_e = I_g$

CÁLCULO DE LOS VALORES DE $(I_e)_{promedio}$

Para el cálculo de la deflexión inmediata debida a carga muerta

$$(I_e)_{prom} = I_g = \underline{\underline{2.469 \times 10^6}} \text{ cm}^4$$

Para el cálculo de la deflexión inmediata debida a la carga muerta más el total de la carga viva

Método A:

$$(I_e)_{prom} = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{e1} + I_{e2}}{2} + I_c\right) \qquad \text{(ecuación 11.6)}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{1.503 + 1.503}{2} + 0.8304\right)10^6$$

$$= \underline{\underline{1.167 \times 10^6}} \text{ cm}^4$$

Método B:

$$(I_e)_{prom} = I_c = \underline{\underline{0.8304 \times 10^6}} \text{ cm}^4$$

Método C:

$$(I_e)_{prom} = 0.70\ I_c + 0.15\ (I_{e1} + I_{e2}) \qquad \text{(ecuación 11.8)}$$

$$= \left[0.70 \times 0.8304 + 0.15\ (1.503 + 1.503)\right] 10^6$$

$$= \underline{\underline{1.032 \times 10^6}} \text{ cm}^4$$

Para el cálculo de la deflexión inmediata debida a la carga sostenida

$$(I_e)_{prom} = 0.70\ I_c + 0.15\ (I_{e1} + I_{e2}) \qquad \text{(ecuación 11.8)}$$

$$= \left[0.70 \times 1.419 + 0.15\ (2.469 + 2.469)\right] 10^6$$

$$= \underline{\underline{1.734 \times 10^6}} \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

CÁLCULO DE LAS DEFLEXIONES INMEDIATAS

$$a_i = \frac{5L^2}{48EI}\left[M_c - \frac{1}{10}\left(M_i + M_d\right)\right] \qquad \text{(ecuación 11.15)}$$

M_c = momento al centro del claro
M_i = momento en el apoyo izquierdo
M_d = momento en el apoyo derecho

Deflexión inmediata debida a carga muerta

$$(a_i)_{cm} = \frac{5 \times 850^2}{48 \times 258,000 \times 2.469 \times 10^6}\left[11.3 - \frac{1}{10}(15.9 + 15.9)\right] 10^5$$

$$(a_i)_{cm} = \underline{\underline{0.10}} \text{ cm}$$

Deflexión inmediata debida a la carga muerta más el total de la carga viva

$$(a_i)_{cm+cv} = \frac{5 \times 850^2}{48 \times 258,000 \times 1.032 \times 10^6}\left[30 - \frac{1}{10}\left(42.3 + 42.3\right)\right] 10^5$$

$$(a_i)_{cm\,+\,cv} = \underline{\underline{0.61}} \text{ cm}$$

Deflexión inmediata debida a carga viva

$$(a_i)_{cv} = (a_i)_{cm\,+\,cv} - (a_i)_{cm}$$

$$= 0.61 - 0.10$$

$$(a_i)_{cv} = \underline{\underline{0.51}} \text{ cm}$$

Deflexión inmediata debida a la carga sostenida

$$(a_i)_{cm+05\,cv} = \frac{5 \times 850^2}{48 \times 258,000 \times 1.734 \times 10^6}\left[20.6 - \frac{1}{10}\left(29.1 + 29.1\right)\right] 10^5$$

$$(a_i)_{cm\,+\,05cv} = \underline{\underline{0.25}} \text{ cm}$$

EJEMPLO 11.2 ***(continuación)***

EFECTO DIFERIDO DE LA CARGA SOSTENIDA

$$\lambda = \frac{T}{1+50\,\rho'} \qquad \text{(ecuación 11.12)}$$

Valores de λ

En la zona de momento negativo:

$T = 2$

2 barras del No. 7 en la zona de compresión = 7.7 cm^2

$$\rho' = \frac{7.7}{30\times 74} = 0.0035$$

$$\lambda_{e1} = \lambda_{e2} = \frac{2}{1+50\,\rho'} = \frac{2}{1+50\times 0.0035} = \underline{\underline{1.7}}$$

En la zona de momento positivo:

$\rho' = 0 \quad \therefore \quad \lambda_c = \underline{\underline{2}}$

Valor promedio:

$$\lambda_{prom} = 0.70\,\lambda c + 0.15\,(\lambda_{e1} + \lambda_{e2})$$
$$= 0.70 \times 2 + 0.15\,(1.7 + 1.7) \qquad \boxed{\lambda_{prom} = \underline{\underline{1.9}}}$$

Deflexión diferida debida a la carga sostenida

$$(a_d)_{cm\,+\,0.5cv} = \lambda_{prom}\,(a_i)_{cm\,+\,0.5cv}$$
$$= 1.9 \times 0.25 \qquad \boxed{(a_d)_{cm\,+\,0.5cv} = \underline{\underline{0.48\ cm}}}$$

REVISIÓN LIMITACIÓN DEFLEXIÓN

$a_{admisible} = L/480 = 900/480 = 1.88$ cm

$(a_d)_{cm\,+\,0.5\,cv} + (a_i)_{cv} = 0.48 + 0.51 = 0.99\ cm < L/480$

Ejemplo 11.3 Revisión de la deflexión de un voladizo según las NTC-O4

La deformación excesiva de voladizos es un problema frecuente, de manera que es aconsejable seguir un criterio conservador en el cálculo de sus deflexiones. En este ejemplo se utilizó el método de la sección transformada para el cálculo del momento de inercia de la sección transversal, el cual es más conservador que el del momento de inercia efectivo, ambos permitidos en las NTC-04. Para la deflexión admisible, también de acuerdo con las NTC, se duplicó el valor permitido para vigas simplemente apoyadas o continuas. La deflexión calculada resultó menor que la admisible.

Las NTC-04 no mencionan el caso de voladizos específicamente para establecer en qué sección se debe calcular el momento de inercia. En el ejemplo, siguiendo el mismo criterio del Reglamento ACI-02, se ha tomado como momento de inercia el correspondiente a la sección del apoyo. No es necesario, en el caso de voladizos, considerar la variación de los momentos de inercia según las posibles variaciones del refuerzo a lo largo del elemento.

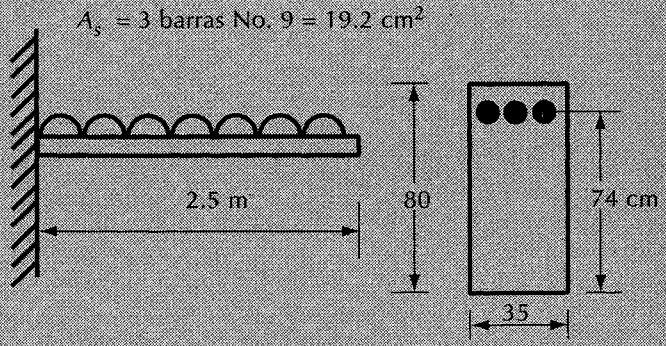
EJEMPLO 11.3 ***Revisión de la deflexión de un voladizo según las NTC-04.***

DATOS

Concreto clase 2

f'_c = 200 kg/cm^2

f_y = 4200 kg/cm^2



Viga en voladizo cuya deformación no afectará a elementos no estructurales

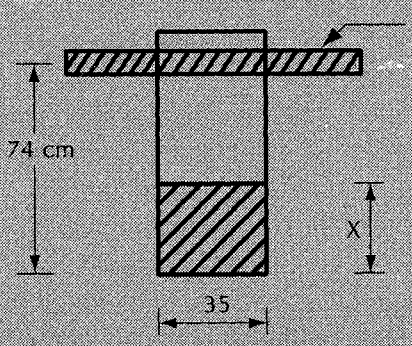
Carga viva: w_{cv} = 5 ton/m

Carga muerta w_{cm} = 4 ton/m

Considerar que el 30 por ciento de la carga viva actúa en forma continua

EJEMPLO 11.3 ***(continuación)***

MOMENTO DE INERCIA DE LA SECCIÓN AGRIETADA TRANSFORMADA



$$E_c = 8000\sqrt{f'_c} = 8000\sqrt{200} = 113{,}000\ kg/cm^2$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2\times10^6}{113{,}000} \simeq 18$$

$$35\left(\frac{x^2}{2}\right) = 346\,(74-x);\quad x = 29.6\ cm$$

$$I_e = \frac{35\times29.6^3}{3} + 269\,(74-29.6)^2 = 0.8329\times10^6\ cm^4$$

DEFLEXIONES INMEDIATAS

Deflexión inmediata debida a la carga sostenida (carga muerta más el 30 por ciento de la carga viva)

$$w = w_{cm+0.3cv} = 4 + 0.3\times5 = 5.5\ ton/m = 55\ kg/cm$$

$$(a_i)_{cm+0.3cv} = \frac{w\,L^4}{8\,E_c I_e} = \frac{55\times250^4}{8\times113{,}000\times0.8329\times10^6}$$

$$(a_i)_{cm\,+\,0.3\,cv} = \underline{\underline{0.28}}\ cm$$

Deflexión inmediata debida al 70 por ciento de la carga viva

$$w = w_{0.7cv} = 0.7\times5 = 3.5\ ton/m$$

$$(a_i)_{0.7cv} = \frac{3.5}{5.5}(a_i)_{cm+0.3cv} = \frac{3.5}{5.5}\times0.28 = 0.18\ cm$$

EJEMPLO 11.3 ***(continuación)***

DEFLEXIÓN DIFERIDA DEBIDA A LA CARGA SOSTENIDA

Factor dado por la expresión 11.13 para concreto clase 2:

$$\frac{4}{1+50\,\rho'} = 4$$

$$(a_d)_{cm+0.30cv} = 4(a_i)_{cm+0.30cv}$$

$$= 4 \times 0.28 = \underline{\underline{1.16}}\ \text{cm}$$

DEFLEXIÓN TOTAL

$$a = (a_i)_{cm\,+\,0.3cv} + (a_d)_{cm\,+\,0.30cv} + (a_i)_{0.7cv}$$

$$= 0.28 + 1.16 + 0.18$$

$$\boxed{a = 1.62\ \text{cm}}$$

DEFLEXIÓN ADMISIBLE

$$a_{adm} = 2\left(0.5\ \text{cm} + \frac{L}{240}\right) = 2\left(0.5 + \frac{250}{240}\right) = 2 \times 1.54 = \underline{\underline{3.08}}\ \text{cm}$$

$$\boxed{\therefore\ a_{adm} > a = 1.62\ \text{cm}}$$

Ejemplo 11.4 Cálculo de la deflexión en el centro del claro de una viga continua, según las NTC-04, con sistema de unidades SI

Se trata en este ejemplo de ilustrar el cálculo de la deflexión en una viga continua fabricada con concreto clase 2, en la cual el 40 por ciento de la carga viva actúa en forma permanente. Las dimensiones, las resistencias del concreto y del acero, y los valores de las cargas se han expresado en unidades SI. Se muestra el diagrama de momentos flexionantes, cuya obtención no se incluye, en términos de los coeficientes de $w\ell^2$. Obsérvese que el momento estático total, o sea, la suma del promedio de los momentos negativos y del momento positivo al centro del claro, es igual a $w\ell^2/8$, lo cual es un requisito del equilibrio estático.

En este ejemplo se utilizó también el método de la sección transformada. Al calcular el momento de inercia en la sección de los apoyos, se consideró una sección rectangular, ya que el patín constituido por la losa queda en la zona de tensión. El módulo de elasticidad del concreto es el que corresponde a concreto clase 2. En la zona de compresión, el área transformada de acero se calculó usando el término $(n - 1)$ en vez de n para tomar en cuenta el área de concreto desplazada por el acero.

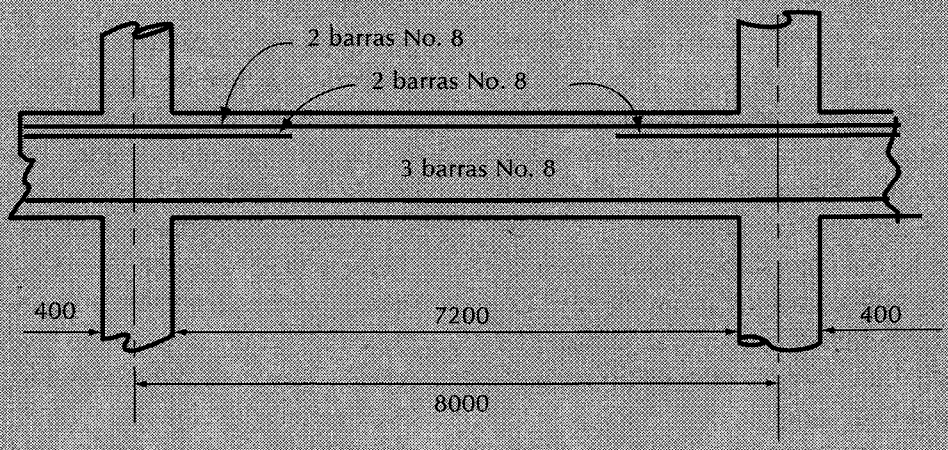
En la sección al centro del claro, se calculó la profundidad del eje neutro, x, suponiendo primero que dicho eje caía dentro del patín de la viga T. Resultó de esta manera un valor de x de 151.4 mm, mayor que los 100 mm que mide el patín. Por lo tanto, se repitió el cálculo suponiendo que el eje neutro caía dentro del alma. Así se obtuvo un valor de x de 129.4 mm, mayor efectivamente que el espesor del patín. Obsérvese que el ancho efectivo del patín, b, se calculó, como señalan las NTC-04, con el menor de los tres valores siguientes: ocho veces el espesor del patín, la octava parte del claro menos la mitad del ancho del alma, o la mitad de la distancia al paño del alma de la viga paralela más cercana. En este caso resultó menor el término correspondiente a ocho veces el espesor del patín.

Después se calculó la deflexión inmediata producida por la carga muerta y el 40 por ciento de la carga viva, ambas a nivel de cargas de servicio. La deflexión elástica se calculó con la ecuación 11.15 que, como se mencionó anteriormente, se deduce de los principios clásicos de Mecánica de Materiales. El momento de inercia efectivo se obtuvo con la ecuación 11.11 que se presenta en las NTC-04 y que le da un peso doble al momento de inercia en el centro del claro en relación con los momentos de inercia en los extremos. Los momentos flexionantes M_c, M_i y M_d se determinaron usando los coeficientes de $w\ell^2$ del diagrama de momentos. La deflexión inmediata así obtenida resultó de 21 mm. Por proporción, se calculó la deflexión inmediata bajo carga viva total, resultando de 27.6 mm.

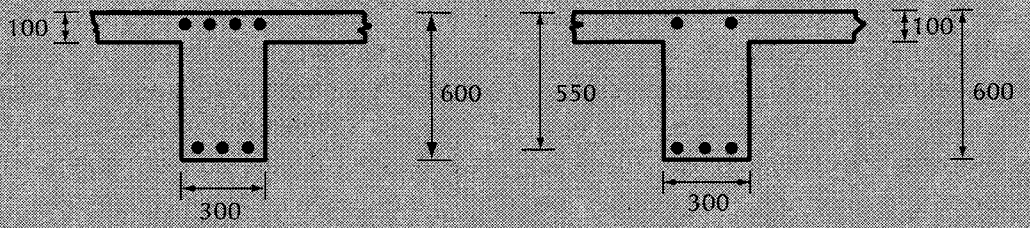
La deflexión diferida, adicional a la inmediata, se calculó con la ecuación 11.13 que especifican las NTC, pero el coeficiente de 2 se sustituyó por 4 para tomar en cuenta que el concreto es de clase 2. La relación promedio de acero de compresión, ρ', se calculó con una ecuación semejante a la 11.11 para el cálculo del momento de inercia promedio, tal como se señala en las NTC-04. La deflexión diferida se sumó a la inmediata para obtener la deflexión total de 81.9 mm. Obsérvese que para el cálculo de la deflexión diferida y de la deflexión total se usó sólo la carga viva que actúa en forma permanente y, por supuesto, la carga muerta que también actúa permanentemente.

EJEMPLO 11.4 ***Cálculo de las deflexiones de una viga continua según las NTC-04, con sistema de unidades SI.***

DATOS



Acotaciones en milímetros



Sección en el apoyo

Sección en el centro del claro

Separación entre vigas = 5000 mm
Concreto de clase 2, f'_c = 20 MPa
Acero, f_y = 400 MPa
Carga viva, w_{cv} = 60 N/mm
Carga muerta, w_{cm} =40 N/mm
El 40 por ciento de la carga viva actúa en forma permanente

EJEMPLO 11.4 ***(continuación)***

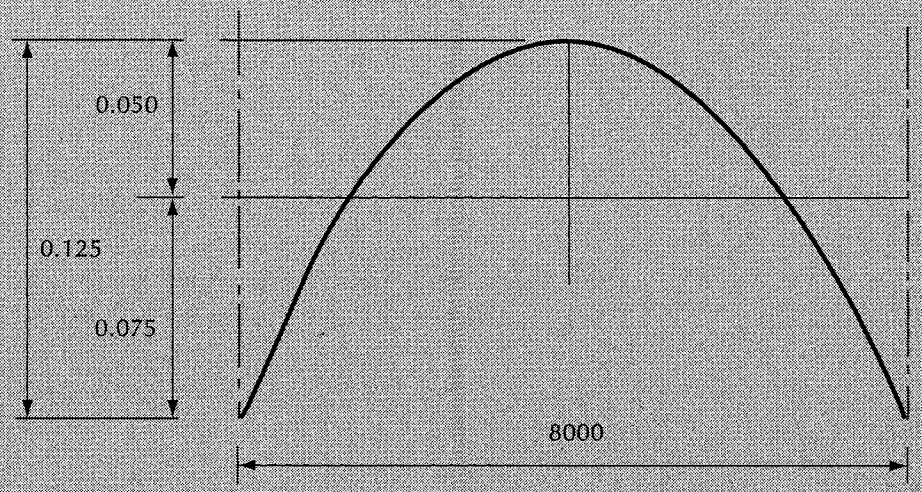


Diagrama de momentos, coeficientes de wL^2

CÁLCULO DE MOMENTOS DE INERCIA

a) Sección en los apoyos

$$E_c = 2500\sqrt{f'_c} \qquad \text{(ecuación 2.10 SI)}$$

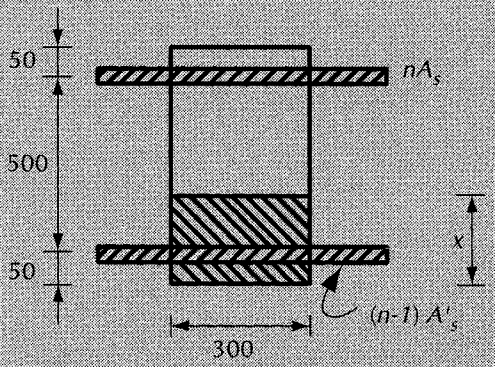
$$E_c = 2500\sqrt{20} = 11{,}180 \text{ MPa}$$

$$E_s = 2 \times 10^5 \text{ MPa}$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = 18$$

$$nA_s = 18 \times 4 \times 507 = 36{,}504 \text{ mm}^2$$

$$(n-1)A'_s = 17 \times 3 \times 507 = 25{,}857 \text{ mm}^2$$



$$300\left(\frac{x^2}{2}\right) + 25{,}857\,(x - 50) = 36{,}504\,(550 - x)$$

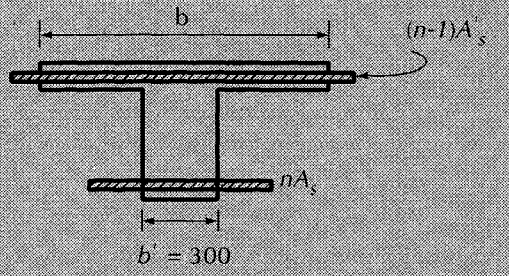
$$x = 223 \text{ mm}$$

$$I = \frac{300 \times 50^3}{3} + 25{,}587\,(223 - 50)^2 + 36{,}504\,(550 - 223)^2$$

$$I = 4690 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

EJEMPLO 11.4 ***(continuación)***

b) Sección en el centro del claro



$$b = \begin{cases} 8t = 8 \times 100 = 800 \\ \dfrac{L}{8} - \dfrac{b'}{2} = 1000 - 150 = 850 \\ \dfrac{L_2 - b'}{2} = \dfrac{5000 - 300}{2} = 2350 \end{cases}$$

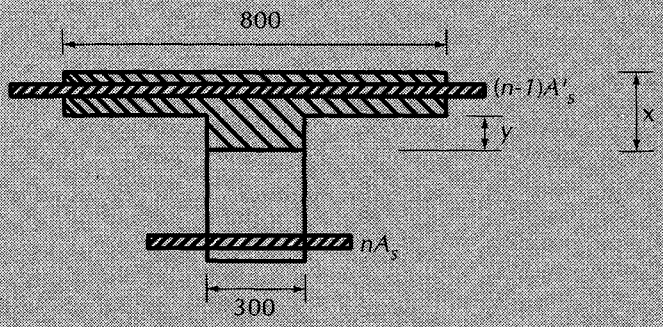
$b = 800$ mm

$(n-1)A'_s = 17 \times 2 \times 507 = 17{,}238$

$nA_s = 18 \times 3 \times 507 = 27{,}378$

$$800\left(\frac{x^2}{2}\right) + 17{,}238\,(x - 50) = 27{,}378\,(550 - x)$$

$x = 151.4 > 100$



$$800 \times 100\,(50 + y) + 17{,}238\,(50 + y) + 300\left(\frac{y^2}{2}\right) = 27{,}378\,(450 - y)$$

$y = 29.4$ mm

$x = 129.4$ mm

$$I = \frac{800 \times 10^3}{2} + 800 \times 10\,(129.4 - 50)^2 + \frac{300 \times 29.4^3}{3} +$$

$$+ 17{,}238\,(129.4 - 50)^2 + 27{,}378\,(550 - 129.4)^2$$

$I = 5005 \times 10^6$ mm^4

EJEMPLO 11.4 ***(continuación)***

DEFLEXIONES INMEDIATAS

Deflexión inmediata debida a la carga sostenida (carga muerta más el 40 por ciento de carga viva)

$$w = w_{cm+0.4cv} = 60 + 16 = 76 \text{ N/mm}$$

$$a = \frac{5L^2}{48EI}\left[M_c - \frac{1}{10}\left(M_i + M_d\right)\right] \qquad \text{(ecuación 11.15)}$$

$$E = E_c = 11{,}180 \text{ MPa}$$

$$I_e = \frac{I_{e1} + I_{e2} + 2I_c}{4} \qquad \text{(ecuación 11.11)}$$

$$I_e = \frac{(4690 + 4690 + 2 \times 5005) \times 10^6}{4} = 4847 \times 10^6 \text{ mm}^4$$

$$M_c = 0.050\, wL^2 = 0.050 \times 76 \times 8^2 \times 10^6 = 243.2 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_i = M_d = 0.075 \times 76 \times 8^2 \times 10^6 = 364.8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$a_{i1} = \frac{5 \times 8^2 \times 10^{12}}{48 \times 11{,}180 \times 4847 \times 10^6}\left[243.2 - \frac{2 \times 364.8}{10}\right]$$

$$a_{i1} = 21 \text{ mm}$$

Deflexión inmediata si actúa la carga viva total

$$w = w_{cm+cv} = 60 + 40 = 100 \text{ N/mm}$$

$$a_{i2} = \frac{100}{76} \times 21 = 27.6 \text{ mm}$$

EJEMPLO 11.4 *(continuación)*

DEFLEXIÓN A LARGO PLAZO

$$a_{dif} = a_{ii}\left(\frac{4}{1+50\,\rho'}\right) \qquad \text{(ecuación 11.13)}$$

$$(\rho')_{apoyos} = \frac{3\times 507}{300\times 550} = 0.0092$$

$$(\rho')_{centro\ del\ claro} = \frac{2\times 507}{300\times 550} = 0.0061$$

$$(\rho')_{prom} = \frac{0.0092+0.0092+2\times 0.0061}{4} = 0.0076$$

$$a_{dif} = 21\left(\frac{4}{1+50\times 0.0076}\right) = 60.9\ \text{mm}$$

$$a_{total} = 21+60.9+81.9\ \text{mm}$$

Referencias

11.1 *Branson, D. E. Deformation of Concrete Structures. Nueva York,* McGraw-Hill, *1977.*

11.2 *Branson, D. E. Deflexiones de estructuras de concreto reforzado. México, D.F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, 1981.*

11.3 *Comité ACI-209. "Prediction of Creep, Shrinkage and Temperature Effects in Concrete Structures". En Designing for Effects of Creep, Shrinkage and Temperature in Concrete Structures (SP27). Detroit, American Concrete Institute, 1971.*

11.4 Neville, *A. M. Creep of Concrete: Plain, Reinforced, and Prestressed, Amsterdam,* North-Holland Publishing *Co., 1970.*

11.5 *Branson,* I. E. *"Design Procedures for* Computing *Deflections". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, septiembre 1968.*

11.6 *Subcomité del Reglamento de las Construcciones del Comité ACI-435. Revised ACI Code and Commentary Provisions on Deflections. Detroit, American Concrete Institute, diciembre* 1975.*

11.7 *Subcomité* 1 *del Comité ACI-435. "Allowable Deflections". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, junio* 1968.*

11.8 *Yu, W., y G. Winter. "Instantaneous and Long Time Deflections of Reinforced Concrete Beams under Working* Loads". *Journal of the American Concrete Institute. Detroit, julio 1960.*

11.9 *Lutz,* L.A. *"Graphical Evaluation of the* Effective *Moment of Inertia for Deflections". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, marzo 1973.*

11.10 —. *Deflections of Concrete Structures (SP-43-12). Detroit, American Concrete Institute, 1974.*

11.11 Subcomité 7 del Comité ACI-435. "Deflections of Continuous Concrete Beams". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, diciembre 1973.*

11.12 Comité ACI-435. "Deflections of Reinforced Concrete Flexural Members". *Journal* of the American Concrete *Institute.* Detroit, junio 1966.*

11.13 Fintel, M., editor. Handbook of Concrete *Engineering.* Nueva York, Van Nostrand, 1974.

11.14 Branson, D. E. Instantaneous and *Time-Dependent Deflections* of Simple and *Continuous* Reinforced Concrete Beams. Part 1, Report No. 7 Alabama Highway Research Report, Boureau of Public Roads, agosto 1963.

11.15 Meyers, B. L., y D. E. Branson. "Design Aid for Predicting Creep and Shrinkage Properties of Concrete". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, septiembre 1972.

11.16 —. *Design* Handbook *(SP-17).* Detroit, American Concrete Institute, 1997.

11.17 Zundelevich, S. Probabilistic Analysis of *Deflections* of Reinforced Concrete Beams, Technical Report No. 12. Palo Alto, Cal., Department of Civil Engineering. Stanford University, febrero 1969.

11.18 Comité ACI-435, "Variability of Deflections of Simply Supported Reinforced Concrete Beams", *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, enero 1972.

11.19 Rice, P. F., editor. CRSI Handbook, 4a. edición, Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 1980.

11.20 González Cuevas, O. Análisis Estructural, México, D. F., Limusa, 2002.

11.21 Comité ACI-435. "Deflections of Continuous Concrete Beams" (ACI 435.5 R73). Detroit, American Concrete Institute, 1973.*

11.22 Comité ACI-435. "Proposed Revisions by Commitee 435 to ACI Building Code and Commentary Provisions on Deflections". *Journal* of the American Concrete *Institute*. Detroit, junio 1978.

11.23 Wang, *C.,* y C. G. Salmon. Reinforced Concrete Design (3a. edición). Nueva York. Harper and Row, 1979.

11.24 Comité ACI-318. *Commentary* on Building Code Requirements *(ACI 318-89).* Detroit, American Concrete Institute, 1989.

11.25 Fling, R. S. "Deflections". En Handbook of Concrete *Engineering,* editado por M. Fintel. Nueva York, Van Nostrand Co., 1973.

11.26 González C. O. "Revisión de métodos para el cálculo de flechas". Revista IMCYC. México, D. F, noviembre 1964.

11.27 Comité Euro-Internacional del Concreto. *CEB-FIP Model Code For* Concrete Structures, Lausanne 1990.

11.28 Washa, G.W. "Plastic Flow of Thin Reinforced Concrete Slabs". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, noviembre 1947.

11.29 Corley, W. G., y M. A. Sozen. "Time Dependent Deflections of reinforced Concrete Beams", *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, marzo 1966.

11.30 Branson, D. E. "Compression Steel Effect on Long-Time Deflections". Iournal of the American Concrete Institute. Detroit, agosto 1971.

11.31 Robles F. V, F. Manual de diseño de obras civiles, sección *H:* Concreto Reforzado. México, D.F., Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones de la Industria Eléctrica. 1977.

11.32 Normas Técnicas Complementarias sobre Criterios y Acciones para el Diseño Estructural de las Edificaciones. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo II, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.

11.33 Duan, L. F. Wang y W. Chen . "Flexural Rigidity of Reinforced Concrete Members". ACI *Structural Journal.* Detroit, julio-agosto 1989.

11.34 Gahli, A. "Prediction of Deflections of Two-Way Floor Systems". ACI Structural *Journal.* Detroit, septiembre-octubre 1989.

11.35 "CEB Manual on Cracking and Deformations", Bulletin d'Information No. 158-E, Comité Euro-International du Béton, Lausanne, 1985.

11.36 Comité ACI-435. "Control of Deflection in Concrete Structures" (ACI-435 R-45). Detroit, 1995.

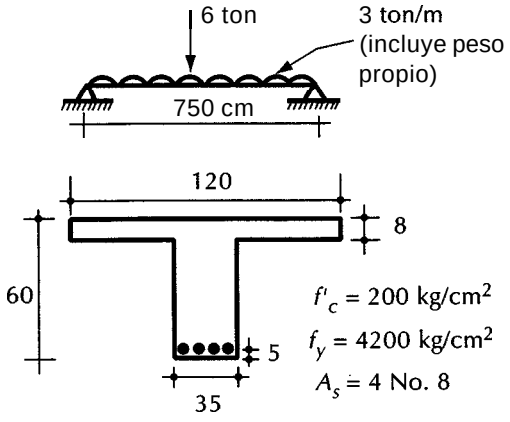
11.37 Park, R., y Paulay, T. Reinforced Concrete *Structures,* Wiley, Nueva York, 1975.

11.38 Ghali, A., y Favre, R. Concrete Structures: Stresses and Deformations, Chapman and Hall, Nueva York, 1986.

*Las referencias marcadas con asterisco se encuentran actualizadas en la referencia 11.36.

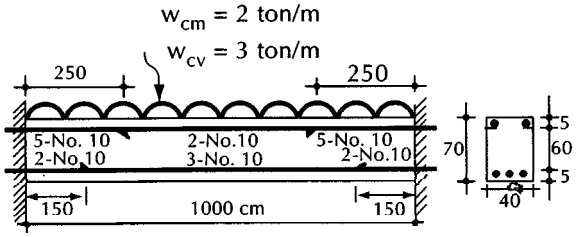
Ejercicios

11.1 Comprobar si se cumplen los requisitos de deflexión de la siguiente viga de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI 318-02. Suponer que la deformación de la viga no afectará a elementos no estructurales y que el 50 por ciento de las cargas corresponde a carga viva. Las cargas indicadas son a nivel de servicio.



11.2 Comprobar si se cumplen los requisitos de deflexión de la viga del ejemplo 11.1 de acuerdo con las indicaciones del Reglamento del Distrito Federal y las NTC-04. Considerar que el 40 por ciento de la carga viva está aplicada en forma continua.

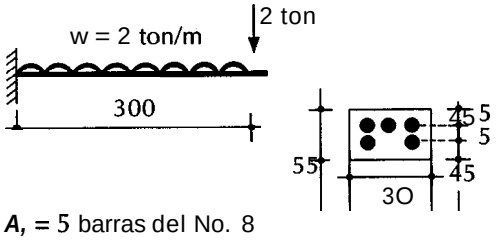
11.3 Comprobar si se cumplen los requisitos de deflexión de la siguiente viga empotrada de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI 318-02. La carga indicada es la de servicio e incluye el peso propio. Considerar que el 35 por ciento de la carga viva actúa en forma continua.



f'_c = 200 kg/cm², f_y = 4200 kg/cm²

11.4 Comprobar si se cumplen los requisitos de deflexión para la viga del ejemplo 11.3 de acuerdo con las indicaciones de las NTC-04.

11.5 Calcular las deflexiones a corto y a largo plazos en el extremo del siguiente voladizo usando el segundo método de Yu y Winter. Las cargas indicadas son de servicio e incluyen peso propio. Verificar si la deflexión excede de $L/200$. ¿En cuánto se reducen las deflexiones si se adicionan 3 barras del No. 8 en la zona de compresión?



A_s = 5 barras del No. 8

f'_c = 250 kg/cm²

f_y = 4200 kg/cm²

CAPÍTULO 12

Ménsulas y vigas de gran peralte

12.1 Introducción. /12.2 Ménsulas. /12.3 Vigas de gran peralte.

12.1 Introducción

En este capítulo se estudia el comportamiento y el dimensionamiento de elementos estructurales cuya relación claro-peralte es mucho menor que la de las vigas consideradas en los capítulos anteriores. Cuando la relación claro-peralte es pequeña, la distribución de esfuerzos principales es muy diferente de la distribución en las vigas mostrada en la figura 7.1. Por esta razón, su comportamiento es distinto y no son aplicables los métodos de dimensionamiento estudiados anteriormente.

12.2 Ménsulas

Las ménsulas son elementos estructurales cuya relación entre el claro de cortante y el peralte es pequeña; en muchos reglamentos se definen como aquellos elementos en los que esta relación no es mayor que uno. Se usan para soportar carriles de grúas viajeras, vigas prefabricadas de concreto, armaduras de acero y otras estructuras similares. En la figura 12.1 se ilustran dos aplicaciones. El dimensionamiento correcto de las ménsulas es de gran importancia, ya que en ellas se apoyan generalmente miembros estructurales de grandes dimensiones o equipo pesado.

12.2.1 Comportamiento

El comportamiento de las ménsulas ha sido estudiado por medio de ensayes de especí-

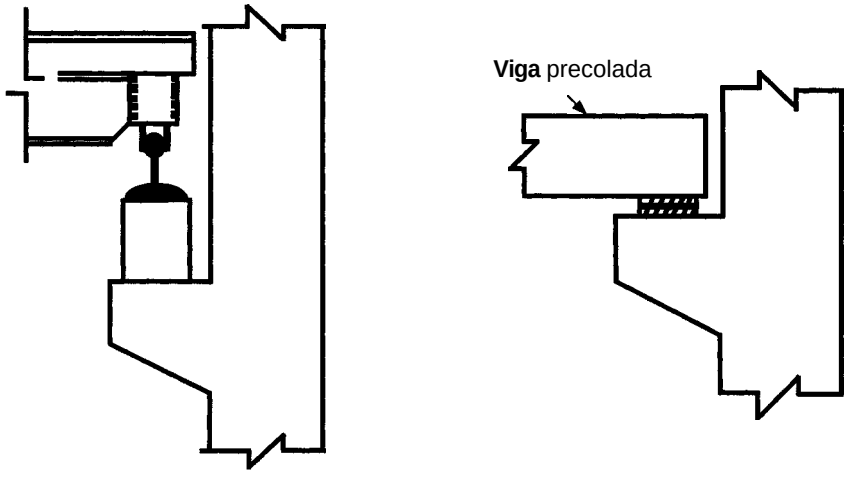


Figura 12.1 Aplicaciones de ménsulas.

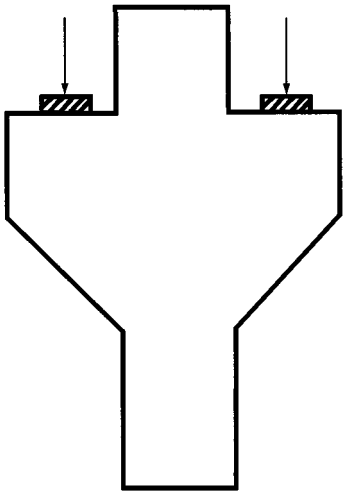


Figura 12.2 Espécimen de ensaye para el estudio de ménsulas.

menes como el mostrado esquemáticamente en la figura 12.2. A continuación se describen los principales modos de falla observados en estos ensayes [12.1].

a) Falla por *flexión*

Este tipo de falla es similar al de vigas largas. Consiste en el aplastamiento por compresión del concreto, que ocurre antes o después de que fluya el acero de tensión. En la figura 12.3 se muestra este tipo de falla.

b) Falla por tensión diagonal

En este caso, se forma inicialmente una grieta de flexión, a partir de la cual se desarrolla una grieta inclinada que se extiende desde el borde de la placa de carga, en la cara superior de la ménsula, hasta la intersección de la cara inclinada de la ménsula con la columna. La falla ocurre en la zona de concreto sujeta a esfuerzos de compresión y es similar a la falla en compresión por cortante de vigas largas. En la figura 12.4 se muestran dos especímenes que fallaron de esta manera.

c) Falla por cortante directo

Este tipo de falla se caracteriza por el desarrollo de pequeñas grietas inclinadas en el plano de intersección de la columna y la ménsula. Dichas grietas debilitan este plano y propician una falla por cortante directo, como se muestra en la figura 12.5.

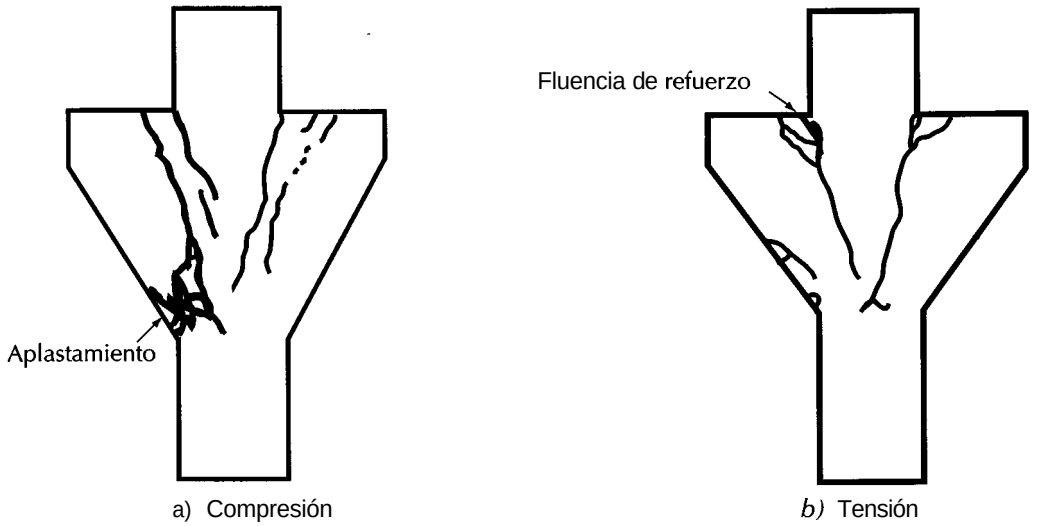


Figura 12.3 Fallas por flexión (según Kriz y Raths [12.1]).

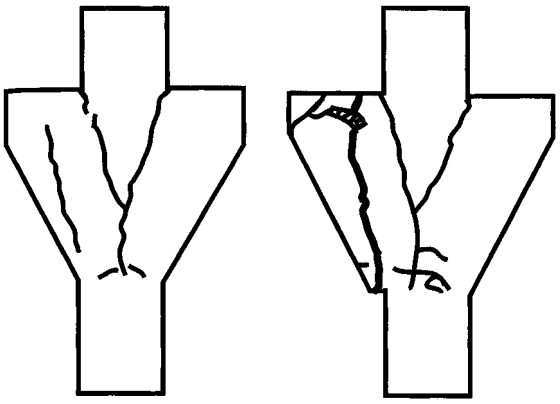


Figura 12.4 Fallas por tensión diagonal (según Kriz y Raths [12.11).

Además de los modos de falla descritos anteriormente, se han observado otros que se presentan por detalles inadecuados en la geometría de la ménsula o en la colocación del refuerzo. Estos tipos de falla se ilustran en la figura *12.6,* en la cual se muestra una falla que se presenta cuando las barras de tensión, por efecto del doblez, quedan demasiado lejos del borde de la ménsula; en este caso se forma una grieta que sigue el contorno de la barra. En la figura 12.6*b* se muestra el tipo de falla que se produce cuando el peralte en el extremo de la ménsula es mucho menor que el peralte en el paño de la columna; la grieta inclinada no alcanza a desarrollarse hasta la cara de la columna, sino que llega a la cara inclinada de la ménsula. Por último, en la figura 12.6*c* se muestra el tipo de falla que ocurre cuando la placa de apoyo es demasiado pequeña y, por consiguiente, se desarrollan en el concreto esfuerzos de aplastamiento muy altos. La resistencia de las ménsulas cuando se desarrolla alguno de estos tipos de falla es menor que la correspondiente a los tipos principales de falla mencionados anteriormente. Por lo tanto, conviene evitarlos mediante detalles adecuados en la geometría y en la colocación del refuerzo. Más adelante se presentan recomendaciones a este respecto.

Se ha estudiado experimentalmente el efecto de cargas horizontales que actúan de manera simultánea con las cargas verticales aplicadas a la ménsula. Estas cargas horizontales pueden ser de tensión o de compresión. Las primeras suelen ser producidas en la práctica por la contracción y el flujo plástico del concreto de las vigas que se apoyan sobre la ménsula o por las acciones de viento o sismo. Es importante considerar su efecto, porque la resistencia de las ménsulas disminuye en relación al caso en el que sólo actúan verticales. Por el contrario, las fuerzas horizontales de compresión aumentan la resistencia de las ménsulas y propician un comportamiento menos frágil [12.2]. Estas fuerzas de compresión pueden lograrse mediante acero que atraviese la ménsula por un ducto y al que se le aplique una fuerza de tensión, la cual, como reacción, produce una fuerza de compresión en la ménsula.

La colocación de estribos para aumentar la resistencia a tensión diagonal y a cortante directo de ménsulas también ha sido objeto de estudios experimentales. Se ha visto que los estribos verticales, como los usados en las vigas largas, no aumentan prácticamente la resistencia, ya que las grietas forman un ángulo cercano a 90º con la horizontal y, por lo

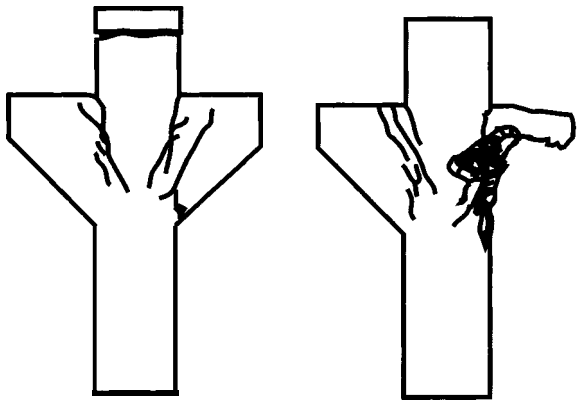


Figura 12.5 Fallas por cortante directo (según Kriz y Raths [12.1]).

tanto,. pueden desarrollarse sin que sean cortadas por los estribos. Los estribos horizontales sí son eficientes; pero cuando actúa carga horizontal simultáneamente con carga vertical. son menos eficientes.

También se ha logrado aumentar la resistencia y la ductilidad de las ménsulas añadiendo fibras de acero al concreto. Se ha encontrado que las fibras de acero permiten obtener fallas del tipo de flexión en vez de las fallas frágiles de cortante o tensión diagonal [12.3].

12.2.2 Resistencia y dimensionamiento de ménsulas

Las expresiones utilizadas para calcular la resistencia de ménsulas son de naturaleza empírica. Se han obtenido a partir del análisis estadístico de los resultados de ensayes [12.1]. En estos ensayes se ha visto que la resistencia de ménsulas es función del ancho, b; del peralte efectivo, d; de la relación de refuerzo, ρ_v; de la resistencia del concreto, f'_c; y de la relación entre el claro de cortante, a, y el peralte, d. Kriz y Raths [12.1] han propuesto las siguientes ecuaciones:

a) Para ménsulas sujetas a carga vertical únicamente

$$V_n = 1.7bd\sqrt{f'_c}(1 - 0.5^{d/a})(1000\,\rho_v)^{1/3} \quad (12.1)$$

$$V_n = 0.53\,db\sqrt{f'_c}(1-0.5^{d/a})(1000\rho_v)^{1/3} \quad (12.1\ \text{SI})$$

donde la relación de acero, ρ_v, se define como

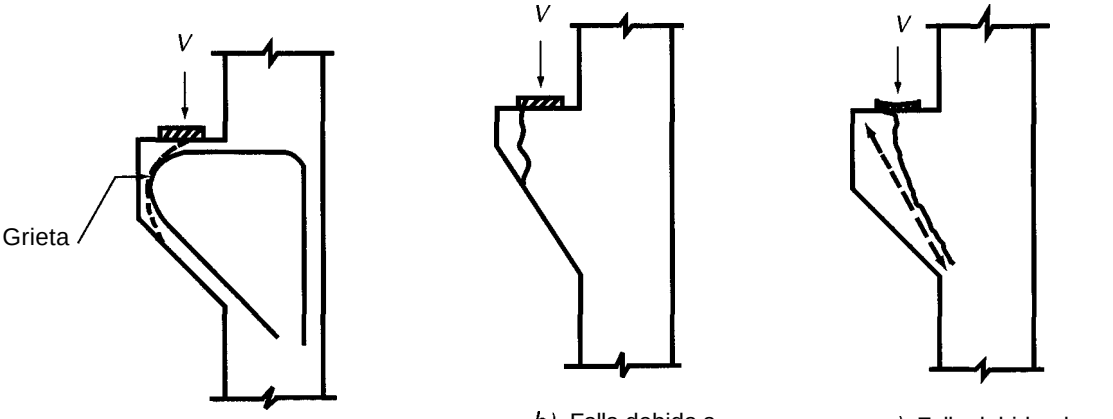
$$\rho_v = (A_s + A_h)/bd \quad (12.2)$$

A_s es el área del refuerzo por flexión, y A_h el área de los estribos horizontales.

b) Para ménsulas sujetas a carga vertical y horizontal

$$V_n = 1.7bd\sqrt{f'_c}(1-0.5^{d/a})\frac{(1000\rho_v)^{1/3+0.4H/V}}{10^{0.8H/V}} \quad (12.3)$$

$$V_n = 0.53\,bd\sqrt{f'_c}(1-0.5^{d/a})\frac{(1000\rho_v)^{1/3+0.4H/V}}{10^{0.8H/V}} \quad (12.3\ \text{SI})$$



a) Falla debida a detalles inadecuados del refuerzo

b) Falla debida a poco peralte en la cara externa

c) Falla debida al aplastamiento del concreto

Figura 12.6 Modos secundarios de fallas (según Kriz *y* Raths [12.1]).

En este caso, ρ_v se define como

$$\rho_v = A_s/db \qquad (12.4)$$

ya que los estribos horizontales son menos eficientes, según se ha señalado anteriormente. H y V son las fuerzas horizontal y vertical que actúan sobre la ménsula.

Otro enfoque para el diseño de ménsulas se basa en el planteamiento de modelos que simulan su comportamiento. Un ejemplo es el desarrollado por Franz y Niedenhoff [12.4], el cual se muestra en la figura 12.7. Consiste en reemplazar a la ménsula por una armadura estáticamente determinada en la que el acero superior funciona como la cuerda de tensión, y el concreto como cuerda de compresión. El refuerzo transversal se requiere para evitar el aplastamiento de la cuerda de compresión. Este enfoque de reemplazar una estructura por una armadura equivalente ha sido desarrollado por varios autores y existe ya un método, conocido como de puntales y tensores, con disposiciones específicas en un apéndice del Reglamento ACI 2002. Lo que se hace es trazar un diagrama de flujo de fuerzas en la estructura y plantear una armadura que pueda transmitir este flujo de fuerzas. La armadura queda constituida por elementos que trabajan a compresión, que son los puntales, y elementos que trabajan a tensión, que son los tensores.

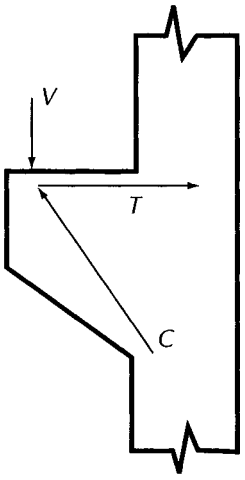


Figura 12.7 Modelo de Franz y Niedenhoff [12.4].

En la figura 12.8 se muestra una posible configuración de una armadura con los puntales representados por líneas punteadas y los tensores por líneas continuas. El refuerzo se calcula para que pueda confinar a los puntales de tal manera que alcancen su resistencia a compresión. El lector interesado en este enfoque puede consultar las referencias 12.19 y 12.20, y puede ver un ejemplo resuelto en la referencia 12.21.

Un tercer enfoque se basa en el concepto de cortante por fricción, el cual, aunque no se utiliza únicamente para el diseño de ménsulas, ha encontrado un amplio campo de aplicación en estos elementos, por lo que

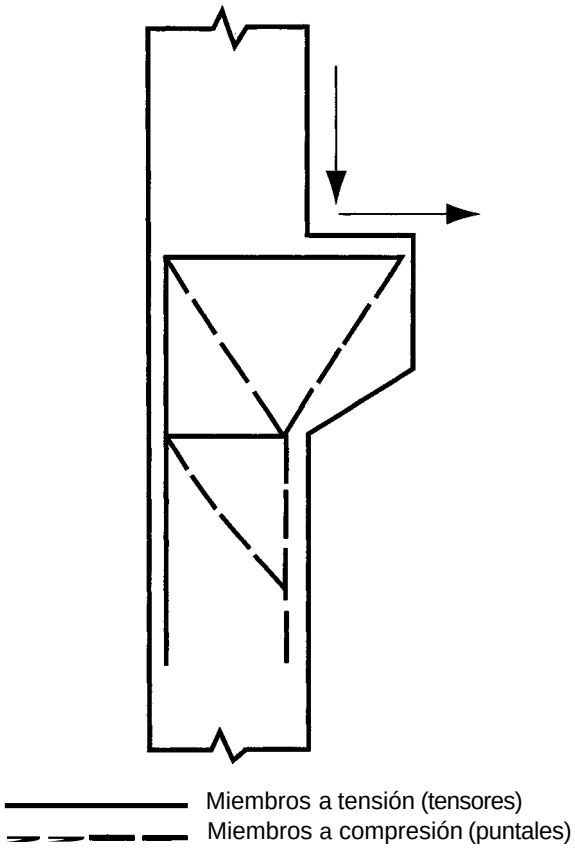


Figura 12.8 Puntales y tensores en una ménsula.

se presenta en la siguiente sección. Posteriormente se verán las disposiciones al respecto del Reglamento ACI 318-02 y de las NTC-04, que se basan en este concepto.

12.2.3 Cortante por fricción

Como se indicó en el capítulo 7, los esfuerzos que producen las llamadas fallas por cortante en vigas de concreto reforzado, no son realmente esfuerzos cortantes, sino esfuerzos principales de tensión debidos a la combinación de esfuerzos normales de flexión y esfuerzos cortantes. Sin embargo, en el caso de ménsulas cortas con relación claro/peralte menor que uno, y en otros casos que se describen al final de esta sección, los esfuerzos cortantes puros pueden ser el factor crítico en el diseño. Aunque la resistencia del concreto a esfuerzos cortantes directos es muy elevada, pueden existir algunas secciones a través de las cuales sea necesario transferir fuerza cortante y cuya capacidad para hacerlo sea pequeña o nula, debido a la presencia de grietas previas o porque la unión no sea monolítica. En tales casos, la única manera de desarrollar la fuerza cortante es a través de la fricción que se presenta cuando uno de los elementos tiende a deslizarse con respecto al otro.

La manera en que puede desarrollarse fuerza cortante a través de fricción entre dos elementos, se ilustra en la figura 12.9, en la que se muestra el espécimen de ensaye usado generalmente para investigar la resistencia al deslizamiento entre dos elementos de concreto. Como se indica en esta figura, la superficie de contacto entre los dos elementos es irregular. Al deslizar un elemento con respecto al otro, ocurre un desplazamiento relativo entre ambos, en dirección perpendicular a la superficie de contacto. Este desplazamiento produce fuerzas de tensión en el refuerzo transversal, lo cual origina, como reacción, fuerzas de compresión sobre la superficie de contacto, como se muestra en la

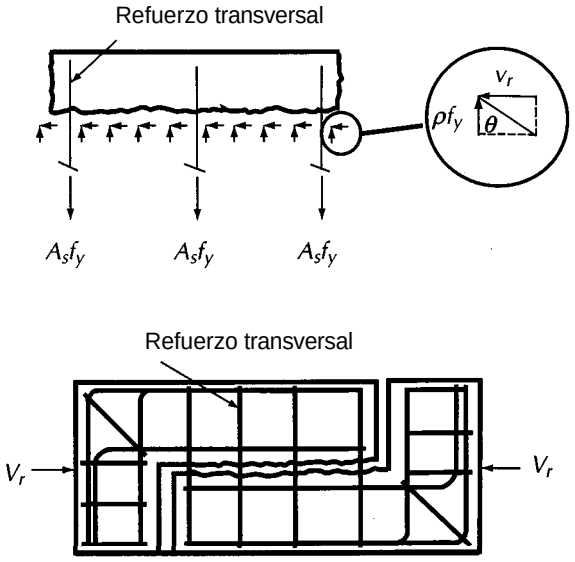


Figura 12.9 Cortante por fricción.

figura 12.9. Debido a la acción de estas fuerzas de compresión, se generan fuerzas de fricción que pueden estimarse por medio de la ecuación:

$$V_r = \mu N \qquad (12.5)$$

en la cual V_r es la fuerza de fricción, μ es el coeficiente de fricción y N es la fuerza normal. Si se considera que el refuerzo transversal fluye, $N = A_s f_y$. Por consiguiente, sustituyendo este valor de N y dividiendo ambos miembros de la ecuación 12.5 entre el área de la superficie de contacto, se obtiene la siguiente ecuación

$$v_r = \mu \rho f_y \qquad (12.6)$$

El valor del coeficiente de fricción, μ, ha sido determinado experimentalmente por varios investigadores. Se ha estudiado la influencia de diversas variables como la condición de la superficie de contacto, la cantidad y la forma de anclar el refuerzo transversal, la resistencia del concreto y otras de este tipo [12.5, 12.6, 12.7, 12.8].

Con base en estos estudios, se han propuesto valores del coeficiente μ, como los mostrados en la tabla 12.1, que son los especificados en el Reglamento ACI 318-02. Los valores de esta tabla son válidos siempre que el valor de ρf_y no exceda de 0.2 f'_c o 56 kg/cm^2 (5.5 MPa). Se ha encontrado que estos valores resultan conservadores para algunas aplicaciones del concepto de cortante por fricción, pero pueden usarse en la práctica [12.8].

Tabla 12.1 Coeficientes de fricción del Reglamento ACI 318-02

Descripción	μ
Concreto colado monolíticamente	1.4
Concreto colado contra concreto endurecido cuya superficie se haya hecho rugosa en forma intencional	1.0
Concreto colado contra concreto endurecido cuya superficie no se haya hecho rugosa en forma intencional	0.6
Concreto anclado a acero estructural por medio de pernos con cabeza o barras de refuerzo	*0.7*

Como ejemplo de 'aplicación del concepto de cortante por fricción al diseño de ménsulas, considérese el caso mostrado en la figura 12.10. El refuerzo perpendicular a la columna es equivalente al refuerzo transversal de la figura 12.9. Por consiguiente, la relación requerida de este refuerzo puede obtenerse de la ecuación 12.6, de la manera siguiente

$$\rho = \frac{v_r}{\mu f_y} \qquad (12.7)$$

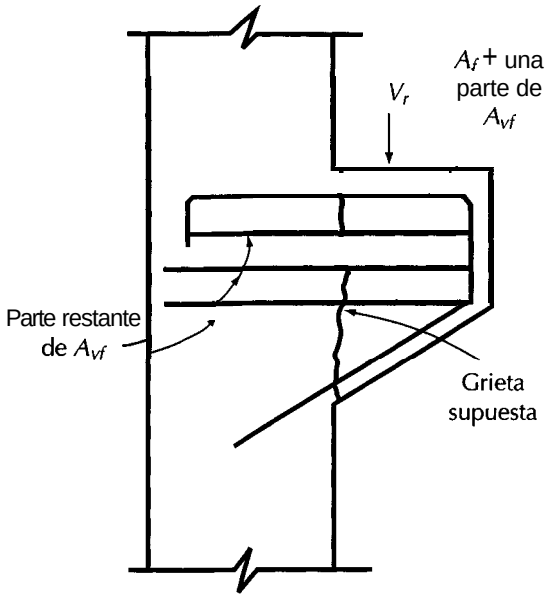


Figura 12.10 Cortante por fricción aplicado a una ménsula.

En donde v_r es el esfuerzo cortante promedio en la superficie de contacto, o, en otras palabras, es la fuerza aplicada, V_r, dividida entre el área de la superficie de contacto, la cual es igual al peralte total de la ménsula multiplicado por su ancho

$$v_r = \frac{V_r}{bh} \qquad (12.8)$$

Una vez que se ha calculado la relación, ρ, el área requerida de acero transversal, A_{vf}, se obtiene multiplicando la relación por la superficie de contacto

$$A_{vf} = \rho bh \qquad (12.9)$$

El refuerzo transversal obtenido de la manera descrita anteriormente, debe adicionarse al acero requerido por otras acciones, como flexión o tensión directa, y distribuirse a lo largo de la grieta supuesta.

En la figura 12.11 se presentan varios casos en los cuales puede utilizarse el con-

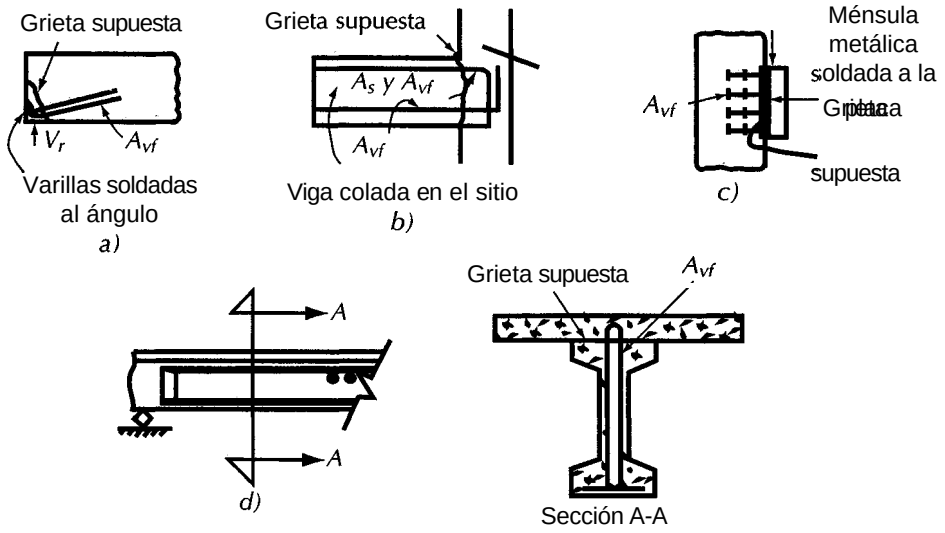


Figura 12.11 Algunas aplicaciones del concepto de cortante por fricción.

cepto de cortante por fricción. Para aplicar este concepto, deben investigarse las posiciones posibles de la grieta y escoger la más desfavorable. En la figura *12.11* se han señalado también posiciones razonables de la grieta inicial. En todos los casos, el refuerzo determinado con la ecuación *12.9* debe colocarse perpendicularmente a la grieta supuesta.

El concepto de cortante por fricción se ha ampliado para tomar en cuenta que la fuerza cortante es resistida no únicamente por la fricción, según el mecanismo descrito, sino también por la trabazón entre las protuberancias de las dos caras en contacto y por cortante directo en las barras de refuerzo que cruzan la grieta. También se ha estudiado el caso en que las barras de refuerzo no son perpendiculares a la grieta potencial. En las referencias *12.9* a *12.11* se analizan estos conceptos.

12.2.4 Dimensionamiento de ménsulas por el Reglamento ACI 3*18-02*

El método puede aplicarse a ménsulas con una relación entre el claro de cortante, a, y el peralte, d, no mayor de uno, y siempre que la fuerza horizontal, N_{uc}, no sea mayor que la fuerza vertical, V_u (figura *12.12).*

Bajo estas condiciones, la fuerza cortante producida por V_u es resistida por refuerzo horizontal, A_{vf} (figura *12.10),* que se calcula con el concepto de cortante por fricción, de tal manera que se requiere un área

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi f_y \mu} \qquad (12.10)$$

Se puede ver que esta ecuación es la *12.9* en la que se han sustituido ρ por su valor de la ecuación *12.7* y v_r por su valor de la ecuación *12.8.* También se ha introducido el factor de reducción ϕ que se especifica de *0.75.* Los valores de μ son los de la tabla *12.1.* La resistencia nominal, $V_n = V_u/\phi$, no debe exceder de $0.2f'_c b_w d$ ni de $56\ b_w d$ en kg ($5.5\ b_w d$ en MPa).

Las fuerzas V_u y N_{uc} de la figura *12.12* producen un momento flexionante en la intersección de la cara de la columna con la barra de tensión igual a $[V_u a + N_{uc}(h - d)]$. Para resistir este momento se requiere un refuerzo de

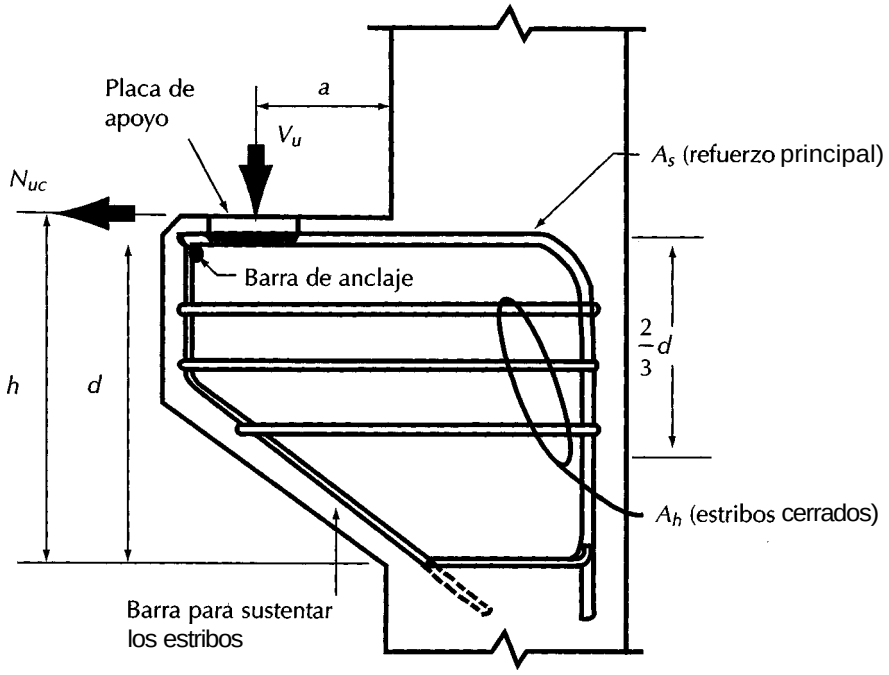


Figura 12.12 Notación *y* detalles de armado según el Reglamento ACI 318-02.

tensión A_f que se calcula con las hipótesis usuales para miembros sometidos a flexión.

La fuerza horizontal N_{uc} es resistida por una cantidad adicional de refuerzo horizontal A, que se calcula con la ecuación

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} \qquad (12.11)$$

Se especifica que la fuerza horizontal N_{uc} no se considere menor que 0.2 V_u a menos que se tomen precauciones especiales para que no se desarrollen estas fuerzas, y que se le dé el tratamiento de una carga viva aunque se origine por efectos de contracción, flujo plástico o cambios de temperatura.

Una vez calculadas las áreas de acero, A_f, A_{vf} y A, deben distribuirse en un área principal, A_s, que se coloca en el lecho superior, y un área restante, A_h, que se distribuye en los dos tercios superiores del peralte (figuras 12.10 y 12.12). El área principal, A_s, debe ser igual al mayor de los valores (A_f + A) o ($2A_{vf}/3$ + A). En ambos casos el área restante, A_h, debe ser igual a 0.5 (A_s − A). Estas recomendaciones se basan en ensayes presentados en la referencia 12.9, que indican que el refuerzo total A_s + A, debe ser por lo menos igual al mayor de los valores siguientes

a) La suma de A_{vf} y de A, o
b) La suma de $3A_f/2$ y de A.

El lector puede comprobar que con las disposiciones del Reglamento se cumplen estas condiciones.

La relación de refuerzo $\rho = A_s/bd$ no debe ser menor de 0.04 (f'_c/f_y).

El Reglamento especifica que el refuerzo A_s se ancle adecuadamente en su extremo, lo cual puede lograrse soldándole un ángulo o una barra transversal de igual diámetro, o bien, doblando horizontalmente las barras.

Las placas de carga no deben proyectarse más allá de la porción recta de las barras, A_s, o de la barra transversal.

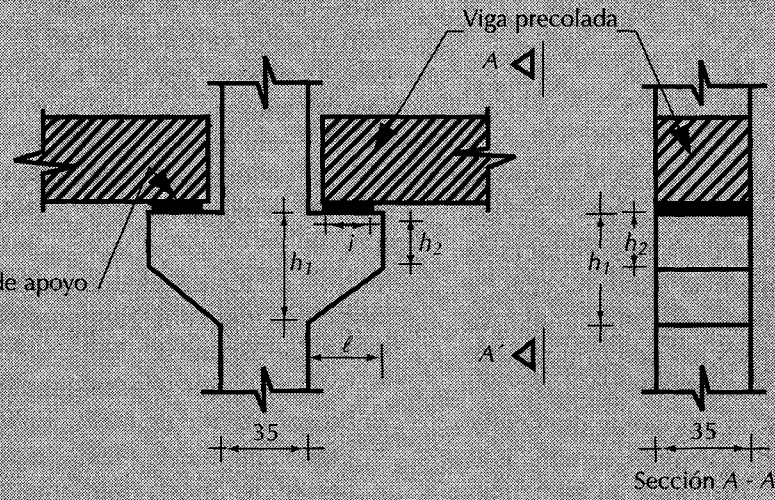
En el ejemplo 12.1 se aplican las disposiciones del Reglamento ACI 318-02 al dimensionamiento de una ménsula en la que se apoya una viga precolada, la cual soporta cargas muertas y vivas de las magnitudes señaladas en la sección de cargas de servicio. Se calcularon por separado las reacciones por estos dos tipos de carga y se multiplicaron por los factores de carga correspondientes, 1.2 y 1.6, para obtener la fuerza V_u. Puesto que no hay ninguna carga horizontal, por tratarse de apoyos libres, se consideró la mínima que señala el Reglamento de $0.2\ V_u$.

Los detalles geométricos de las ménsulas se determinan a partir de recomendaciones empíricas. Así, el claro de cortante, a, se calcula como el doble de la separación entre la viga y el paño de la columna más la distancia del extremo de la viga al centro de la placa de apoyo. Esta recomendación toma en cuenta que la separación real entre el extremo de la viga y el paño de la columna puede diferir de la separación teórica, ya sea por aspectos constructivos o por deformaciones de la viga. Se recomienda también que la separación mínima entre la viga y la columna sea del orden de 2 a 3 cm, para no dificultar el montaje. El ancho de la placa de apoyo se determina de tal manera que no se exceda la resistencia al aplastamiento del concreto. Para este cálculo se usan los valores de ϕ y de la resistencia del concreto que señala el Reglamento.

Una vez determinado el claro de cortante, a, se procede a fijar el peralte de la ménsula en el paño de la columna. La experiencia indica que se obtienen diseños satisfactorios si la relación a/d está comprendida entre 0.15 y 0.40. En el ejemplo se fijó esta relación en 0.30 y se despejó el valor del pe-

EJEMPLO 12.1 ***Dimensionamiento de una ménsula por el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



Notas:
Longitud vigas precoladas = 15 m
Acotaciones en centímetros

EJEMPLO 12.1 ***(continuación)***

CARGAS DE SERVICIO

*Carga muerta en viga: $w_1 = 2000$ kg/m
Carga viva en viga: $w_2 = 2800$ kg/m
Carga total $= 4800$ kg/m

*Incluye peso propio

MATERIALES

Concreto: $f'_c = 350$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 2800$ kg/cm^2

CÁLCULO DE ACCIONES INTERNAS

R_1: Reacción por carga permanente

$$R_1 = \frac{w_1 \ell}{2} = \frac{2.0 \times 15.0}{2} = 15 \text{ ton}$$

R_2: Reacción por carga viva

$$R_2 = \frac{w_2 \ell}{2} = \frac{2.80 \times 15.0}{2} = 21.0 \text{ ton}$$

CÁLCULO DEL REFUERZO

a) Para resistir V_u:

$$A_{vf} = \frac{V_u}{\phi f_y \mu} \qquad \text{(ecuación 12.10)}$$

$$V_u = 1.2 \times 15 + 1.6 \times 21.0 = 51.6 \text{ ton}$$

$$A_{vf} = \frac{51.6 \times 10^3}{0.75 \times 2800 \times 1.4} = 17.5 \text{ cm}^2$$

b) Para resistir el momento:

$$A_f = \frac{M_u}{\phi f_y z}$$

$M_u = V_u\, a + N_{uc}\,(h - d)$, $N_{uc} = 0.2\, V_u = 10.3$ ton
$M_u = 51.6 \times 10 + 10.3 \times 5 = 567$ ton-cm
$z = 0.8d = 0.8 \times 33 = 26.4$ cm

$$A_f = \frac{567 \times 10^3}{0.9 \times 2800 \times 26.4} = 8.5 \text{ cm}^2$$

EJEMPLO 12.1 (*continuación*)

c) Para resistir N_{uc}

$$A_n = \frac{N_{uc}}{\phi f_y} \qquad \text{(ecuación 12.11)}$$

$$A_n = \frac{10.3 \times 10^3}{0.9 \times 2800} = 4.1 \text{ cm}^2$$

d) Cálculo de A_s:

$$A_{s1} = A_f + A_n = 8.5 + 4.1 = 12.6 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{2}{3} A_{vf} + A_n = \frac{2}{3} \times 17.5 + 4.1 = 15.8 \text{ cm}^2$$

$A_s = 15.8 \text{ cm}^2 = 3$ barras No. 8

e) Cálculo de A_h:

$A_h = 0.5 (A_s - A_n) = 0.5 (15.8 - 4.1) = 5.8 \text{ cm}^2$

$A_h = 3$ estribos No. 4 de dos ramas

f) Revisión del área mínima:

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{15.8}{35 \times 33} = 0.014$$

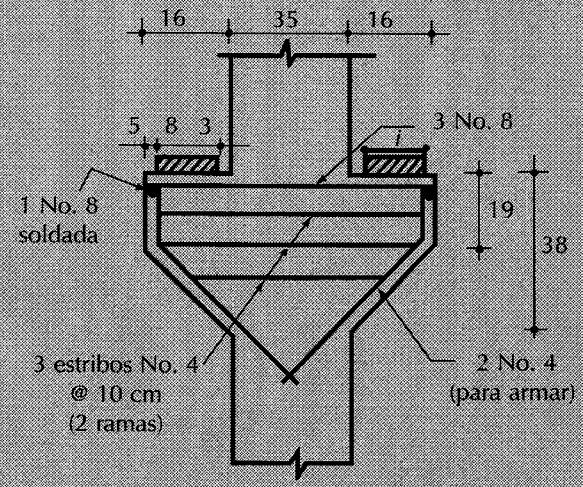
$$\frac{0.04 f'_c}{f_y} = \frac{0.4 \times 350}{2800} = 0.005 < \rho$$

DETALLES DEL REFUERZO

Peralte total: $h = d$ + recubrimiento = 33 + 5 = 38 cm

Peralte exterior $h_2 = h/2 = 38/2 = 19$ cm

Longitud de la ménsula $\ell = s + i + 5$ cm = 3 + 8 + 5 = 16 cm



ralte obteniéndose un valor de 33 cm. Este valor es tentativo y debe modificarse si el porcentaje de refuerzo correspondiente resulta excesivo o muy pequeño.

Después de definida la geometría de la ménsula se calcularon las áreas de refuerzo que se requieren para resistir la fuerza cortante, „V el momento flexionante, M_u, y la fuerza horizontal, N_{uc}. Para la primera se usó la ecuación 12.10 con un valor de μ de 1.4, ya que se supuso que la ménsula se coló monolíticamente con la columna. Para calcular el momento flexionante se utilizó un brazo del par aproximado de $0.8d$. Para calcular el área requerida para la fuerza horizontal N_{uc} se empleó la ecuación 12.11.

El área principal A_s que se coloca en el lecho superior, se calculó con las dos ecuaciones que da el Reglamento, resultando mayor en este ejemplo la de la ecuación $2A_{vf}/3 + A$. Se calculó después el área complementaria A_h y se revisó el porcentaje mínimo para el área A_s. Ya que la relación p tiene un valor mayor que el mínimo y al mismo tiempo no es excesivo, no fue necesario hacer otro tanteo con un nuevo peralte d.

Finalmente se muestran los detalles geométricos y del refuerzo en el croquis con que termina el ejemplo. Puede observarse que la ménsula resultó muy pequeña, por lo que podría ampliarse para facilitar la construcción.

12.2.5 *Dimensionamiento* de *ménsulas por las* NTC-04

La definición de ménsulas en estas normas es igual a la del Reglamento ACI 318-02: son aquellos elementos cuya relación entre el claro de cortante y el peralte en el paño de la columna es menor o igual a uno.

También se especifica usar el concepto de cortante por fricción para calcular el área de acero que se requiere para resistir la fuerza cortante, que con la notación de este Reglamento se denomina V_R. De esta manera, el área de acero A_{vf} se obtiene despejando su valor de las siguientes ecuaciones que dan la resistencia del elemento a cortante por fricción

$$V_R = F_R\,\mu\,(A_{vf}\,f_y + N_u) \qquad (12.12)$$

$$V_R = F_R\,[14A + 0.8\,(A_{vf}\,f_y + N_u)] \qquad (12.13)$$

$$V_R = 0.25\,F_R\,f_c^*A \qquad (12.14)$$

En estas ecuaciones, N_u es la fuerza normal de compresión al plano crítico en kg, que debe tomarse igual a cero, A es el área de la sección definida por el plano crítico en cm^2, y los demás términos ya han sido definidos. El coeficiente de fricción μ se toma igual a 1.4 en concreto colado monolíticamente, igual a 1.0 para concreto colado contra concreto endurecido, e igual a 0.7 entre concreto y acero laminado. La resistencia será igual al menor de los tres valores obtenidos.

El área de acero por flexión, A_f, necesaria para resistir el momento, se puede calcular con la ecuación

$$A_f = \frac{M_R}{F_R f_y z} \qquad (12.15)$$

usando los siguientes valores del brazo del par, z, siempre que la carga actúe en la cara superior de la ménsula y que la relación de refuerzo, A_f/bd, no exceda de 0.008

$$z = \left(0.4 + 0.4\frac{a}{h}\right)h, \text{ si } 0.5 < \frac{a}{h} \le 1.0 \qquad (12.16)$$

$$z = 1.2a, \quad \text{si } \frac{a}{h} \le 0.5 \qquad (12.17)$$

Finalmente, si existe una fuerza de tensión, N_u, debe proporcionarse un área de

acero, A_n, que la resista, la cual se calcula con la ecuación

$$A_n = \frac{N_u}{F_R f_y} \qquad (12.18)$$

una vez calculadas A_{vf}, A_f, A_n, se calculan el área principal A_s y el área restante A_h igual que en el Reglamento ACI. El área principal A_s debe tener un valor mínimo de:

$$(A_s)_{mín} = \frac{0.04 f'_c}{f_y} bd \qquad (12.19)$$

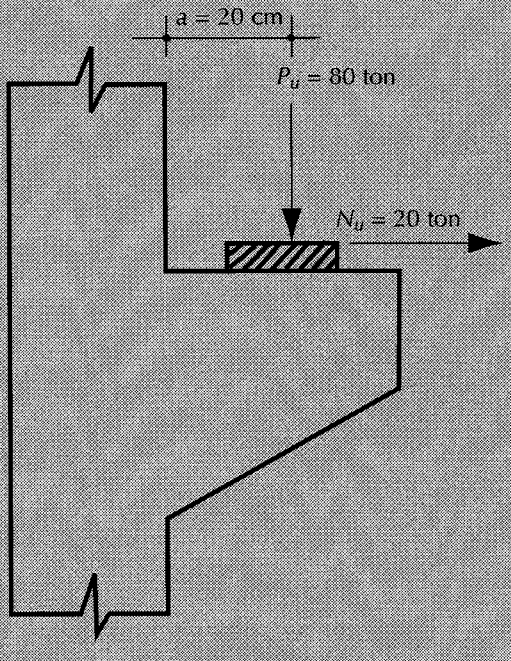
Las NTC-04 permiten también diseñar las ménsulas por el método de la analogía de la armadura. El procedimiento de diseño con las NTC-04 se ilustra en el ejemplo 12.2. Se suponen conocidas las fuerzas vertical y horizontal que debe resistir la ménsula, las cuales ya están multiplicadas por sus factores de carga.

Para tener una primera aproximación del peralte necesario, se supuso una relación *a/d* de 0.30, siguiendo las recomendaciones mencionadas en el ejemplo 12.1. Con esto se obtuvo un peralte tentativo de 70 cm.

Después se calculó el refuerzo necesario para cortante por fricción. Se usó la mayor de las áreas obtenidas con las ecuaciones 12.12 y 12.13, haciendo N_u igual a cero, ya que no hay fuerza normal de compresión en este ejemplo. A continuación se revisó que la resistencia fuese mayor que la obtenida con la ecuación 12.14, lo cual se cumplió; si no hubiese sido el caso, sería necesario aumentar el peralte tentativo con el fin de incrementar el término A_f.

Para calcular el área de acero de flexión se determinó primero si se estaba en el caso de la ecuación 12.16 o en el de la ecuación 12.17. Como sucedió lo segundo, se usó un brazo del par, z, de $1.2a$. Ya obtenida el área A_s se verificó que la relación ρ fuese menor

EJEMPLO 12.2 ***Dimensionamiento de una ménsula por las NTC-04.***



Ancho de la ménsula = 40 cm
Las cargas incluyen los factores de carga.

EJEMPLO 12.2 ***(continuación)***

MATERIALES

$f'_c = 200$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

CONSTANTES

$f^*_c = 0.8\, f'_c = 0.8 \times 200 = 160$ kg/cm^2

$f''_c = 0.85\, f^*_c = 0.85 \times 160 = 136$ kg/cm^2

$F_R = 0.9$ para flexión y tensión directa

$F_R = 0.8$ para fuerza cortante

$\mu = 1.4$ (concreto colado monolíticamente)

Peralte tentativo:

$$\frac{a}{d} = 0.30,\ d = \frac{a}{0.30} = \frac{20}{0.30} = 67 \text{ cm}$$

se considera, $d = 70$ cm

CÁLCULO DEL REFUERZO

a) Para resistir V_R:

$$(A_{vf})_1 = \frac{V_R}{F_R \mu f_y}$$ (ecuación 12.12 con $N_u = 0$)

$$(A_{vf})_1 = \frac{80 \times 10^3}{0.8 \times 1.4 \times 4200} = 17 \text{cm}^2$$

$$(A_{vf})_2 = \frac{V_R - 14\, F_R A}{0.8\, f_y F_R}$$ (ecuacion 12.13 con $N_u = 0$)

$$(A_{fv})_2 = \frac{80 \times 10^3 - 14 \times 0.8 \times 40 \times 70}{0.8 \times 4200 \times 0.8} = 18 \text{ cm}^2$$

Luego, $A_{vf} = 18$ cm^2

Revisión de V_R con la ecuación 12.14

$V_R = 0.25 \times 0.8 \times 160 \times 40 \times 70 = 89{,}600$ kg $> 80{,}000$ kg

EJEMPLO 12.2 *(continuación)*

b) Para resistir el momento flexionante

$$M_R = 80 \times 10^3 \times 20 + 20 \times 10^3 \times 5 = 17 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\frac{a}{h} = \frac{20}{75} = 0.27 < 0.50$$

$$z = 1.2\,a = 1.2 \times 20 = 24 \text{ cm} \qquad \text{(ecuación 12.17)}$$

$$A_f = \frac{17 \times 10^5}{0.9 \times 4200 \times 24} = 18.7 \text{ cm}^2 \qquad \text{(ecuación 12.15)}$$

$$\rho = A_f/bd = 18.7/40 \times 70 = 0.0067$$

$$0.00236 < \rho < 0.008$$

c) Para resistir N_u:

$$A_n = \frac{N_u}{F_R f_y} = \frac{20 \times 10^3}{0.9 \times 4200} = 5.3 \text{ cm}^2 \qquad \text{(ecuacion 12.18)}$$

d) Cálculo de A_s:

$$A_{s1} = A_f + A_n = 18.7 + 5.3 = 24.0 \text{ cm}^2$$

$$A_{s2} = \frac{2}{3} A_{vf} + A_n = \frac{2 \times 18}{3} + 5.3 = 17.3 \text{ cm}^2$$

$A_s = 24.0 \text{ cm}^2 = 5$ barras No. 8

$$(A_s)_{min} = \frac{0.04 f'_c}{f_y} bd = \frac{0.04 \times 200 \times 40 \times 70}{4200} = 5.3 \text{ cm}^2 < A_s$$

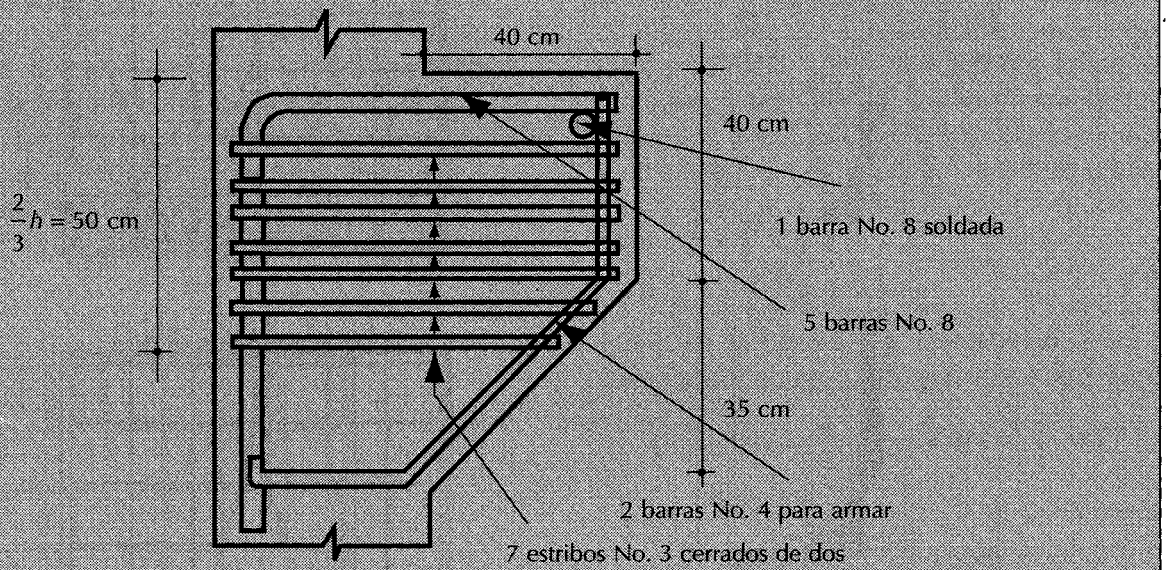
e) Cálculo de A_h:

$A_h = 0.5\,(A_s - A_n) = 0.5\,(24 - 5.3) = 9.35 \text{ cm}^2$

A_h = 7 estribos No. 3 de dos ramas

EJEMPLO 12.2 (*continuación*)

DETALLES DEL REFUERZO



que 0.008, que es el máximo valor para el que pueden usarse las ecuaciones 12.16 y 12.17. Como se cumplió la condición mencionada, no fue necesario cambiar el peralte supuesto.

Finalmente el acero total se distribuyó entre el acero principal A_s y el acero complementario A_h. La manera de hacerlo según las NTC-04 es la misma que la prescrita en el Reglamento ACI 318-02

12.3 Vigas de gran peralte

Las vigas de gran peralte son aquellas cuya relación claro-peralte total (ℓ/h) es del orden de tres o menor. También se conocen estas vigas con los nombres de vigas pared o vigas diafragma.

En las vigas de gran peralte, la distribución de esfuerzos normales debidos a flexión difiere mucho de una distribución lineal, inclusive cuando las vigas son de material lineal, homogéneo y elástico. En la figura 12.13 se muestran algunas distribuciones de esfuerzos obtenidas por la Teoría de la Elasticidad para vigas con varias relaciones ℓ/h. En vigas de concreto reforzado, las distribuciones de esfuerzos son más o menos similares a las teóricas antes de que ocurra el agrietamiento del concreto en tensión. Sin embargo, tan pronto como ocurre este agrietamiento, las distribuciones cambian por completo. Se ha podido comprobar experimentalmente que resulta conservador diseñar las vigas de concreto de gran peralte de acuerdo con los resultados de la Teoría de la Elasticidad. Además, se ha encontrado que la magnitud de los esfuerzos debidos a flexión no es factor importante en el diseño. Resultan más significativos, en general, los detalles de dimensionamiento de los apoyos y los detalles de anclaje de las barras de refuerzo [12.12]. Más adelante se presentan recomendaciones específicas sobre estos aspectos del diseño.

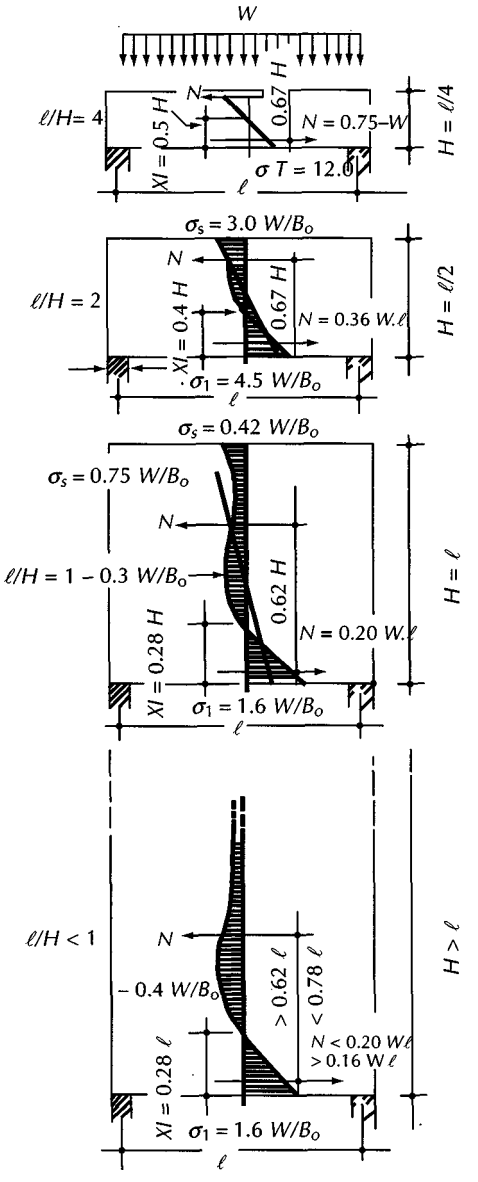


Figura 12.13 Distribuciones elásticas de esfuerzos en vigas con diferentes relaciones claro/peralte.

12.3.1 Comportamiento y modos de falla

Las primeras series completas de ensayes fueron realizadas por Leonhardt, en la Universidad de Stuttgart [12.12], y por De Paiva y Siess, en la Universidad de Illinois [12.13]. En

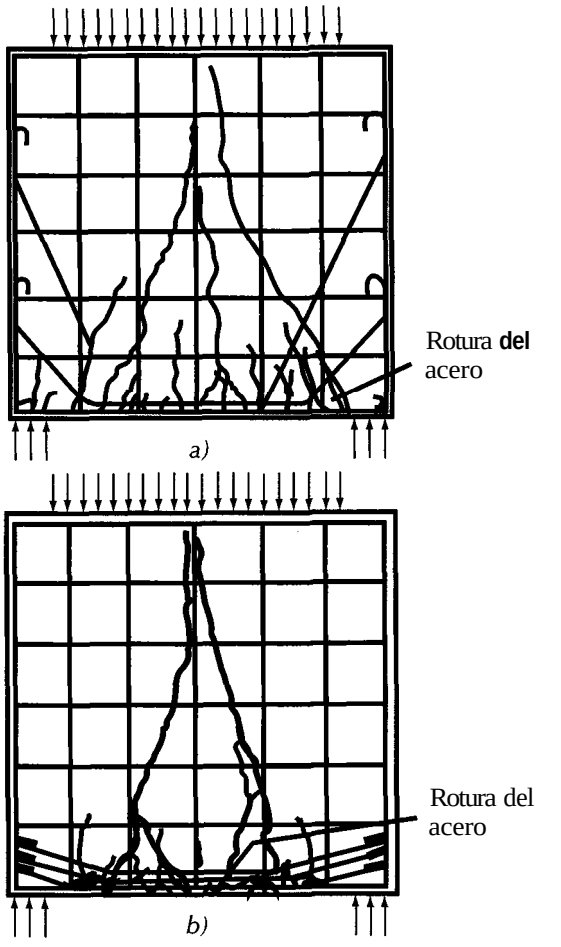


Figura 12.14 Fallas por rotura del acero de flexión en vigas de gran peralte (según Leonhardt [12.12]).

fechas más recientes se han llevado a cabo otros ensayes para estudiar variables como la relación claro-peralte, la resistencia del concreto, el efecto de refuerzo vertical y horizontal, y la influencia de la continuidad [12.14, 12.15, 12.16]. La siguiente descripción de los principales modos de falla está basada fundamentalmente en estas series de ensayes.

a) Rotura del acero longitudinal

Debido al gran peralte de estas vigas, en el diseño se obtienen muchas veces relaciones

relativamente pequeñas de refuerzo por flexión. En las figuras 12.14a y 12.146 se muestran dos vigas que fallaron por rotura del acero de tensión. El porcentaje de refuerzo de ambas era de 0.12 por ciento. Las vigas diferían entre sí por la colocación de las barras longitudinales; la viga mostrada en la figura 12.14*a* tenía las barras dobladas y la de la figura 12.146, rectas. En la primera viga, el acero se rompió en la sección en que se doblaron las barras, mientras que en la segunda se rompió aproximadamente en el centro del claro. La carga que resistió la segunda viga fue 23 por ciento mayor que la que resistió la primera. Esto indica que no es conveniente doblar las barras, ya que se debilita la viga en la sección del doblez. Además, la configuración de agrietamiento indica que la viga trabaja aproximadamente como un arco atirantado, por lo que la fuerza de tensión en el acero es constante en todo el claro y no disminuye de acuerdo con el diagrama de momentos flexionantes, como en las vigas largas.

La carga de rotura de la viga de la figura 12.14*b* fue 4.5 veces la carga calculada con la Teoría de la Elasticidad, lo que demuestra lo conservador que resulta diseñar con esta teoría.

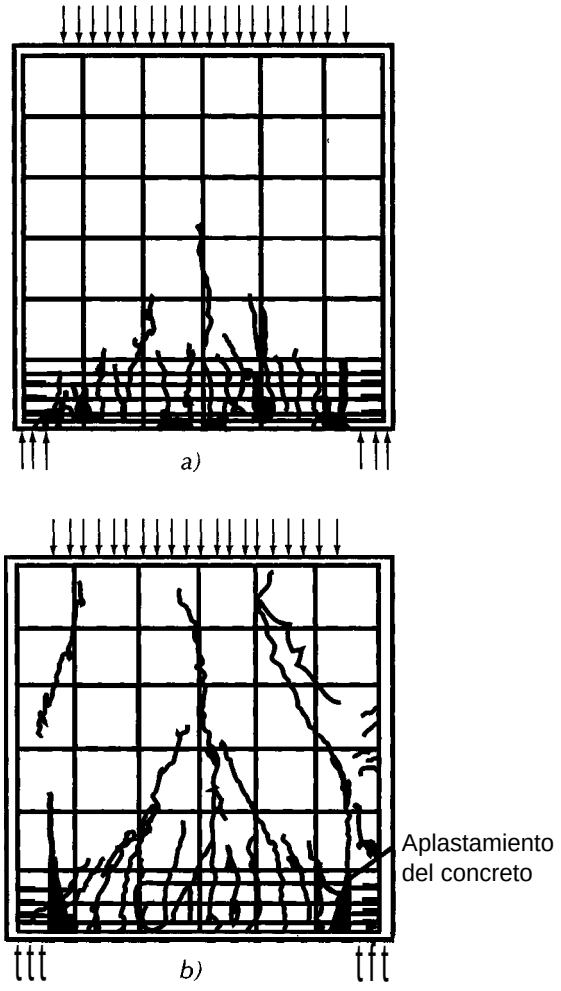


Figura 12.15 Fallas por aplastamiento de los apoyos en vigas de gran peralte (según Leonhardt [12.12]).

b) Aplastamiento de los apoyos

En las figuras 12.15a y 12.15*b* se muestran dos vigas que fallaron por aplastamiento de los apoyos. En la primera, el esfuerzo de aplastamiento, obtenido dividiendo la reacción de apoyo entre el área del apoyo, resultó de 405 kg/cm^2, valor 45 por ciento mayor que la resistencia del concreto, f'_c, determinada en cilindros. La viga de la figura 12.15*b* tenía una ampliación de los apoyos para disminuir los esfuerzos de aplastamiento. En esta viga, la falla ocurrió al formarse súbitamente una grieta casi vertical en la intersección del apoyo derecho, y se inició por arriba del refuerzo longitudinal. Esta falla indica la conveniencia de colocar refuerzo horizontal en esta zona.

En la figura 12.16 se muestra otro tipo de falla por aplastamiento de los apoyos. La viga de esta figura tenía la carga aplicada en la parte inferior. Puede verse que la configuración de agrietamiento fue completamente diferente de las vigas anteriores, que tenían la carga aplicada en la parte superior. La falla ocurrió por aplastamiento del apoyo derecho bajo la acción de fuerzas inclinadas de compresión en el arranque de los arcos definidos por las grietas. Este tipo de falla in-

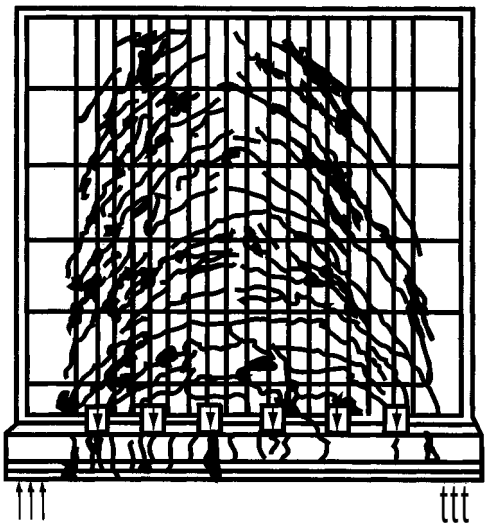


Figura 12.16 Configuración de agrietamiento de vigas con carga aplicada en la parte inferior (según Leonhardt [12.12]).

dica también la conveniencia de colocar el refuerzo horizontal adicional, mencionado en el párrafo anterior.

c) Falla por cortante

En las fallas de este tipo, se forman grietas inclinadas antes de la falla, las cuales, como se indicó en el inciso a, hacen que la viga trabaje como un arco atirantado (figura 12.17*c*). Posteriormente se forman otras grietas inclinadas que definen una zona de concreto que trabaja a compresión y que une los apoyos de la viga con los puntos de aplicación de carga. Esta zona de concreto falla a compresión simultáneamente con el deslizamiento por cortante de la zona descargada de la viga y con la rotura de la adherencia de las barras longitudinales en las zonas de apoyos. En algunos casos, la falla ocurre tan pronto como se forma la segunda grieta inclinada, mientras que en otros casos las vigas soportan cierta carga adicional.

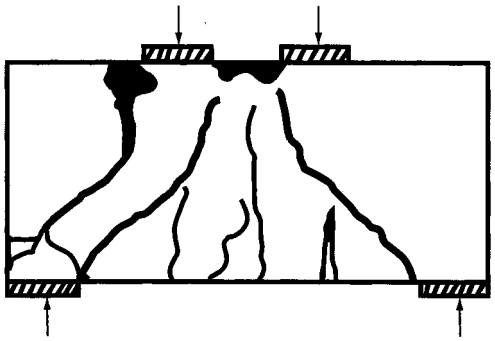


Figura 12.17 Falla por cortante en vigas de gran peralte (según De Paiva y Siess [12.13]).

En la figura 12.18 se muestra la configuración de agrietamiento de una viga continua de dos claros con una fuerte cantidad de estribos verticales [12.16]. A pesar de los estribos, la grieta inclinada se forma súbitamente produciendo un ruido sordo. Se puede observar la formación de grietas en abanico sobre el apoyo interior y debajo de las cargas, así como la presencia de diagonales de concreto que trabajan a compresión entre los apoyos y las cargas. A pesar de la aparición súbita de la grieta inclinada, estas vigas presentan cierta ductilidad. En cambio, con cantidades pequeñas de estribos, el comportamiento y la falla son iguales a los de vigas sin estribos.

d) Aplastamiento del concreto a compresión

Es raro que se presente este tipo de falla en vigas de gran peralte. Cuando ocurre, se desarrolla en forma semejante a la falla en compresión por cortante de vigas largas, pero después de que se producen deflexiones inelásticas considerables.

12.3.2 Recomendaciones para diseño

Se han propuesto dos tipos de enfoque para el diseño de vigas de gran peralte. El primer tipo se basa en el concepto de puntales y tensores presentado en la sección 12.2.2 para el caso de ménsulas. En este enfoque, la viga se sustituye por una armadura con elementos a compresión y a tensión, que son los puntales y los tensores, respectivamente. En la

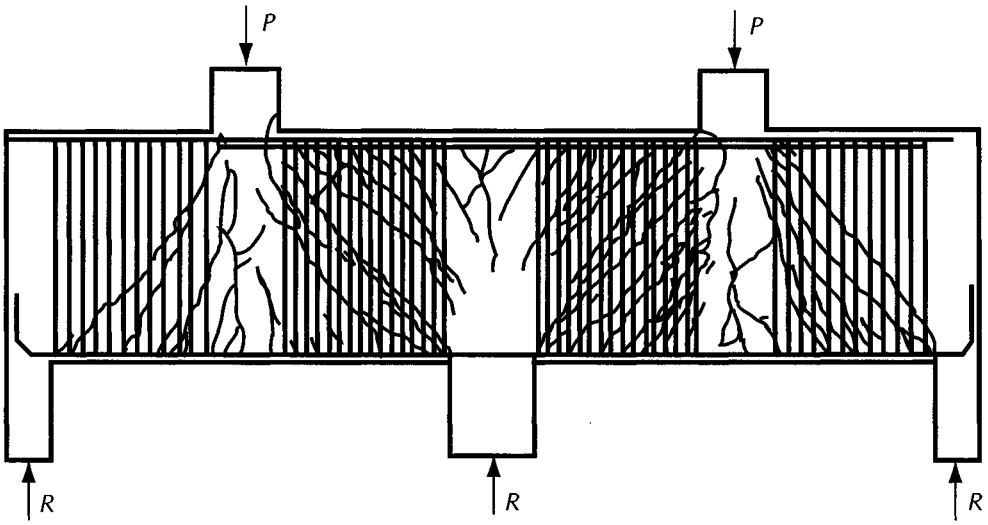


Figura 12.18 Analogía de la armadura en una viga de gran peralte con estribos (según Rogowsky y MacGregor [12.17]

figura 12.19 se muestra un modelo de armadura propuesto por Rogowsky y Mac-Gregor [12.17]. Las partes sombreadas representan zonas en las que el concreto trabaja a compresión; la parte inclinada sería una diagonal principal a compresión. Las líneas verticales son los estribos que trabajan a tensión. Las líneas inclinadas son diagonales secundarias a compresión. Y la línea horizontal es el acero de refuerzo longitudinal que trabaja a tensión. En este tipo de enfoque, el diseño se realiza simultáneamente por flexión cortante y esfuerzos de apoyo. Ejemplos resueltos con este enfoque pueden verse en las referencias 12.21, 12.22 y 12.23.

En el segundo tipo de enfoques, se hacen por separado los diseños por flexión, fuerza cortante y esfuerzos de apoyo usando ecuaciones empíricas. Éste es el enfoque que se ha utilizado tradicionalmente en los reglamentos de construcción del American Concrete Institute y del Distrito Federal. Por esta razón es el que se presenta con detalle en el resto de este capítulo, aunque algunos investigadores han señalado que no representa adecuadamente el comportamiento de las vigas de gran peralte [12.16, 12.17]. El Reglamento ACI permite, desde el año 2002, utilizar en forma alternativa el método de puntales y tensores.

a) Flexión

Debido a que las relaciones de refuerzo de flexión en vigas de gran peralte generalmente son pequeñas, y a que los resultados de la Teoría de la Elasticidad son muy conservadores para estas vigas, Leonhardt [12.12] recomienda usar un procedimiento simple de diseño, que consiste en fijar el brazo del par interno de la manera siguiente. Si la relación entre el claro y el peralte total (ℓ/h) es igual o mayor que 1, el brazo del par interno, z, es igual a 0.6 h. Si la relación ℓ/h es menor que 1, el brazo del par interno, z, es igual a 0.6 t. Una vez determinado el valor de z, el área de acero requerida se calcula con la siguiente ecuación:

$$A_s = \frac{M_r}{f_y z} \qquad (12.20)$$

El área de acero determinada de esta manera debe proporcionarse usando barras de diámetro pequeño y no una o dos barras

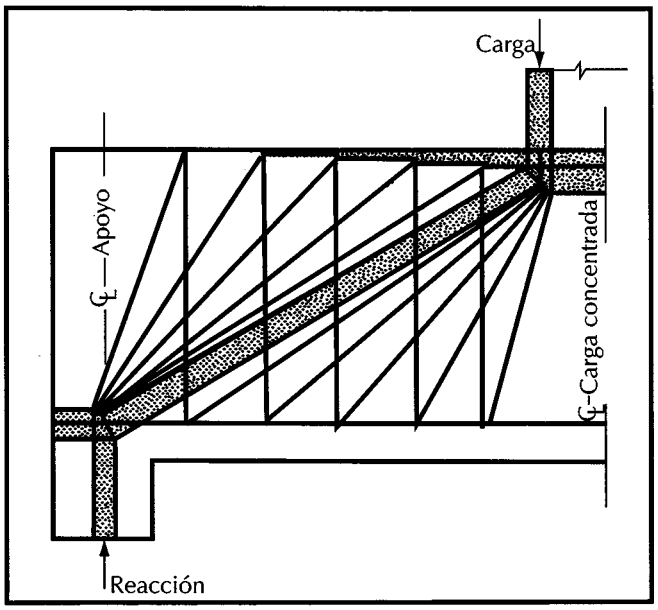


Figura 12.19 Analogía de la armadura en una viga de gran peralte con estribos (según Rogowsky, MacGregor y Ong [12.17]).

de gran diámetro únicamente, ya que esto aumentaría los problemas de anclaje. Además, las barras deben distribuirse sobre una altura de 0.15 a 0.20 h a partir de la cara inferior de la viga, y deben anclarse en los extremos con ganchos horizontales, como se muestra en la figura 12.20. No es conveniente doblar las barras, por las razones expuestas en la descripción de los modos de falla.

Por lo general, los esfuerzos en la zona de concreto a compresión resultan pequeños y no es necesario revisarlos. Sin embargo, la viga debe tener un espesor suficiente, para evitar un posible pandeo lateral en la zona sujeta a compresión. A veces es conveniente ampliar el espesor de la viga en esta zona.

b) Esfuerzos de apoyo

Para evitar fallas por aplastamiento de los apoyos, se recomienda limitar los esfuerzos de apoyo a un valor de 0.50 f'_c, en los casos

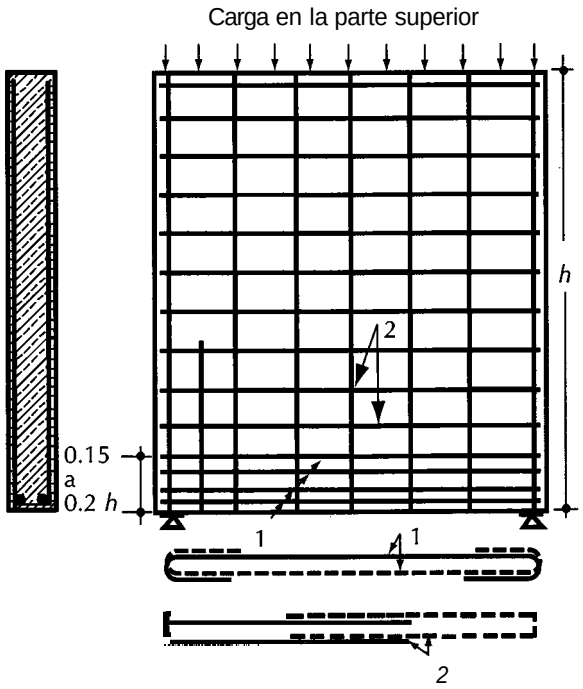


Figura 12.20 Detalles recomendados del refuerzo (según Leonhardt [12.12]).

en que la viga no tenga ampliación de la sección en las zonas de apoyo. Cuando existen ampliaciones en los apoyos, la carga aplicada a la viga no debe exceder del siguiente valor

$$w_{máx} = 0.08\, bf'_c \frac{h}{\ell_n} \qquad (12.21)$$

donde b es el ancho del alma de la viga, y ℓ_n es el claro libre entre las caras interiores de los apoyos; los otros términos ya han sido definidos. Esta recomendación tiene por objeto evitar que se desarrollen esfuerzos inclinados de compresión demasiado elevados. Las ampliaciones de los apoyos deben diseñarse como columnas sujetas a una carga axial igual a la reacción de apoyo. En la figura 12.21 se muestra un detalle recomendado de colocación. del refuerzo para vigas con ampliaciones en los apoyos.

c) Fuerza cortante

Se ha comprobado que la resistencia a fuerza cortante de vigas de gran peralte es mayor,

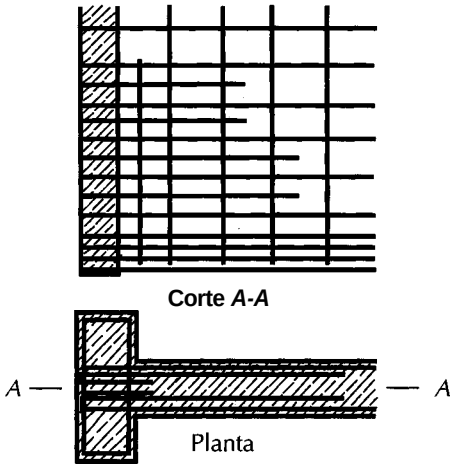


Figura 12.21 Detalles recomendados de colocación del refuerzo para vigas con ampliaciones en los apoyos (según Leonhardt [12.12]).

relativamente, que la resistencia de vigas largas, o sea, que el esfuerzo cortante nominal, $v_n = V_n/bd$, que pueden resistir las vigas de gran peralte, es mayor que el que pueden resistir las vigas largas [12.13].

Tanto el Reglamento ACI 318-02 como las NTC-04 presentan ecuaciones para calcular la resistencia a fuerza cortante, o bien, el acero que se debe proporcionar para resistir las cargas aplicadas. Estas ecuaciones se incluyen en las siguientes secciones de este capítulo.

Algunos investigadores han advertido que la correlación entre valores experimentales y calculados con las ecuaciones de los reglamentos no es satisfactoria [12.16, 12.18]. Las ecuaciones resultan conservadoras para vigas libremente apoyadas pero pueden dar resultados del lado de la inseguridad para vigas continuas. Por esta razón, se han propuesto algunas ecuaciones alternativas, como la de la referencia 12.18.

d) Cargas aplicadas en la parte inferior

Cuando la carga está aplicada en la parte inferior de la viga, como se muestra en la figura 12.22, es necesario colocar barras verticales, para transmitir la carga de la parte inferior a la parte superior de los arcos que se forman al agrietarse la viga (figura 12.16). El área necesaria de este acero se calcula dividiendo la carga aplicada entre el esfuerzo de fluencia del acero. Para evitar que ocurra agrietamiento excesivo bajo cargas de servicio, se recomienda usar, en el cálculo, un valor máximo del límite de fluencia de 2000 kg/cm^2, aun cuando el límite de fluencia real sea mayor. La colocación de las barras verticales debe hacerse siguiendo las recomendaciones indicadas en la figura 12.22.

e) Vigas continuas

En la referencia 12.12 se incluyen recomendaciones detalladas para el dimensionamien-

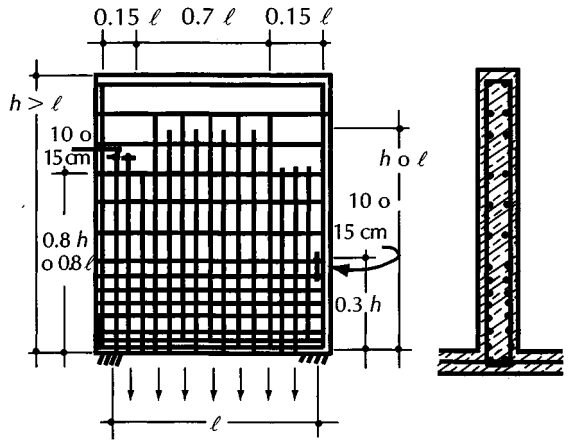


Figura 12.22 Detalles recomendados de colocación del refuerzo cuando la carga está aplicada en la parte inferior (según Leonhardt [12.12]).

to de vigas continuas de gran peralte. Véase también la referencia 12.17.

12.3.3 Diseño de vigas de gran peralte por el Reglamento ACI-318-02

La definición de vigas de gran peralte está basada en el concepto de puntales y tensores. Se especifica que estas vigas son aquellas cargadas en una cara y apoyadas en la cara opuesta, de tal manera que se puedan formar puntales de compresión como los mostrados en la figura 12.19. Además se debe cumplir alguna de las siguientes condiciones:

a) que el claro libre, ℓ_n, sea igual o menor a cuatro veces la altura total del miembro; o

b) que haya regiones con cargas concentradas en una distancia no mayor al doble de la altura de la viga a partir de la cara del apoyo; por ejemplo, en la figura 12.19, la distancia del paño del apoyo a la carga concentrada no debe exceder del doble de la altura de la viga.

El Reglamento señala que para el diseño por flexión de estas vigas debe tomarse en cuenta que la distribución de deformaciones unitarias no es lineal, como en vigas comunes, y que puede presentarse el pandeo lateral del elemento. Sin embargo, no presenta disposiciones específicas al respecto, excepto que el área mínima no debe ser menor que $0.7\sqrt{f'_c}/f_y\, bd$ ni que $14\, bd/f_y$. Los autores sugieren emplear las recomendaciones de Leonhardt mencionadas en la sección anterior.

Para calcular la resistencia a fuerza cortante, el Reglamento ACI 318-02 especifica, de manera muy sencilla, que la resistencia nominal $V_n = V_u / \phi$ no exceda de $2.5\sqrt{f'_c}\, bd$. El factor de reducción, ϕ, es de 0.75.

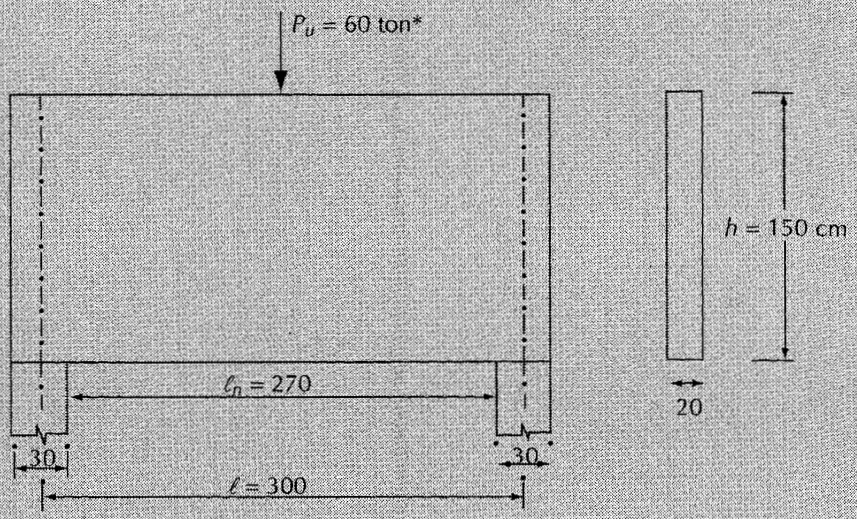
Siempre debe colocarse refuerzo vertical y horizontal para que pueda desarrollarse esta resistencia y para restringir el agrietamiento en los costados de la viga. El área de refuerzo vertical, A_v, no debe ser menor que $0.0025bs$, donde s es la separación de las barras que no excederá de $d/5$ ni de 30 cm. El área de refuerzo horizontal, A_{vh}, no debe ser menor que $0.0015bs_2$, donde s_2 es la separación de las barras horizontales que no excederá de $d/5$ ni de 30 cm.

En el ejemplo 12.3 se ilustra el dimensionamiento de una viga de gran peralte libremente apoyada y con carga uniformemente distribuida, usando las recomendaciones de Leonhardt para flexión y las del Reglamento ACI 318-02 para cortante. Para calcular el área de refuerzo por flexión se utilizó un brazo del par interno, z, igual a 0.60 h, que es el valor recomendado cuando la relación entre el claro y el peralte total es igual o mayor que uno. El refuerzo resultante, siete barras del No. 5, debe distribuirse en una altura igual a 0.15 h a partir de la cara inferior de la viga. El acero de flexión debe estar constituido por varias barras de diámetro no muy grande. El lector puede verificar que el área resultante de 13.2 cm^2 es mayor que las mínimas señaladas en el Reglamento.

Los esfuerzos de aplastamiento en los apoyos se revisaron usando un esfuerzo per-

EJEMPLO 12.3 ***Dimensionamiento de una viga de gran peralte por el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



*Carga de diseño (P_u) = carga de servicio × factor de carga.

MATERIALES

Concreto, $f'_c = 250$ kg/cm^2
Acero, $f_y = 4200$ kg/cm^2

DISEÑO POR FLEXIÓN

$$\frac{\ell}{h} = \frac{300}{150} = 2 > 1$$

$z = 0.60\,h$, $z = 0.60 \times 150 = 90$ cm

Área de acero necesaria

$$A_s = \frac{M_u}{\phi f_y z};$$

$\phi = 0.90$

$$M_u = \frac{P_u \ell}{4}; \quad M_u = \frac{60 \times 3.0}{4} = 45 \text{ ton} \cdot \text{m}$$

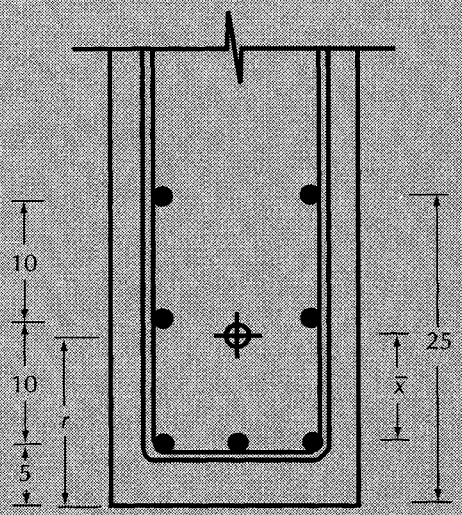
$\boxed{M_u = 45 \text{ ton-m}}$

$$A_s = \frac{45 \times 10^5}{0.90 \times 4200 \times 90} = 13.20 \text{ cm}^2$$

Usar 7 No. 5 ($A_s = 13.86$ cm^2)

$0.15\,h = 0.15 \times 150 = 22.5$ cm

EJEMPLO 12.3 (*continuación*)



Centroide del refuerzo

$$\bar{x} = \frac{2 \times 10 + 2 \times 20}{7} = 8.6 \text{ cm}$$

$$r = 5 + \bar{x} = 5 + 8.6 = 13.6 \text{ cm}$$

$$d_{real} = h - r = 136.4 \text{ cm}$$

REVISIÓN DE ESFUERZOS DE APLASTAMIENTO EN EL APOYO

$$f_{aplperm} = 0.50\, f'_c = 0.50 \times 250 = 125 \text{ kg/cm}^2$$

$$V_u = \frac{P_u}{2} = \frac{60}{2} = 30 \text{ ton}$$

$$f_{apl} = \frac{30 \times 10^3}{30 \times 20} = 50 \text{ kg/cm}^2$$

$\therefore f_{apl} < f_{aplperm}$

REVISIÓN POR FUERZA CORTANTE

Sección crítica: $z = 0.15\, \ell_n = 0.15 \times 270 = 40.5$ cm

Acciones internas de la sección crítica:

$M_u = 30 \times 0.555 = 16.65$ ton-m

$V_u = 30$ ton

$$V_n = \frac{V_u}{\phi} \leq 2.5\sqrt{f'_c}\, bd; \qquad \phi = 0.75$$

$$2.5\sqrt{f'_c}\, bd = 2.5\sqrt{250} \times 20 \times 136.4 = 107.83 \text{ ton}$$

$$V_n = \frac{30}{0.75} = 40 \text{ ton} < 2.5\sqrt{f'_c}\, bd \qquad \text{(se cumple la condición)}$$

$\therefore$ No se requiere refuerzo por cortante, pero se pone el mínimo.

EJEMPLO 12.3 ***(continuación)***

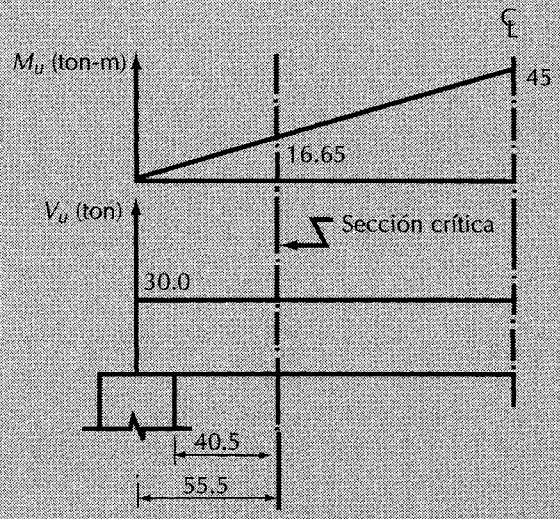


Diagrama de momento flexionante

Diagrama de fuerza cortante

REFUERZO MÍNIMO EN EL ALMA

Refuerzo vertical:

$$A_v \geq 0.0025\, bs; \qquad s \leq 30 \text{ cm}$$

Se propone el refuerzo con barras del No. 2.5 (2 ramas), $A_s = 0.50$ cm^2, y se calcula la separación necesaria s:

$$2 \times 0.50 = 0.0025 \times b \times s \Rightarrow s = \frac{1}{0.0025 \times 20} = 20 \text{ cm}$$

$\therefore$ Refuerzo vertical con barras No. 2.5 @ 20 cm.

Refuerzo horizontal:

$$A_{vh} \leq 0.0015\, b\, s_2; \qquad s_2 \leq 30 \text{ cm}$$

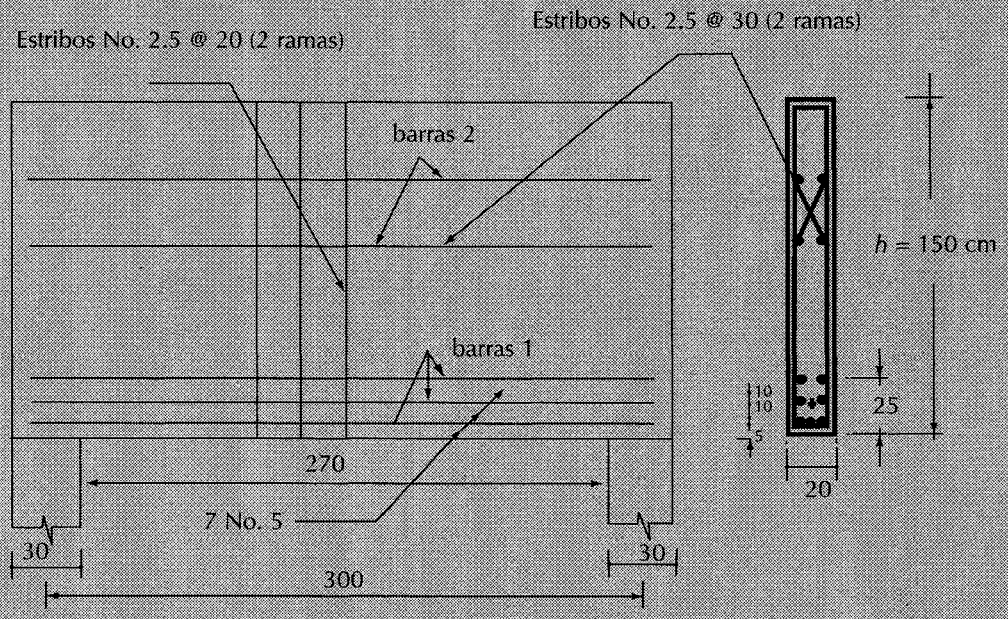
Análogamente al caso anterior, se usan barras de No. 2.5 (2 ramas) y se calcula s_2

$$s_2 = \frac{1}{0.0015 \times 20} = 33 \text{ cm} \approx 30 \text{ cm}$$

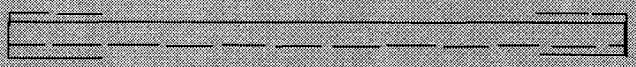
$\therefore$ Refuerzo horizontal con barras No. 2.5 @ 30 cm.

EJEMPLO 12.3 ***(continuación)***

CROQUIS DE ARMADO



Armado de barras horizontales



1 Flexión



2 En el alma

misible de 0.50 f'_c, que resulta —en este caso— igual a 125 kg/cm^2. Los esfuerzos producidos por la carga aplicada son de 50 kg/cm^2.

Para hacer la revisión por fuerza cortante, se calculó la resistencia nominal, $V_n = V_u/\phi$, usando la fuerza cortante de diseño en la sección crítica. La resistencia nominal se comparó con el valor de 2.5 $\sqrt{f'_c}\, bd$. Como resultó menor la resistencia nominal, se cumple con la disposición del Reglamento ACI.

En el croquis de armado se indica, por una parte, que el esfuerzo por flexión se coloca sin dobleces, ya que éstos reducen la resistencia, según se ha comentado anteriormente, y, por otra, que en los extremos se hacen ganchos horizontales para mejorar el anclaje de las barras. En este croquis se muestra una manera de anclar adecuadamente las barras horizontales, tanto las del refuerzo principal como las del refuerzo por cortante.

12.3.4 Diseño de vigas de gran peralte por las NTC-04

Se definen como vigas diafragma a aquellas cuya relación entre el claro libre, L, y el peralte total, h, es menor que 2.5, si son vigas continuas, o menor que 2.0 si constan de un solo claro libremente apoyado.

Cuando la relación de refuerzo, p, es menor de 0.008, su resistencia a flexión se puede calcular con la ecuación

$$M_R = F_R A_s f_y z \qquad (12.28)$$

donde el brazo del par, z, se valúa con las siguientes ecuaciones

$$z = \left(0.4 + 0.2\frac{L}{h}\right)h, \text{ si } 1.0 < \frac{L}{h} \le 2.0 \qquad (12.29)$$

$$z = 0.6\ L, \qquad si\ \frac{L}{h} < 1.0 \qquad (12.30)$$

Estas ecuaciones son semejantes a las que propone Leonhardt.

Para fuerza cortante, la sección crítica se considera a una distancia del paño del apoyo igual a 0.15 L en vigas con carga uniformemente repartida, e igual a la mitad de la distancia a la carga más cercana en vigas con cargas concentradas, pero no se supondrá a más de un peralte efectivo del paño del apoyo si las cargas o reacciones comprimen directamente dos caras opuestas de la viga, ni a más de medio peralte en caso contrario.

La resistencia total a cortante se calcula también como la suma de la resistencia del concreto y la del acero de refuerzo. La primera se calcula con la ecuación

$$V_{cR} = \left(3.5 - 2.5\ \frac{M}{Vd}\right) 0.5\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c}$$
$$\le 1.5\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c} \qquad (12.31)$$

$$V_{cR} = \left(3.5 - 2.5\ \frac{M}{Vd}\right) 0.16\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c}$$
$$\le 0.48\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c} \qquad (12.31\ SI)$$

Los valores de M y V son los de la sección crítica y el término 3.5 – 2.5 M/Vd no será menor que uno. Si las cargas y reacciones no comprimen directamente las caras superior e inferior de la viga, este último término se tomará igual a uno.

Si la fuerza cortante de diseño, V_u, es mayor que V_{cR}, la diferencia se toma con refuerzo que constará de estribos cerrados verticales y barras horizontales, cuyas contribuciones se determinarán como sigue, en vigas donde las cargas y reacciones comprimen directamente caras opuestas.

La contribución del refuerzo vertical se supondrá igual a

$$0.083\ F_R\ f_{yv}\ d\ A_v\ (1 + L/d)/s \qquad (12.32)$$

donde A_v es el área del acero vertical comprendida en cada distancia, s, y f_{yv}, el esfuerzo de fluencia en dicho acero.

La contribución del refuerzo horizontal se supondrá igual a

$$0.083\ F_R\ f_{yh}\ d\ A_v\ (11 - L/d)/s_h \quad (12.33)$$

El refuerzo que se determine en la sección crítica se usará en todo el claro. Tanto el refuerzo vertical como el horizontal deben cumplir con los requisitos para refuerzo por cambios volumétricos que marcan las NTC-04.

La fuerza cortante V_u en vigas diafragma no deberá exceder, en ningún caso, de

$$2\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c}$$

$$0.64\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c}\ \text{en sistema SI}$$

Las NTC incluyen también disposiciones para el diseño de los apoyos, que, como se ha mencionado, constituyen un aspecto crítico del diseño. Se recomienda aumentar en 10 por ciento el valor de las reacciones calculadas como si la viga no fuese de gran peralte, y colocar en las zonas próximas a los apoyos, barras complementarias verticales y horizontales del mismo diámetro que las del refuerzo usado para fuerza cortante y de modo que su separación en esas zonas sea la mitad que en el resto de la viga. En la figura 12.23 se ilustra la forma de colocar este refuerzo.

En el ejemplo 12.4 se encuentra la resistencia a flexión y a fuerza cortante de una viga de gran peralte usando las NTC-O4 y trabajando con sistema SI. En este caso se conocen las dimensiones de la viga, su acero de refuerzo y las resistencias del acero y del concreto. Se supone que la viga tiene una carga distribuida uniformemente.

El momento flexionante resistente se calculó con la ecuación 12.28. El brazo del par, z, se determinó con la ecuación 12.29, ya que la relación L/h resultó mayor que uno. Se verificó que la relación de refuerzo, p, fuese menor que 0.008, ya que sólo en este caso es aplicable la ecuación 12.28. En el cálculo de ρ se supuso un peralte efectivo de 2300 mm, o sea que el centroide del acero de tensión estaba a 200 mm arriba del lecho inferior de la viga.

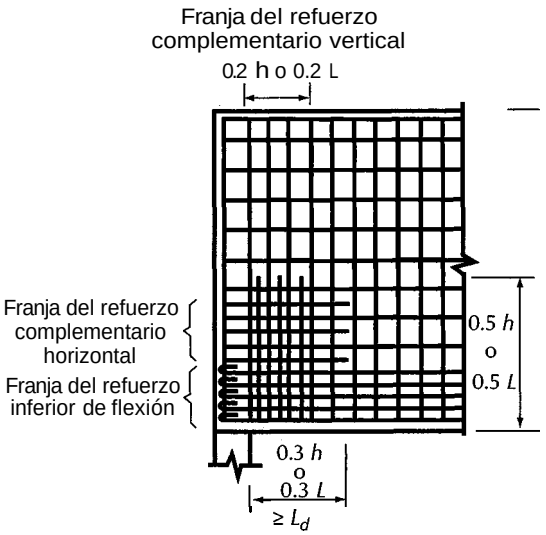


Figura 12.23 Colocación del refuerzo complementario en una zona de apoyo directo.

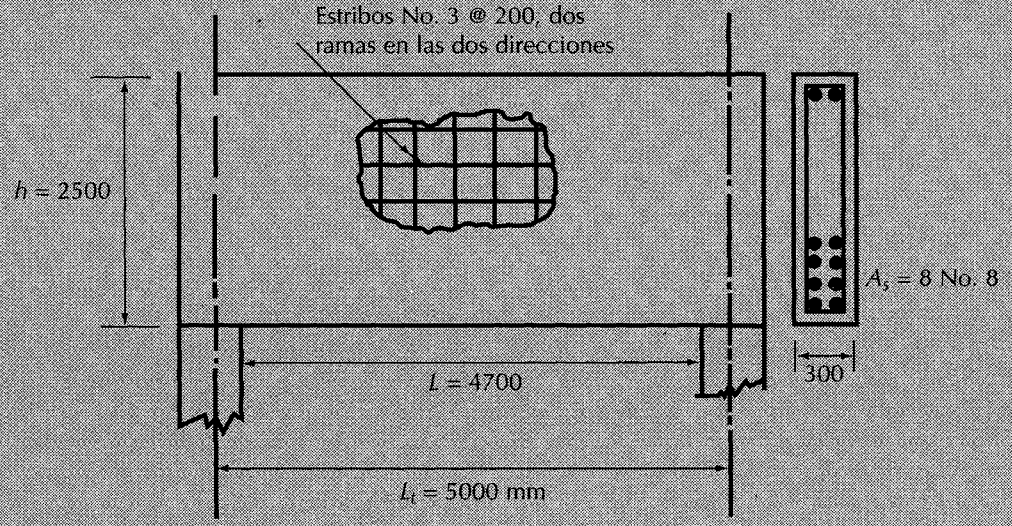
Para determinar la resistencia a fuerza cortante, se estableció primero la posición de la sección crítica, que queda localizada a una distancia de 0.15 L del paño interior del apoyo. La distancia al centro del apoyo resultó entonces de 855 mm. Después se calcularon los valores de la fuerza cortante y del momento flexionante en la sección crítica, y a partir de estos valores se determinó la relación M/Vd, que se requiere para aplicar la ecuación 12.31 SI.

Finalmente se calculó la fuerza cortante resistente como la suma de las contribuciones del concreto (ecuación 12.31 SI), del acero de refuerzo vertical (ecuación 12.32) y del acero de refuerzo horizontal (ecuación 12.33). Obsérvese que estas dos últimas ecuaciones son adimensionales. La fuerza cortante calculada de esta manera resultó menor que la máxima admisible.

EJEMPLO 12.4 ***Resistencia de una viga de gran peralte usando las NTC-04, sistema SI.***

DATOS

Calcular la resistencia a flexión y a cortante de la siguiente viga:



$f'_c = 25$ MPa

$f^*_c = 0.8\, f'_c = 20$ MPa

$f_y = 400$ MPa

RESISTENCIA A FLEXIÓN

$$M_R = F_R\, A_s\, f_y\, z \qquad \text{(ecuación 12.28)}$$

$$\frac{L}{h} = \frac{4700}{2500} = 1.88 > 1.0$$

$$z = \left(0.4 + 0.2\frac{L}{h}\right) h \qquad \text{(ecuación 12.29)}$$

$$z = 0.776 \times 2500 = 1940 \text{ mm}$$

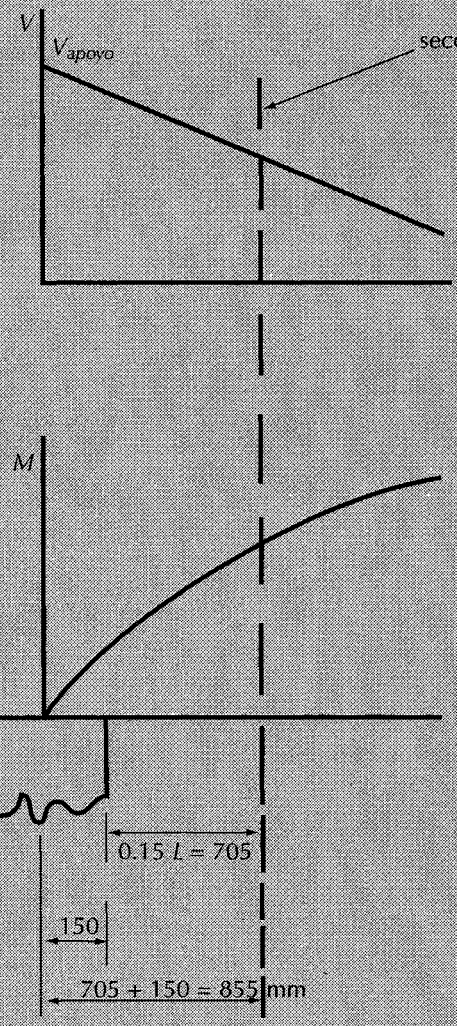
$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{4000}{300 \times 2300} = 0.00058 < 0.008$$

$$M_R = 0.9 \times 4000 \times 400 \times 1940 = 2794 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

EJEMPLO 12.4 (*continuación*)

RESISTENCIA A CORTANTE

Fuerza cortante y momento flexionanate en la sección crítica:



$$V_{apoyo} = \frac{wL_t}{2} = 2500\ w$$

$$V_{sec.crít.} = 2500\ w - 855\ w = 1645\ w$$

$$M_{sec.crít.} = V_{apoyo} \times 855 - \frac{w \times 855^2}{2}$$

$$M_{sec.crít.} = 1{,}771{,}987\ w$$

$$\frac{M}{Vd_{sec.crít.}} = \frac{1{,}771{,}987\ w}{1645\ w \times 2300}$$

$$= 0.468$$

Contribución del concreto:

$$V_{cR} = \left(3.5 - 2.5\ \frac{M}{Vd}\right) 0.16\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c} \leq 0.48\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c} \qquad \text{(ecuación 12.31 SI)}$$

$$V_{cR} = (3.5 - 2.5 \times 0.468)\ 0.16 \times 0.8 \times 300 \times 23000\ \sqrt{20} = 9.2 \times 10^5\ N$$

$$0.48\ F_R\ bd\ \sqrt{f^*_c} = 0.48 \times 0.8 \times 300 \times 2300\ \sqrt{20} = 11.8 \times 10^5\ N$$

$$V_{cR} = 9.2 \times 10^5\ N$$

EJEMPLO 12.4 ***(continuación)***

Contribución del acero vertical:

$$V_{sv} = 0.083\, F_R\, f_{yv}\, d A_v \left(1 + \frac{L}{d}\right) / s \qquad \text{(ecuación 12.32)}$$

$$V_{sv} = 0.83 \times 0.8 \times 400 \times 2300 \times 142 \left(1 + \frac{4700}{2300}\right) / 200$$

$$V_{sv} = 1.32 \times 10^5\ N$$

Contribución del acero horizontal:

$$V_{sh} = 0.083\, F_R\, f_{yh}\, d\, A_v \left(11 - \frac{L}{d}\right) / s_h \qquad \text{(ecuación 12.33)}$$

$$V_{sh} = 0.083 \times 0.8 \times 400 \times 2300 \times 142 \left(11 - \frac{4700}{2300}\right) / 200$$

$$V_{sh} = 3.88 \times 10^5\ N$$

$$V_u = V_{cR} + V_{sv} + V_{sh} = 14.4 \times 10^5\ N$$

$$(V_u)_{máx} = 0.64\, F_R\, bd \sqrt{f'_c} = 15.8 \times 10^5\ N > V_u$$

Referencias

12.1 Kriz, LB., y C.H. Raths. "Connections in Precast Concrete Structures-Strength of Corbels". *Journal* of the PrestressedConcrete Institute. Chicago, febrero 1965.

12.2 Chakrabarti, P. R., D.J. Farahani y S.I. Kashon. "Reinforced and Precompressed Concrete Corbels-An Experimental Study". ACI *Structural Journal*. Detroit, julio-agosto 1989.

12.3 Fattuhi, N. I., y B. R. Hughes. "Ductility of Reinforced Concrete Corbels Containing Either Steel Fibers of Strirrups" ACI Structural *Journal.* Detroit, noviembre-diciembre 1989.

12.4 Franz, G., y H. Niedenhoff. The Reinforcement of Brackets and Short Deep Beams. (Traducción No. 114.) Londres, Cement and Concrete Association. (Traducciónde un artículo de *Beton* und Stahlbetonbau, Vol. 58, No. 5, mayo 1963.)

12.5 Birkeland, P. W., y H. W. Birkeland. "Connections in Precast Concrete Construction". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, marzo 1966.

12.6 Mast, R. F. "Auxiliary Reinforcement in Precast Concrete Connections". *Journal* of the *Structural Division,* ASCE. Nueva York, junio 1968.

12.7 Hofbeck, J. F, Ibrahim y A. N. Mattock. "Shear Transfer in Reinforced Concrete". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit febrero 1969.

12.8 Bass, R. A., R. L. Carrasquillo y J. O. Jirsa. "Shear Transfer Across New and Existing Concrete Interfaces". ACI *Structural Journal*. Detroit, julio-agosto 1989.

12.9 Mattock, A.H. "Shear Transfer in Concrete Having Reinforcement at an Angle to the Shear Plane". En Shear in Reinforced Concrete (SP-42). Detroit, American Concrete Institute, 1974.

12.10 Mattock, A.H., W.K. Li y T. C. Wang. "Shear Transfer in Lightweight Reinforced Concrete". *Journal* of the Prestressed Concrete *Institute*. Chicago, enero-febrero 1976.

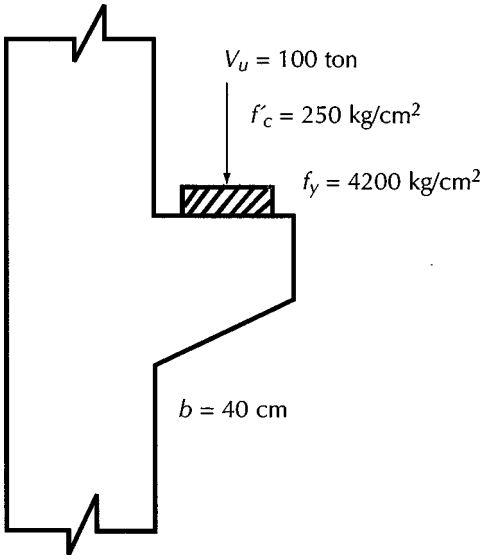
12.11 —."Design of Connections". En PCI Design Handbook. Chicago, Prestressed Concrete Institute, 1978.

12.12 Leonhardt, F, "Poutres Cloisons". *Bulletin d'Information* No. 65. París, Comité Européen de Béton, febrero 1968. (Traducción al español: Revista IMCYC, Núms. 49, 50 y 51, México, D.F., marzo-agosto 1971.)

12.13 De Paiva, H. A. R, y C. P. Siess. "Strength and Behavior of Deep Beams in Shear". Journal of the Structural Division, ASCE. Nueva York, octubre 1965.
12.14 Kong, F-K, P. V. Robins y D. F. Cole. "Web Reinforcement Effects on Deep Beams". Journal of the American Concrete *Institute*. Detroit, diciembre 1970.
12.15 Smith, K. N., y A. S. Vansiotis, "Shear Strength of Deep Beams". Journal of the *American* Concrete Institute. Detroit, mayo-junio 1982.
12.16 Rogowsky, D. M., J. G. MacGregor y S. Y. Ong. "Test of Reinforced Concrete Deep Beams". *Journal* of the *American* Concrete Institute. Detroit, julio-agosto 1986.
12.17 Rogowsky, D. M., y J. G. MacGregor. "Design of Reinforced Concrete Deep Beams". Concrete *International: Design* and *Construction*. Detroit, agosto 1986.
12.18 Mau, S. T., y T. T. Hsu "Formula for the Shear Strength of Deep Beams". ACI Structural Journal. Detroit, septiembre-octubre 1989.
12.19 Schlaich, J, Schafer, K. y Jennewein, M. "Toward a Consistent Design of Structural Concrete". PCI Journal, V. 32, No. 3, mayo-junio 1987.
12.20 Marti, P. "Truss Models in Detailing". Concrete International, diciembre 1985.
12.21 Fanella, D. A., y Rabat, B. G. "Notes on ACI 318-02 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications", Portland Cement Association, Skokie, 2002.
12.22 Wight, J. K., y Parra-Montesinos, G. J. "Strut-and-Tie Model for Deep Beam Design". Concrete International, mayo 2003.
12.23 Uribe, C. M., y Alcocer, S. M. "Comportamientode vigas peraltadas diseñadas con el modelo de puntales y tensores". Centro Nacional de Prevención de Desastres (SEGOB), México, diciembre 2001.

Ejercicios

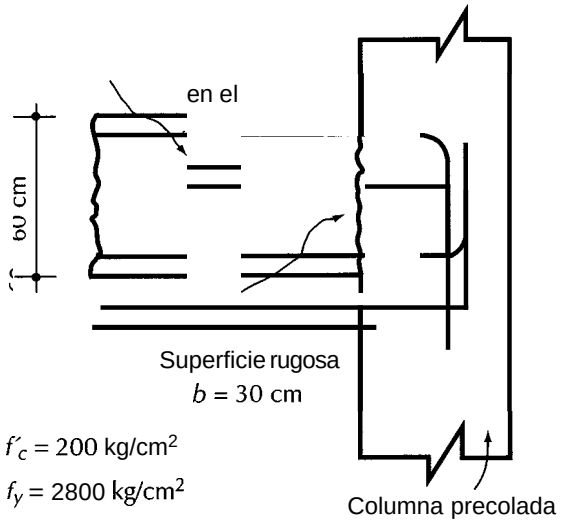
12.6 Diseñar la siguiente ménsula por el método de Kriz y Raths.



12.2 Determinar la resistencia de la ménsula del problema anterior por el método de cortante por fricción.

12.3 Diseñar la ménsula del problema 12.1 suponiendo que, además de la carga vertical, existe una fuerza horizontal de 25 ton. Utilícese el método del Reglamento ACI 318-02.

12.4 Determinar el acero en la unión mostrada en la siguiente figura, suponiendo que la unión debe resistir un momento flexionante de 30 ton-m y una fuerza de 15 ton. Usar el reglamento ACI 318-02.



12.5 Diseñar la viga de gran peralte del ejemplo 12.3, suponiendo que la carga se encuentra aplicada en la parte inferior.

CAPÍTULO 13

Efectos de esbeltez

13.1 **Introducción. /*13.2*** **Comportamiento *y* variables principales. *113.3*** **Métodos de dimensionamiento. /*13.4*** **Cálculo de los efectos de esbeltez. /*13.5*** **Ejemplos.**

13.1 Introducción

Se entiende por efecto de esbeltez la reducción de resistencia de un elemento sujeto a compresión axial o a flexo-compresión, debida a que la longitud del elemento es grande en comparación con las dimensiones de su sección transversal. Para ilustrar este efecto, considérese una columna articulada en sus extremos, sujeta a carga axial y momento flexionante (figura 13.1a). Esta columna es equivalente al sistema mostrado en la figura 13.1b, y tiene el diagrama de momentos flexionantes de la figura 13.1c. Al aplicar la carga P al sistema de la figura 13.1b, éste se deforma, como se muestra en la figura 13.1*d,* y, como consecuencia de esta deformación, aumenta la distancia de la línea de acción de las cargas P al eje de la columna, lo cual equivale a que crezca la excentricidad de la carga en una cantidad y. Por lo tanto, el momento flexionante real en una sección cualquiera de la columna es

$$M = Pe + Py = P(e + y)$$

El momento es máximo, para este ejemplo, a la mitad de la altura, donde alcanza el valor

$$M = P(e + y_{máx})$$

Como consecuencia de los momentos adicionales Py, la resistencia del elemento se reduce con respecto a la resistencia que tendría si sólo se aplicase el momento Pe. Esta reducción de resistencia se conoce como efecto de esbeltez. Éste se presenta cualquiera que sea la longitud del elemento, pero es importante únicamente en elementos

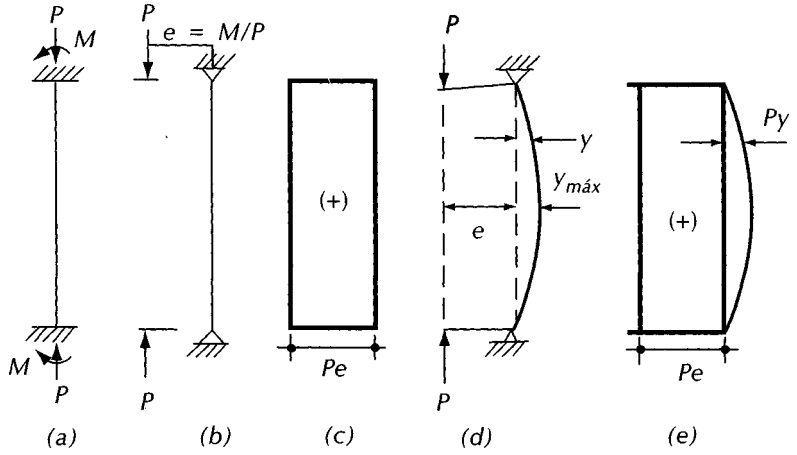


Figura *13.1* Momentos adicionales en una columna por efecto de esbeltez.

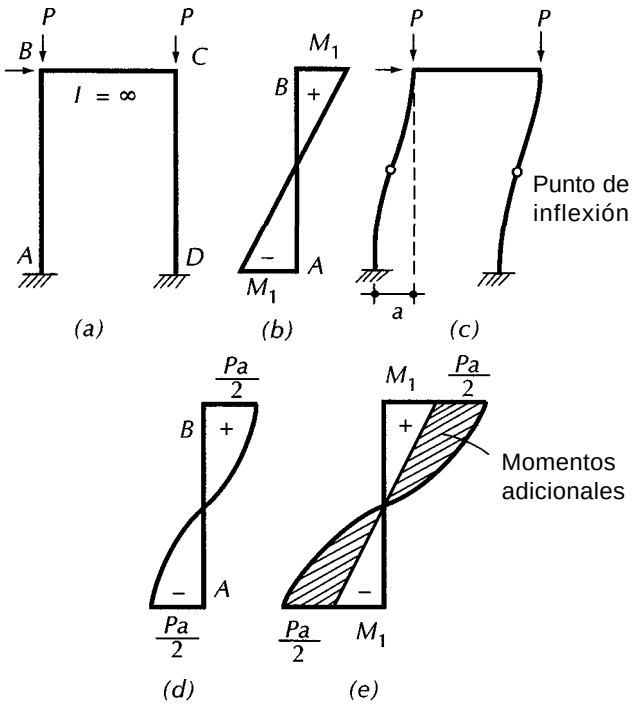


Figura 13.2 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez infinita).

cuya relación longitud-peralte es grande, o sea, en elementos esbeltos. Sólo en estos elementos la magnitud de los momentos adicionales, Py, es significativa en relación con los momentos Pe.

La reducción de resistencia por esbeltez puede deberse también a desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos de la columna, como sucede en marcos no contraventeados sujetos a carga lateral o que presentan asimetría en carga o en geometría. En la figura 13.2*a* se muestra un marco de este tipo. La columna ***A-B*** de este marco tiene el diagrama de momentos de primer orden mostrado en la figura 13.2*b*. (Se entiende por momentos de primer orden los que no consideran las deformaciones de la columna.) Por efecto del desplazamiento lateral relativo entre los extremos de la columna (figura 13.2*c*), se presentan en la columna ***A-B*** los momentos de segundo orden mostrados en la figura 13.2*d*. (Se entiende por momentos de segundo orden, los momentos adicionales debidos a las deformaciones de la columna. El desarrollo de estos momentos suele denominarse efecto PA, ya que el desplazamiento del marco se representa con la letra griega A.) El diagrama de momentos totales es el de la figura 13.2*e*. El caso representado en la figura 13.2 corresponde a un ejemplo hipotético en el que la rigidez de la viga superior es infinita, o sea que la columna está empotrada en sus dos extremos. Cuando la rigidez de la viga es finita, los momentos adicionales son diferentes en los dos extremos de la columna, como se muestra en la figura 13.3. Los momentos adicionales se pueden calcular aplicando la carga P en el punto de inflexión de la columna, y multiplicando dicha carga por el desplazamiento de los extremos con respecto al punto de inflexión. La reducción de resistencia por esbeltez es mayor cuando los extremos de la columna pueden sufrir desplazamiento

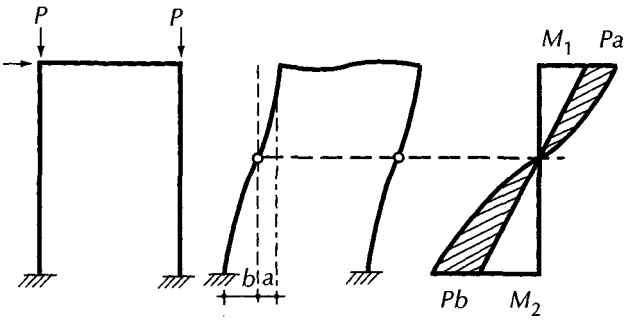


Figura 13.3 Momentos adicionales en una columna por efecto del desplazamiento lateral relativo (viga de rigidez finita).

lateral relativo, que cuando están restringidos contra el mencionado desplazamiento.

En la figura 13.4*b* se ha trazado con una línea llena el diagrama de interacción de una columna corta en la que los efectos de esbeltez son despreciables. Si en esta columna se aumenta la carga progresivamente, manteniendo constante la excentricidad, las combinaciones de P y M quedan representadas por la recta 0-1. La intersección de la recta 0-1 con el diagrama de interacción representa la resistencia de la columna corta. Si en una columna esbelta, como la de la figura 13.4*a,* la carga aumenta progresivamente en la misma forma, las combinaciones de P y M quedan representadas por la curva 0-2. La diferencia en las abscisas de los puntos de las dos líneas correspondientes a un nivel dado de carga, se debe precisamente a los momentos adicionales Py. La resistencia de la columna esbelta está representada por la intersección de la línea 0-2 con el diagrama de interacción. Como puede verse en la figura, es menor que la resistencia de la columna corta.

En la figura 13.4*b* se ha indicado también, con línea de punto y raya, la historia de carga de una columna sumamente esbelta que falla

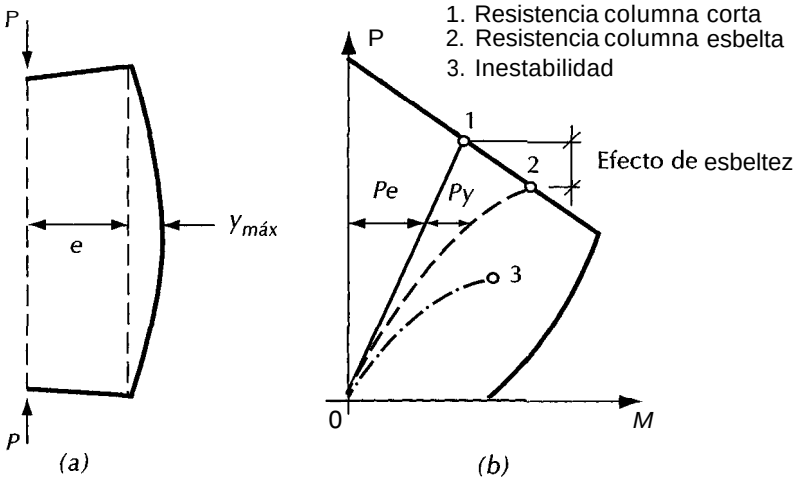
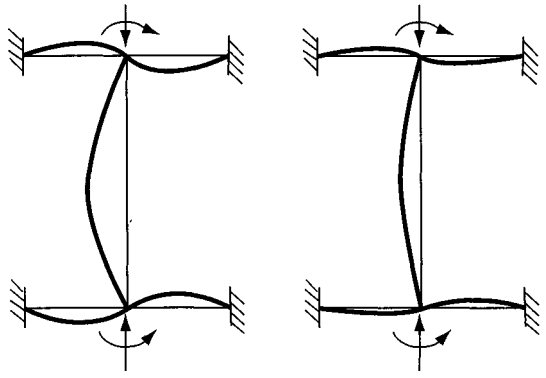


Figura 13.4 Comparación del comportamiento de una columna corta, de una columna esbelta y de una columna que falla por inestabilidad.

por inestabilidad. La característica de este tipo de falla, es que la carga aplicada alcanza su valor máximo antes de que la línea que representa la historia de carga corte al diagrama de interacción. La falla, en este caso, ocurre por pandeo súbito del elemento, mientras que en el caso anterior, la falla ocurre por aplastamiento del concreto, en forma similar a la falla de una columna corta. Debido a que los elementos de concreto reforzado son de sección transversal relativamente grande, es raro que fallen por inestabilidad. De ordinario, se presenta únicamente una reducción de resistencia por efecto de esbeltez. En este capítulo se describen métodos para calcular esta reducción de resistencia.

13.2 Comportamiento y variables principales

El comportamiento de una columna que forma parte de una estructura de concreto reforzado es complejo, debido a que las estructuras generalmente son monolíticas y a que las columnas están restringidas por otros elementos estructurales que influyen en su comportamiento. Se han realizado ensayes de columnas esbeltas que forman parte de marcos de concreto. Sin embargo, la interpretación de su comportamiento requiere un estudio previo del comportamiento de estructuras hiperestáticas y cae fuera del alcance de este texto. Sólo se describirá aquí la influencia de algunas variables sobre la resistencia de columnas esbeltas que forman parte de estructuras.



(a) Vigas flexibles *(b) Vigas rígidas*

Figura 13.5 Efecto de la rigidez flexionante de las vigas que restringen a una columna.

a) Rigidez a flexión de las vigas que restringen a la columna

Mientras mayor sea esta rigidez a flexión, es mayor el grado de empotramiento o restricción de la columna en sus extremos y, por lo tanto, son menores las deflexiones de la columna y los momentos adicionales Py. Este efecto puede verse en la figura *13.5,* en la cual se comparan una columna restringida por vigas flexibles (figura 13.5*a*) y otra restringida por vigas rígidas (figura 13.5*b*).

b) Rigidez a flexión de la columna

La rigidez a flexión de la propia columna tiene influencia sobre la reducción de resistencia por esbeltez, ya que mientras más rígida sea la columna, son menores sus deflexiones y, por lo tanto, el valor de los momentos adicionales Py. La rigidez a flexión de la columna depende principalmente del tamaño de la sección transversal, del módulo de elasticidad del concreto, del porcentaje de refuerzo longitudinal y de la longitud de la columna. El efecto combinado del tamaño de la sección transversal y de la longitud, suele tomarse en cuenta en los métodos de dimensionamiento mediante el parámetro llamado esbeltez de la columna, que se define como la relación entre la longitud y el radio de giro de la sección transversal. A veces, la esbeltez se define también en función de la relación entre la longitud y la dimensión menor de la columna.

c) Relación de excentricidades en los dos extremos de la columna y tipo de curvatura

La relación de excentricidades, o sea, la relación entre los momentos en los dos extre-

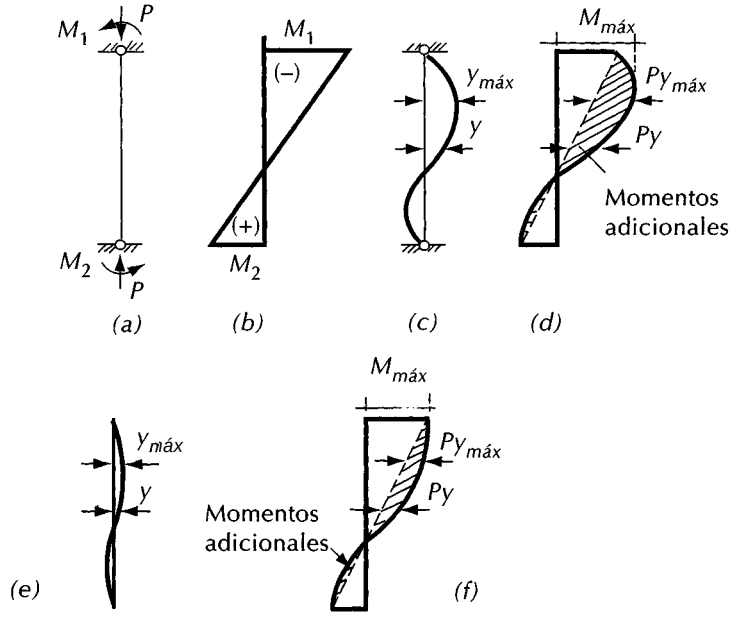


Figura 13.6 Efecto de esbeltez en columnas con doble curvatura.

mos de la columna, influye en la magnitud de las deflexiones y, por lo tanto, en los momentos adicionales por esbeltez. Considérese, por ejemplo, el caso mostrado en la figura 13.6*a,* en el que los momentos de apoyo sobre barra son del mismo signo, y el diagrama de momentos flexionantes de primer orden es el indicado en la figura 13.66. La columna deformada tiene la forma mostrada en la figura 13.6*c,* y el diagrama final de momentos, que se obtiene sumando el diagrama de la figura 13.6*b* con los momentos adicionales Py, es el mostrado en la figura 13.6*d*. Puede verse que, en este caso, el momento máximo de primer orden y el momento máximo adicional, $Py_{máx}$, ocurren en secciones diferentes de la columna. Por consiguiente, el momento máximo total no es la suma de los momentos máximos de primer y segundo orden, sino un valor menor. Para que haya reducción de resistencia por esbeltez en columnas de este tipo, es necesario que los momentos adicionales sean lo suficientemente grandes para desplazar la sección de momento máximo, como se muestra en la figura 13.6*d*. Puede suceder que la columna no sea lo suficientemente esbelta para que ocurra este desplazamiento. En este caso no habrá reducción de resistencia, como se muestra en las figuras 13.6*e* y 13.6*f*. Cuando hay reducción de resistencia, ésta es relativamente pequeña, ya que el momento máximo no difiere mucho del momento aplicado en el extremo.

Considérese ahora el caso en que los momentos de apoyo sobre barra son iguales y de signo contrario (figura 13.7*a*). Aquí, el momento flexionante de primer orden es constante a lo largo de la columna (figura 13.7*b*), y la columna se deforma con curvatura simple (figura 13.7*c*). El momento máximo es igual a la suma del momento constante y el momento adicional máximo $Py_{máx}$, que ocurre a la mitad de la altura (figura 13.7*d*). En estas columnas siempre hay reducción de resistencia por esbeltez, cualquiera que sea su longitud, y esta reducción es mayor que en el caso de la figura 13.6, puesto que el

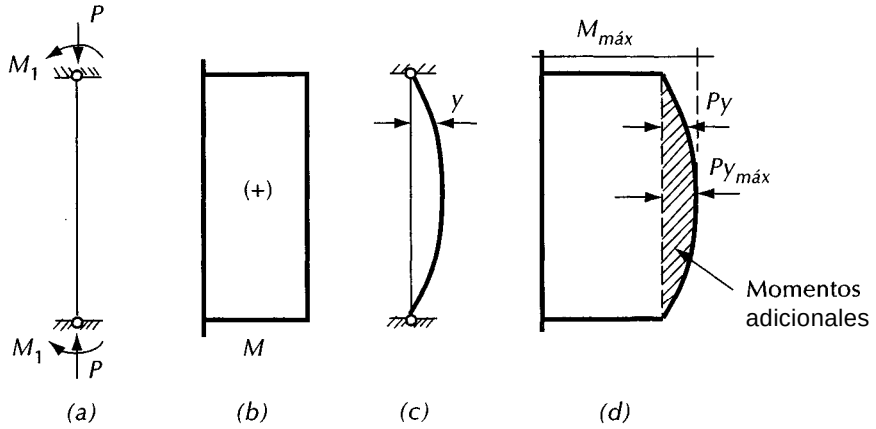


Figura 13.7 Efecto de esbeltez en columnas con curvatura simple.

momento máximo total es la suma de los dos momentos máximos.

d) Desplazamiento lateral relativo entre los dos extremos *de* la columna

Se ha mencionado que las columnas pueden formar parte de marcos que no tengan posibilidad de sufrir deformaciones laterales, por estar contraventeados o unidos a otras estructuras muy rígidas, o de marcos cuya resistencia a cargas laterales dependa exclusivamente de la resistencia a flexión de sus miembros, y que, por lo tanto, puedan sufrir deformaciones laterales. También se ha mencionado que cuando los marcos pueden desplazarse lateralmente, los momentos adicionales son mayores que cuando los marcos no pueden hacerlo. Esto se debe a que, en el primer caso, los momentos adicionales máximos se presentan generalmente donde son máximos los momentos de primer orden, como puede verse en las figuras 13.2 y 13.3.

La magnitud del desplazamiento lateral relativo depende de la rigidez a flexión de las columnas y de las vigas de los marcos. Si la rigidez a flexión de las vigas es pequeña, en relación con la rigidez a flexión de las columnas, la rotación de los extremos de las columnas es grande y aumenta, por lo tanto, el desplazamiento lateral relativo. El desplazamiento lateral también depende del tipo de carga que actúa sobre el marco. Por lo general, es mayor el desplazamiento cuando el marco está sujeto a cargas laterales que cuando está sujeto únicamente a cargas verticales.

Para valuar el desplazamiento lateral debe considerarse la estructura en conjunto y no solamente un marco por separado [13.11]. Por ejemplo, considérese la estructura de la figura 13.8, en la que existen muros rígidos en los ejes A y D. Si actúa la fuerza horizontal *F* sobre dicha estructura, los marcos B y C no sufrirán desplazamientos laterales importantes, pese a no estar contraventeados, ya que lo

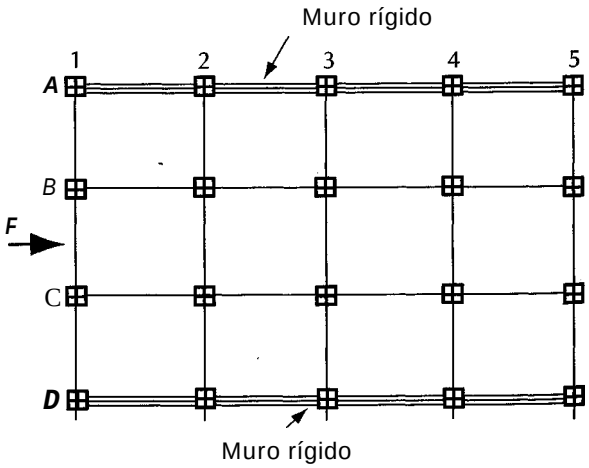


Figura 13.8 Estructura con muros rígidos.

impiden los marcos A y D que son muy rígidos por la presencia de los muros. Se supone en este ejemplo que existe una losa de piso lo suficientemente rígida para obligar a que todos los marcos se deformen en conjunto. El análisis detallado de estructuras para valuar los desplazamientos laterales está fuera del alcance de este texto.*

e) Duración de la carga

Cuando la carga actúa por un periodo prolongado de tiempo, las deflexiones aumentan por efecto de la contracción y el flujo plástico del concreto. Por lo tanto, aumentan también los momentos adicionales y la reducción de resistencia por efecto de esbeltez. La influencia de la duración de la carga es más importante mientras mayores sean las deflexiones adicionales.

13.3 Métodos de dimensionamiento

Del análisis anterior sobre la influencia de las distintas variables en la reducción de resistencia por esbeltez, puede deducirse que la solución rigurosa del problema consiste en calcular las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. La suma de estos momentos y de los de primer orden es igual a los momentos totales de diseño. Sin embargo, el cálculo de los momentos de segundo orden, que se conoce con el nombre de análisis estructural de segundo orden, resulta demasiado laborioso para fines de dimensionamiento de estructuras comunes.

Algunas de las razones que complican este análisis son las siguientes. Es difícil evaluar con precisión las deflexiones de los elementos de la estructura en todas las etapas de carga, ya que deben tomarse en cuenta el comportamiento inelástico del concreto reforzado y los efectos del agrietamiento, contracción y flujo plástico. Las rigideces relativas de los elementos varían con la etapa de carga, ya que algunos alcanzan su momento de fluencia antes que otros y, por lo tanto, pierden su rigidez más rápidamente. El análisis debe hacerse por aproximaciones sucesivas, ya que los momentos adicionales producen deflexiones adicionales, las que a su vez incrementan nuevamente los momentos. Por ejemplo, considérese que en la figura 13.9, la línea 1 representa la columna deformada por efecto de los momentos de primer orden; los momentos adicionales, Py_1, incrementan las deformaciones, y la columna deformada queda representada ahora por la línea 2; pero esto incrementa los momentos adicionales, que ahora tienen el valor Py_2; las deflexiones también vuelven a aumentar al aumentar los momentos adicionales, y así sucesivamente. El procedimiento de aproximaciones sucesivas se realiza calculando los momentos y las deformaciones de la manera descrita, hasta que los incrementos entre dos etapas sucesivas sean muy pequeños en comparación con los momentos totales.

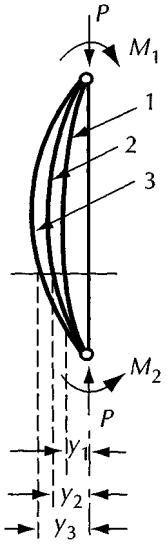


Figura 13.9 Incrementos sucesivos de deformaciones debidos a momentos de segundo orden.

* El lector interesado puede consultar la siguiente referencia: E. Bazán y R. Meli. Diseño *sísmico* de edificios. Editorial Limusa, México, 1999.

Puede suceder que el procedimiento no converja y entonces la estructura sea inestable.

Las consideraciones anteriores indican que un análisis de segundo orden sólo puede hacerse en forma expedita con programas para computadora bastante elaborados. Por lo tanto, no suele usarse este procedimiento excepto en estructuras importantes en las que existan reducciones fuertes de resistencia por esbeltez. En este texto no se presentan métodos de análisis de segundo orden. El lector interesado puede consultar las referencias 13.1, 13.2 y 13.14.

El dimensionamiento de columnas esbeltas en estructuras comunes suele hacerse con métodos simplificados, en los que no es necesario desarrollar análisis de segundo orden. Dichos métodos simplificados pueden reunirse en los tres siguientes grupos.

a) Métodos de amplificación de momentos

Estos métodos consisten en obtener el valor de la carga axial, P, y el momento flexionante, M, en las columnas de una estructura por medio de un análisis de primer orden,

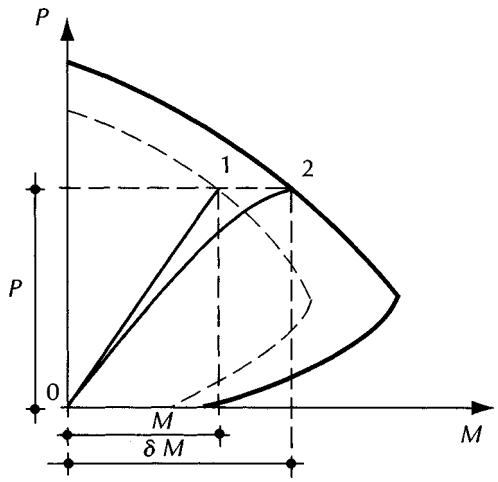


Figura 13.10 Valores de dimensionamiento en los métodos de amplificación de momentos.

y dimensionar las columnas para el mismo valor de P y para un momento amplificado, δM, donde δ es un factor siempre mayor que la unidad. En la figura 13.10 se ilustra este concepto. Si se despreciase el efecto de esbeltez, la columna se dimensionaría para los valores de P y M, y su resistencia sería la correspondiente al punto 1 del diagrama de interacción mostrado con la línea punteada. Los incrementos de carga con un valor constante de la excentricidad estarían representados por puntos sobre la línea recta 0-1. Para tomar en cuenta el efecto de esbeltez, la columna se diseña para los valores P y δM, y su resistencia es la que corresponde al punto 2 del diagrama de interacción mostrado con línea llena. Los incrementos de carga están representados por puntos sobre la línea 0-2, en la cual la excentricidad aumenta con el nivel de carga, puesto que el valor de δ depende, en estos métodos, del valor de la carga de P.

Un ejemplo de estos métodos de amplificación de momentos es el presentado en el Reglamento ACI 318-02 y en las NTC-O4 del Reglamento del Distrito Federal.

b) Métodos del momento complementario

En estos métodos se calculan los valores P y M mediante un análisis de primer orden, y a partir de estos valores se calcula la excentricidad e = M/P que tendría la columna si no hubiera efectos de esbeltez. A esta excentricidad, e, se agrega una excentricidad adicional, e_1, que es función de las principales variables que intervienen en la reducción de resistencia por esbeltez. Al aumentar la excentricidad, el dimensionamiento de la columna se hace para un momento total que es igual al momento de primer orden más un momento complementario que resulta de multiplicar la carga P por la excentricidad adicional e_1. El valor de la carga P no se modifica.

En la figura 13.11 se muestra este concepto de dimensionamiento. El punto 1 del

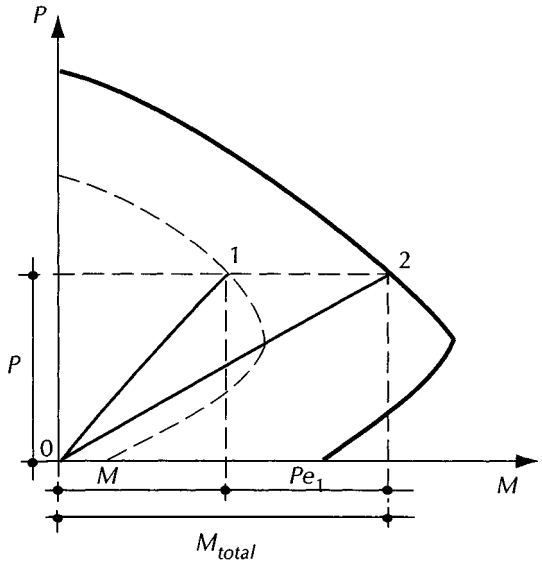


Figura 13.11 Valores de dimensionamiento en los métodos del momento complementario.

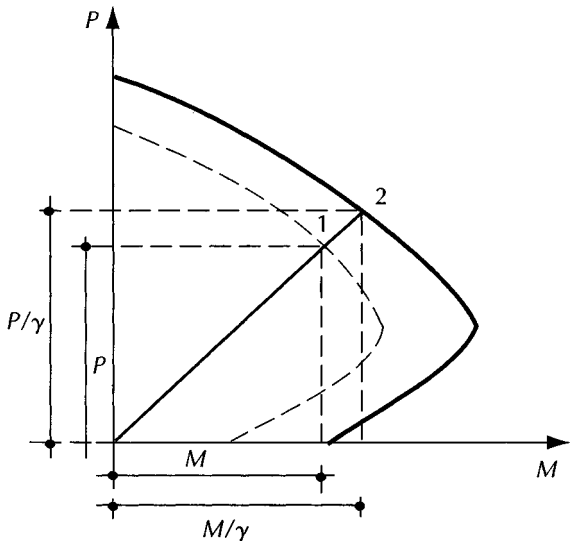


Figura 13.12 Valores de dimensionamiento en los métodos del factor de reducción.

diagrama de interacción trazado con línea punteada corresponde a los valores de P y M con los que hay que diseñar la columna sin considerar el efecto de esbeltez. El punto 2 del diagrama de interacción trazado con línea llena corresponde a los valores de P y M con los que hay que diseñar la columna esbelta. Puesto que el valor de la excentricidad adicional es independiente del valor de P, la línea 0-2, que representa incrementos de carga de la columna esbelta, es una línea recta, a diferencia de la línea 0-2 de los métodos de amplificación de momentos, que es una línea curva. Sin embargo, los valores de dimensionamiento en ambos métodos, o sea los puntos 2, son similares.

c) Métodos del factor de reducción

En estos métodos se supone que la carga axial y el momento que puede resistir una columna esbelta son iguales a los que puede resistir una columna corta, multiplicados por un factor de reducción y, que siempre es menor que la unidad. Por lo tanto, para fines de dimensionamiento, los valores de P y M obtenidos de un análisis de primer orden se dividen entre el factor *y,* con lo cual se obtienen valores amplificados, para los que se dimensiona la columna.

Este concepto de dimensionamiento se ilustra en la figura 13.12. El punto 1 corresponde a los valores de P y M con los que hay que diseñar la columna corta, y el punto 2, a los de la columna larga.

En este caso no se considera el cambio en la excentricidad causado por las deflexiones adicionales y los momentos de segundo orden. Por lo tanto, en estos métodos es menos precisa la representación del comportamiento de la columna que en los dos métodos anteriores. Por esta razón, actualmente se tiende a abandonar este enfoque del problema. El Reglamento ACI de 1963 presentaba un método basado en factores de reducción, el cual se sustituyó en 1971 por un método de amplificación de momentos.

La exposición detallada de los métodos de cada grupo resultaría demasiado extensa y de poca utilidad. Sólo se representan aquí,

por lo tanto, los métodos del Reglamento ACI 318-02 y de las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal, que son muy similares. En ambos casos, la presentación de este capítulo se limita al cálculo de los momentos amplificados con los cuales se deben dimensionar los elementos. En ambos reglamentos, si se exceden ciertas condiciones, se especifica hacer un análisis de segundo orden.

13.4 Cálculo de los efectos de esbeltez

13.4.1 Método del Reglamento ACI 318-02

a) Fundamentos del método

Es un método de amplificación de momentos basado en el análisis elástico de elementos esbeltos sujetos a carga axial y flexión, los cuales se denominan frecuentemente "vigas-columna". El análisis riguroso de estos elementos se puede efectuar aplicando una ecuación diferencial de segundo orden o un procedimiento numérico de aproximaciones sucesivas. Sin embargo, el análisis simplificado indica que el momento máximo en una viga-columna que se deforma en curvatura simple puede calcularse aproximadamente con la ecuación

$$M_{máx} = M_o + \frac{Pa_o}{1 - \left(P / P_c\right)} \qquad (13.1)$$

donde M_o y a_o son el momento y la deflexión máxima de primer orden, respectivamente, P es la carga axial, y P_c es la carga crítica de Euler.*

En el caso de vigas-columna que se deforman en curvatura simple, y que tienen momentos iguales en ambos extremos, la ecuación 13.1 puede aproximarse por la ecuación

$$M_{máx} = \frac{M_o}{1 - \left(P / P_c\right)} \qquad (13.2)$$

y para otros casos, por la ecuación

$$M_{máx} = \frac{C_m M_o}{1 - \left(P / P_c\right)} \qquad (13.3)$$

donde C_m es un factor que hace equivalente el diagrama de momentos flexionantes del elemento, al diagrama de un elemento con momentos iguales en ambos extremos. La ecuación 13.3 puede expresarse en la forma

$$M_{máx} = \delta M_o \qquad (13.4)$$

donde

$$\delta = \frac{C_m}{1 - (P / P_c)} \qquad (13.5)$$

El término δ de la ecuación 13.4 es el factor de amplificación de momentos mencionado en la sección 13.3. Ahora bien, en la sección 13.1 se explicó que los efectos de esbeltez son cualitativamente diferentes en marcos sin desplazamiento lateral, como en la figura 13.1, y en marcos con este desplazamiento, como en la figura 13.3. Análisis teóricos más elaborados y ensayes en marcos de concreto reforzado confirman este diferente comportamiento e indican la conveniencia de tratar por separado ambos tipos de marcos.

Es importante tomar en cuenta que cuando la relación de esbeltez, $k\ell_u/r$, definida más adelante, excede de 100, el Reglamento ACI no permite usar este método simplificado de amplificación de momentos, y requiere efectuar un análisis de segundo orden.

---

* Para un tratamiento del problema de pandeo, que incluya la definición de carga crítica de Euler, consúltese algún texto especializado, por ejemplo: S.P. Timoshenko y J.M. Gere, Theory of *Elastic* Stability. McGraw-Hill, 2a. ed., 1961, Nueva York.

b) Marcos sin desplazamiento o con desplazamiento lateral

Ya que los factores de amplificación de momentos son diferentes para ambos casos, se debe determinar en primer término a qué tipo pertenece el marco analizado. En algunas ocasiones, esto puede hacerse por simple inspección de la estructura; si tiene diagonales de contraventeo robustas o muros de cortante rígidos, puede suponerse que el marco no tendrá desplazamientos laterales importantes que obliguen a tomar en cuenta los efectos PA y se trata como un marco sin desplazamiento lateral.

Cuando no sea posible hacerlo por simple inspección, el Reglamento ACI especifica dos métodos para determinar el tipo de marco. El primero consiste en hacer un análisis de segundo orden y considerar que el marco no tiene desplazamientos laterales significativos si los momentos flexionantes producidos por los efectos de segundo orden no exceden en más de 5 por ciento a los momentos de primer orden. Éste es un método complicado, ya que es necesario hacer el análisis de segundo orden.

El segundo método consiste en calcular un parámetro llamado índice de estabilidad, Q, definido por la ecuación[1]

$$Q = \frac{\Sigma P_u \Delta_o}{V_u \ell_c} \qquad (13.6)$$

donde

ΣP_u = suma de todas las cargas verticales por arriba del entrepiso[2] cuyas columnas se revisan por esbeltez.

Δ_o = deflexión lateral entre el piso superior y el piso inferior del entrepiso en consideración, producida por los momentos de primer orden.

V_u = fuerza cortante horizontal en el entrepiso considerado, o sea, la suma de las fuerzas horizontales que actúan en todos los pisos situados por arriba del entrepiso.

ℓ_c = altura del entrepiso medida centro a centro de los pisos superior e inferior.

Si el índice de estabilidad es menor que 0.04 puede considerarse que los momentos debidos al efecto PA no exceden del 5 por ciento de los momentos de primer orden y que por lo tanto los desplazamientos laterales no son significativos. Para una mejor comprensión de los términos usados en el cálculo del índice de estabilidad, se recomienda consultar la referencia ya mencionada de Bazán y Meli, o algún texto de análisis estructural o de ingeniería sísmica.

c) Longitud efectiva de pandeo y relación de esbeltez

Estos dos conceptos intervienen en el cálculo de la carga de pandeo estudiada en los cursos de Mecánica de Materiales y también en los métodos del Reglamento ACI y de las NTC para calcular los efectos de esbeltez en elementos de concreto reforzado. Se repasan aquí brevemente, pero también se recomienda consultar algún texto de mecánica de materiales.[3]

La longitud efectiva de pandeo, $k\ell_u$, es igual a la longitud real de la columna cuando ésta tiene sus dos extremos articulados y no hay posibilidad de desplazamiento lateral relativo entre dichos extremos. Sin embargo, es diferente para otras condiciones de

[1] Se ha respetado la notación del Reglamento ACI que usa la letra Q para el índice de estabilidad. Sin embargo no debe confundirse con el parámetro Q que se usa en el Reglamento del Distrito Federal para denotar al factor de comportamiento sísmico.

[2] Se denomina piso al nivel en que se tienen vigas y losas, y entrepiso, al espacio entre dos pisos consecutivos.

[3] Véase, por ejemplo, Beer y Johnston, Mecánica *de* Materiales, McGraw-Hill Latinoamericana, Bogotá, 1982, pp 526-534.

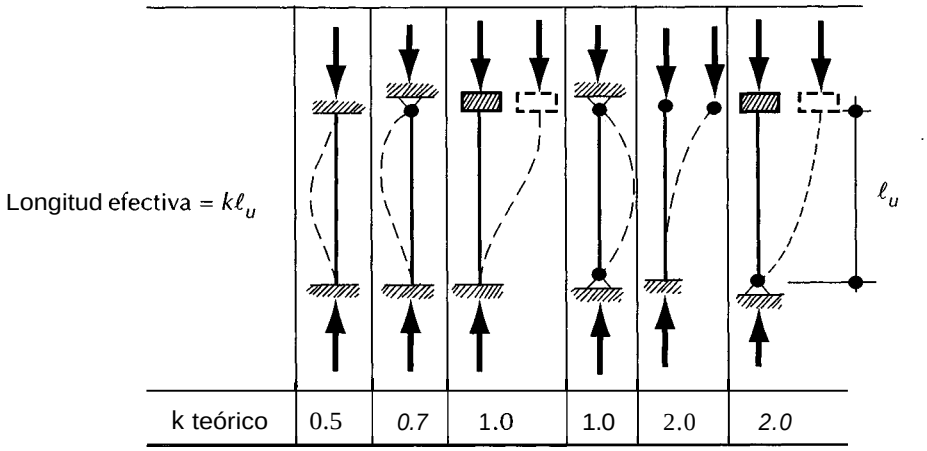


Figura 13.13 Longitud efectiva de pandeo para diferentes condiciones de apoyo.

apoyo y cuando hay posibilidad de desplazamiento lateral relativo.

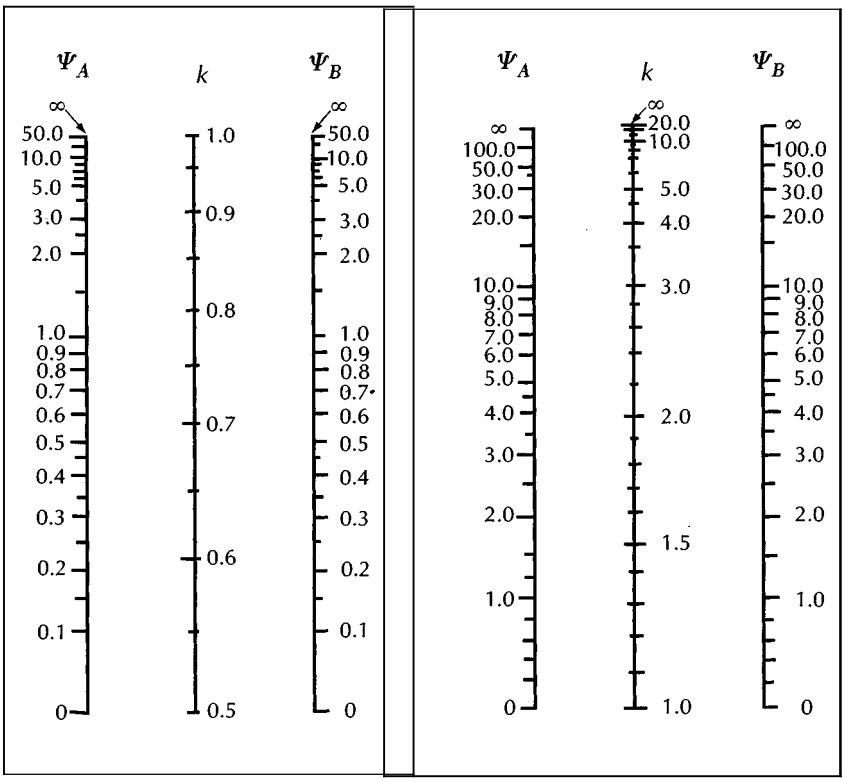
En la figura 13.13 se muestran las longitudes efectivas de pandeo de columnas con condiciones ideales de restricción (perfectamente articuladas o perfectamente empotradas). En estructuras de concreto reforzado, las columnas se encuentran restringidas parcialmente por los sistemas de piso, sin que existan articulaciones o empotramientos perfectos. El grado de restricción depende de la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso, la cual puede definirse en la siguiente forma

$$\Psi = \frac{\Sigma K_{col}}{\Sigma K_{piso}} \qquad (13.7)$$

En esta ecuación, K es la rigidez EI/ℓ; ΣK_{col} se refiere a las columnas que concurren en un nudo en la estructura; ΣK_{piso} se refiere a los elementos que forman el sistema de piso y que están contenidos en el plano del marco estructural que se analiza; o sea, que no se incluyen en la suma las rigideces de las vigas perpendiculares al marco.

El cálculo de la longitud efectiva de pandeo en función del grado de restricción, Ψ, puede hacerse utilizando los nomogramas de la figura 13.14, en los que Ψ_A y Ψ_B son los valores de Ψ en los extremos A y B de la columna. Para valores dados de Ψ_A y Ψ_B, las longitudes efectivas son mayores para columnas de marcos con posibilidad de desplazamiento lateral. Esto refleja el hecho de que los momentos de segundo orden son mayores en este tipo de marcos, como ya se ha señalado anteriormente. La longitud efectiva de las columnas de estos marcos tiende a infinito cuando la rigidez del sistema de piso tiende a cero, o sea, cuando las columnas están articuladas. En este caso se tiene una columna inestable. En cambio, en columnas sin posibilidad de desplazamiento lateral, la longitud efectiva, $k\ell_u$, nunca es mayor que la longitud real, ℓ_u. Los nomogramas de la figura 13.14 se desarrollaron para columnas de comportamiento lineal, pero pueden utilizarse en forma aproximada para columnas de concreto reforzado.

La esbeltez de una columna se determina en forma cuantitativa con el parámetro llamado relación de esbeltez, que es el cociente de la longitud efectiva de pandeo entre el radio de giro de la sección transversal de la columna. Por lo tanto, se define como $k\ell_u/r$. El radio de giro, r, puede calcularse en forma precisa como $\sqrt{I/A}$. El Reglamento ACI



(a) Marcos sin desplazamiento lateral (b) Marcos con desplazamiento lateral

Figura 13.14 Factores para obtener las longitudes efectivas de pandeo.

permite calcularlo en forma aproximada como 0.30 veces el lado menor para columnas rectangulares, o 0.25 veces el diámetro para columnas circulares. La relación de esbeltez se usa para calcular los factores de amplificación de momentos, para establecer los límites a partir de los cuales es necesario revisar los efectos de esbeltez y para determinar cuándo pueden usarse los métodos simplificados y cuándo hay que usar un análisis de segundo orden.

d) Valores de EI

El Reglamento ACI especifica distintos valores del término *EI* para hacer el análisis de la estructura y calcular las deflexiones laterales, y para calcular los factores de amplificación de momentos. En el primer caso los valores de *EI* para columnas son mayores que en el segundo caso. Esta diferencia se justifica en términos probabilistas y se explica con detalle en la referencia 13.13. Los valores de *EI* especificados son los siguientes:

Para fines de análisis estructural y cálculo de deflexiones,
Módulo de elasticidad E igual al módulo de elasticidad del concreto E_c.
Valores del momento de inercia I,
En vigas: 0.35 I_g
En columnas: 0.70 I_g
En muros no agrietados: 0.70 I_g
En muros agrietados: 0.35 I_g
En losas y placas planas: 0.25 I_g

En todos las casos, I_g es el momento de inercia de la sección gruesa. Estos valores de

EI se usan también para calcular las rigideces K en la ecuación 13.7

Para fines de cálculo de los factores de amplificación de momentos, para columnas exclusivamente,

$$EI = \frac{\left(0.2E_c I_g + E_s I_{se}\right)}{1+\beta_d} \qquad (13.8)$$

$$EI = \frac{0.40E_c I_g}{1+\beta_d} \qquad (13.9)$$

En estas ecuaciones, I_{se} es el momento de inercia del acero de refuerzo con respecto al eje centroidal de la columna, y β_d es un factor que toma en cuenta el efecto de las deformaciones diferidas; para marcos sin desplazamiento lateral, se define como la relación entre la carga última axial máxima permanente y la carga última axial máxima asociada a la misma combinación de cargas; para marcos con desplazamiento lateral, se define como la relación entre la fuerza cortante última de entrepiso máxima permanente y la fuerza cortante última de entrepiso máxima; cuando las fuerzas cortantes de entrepiso son producidas por sismo, β_d vale cero, ya que no hay fuerzas horizontales permanentes.

e) Marcos sin desplazamiento lateral

En este tipo de marcos se puede obviar la revisión por efectos de esbeltez si se cumple la condición:

$$\frac{k\ell_u}{r} \le \left[34-12\left(M_1/M_2\right)\right] \le 40 \qquad (13.10)$$

donde M_1 es el menor de los momentos flexionantes en los extremos de la columna, positivo si la columna se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en doble curvatura; y M_2 es el mayor de los momentos flexionantes en los extremos de la columna, siempre positivo. Si se cumple la condición expresada por la ecuación 13.10, los momentos amplificados no exceden en más de 5 por ciento a los obtenidos en un análisis de primer orden [13.13].

Si no se cumple la condición anterior, las columnas del marco deberán diseñarse para la carga axial P_u obtenida de un análisis de primer orden y un momento amplificado

$$M_c = \delta_{ns} M_2 \qquad (13.11)$$

donde

$$\delta_{ns} = \frac{C_m}{1-\dfrac{P_u}{0.75P_c}} \ge 1.0 \qquad (13.12)$$

El término P_c es la carga crítica de Euler que se calcula con la ecuación

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\left(k\ell_u\right)^2} \qquad (13.13)$$

El valor de *EI* en esta ecuación se debe calcular con las ecuaciones 13.8 o 13.9.

Para miembros sin cargas transversales entre sus extremos, el término C_m se calcula con la ecuación

$$C_m = 0.6 + 0.4\,\frac{M_1}{M_2} \ge 0.4 \qquad (13.14)$$

De acuerdo con las definiciones dadas para M_1 y M_2, el cociente M_1/M_2 resulta positivo si la columna se flexiona en curvatura simple y negativo si se flexiona en curvatura doble. La amplificación es mayor entonces en el primer caso, lo que coincide con lo explicado en relación con las figuras 13.6 y 13.7. Cuando hay cargas transversales entre los extremos de las columnas, C_m debe tomarse igual a 1.0.

f) Marcos con desplazamiento lateral

El Reglamento ACI 318-02 permite despreciar los efectos de esbeltez en estos marcos

si la relación de esbeltez $k\ell_u/r$ es menor que 22. Si no se cumple esta condición, los momentos flexionantes en los extremos de las columnas se deben calcular con las siguientes expresiones:

$$M_1 = M_{1ns} + \delta_s M_{1s} \qquad (13.15)$$

$$M_2 = M_{2ns} + \delta_s M_{2s} \qquad (13.16)$$

En la ecuación 13.15, M_{1ns} es el momento en el extremo en que actúa M_1 debido a las cargas que no producen desplazamiento lateral significativo, calculado con un análisis de primer orden. El término δ_s es el factor de amplificación para marcos con desplazamiento lateral. Y M_{1s} es el momento en el extremo en que actúa M_1 debido a las cargas que producen desplazamiento lateral significativo, calculado con un análisis de primer orden. En la ecuación 13.16 se aplican las mismas definiciones para el extremo en que actúa M_2. Se puede ver que sólo se amplifican los momentos causados por las cargas que producen desplazamiento lateral significativo, porque estos momentos no actúan en las mismas secciones que aquellos debidos a cargas que no lo producen, según se explicó en la sección 13.1.

El factor de amplificación δ_s se calcula con la siguiente ecuación:

$$\delta_s = \frac{1}{1-Q} \geq 1 \qquad (13.17)$$

El término Q es el índice de estabilidad definido en la ecuación 13.6. La ecuación 13.17 es válida siempre que δ_s no exceda de 1.5. Si se excede este valor, debe hacerse un análisis de segundo orden, o bien, calcular δ_s con la ecuación que se presenta a continuación:

$$\delta_s = \frac{1}{1-\dfrac{\Sigma P_u}{0.75\Sigma P_c}} \geq 1 \qquad (13.18)$$

ΣP_u ha sido definido en la ecuación 13.6 y ΣP_c es la suma de las cargas críticas de Euler de todas las columnas del entrepiso en consideración.

En las ecuaciones 13.15 y 13.16 se supone que los momentos máximos se presentan en los extremos de las columnas, como se muestra esquemáticamente en las figuras 13.2 y 13.3. Esto ocurre en la mayoría de los casos. Pero en columnas muy esbeltas, el momento máximo puede presentarse entre los extremos. Para tomar en cuenta esta posibilidad, el Reglamento **ACI** especifica que si

$$\frac{\ell_u}{r} \geq \frac{35}{\sqrt{\dfrac{P_u}{f'_c A_g}}} \qquad (13.19)$$

que corresponde a columnas muy esbeltas, el momento amplificado se calcule con la ecuación 13.11, pero calculando M_1 y M_2 con las ecuaciones 13.15 y 13.16.

13.4.2 Método de las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal

El método es semejante al del Reglamento **ACI. A** continuación se mencionan las diferencias más importantes.

Para determinar si un marco tiene desplazamientos laterales significativos, las NTC presentan dos métodos. El primero indica que si la columna analizada forma parte de un entrepiso donde la rigidez lateral de contravientos, muros u otros elementos que den restricción lateral no es menor que el 85 por ciento de la rigidez total de entrepiso, pueden despreciarse los desplazamientos laterales. En este caso debe revisarse la rigidez de cada diafragma horizontal a los que llega la columna. El segundo método especifica que también pueden despreciarse los desplazamientos laterales si se cumple la siguiente condición:

$$\frac{Q\Delta}{h} \leq 0.08\,\frac{V}{W_u} \qquad (13.20)$$

donde

- Q = factor de comportamiento sísmico que depende del tipo de estructura, y puede tener los valores 1, 2, 3 o 4; es diferente al parámetro denominado también con la letra Q que aparece en el Reglamento del ACI y en la ecuación 13.6 de este capítulo;
- V = fuerza cortante de entrepiso;
- A = desplazamiento de entrepiso producido por V;
- W = suma de las cargas de diseño acumuladas desde el extremo superior del edificio hasta el entrepiso considerado, equivalente a ΣP_u en la ecuación 13.6;
- h = altura de entrepiso, entre ejes, equivalente a ℓ_c en la ecuación 13.6.

Se puede ver que las ecuaciones 13.6 del Reglamento ACI y 13.20 de las NTC son equivalentes para un factor de comportamiento sísmico de 2, que corresponde a un valor intermedio entre el mínimo y el máximo de las NTC.

El cálculo de los valores de EI también tiene algunas diferencias con respecto al Reglamento del ACI. El módulo de elasticidad, E, se considera igual al del concreto simple, pero el momento de inercia, *I*, se considera igual a $0.5I_g$ para vigas y muros agrietados, e igual a I_g para columnas y muros no agrietados, donde I_g es el momento de inercia de la sección gruesa. En vigas T, debe tomarse en cuenta el ancho efectivo del patín. Cabe aclarar que estos valores de *EI* se aplican para todos los fines de análisis estructural y no sólo para efectos de esbeltez. En las NTC, el valor de EI que aparece en la ecuación para calcular la carga crítica de Euler se calcula únicamente con una ecuación equivalente a la 13.9 (el término β_d se sustituye por *u).*

Otra diferencia significativa es que en las NTC siempre es necesario revisar los efectos de esbeltez en marcos con desplazamiento lateral significativo, a diferencia del Reglamento ACI que no obliga a ello cuando se cumple la condición de que la relación de esbeltez, $k\ell_u/r$, sea menor que 22. Las NTC, al igual que el Reglamento ACI, también requieren que se haga un análisis de segundo orden cuando la relación entre la longitud efectiva de pandeo y el radio de giro exceda de 100.

13.5 Ejemplos

13.5.1 Método del Reglamento ACI *318-02*

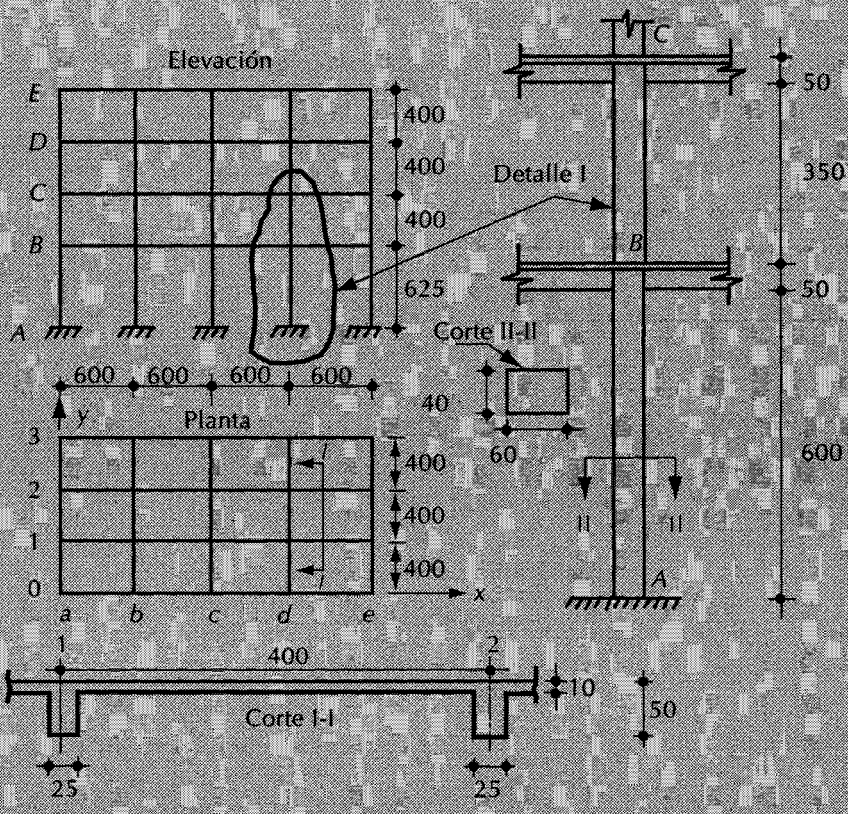
En el ejemplo 13.1 se ilustra la aplicación del método descrito en la sección 13.4.1 a la obtención de los momentos de diseño de una columna interior de la planta baja de una estructura. Se ha supuesto que la estructura está sujeta a carga por gravedad y sismo simultáneamente, y que los resultados del análisis estructural (no incluido en el ejemplo) indican que la columna en cuestión tiene una carga axial de 150 ton, y momentos flexionantes de 50 ton-m y 70 ton-m en sus extremos superior e inferior, respectivamente; en el ejemplo se indica la parte que corresponde a la carga por gravedad y la parte que corresponde a sismo. También se ha supuesto que la estructura no está contraventeada lateralmente y que, por lo tanto, puede sufrir desplazamientos laterales. Esto se pudo haber verificado con la ecuación 13.6, pero el cálculo de los parámetros necesarios cae fuera del alcance de este texto.

El primer paso en la solución del problema es la determinación de las rigideces relativas del sistema de piso y de la columna.

La rigidez del sistema de piso depende de varios factores, los más importantes de los cuales son las dimensiones y la geometría de la viga y de la losa, el estado de agrietamiento de estos elementos, sus porcentajes de refuerzo y las características del concreto. Es difícil tomar en cuenta el efecto de todas estas variables, por lo que suele recurrirse

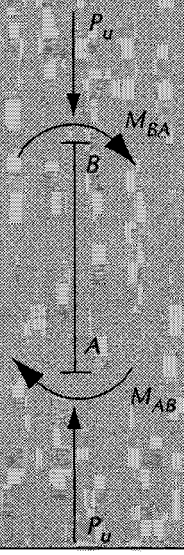
EJEMPLO 13.1 ***Efecto de esbeltez en una columna por el método del Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



La estructura puede tener desplazamientos laterales y se analiza en la dirección 0-*X*.

Acciones internas



P_u (cols. interiores) = 150 ton
P_u (cols. de borde) = 80 ton
P_u (cols. de esquina) = 45 ton

$(M_{BA})_{ns}$ = 10 ton-m
$(M_{BA})_s$ = 40 ton-m
$(M_{AB})_{ns}$ = 5 ton-m
$(M_{AB})_s$ = 65 ton-m

Materiales:

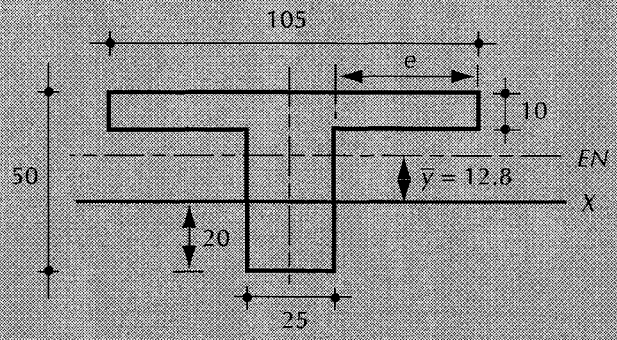
Concreto, f'_c = 200 kg/cm^2

Acero, f_y = 4200 kg/cm^2

EJEMPLO 13.1 ***(continuación)***

MOMENTOS DE INERCIA

a) Sistema de piso. Criterio de la estructura equivalente (capítulo 13, ACI 318-02)



$e = 4t$ o $(h - t)$
$4t = 40$ cm
$(h - t) = 40$ cm
$e = 40$ cm

Centroide:

$$\bar{y} = \frac{10 \times 105 \times 25}{25 \times 40 \times 105 \times 10} = 12.8 \text{ cm}$$

Momento de inercia centroidal

$$I_t = \frac{105 \times 10^3}{12} + 105 \times 10 \times 12.2^2 + \frac{25 \times 40^3}{12} + 25 \times 40 \times 12.8^2$$

$$I_t = 462{,}000 \text{ cm}^4$$

b) Columna:

$$I_{AB} = I_{BC} = \frac{40 \times 60^3}{12}$$

$$I_{AB} = I_{BC} = 720{,}000 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 13.1 ***(continuación)***

RIGIDECES

a) Para todas las columnas de los ejes *b*, c y *d*

Nudo A:

$\Psi_A = 0$, por tratarse de empotramiento

Nudo B:

Rigidez del sistema de piso:

$$K_{trabe} = \frac{I_t}{\ell_t} = \frac{462{,}000}{600} = 770 \text{ cm}^3$$

Rigidez de columnas:

$$K_{BC} = \frac{I_{BC}}{\ell_{BC}} = \frac{720{,}000}{400} = 1800 \text{ cm}^3$$

$$K_{BA} = \frac{I_{BA}}{\ell_{BA}} = \frac{720{,}000}{625} = 1152 \text{ cm}^3$$

$$\Psi_B = \frac{\Sigma K_{cols}}{\Sigma K_{trabes}} = \frac{1800 + 1152}{770 + 770} = 1.9$$

b) Para todas las columnas de los ejes *a* y e

$\Psi_A = 0$, por tratarse de empotramiento

$$\Psi_B = \frac{\Sigma K_{cols}}{\Sigma K_{trabes}} = \frac{1800 + 1152}{770} = 3.8$$

LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO

a) Columnas de los ejes *b*, c y *d* sin desplazamiento lateral
Con $\Psi_A = 0$ y $\Psi_B = 1.9$, se encuentra en la figura 13.14*a*:
$k = 0.64$, $k\ell_u = 0.64 \times 600 = 384$ cm

b) Columnas de los ejes *b*, c y *d* con desplazamiento lateral
Con $\Psi_A = 0$ y $\Psi_B = 1.9$, se encuentra en la figura 13.14*b*:
$k = 1.20$, $k\ell_u = 1.20 \times 600 = 720$ cm

c) Columnas de los ejes *a* y e sin desplazamiento lateral
Con $\Psi_A = 0$ y $\Psi_B = 3.8$, se encuentra en la figura 13.14*a*:

EJEMPLO 13.1 ***(continuación)***

LONGITUDES EFECTIVAS DE PANDEO (continúa)

d) Columnas de los ejes *a* y *e* con desplazamiento lateral
Con $\Psi_A = 0$ y $\Psi_B = 3.8$, se encuentra en la figura 13.14*b*:
$k = 1.39$, $k\ell_u = 1.39 \times 600 = 834$ cm

VERIFICACIÓN DE ESBELTEZ

a) Radio de giro

$$r = 0.30 \times 60 = 18 \text{ cm}$$

b) Relación de esbeltez

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{720}{18} = 40 > 22$$

Sí es necesario considerar el efecto de esbeltez. Además, como $k\ell_u/r < 100$ se puede aplicar este método.

CÁLCULO DEL FACTOR DE AMPLIFICACIÓN

Se utiliza la ecuación 13.18, ya que no se conoce el índice de estabilidad Q:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{\Sigma P_u}{0.75 \Sigma P_c}} > 1.0 \qquad \text{(ecuación 13.18)}$$

$$\Sigma P_u = 150 \times 6 + 80 \times 10 + 45 \times 4 = 1880 \text{ ton}$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{(k\ell_u)^2} \qquad \text{(ecuación 13.13)}$$

$$EI = \frac{0.40 E_c I_g}{1 + \beta_d} \qquad \text{(ecuación 13.9)}$$

$$E_c = 15{,}000 \sqrt{f'_c} = 15{,}000 \sqrt{200} = 212{,}000 \text{ kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720{,}000 \text{ cm}^4$$

$$\beta_d = 0$$

$$EI = 0.40 \times 212{,}000 \times 720{,}000 = 6.10 \times 10^{10} \text{ kg} - \text{cm}^2$$

EJEMPLO 13.1 ***(continuación)***

Para las columnas de los ejes *b*, *c* y *d*

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 6.10 \times 10^{10}}{720^2} = 11.61 \times 10^5 \text{ kg} = 1161 \text{ ton}$$

Para las columnas de los ejes *a* y e:

$$P_c = \frac{3.14^2 \times 6.10 \times 10^{10}}{834^2} = 8.65 \times 10^5 \text{ kg} = 865 \text{ ton}$$

$$\Sigma P_c = 12 \times 1161 + 8 \times 865 = 20{,}852 \text{ ton}$$

Sustituyendo en la ecuación 13.18:

$$\delta_s = \frac{1}{1 - \dfrac{1\,880}{0.75 \times 20{,}852}} = 1.14$$

CÁLCULO DE LOS MOMENTOS AMPLIFICADOS (ECUACIONES 13.15 Y 13.16):

$$M_1 = \left(M_{BA}\right)_{ns} + \delta_s \left(M_{BA}\right)_s = 10 + 1.14 \times 40 = 55.6 \text{ ton-m}$$

$$M_2 = \left(M_{AB}\right)_{ns} + \delta_s \left(M_{AB}\right)_s = 5 + 1.14 \times 65 = 79.1 \text{ ton-m}$$

REVISIÓN DE LA ECUACIÓN 13.19

$$\frac{\ell_u}{r} = \frac{600}{18} = 33.3$$

$$\frac{35}{\sqrt{\dfrac{P_u}{f'_c A_g}}} = \frac{35}{\sqrt{\dfrac{150{,}000}{200 \times 40 \times 60}}} = 62.6 > 33.3$$

a diversas hipótesis simplificadoras. Un problema especialmente complejo es el de definir la contribución de la losa a la rigidez del sistema de piso, en sistemas de losa y vigas.

Algunos estudios con computadora de estructuras idealizadas, constituidas por columnas y vigas rectangulares, indican que es conveniente considerar el momento de inercia de la sección agrietada y transformada [13.9, 13.10]. Sin embargo, no se han hecho estudios para determinar el ancho efectivo del patín, cuando existe una losa colada monolíticamente con la viga.

En el ejemplo se calculó el momento de inercia del sistema de piso, como el de una sección T homogénea, con un ancho efectivo del patín, a cada lado del paño del alma, igual al menor de los dos valores siguientes: cuatro veces el espesor de la losa, o el peralte total de la viga menos el espesor de la losa. Este criterio es semejante al que se recomienda para calcular las rigideces de sistemas de piso para fines de determinación de momentos debidos a cargas verticales. El método tiene la ventaja de que no es necesario conocer previamente el porcentaje de refuerzo de la viga, ni determinar cuáles zonas de la viga se encuentran agrietadas y cuáles no.

Para calcular la rigidez de la columna pueden usarse las ecuaciones 13.8 o 13.9, o puede calcularse el momento de inercia de la sección gruesa. De los estudios con computadora mencionados anteriormente, se deduce que se obtienen mejores resultados cuando se usa la ecuación 13.8. Sin embargo, el uso de esta ecuación presupone el conocimiento de la cantidad de acero que se va a emplear y del recubrimiento correspondiente, datos que no se conocen hasta después de varios tanteos. En el ejemplo se usó el momento de inercia de la sección gruesa de la columna. Siguiendo las recomendaciones del Reglamento ACI 318-02, se usaron la altura libre de la columna y el claro centro a centro de las vigas para determinar los valores de las rigideces relativas.

Después se calcularon los factores Ψ que indican la relación entre las rigideces de las columnas y del sistema de piso con la ecuación 13.7. Aunque en el ejemplo sólo se analiza una columna, es necesario determinar el valor de Ψ para todas las columnas del entrepiso, ya que de él dependen la longitud efectiva de pandeo y la carga crítica, y al aplicar la ecuación 13.18 se necesita conocer la carga crítica de todas las columnas.

Los términos Ψ se calcularon en ambos extremos de las columnas. En el extremo superior, el término ΣK_{col} incluye las rigideces relativas de las columnas en cuestión (columna A-9) y de las columnas del piso superior (columna *B-C*), ya que estas dos columnas concurren en el nudo. El término ΣK_{vigas} incluye dos vigas iguales que también concurren en el nudo, excepto para los ejes a y e en que sólo concurre una viga. El extremo inferior de la columna está empotrado, por lo que puede considerarse que en dicho extremo existen vigas de rigidez infinita en comparación con la rigidez de la columna. Por lo tanto, el valor de Ψ es nulo. Conocidos los valores de Ψ, se determinaron en el nomograma de la figura 13.14 los valores del factor, k, los cuales, multiplicados por las longitudes reales de las columnas, dan las longitudes efectivas de pandeo.

Obsérvese que para cada columna se determinaron dos longitudes efectivas de pandeo, una para la condición en que no hay posibilidad de desplazamiento lateral y otra para la condición en que sí la hay. Esto se hizo así, por si hubiese sido necesario usar las ecuaciones 13.11 y 13.12, lo cual no fue el caso ya que no se estuvo en el supuesto de la ecuación 13.19.

Conocidas las longitudes efectivas de pandeo, se verificó si era necesario considerar el efecto de esbeltez y, en caso afirmativo, si era posible usar este método o si se requería un análisis de segundo orden. Se encontró que el valor de $k\ell_u/r$ quedó comprendido entre 22 y 100. Por lo tanto, sí es necesario con-

siderar el efecto de esbeltez, pero no lo es efectuar un análisis de segundo orden.

Después se calculó el factor de amplificación, δ, con la ecuación 13.8. La suma de las cargas P_u se hizo para toda la planta de la estructura con las cargas mostradas en la sección de acciones internas del ejemplo.

Para calcular EI se utilizó la ecuación 13.9. Aunque se obtienen mejores resultados con la ecuación 13.8, el empleo de esta última requiere conocer previamente la cantidad de acero y el recubrimiento, según se ha mencionado anteriormente. El módulo de elasticidad del concreto se obtuvo con la ecuación del Reglamento ACI para concreto de peso normal. El valor del término β_d, suele ser muy pequeño cuando la estructura está sujeta a la acción de sismos o vientos fuertes, como en este ejemplo, ya que las cargas laterales permanentes son muy pequeñas en comparación con las cargas laterales totales. Es posible, en estos casos, considerar que β_d es igual a cero, como se hizo en este ejemplo. Se calcularon las cargas críticas de pandeo de todas las columnas para sustituir su sumatoria en la ecuación 13.18. El factor de amplificación δ resultó de 1.14, y el momento máximo amplificado, de 79.1 ton-m. Si se compara este momento con el de 70 ton-m que actúa en el extremo A de la columna, se ve que el incremento por efecto de esbeltez es de 13 por ciento.

El refuerzo de la columna debe calcularse, pues, para que resista una carga axial de 150 ton y un momento flexionante de 79.1 ton-m. En el capítulo 15 se ilustran los problemas generales del dimensionamiento de elementos sujetos a combinaciones de carga axial y momento.

En este ejemplo se ha calculado el efecto de esbeltez para una columna y en una sola dirección. Para la estructura completa deben revisarse todas las columnas en las dos direcciones.

13.5.2 Método de las *NTC-04*

En el ejemplo 13.2 se han calculado los efectos de esbeltez para una columna semejante a la del ejemplo anterior, usando las NTC. En este caso se ha supuesto que la columna no tiene posibilidad de desplazamiento lateral y, como se muestra en los datos, que se flexiona en curvatura simple, ya que los momentos en los extremos son de signos contrarios. Se han supuesto los valores de los términos Ψ que miden el grado de restricción de los extremos de las columnas por el sistema de piso; son valores semejantes a los del ejemplo anterior.

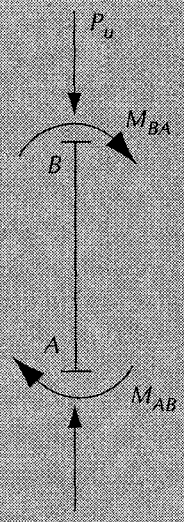
La longitud efectiva de pandeo se ha determinado ahora con la figura 13.14*a*, que corresponde a columnas sin desplazamiento lateral en sus extremos. La relación de esbeltez $k\ell_u/r$ resulta menor que 100, por lo que puede usarse el método simplificado de amplificación de momentos; si no hubiese sido el caso, se tendría que hacer un análisis de segundo orden. Sin embargo, dicha relación es mayor que el término $34-12(M_1/M_2)$, por lo que se deben revisar los efectos de esbeltez. Obsérvese que como la columna se flexiona en curvatura simple, la relación M_1/M_2 se considera positiva.

Después se ha calculado el factor de amplificación F_{ab}, como se le denomina en las NTC al factor δ_{ns} del Reglamento ACI, ecuaciones 13.11 y 13.12. Nótese que se ha usado la ecuación que corresponde a miembros sin desplazamiento lateral y que nuevamente la relación M_1/M_2 es positiva. Para calcular la carga crítica de Euler se usó el módulo de elasticidad correspondiente a concreto clase 2. Se supuso un valor del parámetro u de 0.5. Este parámetro es equivalente al β del Reglamento ACI y mide el efecto de las cargas permanentes en comparación con las cargas totales.

Con las suposiciones anteriores se obtuvo un factor de amplificación de 1.27, o sea, que los momentos se amplifican en 27 por ciento por efectos de esbeltez. Por lo tanto, la columna debe diseñarse para un momento máximo de 12.7 ton-m en vez del momento de 10 ton-m obtenido en el análisis de primer orden.

EJEMPLO 13.2 ***Efecto de esbeltez de una columna sin desplazamiento lateral con las NTC 2004***

DATOS



$P_u = 150$ ton
$(M_{BA})_b = 10$ ton-m
$(M_{AB})_b = 8$ ton-m

$\Psi_A = \Psi_B = 4$
$\ell_u = 600$ cm
$f'_c = 200$ kg/cm^2
$b \times h = 40 \times 60$ cm

LONGITUD EFECTIVA DE PANDEO

Con $\Psi_A = \Psi_B = 4$ se encuentra en la figura 13.14*a*:

$$k = 0.91,\ k\ell_u = 0.91 \times 600 = 546 \text{ cm}$$

VERIFICACIÓN DE ESBELTEZ

a) Radio de giro

$$r = 0.30 \times 60 = 18 \text{ cm}$$

b) Relación de esbeltez

$$\frac{k\ell_u}{r} = \frac{546}{18} = 30.3 < 100 \text{ (puede usarse método simplificado)}$$

EJEMPLO 13.2 ***(continuación)***

c) Valor máximo

$$\left(34 - 12\,\frac{M_{1b}}{M_{2b}}\right) = 34 - 12\frac{8}{10} = 24.4$$

como $\dfrac{k\ell_u}{r} > \left(34 - 12\,\dfrac{M_{1b}}{M_{2b}}\right)$ (ecuación 13.10)

es necesario revisar efectos de esbeltez.

CÁLCULO DE MOMENTOS AMPLIFICADOS

$M_c = F_{ab}\, M_2$ (equivalente a la ecuación 13.11)

$$F_{ab} = \frac{C_m}{1 - \dfrac{P_u}{0.75\,P_c}}$$ (equivalente a la ecuación 13.12)

$$C_m = 0.6 + 0.4\,\frac{M_1}{M_2} \geq 0.4$$ (equivalente a la ecuación 13.14)

$$C_m = 0.4 + 0.4\,\frac{8}{10} = 0.92$$

$$P_c = \frac{\pi^2 EI}{\left(k\ell_u\right)^2}$$

$$EI = \frac{0.4 E_c I_g}{1 + u}$$

$$E_c = 8000\sqrt{f'_c} = 8000\sqrt{200} = 113{,}137\ \text{kg/cm}^2$$

$$I_g = \frac{40 \times 60^3}{12} = 720{,}000\ \text{cm}^4$$

$u = 0.5$

$$EI = \frac{0.4 \times 113{,}137 \times 720{,}000}{1.5} = 2.17 \times 10^{10}\ \text{kg} - \text{cm}^2$$

EJEMPLO 13.2 ***(continuación)***

$$P_c = \frac{\pi^2 \times 2.17 \times 10^{10}}{(546)^2} = 0.718 \times 10^6 \text{ kg} = 718 \text{ ton}$$

$$F_{ab} = \frac{0.92}{1 - \dfrac{150}{0.75 \times 718}} = 1.27$$

$M_c = 1.27 \times 10 = 12.7$ ton-m (momento de diseño)

Referencias

13.1 Pfrang, E. O. "Behavior of Reinforced Concrete Columns with Sidesway". Proceedings ASCE, Vol. 92 ST-3 Nueva York, junio 1966.

13.2 Breen, J. E. "Computer Use in Studies of Frames with Long Columns". En Flexural *Mechanics* of Reinforced Concrete (SP-12). Detroit, American Concrete Institute/American Society of Civil Engineers, 1965.

13.3 Comité ACI 318. Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI *318-89).* Detroit, American Concrete Institute, 1989.

13.4 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal. Tomo I, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.

13.5 Robles F. V., Manual de diseño de obras civiles, Sección H: Concreto reforzado. México, D. F, Comisión Federal de Electricidad, Instituto de Investigaciones de la industria Eléctrica, 1969.

13.6 —.Propuesta de Recomendaciones Internacionales CEB-FIP para el Cálculo y la Ejecución de Obras de Hormigón, 1970.

13.7 MacGregor, J.G., J.E. Breen y E. O Pfrang. "Design of Slender Columns". Journal of the *American* Concrete *Institute*. Detroit, enero 1970.

13.8 Parme, A. L. "Capacity of Restrained Eccentrically Loaded Long Columns". En Symposium on Reinforced Concrete Columns (SP-*13).* Detroit, American Concrete Institute, 1966.

13.9 Pagay, S. N., P. M. Ferguson y J. E. Breen. "Importance of Beam Properties on Concrete Column Behavior". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, octubre 1970.

13.10 Okamura, H., S. N. Pagay, J. E. Breen y P. M. Ferguson. "Elastic Frame Analysis Corrections Necessary for Design of Short Concrete Columns in Braced Frames". Journal of the American Concrete Institute. Detroit, noviembre 1970.

13.11 Rosenblueth, E. "Efectos de esbeltez en edificios". Ingeniería. México, D. F, enero 1965.

13.12 Mirza, S. A. "Flexural Stiffness of Rectangular Reinforced Concrete Columns". ACI Structural Journal. Detroit, julio-agosto 1990.

13.13 MacGregor, J. G. "Design of Slender Columns-Revisited". ACI Structural Journal. Detroit, mayo-junio 1993.

13.14 Bažant, Z.P. y L. Cedolin, Stability of *Structures: Elastic,* Inelastic, Fracture, and Damage Theories. Oxford University Press, New York, 1991.

Ejercicios

13.1 Determinar el efecto de esbeltez en la columna del ejemplo **13.1,** suponiendo que el marco está contraventeado.

13.2 Calcular el efecto de esbeltez en la columna localizada en la intersección de los ejes *b-0* del ejemplo **13.1.** Analice el efecto en la dirección *0-y* en el tramo inferior, suponiendo que las dimensiones de las columnas y las vigas, sean las mismas que en el ejemplo 13.1. El marco no está contraventeado en la dirección *0-y.*

CAPÍTULO 14

Dimensionamiento de vigas

14.1 El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado. /14.2 Recomendaciones generales para el dimensionamiento de vigas. 114.3 Dimensionamiento de secciones sujetas a flexión. 114.4 Dimensionamiento de vigas.

14.1 El dimensionamiento de elementos de concreto reforzado

14.l.1 Introducción

Uno de los aspectos fundamentales del diseño de una estructura es el dimensionamiento de los diversos elementos que la integran. En la sección 1.6 se definió el dimensionamiento de piezas de concreto reforzado como la determinación de sus propiedades geométricas y de la cantidad y posición del acero de refuerzo. Estas características deben escogerse de manera que se satisfagan ciertos requisitos preestablecidos de seguridad y de comportamiento bajo condiciones de servicio. Como en cualquier problema de ingeniería, el costo influye de manera importante en la solución que por fin se adopte. Por último, debe procurarse que la estructura sea estéticamente aceptable.

El procedimiento de dirnensionamiento aplicado en los ejemplos que se presentan en los siguientes capítulos es el llamado plástico o de resistencia, que fue descrito en la sección 1.6, citada. Según este procedimiento, los elementos deben dimensionarse para que tengan determinada resistencia. En los capítulos anteriores se han presentado métodos para cuantificar la resistencia de elementos de características conocidas. El problema de dirnensionamiento es evidentemente el inverso, ya que consiste en determinar las características de una sección para que cumpla ciertos requisitos de resistencia y comportamiento.

Se ha insistido en que el requisito fundamental de un elemento estructural es el de contar con una resistencia suficiente. Es natural, entonces, que la primera consideración que se intente satisfacer al proponer determinadas dimensiones sea ésta. Así, se procura primero lograr secciones de resistencia suficiente y después se comprueba la forma en que se cumplen los requisitos de comportamiento bajo condiciones de servicio y los de economía. En otras palabras, después de definidas las características geométricas de la sección de manera que tenga suficiente resistencia, se revisan, por ejemplo, las deformaciones y los agrietamientos para comprobar si están dentro de límites tolerables. Por último, una vez establecidas varias alternativas estructurales aceptables, se hacen comparaciones de costos para escoger la más apropiada.

En este capítulo y los siguientes se ilustra la técnica del dirnensionamiento por medio de una serie de ejemplos sencillos que muestran los problemas de dirnensionamiento más usuales. No se intenta abarcar todas las formas estructurales comunes en concreto reforzado, ni se han hecho intervenir consideraciones económicas, salvo de manera rudimentaria. La intención principal es presentar soluciones razonables que hagan comprender el proceso que sigue el proyectista al dimensionar estructuras de concreto reforzado. Los ejemplos propuestos de ninguna manera deben tomarse como modelos rígidos de secuelas de cálculo, debiéndose considerar más bien como guías que dan orientación de carácter muy general.

En el diseño práctico de elementos de concreto reforzado es usual seguir las recomendaciones de algún reglamento de construcciones. Algunos de los más comúnmente usados en México son las Normas Técnicas Complementarias para Estructuras de Concreto (NTC-04) del Reglamento del Distrito Federal [14.1], el Reglamento del American Concrete Institute (ACI 318-02) [14.2] y el de la Comisión Federal de Electricidad [14.4]. Otro reglamento importante es el Eurocódigo 2 "Proyecto de Estructuras de Hormigón". Los eurocódigos serán los códigos de cálculo y diseño de estructuras para todo el ámbito europeo [14.3]. Algunos de los ejemplos de dimensionamiento de este texto se basan en las indicaciones de las NTC-04, mientras que en otros se siguen las del Reglamento ACI 318-02.

En general, no se han incluido métodos de análisis estructural.

14.1.2 Observaciones generales sobre dimensionamiento

Dada la cantidad de variables que intervienen, no es posible establecer un conjunto de reglas rígidas para dimensionar. Sin embargo, existen unos cuantos principios generales que conviene respetar.

Fundamentalmente, debe buscarse la sencillez constructiva y la uniformidad, y deben evitarse las discontinuidades tanto en las dimensiones del concreto como en la distribución del refuerzo. Los cambios bruscos de sección no suelen ser convenientes. El refuerzo debe detallarse considerando la posibilidad de condiciones de carga no previstas específicamente en el cálculo y los efectos de las redistribuciones de momentos.

Dentro de las limitaciones que imponen los requisitos de resistencia y de condiciones de servicio, el proyectista busca obtener soluciones económicas en cuanto a consumo de materiales. Pero no debe olvidarse que en el costo total de una estructura influyen otros factores, tales como las cimbras y obras falsas, la mano de obra, la duración de la construcción y el procedimiento constructivo adoptado, además de la interacción con los otros subsistemas de la obra (instalaciones eléctricas, sanitarias, etcétera). A veces el proyectista se obceca con la idea de lograr un pequeño ahorro de acero o de concreto y cae en soluciones rebuscadas de difícil ejecución, con el consiguiente aumento de costo. Es natural esta tendencia, ya que las economías logradas reduciendo materiales son evidentes y fáciles de cuantificar. Sin embargo, un análisis completo y cuidadoso de los costos totales de construcción lleva con frecuencia a la conclusión de que la sencillez constructiva disminuye dichos costos totales, aun cuando el logro de la sencillez implique mayor consumo de materiales. La sencillez constructiva conduce a tiempos de ejecución menores y costos de mano de obra inferiores.

Para lograr sencillez y rapidez constructiva, es conveniente estandarizar secciones en el mayor grado posible, no solamente en las estructuras prefabricadas, donde esto es obvio, sino también en las estructuras coladas en el lugar. La estandarización de secciones trae consigo la simplificación de la mano de obra y la posibilidad de lograr una planeación eficiente del uso de cimbras. Como es natural, conviene también que los elementos estructurales tengan formas geométricas sencillas.

También es aconsejable la estandarización de los detalles de refuerzo, de manera que pueda reducirse a un mínimo el número de barras de características distintas. La estandarización del refuerzo facilita las labores de habilitado y de colocación, al mismo tiempo que simplifica la supervisión y el control de costos.

Una de las decisiones más importantes con que se debe enfrentar el proyectista es la elección de la combinación de calidades de acero y concreto más conveniente. La tenden-

cia actual es usar aceros y concretos de resistencias cada vez mayores, lo que permite diseñar elementos ligeros y esbeltos. Sin embargo, puede resultar más económico trabajar con calidades inferiores cuando la esbeltez y la ligereza no son factores importantes, como sucede muchas veces.

Una observación semejante puede hacerse también en lo que se refiere al porcentaje de acero conveniente. Se tiende a porcentajes altos cuando es importante disminuir pesos y lograr elementos esbeltos, y a porcentajes bajos en caso contrario. En las condiciones de costo que rigen en nuestro medio actualmente, suelen resultar más económicos los porcentajes bajos.

Al detallar el refuerzo debe buscarse siempre que los elementos resulten de comportamiento dúctil.

14.1.3 Detallado del refuerzo

Una de las ventajas del concreto reforzado como material estructural radica en la facilidad con que puede variarse la resistencia de los elementos a lo largo de sus ejes longitudinales, con el fin de ajustar dicha resistencia a la magnitud de las acciones internas. Por ejemplo, en una viga libremente apoyada sujeta a carga uniformemente distribuida, el momento flexionante es máximo en el centro del claro y muy pequeño cerca de los apoyos. Por lo tanto, se requiere mayor resistencia a flexión en el centro del claro que en otras secciones de la viga. Esto puede lograrse disminuyendo el número de barras del refuerzo de flexión cerca de los apoyos, como se muestra esquemáticamente en la figura 14.1. Al cortar las barras longitudinales, se disminuye el peso total del acero de refuerzo, lo cual redunda en economía de materiales.

El corte de barras y, en general, todas las recomendaciones relativas a colocación de barras, formación de ganchos en los extremos, formación y colocación de estribos y hélices y otros aspectos similares, pueden denominarse *detallado del refuerzo.* El detallado del refuerzo tiene importancia no únicamente para lograr economía en la cantidad de refuerzo,

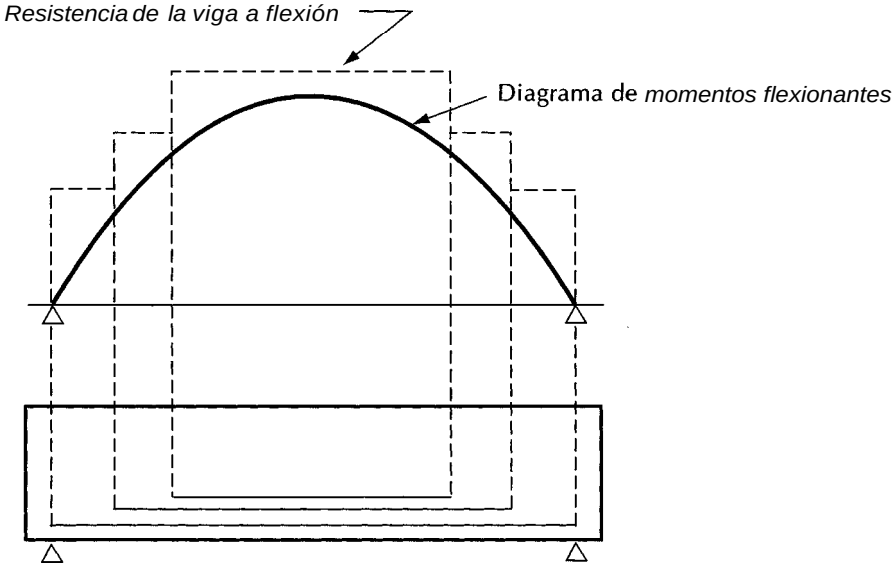


Figura 14.1 Variación de la resistencia a flexión de una viga mediante el corte de las barras del refuerzo de flexión.

sino también para conseguir estructuras de comportamiento adecuado.

Existen ciertos criterios para establecer normas generales sobre detallado del refuerzo. Con base en ellos, se han desarrollado recomendaciones específicas que se incluyen en los reglamentos de construcción. Más importante que el conocimiento completo de todas las recomendaciones de un reglamento, es tener en cuenta los criterios generales para lograr estructuras de comportamiento adecuado. Algunos de estos criterios son los siguientes:

a) Los armados deben ser sencillos

Se ha señalado con anterioridad que una economía pequeña en la cantidad de acero lograda a base de detalles complicados puede resultar contraproducente por el incremento del costo en mano de obra y supervisión.

b) No debe haber congestionamientos del refuerzo

Si la cantidad de acero es excesiva y no se dejan separaciones suficientes entre las barras, se dificulta el colado del concreto. La estructura puede debilitarse debido a la formación de huecos o zonas en las que el concreto se haya segregado.

c) El refuerzo debe tener *recubrimientos* adecuados

El recubrimiento protege al acero de dos agentes: la corrosión y el fuego. La magnitud del recubrimiento debe fijarse, por lo tanto, según la importancia de estos agentes agresivos. Debe preverse siempre un recubrimiento suficientemente grande, a pesar de que el ancho de grietas es mayor mientras mayor sea el recubrimiento.

d) Las barras deben estar ancladas

En el capítulo sobre adherencia se señaló que las barras deben desarrollar su esfuerzo de fluencia entre las secciones de momento máximo y sus extremos. Por lo tanto, se debe vigilar que siempre existan longitudes de anclaje suficientes para desarrollar el esfuerzo de fluencia.

e) Las estructuras deben tener un comportamiento dúctil

Esto se logra limitando los porcentajes de refuerzo de flexión (capítulo 5) y cuidando los detalles de anclaje de las barras longitudinales y del refuerzo transversal por cortante. El detallado del refuerzo con longitudes de anclaje y traslapes amplios, sin cortes o dobleces excesivos en las barras y con estribos a separaciones adecuadas, permite obtener estructuras dúctiles, con un aumento pequeño en la cantidad de acero de refuerzo.

14.1.4 Ayudas de diseño. Uso de computadoras

Con el fin de simplificar la labor numérica que se requiere en el dimensionamiento de elementos de concreto, se han preparado ayudas de diseño que pueden ser en forma de gráficas, de tablas, o incluso de programas de computadora. Existen manuales que reúnen diversas ayudas de diseño. Algunos de los más usados son los de las referencias 14.4 a 14.10.

De gran utilidad son las calculadoras programables de bolsillo, con las cuales pueden resolverse problemas de diseño de considerable complejidad. Con estas calculadoras pueden resolverse desde ecuaciones de segundo grado, como la que resulta de despejar el peralte en la ecuación general de flexión, hasta rutinas de cálculo para encontrar las resistencias de distintos elementos, como las que se presentan en vigas doblemente reforzadas o vigas T.

Recientemente se ha generalizado el uso de las microcomputadoras o computadoras personales. Muchos proyectistas de estructu-

ras elaboran sus propios programas para fines de diseño, pero existen también en el mercado un gran número de programas disponibles para diseñar todo tipo de miembros. Periódicamente se han hecho revisiones de los programas disponibles, pero debido a que permanentemente aparecen nuevos programas, se recomienda consultar los catálogos de publicaciones de instituciones especializadas, como el American Concrete Institute, el Concrete Reinforcement Steel Institute o el Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto para obtener información actualizada. La revista Concrete *International* dedica un número al año a presentar avances en la utilización de computadoras en el concreto.

También existen programas para computadora~de mayor capacidad que facilitan distintos aspectos del análisis y dimensionamiento de estructuras de concreto. Entre los más conocidos figuran el ETABS, el SAP, el RC Buildings, el TRICALC y el STAAD, con los cuales pueden realizarse análisis sísmicos tridimensionales estáticos o dinámicos de una gran variedad de estructuras. Algunos de ellos permiten elaborar dibujos estructurales y órdenes de trabajo que describen los detalles de fabricación del refuerzo. En nuestro medio también se han desarrollado algunos programas de este tipo, como el ECO y el CADSE.

Existen programas elaborados en ambientes muy amigables específicamente para vigas, que pueden servir tanto para la práctica como para la enseñanza. Un ejemplo es el que se presenta en la referencia 14.11.

14.2 Recomendaciones generales para el dimensionamiento de vigas

14.2.1 Acero *de flexión* mínimo

El porcentaje mínimo del refuerzo de tensión debe ser tal que la resistencia de la viga calculada con las hipótesis usuales sea aproximadamente 1.5 veces mayor que el momento que provoca el agrietamiento, calculado con el módulo de rotura del concreto y suponiendo la sección de la viga sin agrietar. (Véase el ejemplo 14.4.) Los reglamentos suelen especificar porcentajes mínimos aproximados para casos particulares, obtenidos con base en consideraciones semejantes. Por ejemplo, el Reglamento ACI 318-02 establece que el acero mínimo debe ser

$$A_{s,mín} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (14.1)$$

o en sistema SI

$$A_{s,mín} = \frac{0.25\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (14.1\ SI)$$

donde b es el ancho en vigas rectangulares o el ancho de la nervadura en vigas T. Para secciones rectangulares, las NTC-04 especifican que el acero mínimo sea el dado por la siguiente ecuación

$$A_{s,mín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (14.2)$$

o en sistema SI

$$A_{s,mín} = \frac{0.22\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (14.2\ SI)$$

Pueden construirse vigas sin refuerzo de compresión, pero es frecuente colocar por lo menos dos barras en las esquinas, para poder armar los estribos que se utilizan como refuerzo por cortante.

14.2.2 Acero de *flexión* máximo

Como se indicó en la sección 5.4, con el fin de asegurar un comportamiento dúctil, los reglamentos limitan la cuantía de refuerzo a valores que varían del correspondiente a la condición balanceada, ρ_b, al 50 por ciento

de este valor. O bien, establecen que la deformación unitaria del acero más cercano a la cara en tensión de la viga sea mayor que cierto límite.

14.2.3 Corte de barras

El corte de barras debe hacerse de tal manera que la resistencia de la viga sea siempre ligeramente mayor que el momento flexionante producido por las acciones exteriores (figura 14.1). Por otra parte, como el diagrama de momentos puede modificarse con respecto al teórico por variaciones en la distribución o en la magnitud de las cargas, y debido a que las barras deben anclarse en sus extremos, se recomienda que éstas se prolonguen cierta distancia, generalmente igual o mayor que el peralte de la viga, más allá de la sección en donde pueden cortarse teóricamente. Además, debido a que el corte de barras produce tendencia al agrietamiento en la viga y disminuye la resistencia a tensión diagonal (sección 7.6), no se permite efectuar cortes a menos que satisfagan ciertos requisitos mínimos con respecto a las condiciones de anclaje y la resistencia a tensión diagonal de la viga. Por ejemplo, un requisito común es que la resistencia en tensión diagonal en la sección de corte sea sustancialmente mayor que la fuerza cortante en dicha sección. También se recomienda prolongar una parte importante del refuerzo positivo hasta penetrar en los apoyos, aunque teóricamente el momento flexionante sea nulo. De la misma manera, en vigas continuas debe prolongarse una parte de las barras de refuerzo negativo más allá del punto de inflexión; de preferencia, conviene prolongar algunas barras a todo lo largo de la viga. Con esto, la viga queda reforzada contra posibles inversiones de esfuerzos producidas por viento, sismo, asentamiento de los apoyos de la estructura o alguna otra causa imprevista. En los reglamentos de construcción se presentan recomendaciones cuantitativas sobre los aspectos del detallado de barras mencionados anteriormente. Para mayor detalle véase también la sección 9.10.

14.2.4 Doblado de barras

Algunas veces, las barras se doblan hasta la cara opuesta del elemento, en vez de cortarlas. Esta práctica tiene la ventaja de que la barra queda anclada en una zona de compresión y de que se disminuyen las concentraciones de esfuerzos que se originan en las secciones de corte en zonas de tensión. Por otra parte, el procedimiento de construcción es un poco más complicado. Las recomendaciones generales sobre doblado de barras son semejantes a las de corte de barras. En vigas que forman parte de marcos expuestos a acciones sísmicas suele recomendarse que se evite el doblado de barras.

14.2.5 Separación entre barras

Las barras deben estar separadas en dirección transversal una distancia suficiente para permitir que pasen libremente las partículas mayores del agregado grueso del concreto. Asimismo, cuando el refuerzo tenga que colocarse en más de una capa, debe haber suficiente separación entre capas consecutivas para que todas las barras queden rodeadas de concreto. Las barras del lecho superior deben quedar en el mismo plano vertical que las del lecho inferior. Suele recomendarse que el espacio entre barras sea superior a 2.5 cm, al diámetro de las barras y a 1.5 veces el tamaño máximo del agregado.

Cuando la cuantía de acero requerido obliga a usar separaciones pequeñas, pueden formarse paquetes o haces de barras. El número de barras en un haz suele limitarse a cuatro. El uso de paquetes se restringe a barras no mayores del No. 11. Las barras que integran los paquetes deben ligarse firmemente entre sí con alambre. Los cortes de las barras individuales deben hacerse en

secciones diferentes, de manera que la distancia entre cortes sea por lo menos igual a 40 diámetros. Generalmente las separaciones mínimas entre paquetes se determinan tratándolos como barras simples con un área equivalente.

Los haces reducen el congestionamiento pero obligan a poner especial cuidado en los detalles de empalmes y dobleces.

14.2.6 Recubrimiento

Las NTC-04 establecen recubrimientos mínimos según dos condiciones. La primera se refiere a que se pueda colocar adecuadamente el concreto fresco en las cimbras. Para esto, señala que el recubrimiento debe ser mayor que el tamaño máximo del agregado multiplicado por 1.25, que el diámetro nominal de la barra de refuerzo o, si se trata de paquetes de barras, que 1.5 veces el diámetro de la barra más gruesa. Estas disposiciones las hace extensivas a las separaciones entre barras. La segunda condición alude a la protección contra corrosión de las barras. Para esto especifica distintos recubrimientos que van de 2.5 a 7.0 cm según el grado de agresividad a que esté expuesto el miembro estructural.

El Reglamento ACI-02 especifica un recubrimiento mínimo de 4 cm para vigas no expuestas a la intemperie o en contacto con el suelo, de 4 a 5 cm para vigas expuestas y de 7.5 cm para vigas coladas directamente contra el suelo. En el caso de paquetes de barras, el recubrimiento, según este reglamento, será igual al diámetro equivalente del paquete. Para ambientes corrosivos, recomienda aumentar los recubrimientos y cuidar la densidad y porosidad del concreto.

14.2.7 Traslapes *y* empalmes

En muy pocas ocasiones se puede lograr que todas las barras de refuerzo sean de una sola pieza. Es frecuente que sea necesario traslapar o empalmar las barras. Conviene evitar que los traslapes o empalmes se hagan en zonas en las que las barras trabajen a esfuerzos máximos o que queden varios de ellos en la misma zona de la viga. Las longitudes de traslape se calculan siguiendo los procedimientos descritos en el capítulo 9.

14.2.8 Ganchos

Para poder cumplir con los requisitos de anclaje en situaciones en que el espacio disponible está restringido, es necesario recurrir al empleo de ganchos. Las características de los ganchos se han descrito en el capítulo 9.

14.2.9 Indicaciones generales sobre el detallado del refuerzo principal

Es conveniente procurar que el refuerzo en todas las secciones de las vigas sea simétrico, usar un máximo de dos diámetros de barra diferentes en una sección dada y evitar combinar barras cuyo diámetro difiera más de 6 mm. Siempre que sea posible debe tenderse a colocar las barras en un solo lecho. Cuando se emplean barras de diámetro diferente en varios lechos, las de mayor diámetro deben colocarse en el lecho más alejado del eje neutro de la viga.

14.2.10 Estribos

En la sección 7.2.2 se señaló que los estribos cerrados son los más convenientes, ya que con ellos es más fácil cumplir con los requisitos de anclaje comentados en el inciso 9.10, según los cuales la longitud de desarrollo a partir del medio peralte de la sección debe ser suficiente para lograr la fluencia del acero en dicho punto (figura 9.31). Por otra parte, la acción confinante que proporcionan los estribos cerrados es superior a la de los estribos abiertos, lo que es conveniente en las porciones de vigas de marcos expuestos a sismos donde existe la posibilidad de fluencia del acero. En la figu-

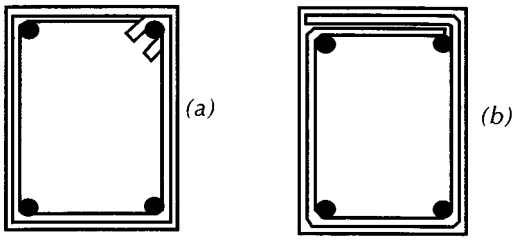


Figura 14.2 Tipos comunes de estribos cerrados.

ra 14.2 se muestran dos tipos de estribos cerrados. En el tipo de la figura 14.2*a* el anclaje se logra mediante ganchos doblados a 135°, mientras que en el tipo de la figura 14.26, se consigue traslapando los extremos de la barra. El primer tipo parece proporcionar mejor confinamiento, pero el segundo es más fácil de fabricar.

En el capítulo 7 se indicó la forma de calcular el diámetro y la separación de los estribos, cuando se conoce la fuerza cortante. En el caso de que el diagrama de fuerza cortante sea variable, como el de la figura 14.3, puede dividirse en dos o tres segmentos de magnitud constante, como se indica con línea punteada en la misma figura. Debe tenerse en cuenta que el diagrama teórico de fuerza cortante puede modificarse por cambios imprevistos en la distribución de la carga. Por esta razón no es conveniente dividir el diagrama de fuerza cortante en un número exagerado de segmentos, con el fin de apegarse estrictamente al diagrama teórico.

14.2.11 Acero en las caras laterales

En vigas de peralte grande, aproximadamente más de 75 cm, es necesario colocar algunas barras de refuerzo distribuidas en las caras laterales, para evitar que se formen grietas por contracción en dichas caras. El porcentaje de este refuerzo adicional debe ser del orden de 0.2 a 0.4 por ciento.

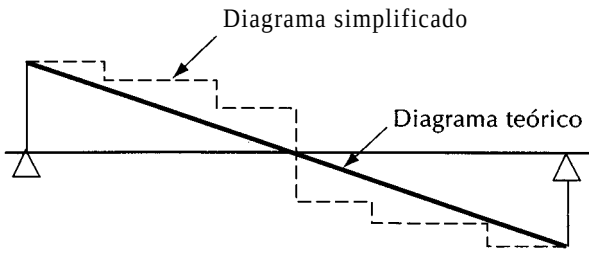


Figura 14.3 Tipos comunes de estribos cerrados.

14.3 Dimensionamiento de secciones sujetas a flexión

El problema del dimensionamiento por flexión puede plantearse en distintas formas. Cuando no existe alguna limitación particular, el proyectista tiene libertad completa para fijar las características de la sección, tanto en lo que se refiere a las dimensiones del concreto como a la cantidad de acero. También puede seleccionar libremente las características del concreto y del acero. Evidentemente, en cada caso existe un número infinito de soluciones técnicamente correctas. La elección de una solución depende de consideraciones económicas y constructivas, que pueden ser muy distintas según las circunstancias de cada caso.

Sin embargo, es común que el problema se plantee con alguna restricción. Por ejemplo, hay casos en que el proyecto arquitectónico establece alguna limitación en el peralte de ciertas vigas, de manera que el proyectista estructural sólo puede fijar el ancho y el porcentaje de refuerzo. Otras veces lo que está fijo es el ancho, y el proyectista calcula el acero y el peralte. Es muy frecuente que el problema se reduzca a la determinación del acero de una sección de características geométricas dadas. En las vigas continuas, por ejemplo, es común conservar una sección constante en toda la longitud de la viga. Las características de la sección constante se eligen de manera que satisfagan los requisitos de la sección crítica de la viga. En el resto de ella, el problema queda reducido a la determinación del acero necesario. Una situación semejante se presenta en el caso de elementos prefabricados con moldes estándar.

En esta sección se estudia el problema del dimensionamiento de los dos tipos más

comunes de secciones: secciones rectangulares y secciones T. También se dan algunas indicaciones sobre el dimensionamiento de secciones de forma cualquiera. Los métodos de dimensionamiento se ilustran por medio de ejemplos que se comentan en el texto. En general se han seguido las recomendaciones de las NTC-O4 o del Reglamento ACI 318-02.

14.3.1 Secciones rectangulares simplemente armadas

Ejemplo 14.1 Determinación del refuerzo de una sección rectangular simplemente armada, dadas las dimensiones de la sección.

En este ejemplo se considera el caso de la determinación del acero cuando están fijas las dimensiones de la sección. Se proponen tres procedimientos para esta determinación.

El primer procedimiento consiste en la aplicación de una de las ecuaciones de flexión para secciones rectangulares (sección 5.3.3). En este ejemplo se utiliza la ecuación deducida en la figura 5.8 usando las hipótesis del Reglamento ACI 318-02, e incorporando el coeficiente de reducción de resistencia, ϕ:

$$M_u = \phi bd^2 f''_c \, \omega(1-0.59\,\omega) \qquad (14.3)$$

La incógnita de esta ecuación es el valor de ω, por lo que resulta una ecuación de segundo grado. Para resolver el problema es necesario suponer un valor razonable del recubrimiento y calcular de ahí el valor del peralte efectivo, d. Una vez detallado el refuerzo, se verifica si el valor supuesto fue adecuado.

El segundo procedimiento es de tanteos. Consiste en suponer la profundidad del bloque equivalente de esfuerzos y aplicar las ecuaciones de equilibrio de fuerzas y de momentos (sección 5.3.3). Generalmente, para fines prácticos, con dos o tres tanteos se obtiene una aproximación suficiente.

El tercer procedimiento está basado en el empleo de gráficas. En este ejemplo se usó la gráfica del apéndice A, que representa la ecuación deducida en la figura 5.8 para la determinación de resistencias nominales. Esta gráfica puede emplearse para obtener valores de ω correspondientes a los momentos resistentes de diseño si se utiliza el valor de M_u dividido por el factor de reducción, ϕ. Así, a partir de los datos del problema se calcula el valor de la ordenada, $M_u / \phi bd^2 f''_c$, con la que se puede obtener en la gráfica el valor correspondiente de ω en el eje de las abscisas.

El apéndice A incluye una gráfica análoga basada en las hipótesis de las NTC-04. Por medio de tablas como las del Apéndice B, pueden obtenerse directamente las cuantías de acero, p, a partir de los valores de M_u/bd^2. Estas tablas, basadas en las NTC, fueron propuestas en la referencia 14.12 y han sido actualizadas para tomar en cuenta los cambios en el bloque equivalente de esfuerzos vigentes desde 2002. Abarcan varias combinaciones de valores de f''_c y f_y. Los resultados obtenidos con ellas incluyen la influencia del factor de reducción F_R. Otras ayudas semejantes pueden encontrarse en los manuales.

El porcentaje de acero calculado por alguno de los procedimientos anteriores debe estar comprendido entre ciertos límites, según se ha señalado anteriormente. En este ejemplo, el límite inferior se determinó siguiendo los criterios del Reglamento ACI. El límite superior se determinó de dos maneras. Primero, se siguió lo establecido en el Reglamento ACI para limitar la deformación unitaria del acero de tensión más alejado del eje neutro a un mínimo de 0.004 (ver sección 5.4.1). Para esto, se calculó dicha deformación a partir de la profundidad del bloque equivalente y del eje neutro obtenidas en el procedimiento por tanteos. De esta manera se obtuvo un valor de ϵ_s de 0.00956, mayor que el mínimo permisible, lo que garantiza que el acero esté fluyendo en forma clara. Esta manera de determinar el acero máximo tiene la desventaja de que es

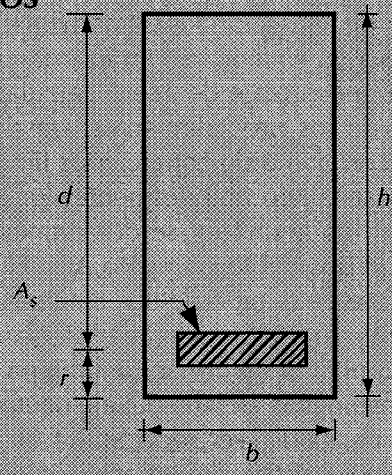
necesario conocer la profundidad del bloque equivalente, la que no se obtiene por el método de ecuaciones o de la gráfica del apéndice A. Por ello se determinó también a partir de calcular la relación balanceada, ρ_b. En secciones rectangulares con acero de tensión en el lecho inferior únicamente, lo cual es común, la disposición del Reglamento ACI se cumple si la relación de refuerzo es menor a 0.7 ρ_b. Esta manera de calcular el límite máximo es más expedita. Así se hizo en el ejemplo, y se ve que también se cumple ampliamente. Cuando el porcentaje resulta menor que el mínimo, debe colocarse acero adicional para alcanzar dicho valor, aunque no se precise dicho acero por requisitos de resistencia. Cuando resulta mayor que el máximo, debe aumentarse la sección y, si esto no es posible, debe colocarse refuerzo de compresión, el cual aumenta la ductilidad (figura 5.4).

Una vez determinada el área teórica de acero, se escoge una combinación de barras con las cuales se obtenga un área que se aproxime lo más posible al área calculada. Para obtener una combinación conveniente son útiles ayudas de diseño de manuales como la referencia 14.4. El detallado se facilita también por tablas que dan los anchos mínimos para alojar determinado número de barras, como las proporcionadas en el manual citado y otros semejantes.

El armado propuesto se ajusta a las especificaciones del Reglamento ACI sobre los recubrimiento~y espaciamientos. Al revisar el recubrimiento, r, correspondiente a este armado, se comprobó que era superior al supuesto inicialmente, lo que implica un menor peralte efectivo. Sin embargo, como el área del refuerzo propuesta fue mayor que la calculada, el momento resistente resultó mayor que el requerido.

EJEMPLO 14.1 ***Determinación del refuerzo de una sección rectangular simplemente armada, dadas las dimensiones de la sección.***

DATOS



M_u = 30 ton-m
b = 30 cm
h = 60 cm
A_s = ?

Materiales

Acero: f_y = 4200 kg/cm^2

Concreto: f'_c = 250 kg/cm^2

Estribos del No. 3

Reglamento: ACI 318-02

EJEMPLO 14.1 ***(continuación)***

CÁLCULO DEL ÁREA DE ACERO

Primer procedimiento

Determinación del refuerzo mediante fórmula:

$$M_u = \phi b d^2 f'_c \ \omega(1 - 0.59\ \omega)$$

$$\frac{M_u}{\phi b d^2 f'_c} = \omega\ (1 - 0.59\ \omega)$$

Suponer recubrimiento $r = 6$ cm; por tanto, $d = 54$ cm

$$\frac{M_u}{\phi b d^2 f'_c} = \frac{30 \times 10^5}{0.9 \times 30 \times 54^2 \times 250} = 0.1524$$

$$0.1524 = \omega(1 - 0.59\ \omega)$$

$$\omega^2 - 1.695\ \omega + 0.2583 = 0$$

$$\omega = 0.169$$

$$\rho = \omega \frac{f'_c}{f_y} = 0.169\ \frac{250}{4200}$$

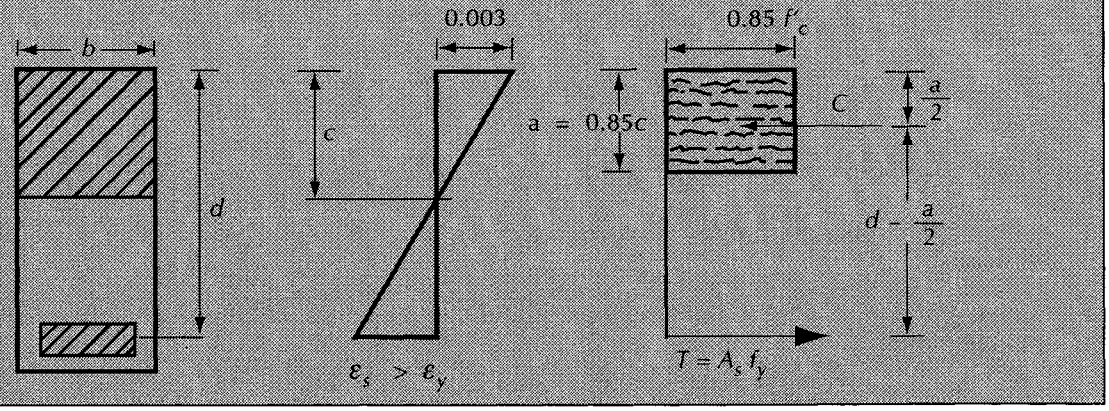
$$\rho = 0.0101$$

$$A_s = \rho b d = 0.0101 \times 30 \times 54$$

$$A_s = 16.4\ \text{cm}^2$$

Segundo procedimiento

Determinación del refuerzo por tanteos:



EJEMPLO 14.1 ***(continuación)***

$$C = 0.85\, f'_c\, ab \quad ; \quad T = A_s f_y$$

De $C = T$:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85\, f'_c\, b} \qquad \text{(ecuación A)}$$

De $M_u = \phi\, A_s f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)$:

$$A_s = \frac{M_u}{\phi\, f_y \left(d - \frac{a}{2}\right)} \qquad \text{(ecuación B)}$$

Primer tanteo: $a = 9$ cm

Sustituyendo en la ecuación B:

$$A_s = \frac{30 \times 10^5}{0.9 \times 4200\,(54 - 4.5)} = 16 \text{ cm}^2$$

Sustituyendo el valor calculado de A_s en la ecuación A:

$$a = \frac{16 \times 4200}{0.85 \times 250 \times 30} = 10.5 > 9$$

Segundo tanteo: $a = 11$ cm

$$A_s = \frac{30 \times 10^5}{0.9 \times 4200\,(54 - 5.5)} = 16.4 \text{ cm}^2$$

$$a = \frac{16.4 \times 4200}{0.85 \times 250 \times 30} = 10.8 \text{ cm} \simeq 11 \text{ cm}$$

$$\therefore A_s = 16.4 \text{ cm}^2$$

Tercer procedimiento

Cálculo del refuerzo mediante gráficas:

$$\frac{M_u}{\phi\, b d^2 f'_c} = 0.1524$$

EJEMPLO 14.1 ***(continuación)***

De la gráfica del Apéndice A: $\omega = 0.17$

$$\rho = 0.17 \frac{250}{4200} = 0.0101$$

$$A_s = 0.0101 \times 30 \times 54$$

$$A_s = 16.4 \text{ cm}^2$$

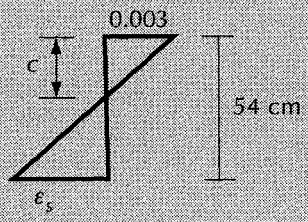
LIMITACIONES DEL REFUERZO

$$\rho_{min} = \frac{0.8 \sqrt{f'_c}}{f_y} \qquad \text{(ecuación 14.1)}$$

$$\rho_{min} = \frac{0.8 \sqrt{250}}{4200} = 0.0030 < (\rho = 0.0101)$$

Deformación unitaria del acero a tensión

Del método de tanteos



a a la falla = 11 cm

$$c = \frac{a}{0.85} = 12.9 \text{ cm}$$

$$\varepsilon_s = \frac{(54 - 12.9)\, 0.003}{12.9} = 0.00956 > 0.004$$

Se cumple con lo señalado en la sección 5.4.1.

Relación balanceada

$$\rho_b = \frac{\beta_1\, 0.85\, f'_c}{f_y} = \frac{6000}{6000 + f_y} \qquad \text{(figura 5.12)}$$

para $f'_c = 250$ kg/cm^2, $\beta_1 = 0.85$

EJEMPLO 14.1 ***(continuación)***

$$\rho_b = \frac{085 \times 0.85 \times 250 \times 6000}{4200\ (6000 + 4200)} = 0.0253$$

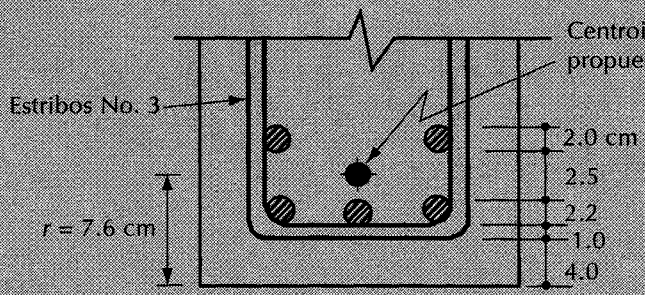
Considerando $\rho_{máx} = 0.70\ \rho_b$:

$$\rho_{máx} = 0.70 \times 0.0253 = 0.0177 > 0.0101$$

$$\rho_{mín} < \rho < \rho_{máx}$$

ELECCIÓN DEL REFUERZO

Armado propuesto: 2 No. 6 + 3 No. 7 = 17.3 cm^2 > 16.4 cm^2



2 No. 6 = 5.7
3 No. 7 = 11.6
A_s = 17.3 cm^2

Revisión

$$r = \frac{11.6 \times 6.1 + 5.7 \times 10.7}{11.6 + 5.7} = 7.6$$

$$d = h - r = 60 - 7.6 = 52.4$$

$$\rho = \frac{A_s}{bd} = \frac{17.3}{30 \times 52.4} = 0.011$$

$$\rho_{mín} < \rho < \rho_{máx}$$

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.011 \times \frac{4200}{250} = 0.1848$$

De la gráfica del Apéndice A:

$$\frac{M_u}{\phi f'_c\, bd^2} = 0.165$$

$$M_u = (0.9 \times 250 \times 30 \times 52.4^2)\ 0.165$$

$$= 30.6 \times 10^5 \text{ kg-cm} \simeq 30 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

Al elegir las barras deben tenerse en cuenta dos factores de tendencia opuesta. Cuanto mayor sea el diámetro de las mismas, más económica será la mano de obra. Sin embargo, el usar barras de diámetro grande dificulta adaptar la resistencia de las diversas secciones de la viga al diagrama de momentos flexionantes, aumenta las longitudes de traslapes y anclajes y hace más críticos los problemas de agrietamiento.

Ejemplo 14.2 Determinación de las dimensiones y del refuerzo de una sección simplemente armada.

En este ejemplo se ilustra el caso más general, en el cual se conocen el momento flexionante y las resistencias de los materiales, y se trata de determinar las dimensiones de la sección y el área de acero necesaria. El análisis de la ecuación de flexión, según las hipótesis de las NTC-04

$$M_u = F_R\, q\, (1 - 0.5q)\, f''_c\, bd^2 \qquad (14.4)$$

muestra que hay tres variables independientes que intervienen en este problema: b, d y q. (Lo mismo es válido para la ecuación 14.3 basada en la hipótesis del Reglamento ACI 318-02.) Según la forma en que se plantee el problema, y de acuerdo con algún criterio conveniente, se suelen fijar los valores de dos de estas variables y se calcula la tercera de ellas. Una forma común de proceder consiste en suponer un valor de ρ, a partir del cual se determina el valor de q, y el valor de la relación b/d. En casos prácticos puede resultar preferible partir de la relación b/h.

En el ejemplo se ha fijado el valor de p y una relación b/d = 1/2. El valor de ρ que se suponga debe estar comprendido entre los límites inferior y superior permisibles, y debe fijarse atendiendo a consideraciones económicas. En general, para las condiciones de costos prevalecientes en México, los porcentajes pequeños suelen conducir a soluciones más económicas. Si el valor escogido es del orden de 0.35 a 0.50 de ρ_b, o menor, habrá poco riesgo de que las deflexiones sean excesivas. (En el ejemplo se escogió $\rho = 0.50\rho_b$.) Sin embargo, puede suceder que sea necesario lograr secciones esbeltas, por motivos arquitectónicos o para disminuir el peso propio, y entonces conviene usar porcentajes elevados.

El valor de b/d que se suponga, influye considerablemente en el costo de la estructura: mientras más peraltada sea la sección, menor es el consumo de materiales. Sin embargo, el uso de peraltes excesivamente grandes puede llevar a problemas de inestabilidad lateral y a un aumento en el costo de los acabados del edificio, debido al incremento en el espesor de los sistemas de piso. También el costo de la cimbra aumenta con el peralte de la viga. Cuando no existen limitaciones en el peralte, los valores de b/d suelen estar comprendidos entre 1/4 y 1/2, aproximadamente.

En el ejemplo 14.2 se muestra el procedimiento a seguir, mediante el cual se obtuvieron los valores de d = 57 cm y b = 28.5 cm; estos valores son teóricos. Los cálculos se hicieron con la ayuda del Apéndice B. (Véanse las observaciones sobre las tablas de este Apéndice en los comentarios sobre el ejemplo 14.1.)

Para efectos constructivos suelen establecerse dimensiones totales que sean rnúltiplos de 5 cm. La razón de esto es la conveniencia de escoger las dimensiones de los elementos como múltiplos de un módulo dado. Un valor común de este módulo es 5 cm, ya que las dimensiones de los elementos de cimbra frecuentemente son rnúltiplos de este valor.

En el ejemplo 14.2 se muestra un croquis con la sección final propuesta. En general, los valores finales de ρ y d resultan ligeramente diferentes de los supuestos inicialmente.

EJEMPLO 14.2 ***Determinación de las dimensiones y del refuerzo de una sección simplemente armada.***

DATOS

$M_u = 31$ ton-m

Materiales: Concreto: $f'_c = 250$ kg/cm^2

Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Reglamento: NTC-04

Observaciones: escoger las dimensiones de manera que la relación b/d sea aproximadamente igual a 1/2. Suponer que se usarán estribos del No. 3.

CÁLCULO DE b, d y A_S

$$\rho_b = \frac{f''_c}{f_y} \times \frac{6000\,\beta_1}{f_y + 6000} \qquad \text{(ecuación 5.2)}$$

$$f''_c = 0.85\,f^*_c = 0.85 \times 0.80 f'_c = 170\ \text{kg/cm}^2$$

$$0.65 \le \beta_1 \le \left(1.05 - \frac{f^*_c}{1400}\right) \le 0.85 \qquad \text{(ver figura 5.7)}$$

$$1.05 - \frac{0.8 \times 250}{1400} = 0.907$$

$$\beta_1 = 0.85$$

$$\rho_b = \frac{170 \times 6000 \times 0.85}{4200\,(4200 + 6000)} = 0.0202$$

Suponiendo $\rho = 0.5\ \rho_b$

$$\rho = 0.5 \times 0.0202 = 0.0101$$

Utilizando el Apéndice B para $f_y = 4200$ kg/cm^2 y $f'_c = 250$ kg/cm^2:

Para $\rho = 0.0101 \rightarrow \dfrac{M_u}{bd^2} = 33.4$

$$bd^2 = \frac{M_u}{33.4} = \frac{31 \times 10^5}{33.4} = 92{,}814$$

EJEMPLO 14.2 ***(continuación)***

Si $b = \frac{d}{2}$ entonces: $\frac{d^3}{2} = 92{,}814$

$d = 57$ cm, $b = 28.5$

Considerando un recubrimiento de 6 cm:

$h = 57 + 6 = 63$ cm

Se propone una sección con las siguientes características:

$b = 30$ cm
$h = 65$ cm
$d = 59$ cm

Ajuste del área de acero:

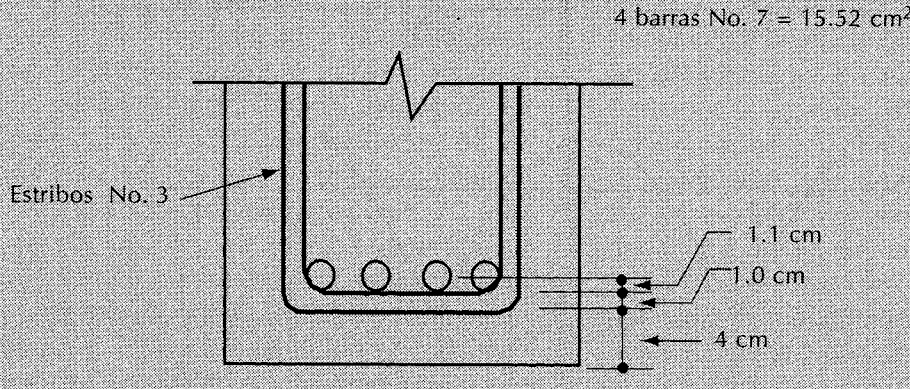
Utilizando el Apéndice B:

$$\frac{M_u}{bd^2} = \frac{31 \times 10^5}{30 \times 59^2} = 29.7 \rightarrow \rho \simeq 0.0088$$

$A_s = 0.0088 \times 30 \times 59 = 15.58$ cm^2

$A_s = 15.58$ cm^2

ARMADO PROPUESTO



$r = 4 + 1 + 1.1 = 6.1$ cm

$\therefore d = 65 - 6.1 = 58.9 \simeq 59$ cm

14.3.2 Secciones rectangulares doblemente armadas

Puede suceder que una sección rectangular cuyas dimensiones hayan sido fijadas por alguna restricción funcional no pueda soportar, como sección simplemente armada, el momento a que está expuesta sin violar los requisitos de ductilidad mencionados en la sección 5.4. En tal caso, la capacidad de la sección puede aumentarse adicionando acero de compresión e incrementando el acero de tensión. Una manera de hacer esto según las indicaciones del ACI 318-02 se ilustra en el ejemplo 14.3. Puede seguirse un procedimiento semejante si se aplican las especificaciones de las NTC-04.

El acero de compresión también es útil para reducir deflexiones, como se señaló en el capítulo 11. La determinación de acero de compresión utilizado exclusivamente para controlar las deflexiones, depende de los requisitos de deformación que se hayan establecido.

A veces una sección tiene refuerzo de compresión por motivos ajenos a la resistencia o al control de deformaciones. Éste es el caso, por ejemplo, de la viga continua de la figura 14.4. Los reglamentos exigen que parte del acero positivo requerido en las zonas centrales de los claros se prolongue a los apoyos. En los apoyos interiores el momento es negativo, de manera que la parte inferior de la sección, por donde pasan las barras prolongadas, está en compresión. Estas barras pueden aprovecharse para aumentar resistencia cuando es necesario utilizar una sección cuya resistencia como simplemente armada es insuficiente. Sin embargo, cuando existe libertad para escoger dimensiones, este tipo de solución resulta antieconómica por implicar un alto consumo de acero y conducir a un congestionamiento del refuerzo que dificulta el colado. Esto es aplicable no sólo al ejemplo de las secciones de los apoyos de vigas sino también al dimensionamiento de vigas continuas en general.

Cuando se utiliza acero de compresión por razones ajenas a la resistencia, no es práctico considerar su efecto en la determinación del refuerzo principal de tensión, ya que dicho efecto es despreciable, como se indica en la sección 5.2. En estos casos, la viga puede tratarse como simplemente armada.

Ejemplo ***14.3*** Determinación del refuerzo en una sección rectangular doblemente armada de dimensiones dadas.

En este ejemplo se determinan las áreas de tensión y de compresión de una sección de dimensiones dadas. Siguiendo las indicaciones

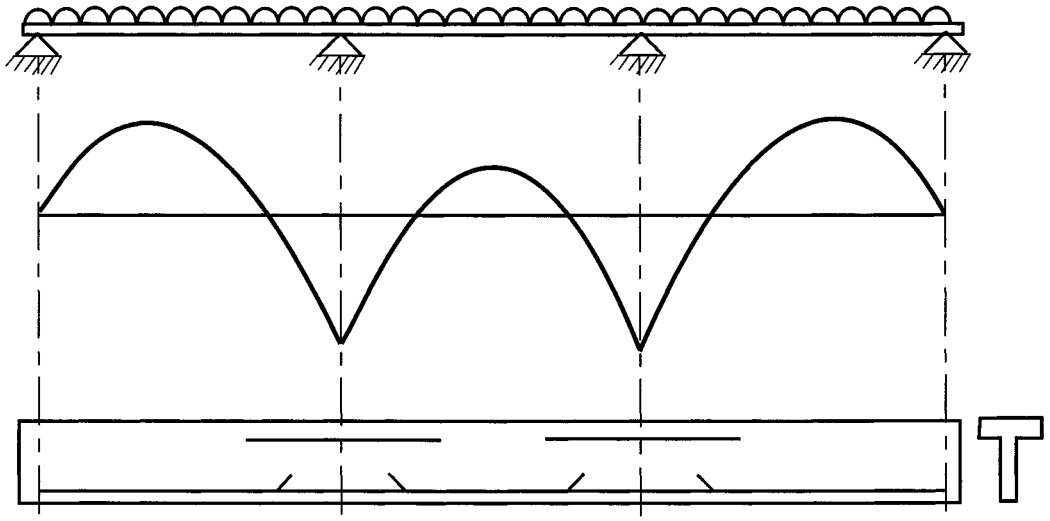


Figura 14.4 Armado típico de una viga continua.

del Reglamento ACI 318-02 se establece que el acero de tensión no debe exceder del dado por la siguiente expresión:

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\, bd + \frac{A'_s f'_s}{f_y} \qquad (14.5a)$$

donde $\rho_{máx} = 0.75\ \rho_b$, siendo ρ_b la cuantía de acero para la condición balanceada de una sección rectangular simplemente armada. El esfuerzo del acero de compresión, f'_s, es el correspondiente al estado de deformaciones de la condición balanceada. Si el acero de compresión fluye, la ecuación (14.5*a*) se simplifica, convirtiéndose en

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\, bd + A'_s \qquad (14.5b)$$

Se aprecia que, según el Reglamento citado, no es necesario aplicar el coeficiente de reducción de 0.75 al acero de compresión, dada la naturaleza dúctil de este material. La fundamentación de las ecuaciones 14.5*a* y 14.5*b* se presenta en la sección 5.4.2. El lector puede ver que esta ecuación es equivalente a la ecuación 5.3 de la figura 5.14.

Para mayor sencillez en los cálculos, éstos se efectuaron en función del momento resistente nominal requerido, M_r. Como primer paso en la resolución, se calculó el momento $M_{r\,máx}$ que puede resistir la sección, como si fuese simplemente armada y tuviese una cuantía de acero de tensión igual al 75 por ciento de la relación balanceada. En el ejemplo, este momento resultó de 52.73 ton-m, valor menor que el momento nominal, M_n, que debe resistir la sección (70 ton-m), por lo que es necesario aumentar su resistencia colocando mayor cantidad de refuerzo de tensión y adicionando refuerzo de compresión. Para esto, se determinó la fuerza que resulta de dividir la diferencia entre el momento nominal requerido, M_r, y el momento, $M_{r\,máx}$, definido arriba, por la distancia entre los centroides de los aceros en tensión y compresión. El área de acero de compresión, A'_s, se obtuvo dividiendo esta fuerza por el esfuerzo del acero, que puede estimarse con el diagrama del estado de deformaciones para la condición en estudio en la que la profundidad del eje neutro es igual al 75 por ciento de la profundidad para la condición balanceada. En el ejemplo se comprueba que el acero de compresión fluye, pero puede darse el caso de que esto no suceda y deberá entonces usarse el esfuerzo apropiado. Al esfuerzo de fluencia, f_y, se restó la cantidad 0.85 f'_c para tomar en cuenta el área de concreto desplazada por el acero de compresión. El acero de tensión total se obtuvo dividiendo la fuerza de tensión, que equilibra la resultante de las fuerzas de compresión correspondientes al acero de compresión y al concreto, por el esfuerzo de fluencia del acero.

El armado propuesto con base en estos cálculos se revisó, resultando un momento último ligeramente mayor que el requerido.

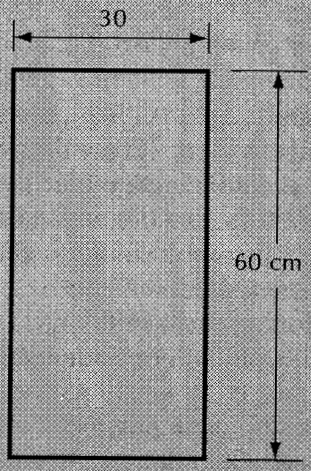
También se revisó el requisito de ductilidad, comprobándose que el acero de tensión propuesto es menor que el máximo admisible, y se comprobó que la deformación unitaria del acero de tensión, en la condición de equilibrio del segundo tanteo, es mayor que la mínima que acepta el Reglamento ACI de 0.004.

Los cálculos del ejemplo se basaron, en general, en la aplicación directa de principios básicos con la ayuda de diagramas de estados de deformación. En el siguiente ejemplo se ilustra la utilización para fines de diseño de las ecuaciones obtenidas en la figura 5.9.

Para restringir la tendencia al pandeo de las barras de compresión, es necesario confinarlas por medio de refuerzo transversal. Según el Reglamento ACI 318-02, los estribos utilizados con este fin deben ser por lo menos del No. 3 o del No. 4 si se usan barras del No. 11 o mayores, y su separación no debe ser inferior a 16 veces el diámetro de las barras principales, 48 veces el diámetro de los estribos, o la menor dimensión de la sección transversal de la viga.

EJEMPLO 14.3 ***Determinación del refuerzo de una sección rectangular doblemente armada de dimensiones dadas.***

DATOS



M_u = 63 ton-m

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\, db + \frac{A'_s f'_s}{f_y} \qquad \text{(ecuación 14.5}a\text{)}$$

$\rho_{máx} = 0.75\ \rho_b$

Materiales: Acero: $f_y = 4200$ kg/cm²

Concreto: $f'_c = 250$ kg/cm²

Estribos del No. 3

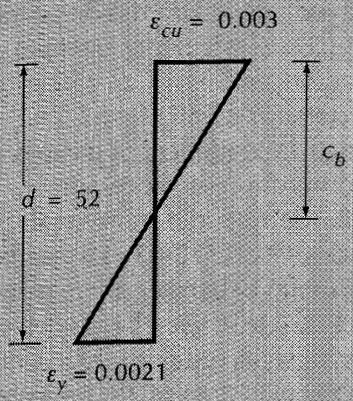
Reglamento: ACI 318-02

RESISTENCIA NOMINAL REQUERIDA

$$M_n = \frac{M_u}{\phi} = \frac{63}{0.9} = 70 \text{ ton} - \text{m}$$

CAPACIDAD MÁXIMA COMO SECCIÓN SIMPLEMENTE ARMADA

Suponer un recubrimiento r = 8 cm



$\therefore d = 60 - 8 = 52$ cm

$$\varepsilon_y = \frac{f_y}{E_s} = \frac{4200}{2 \times 10^6} = 0.0021$$

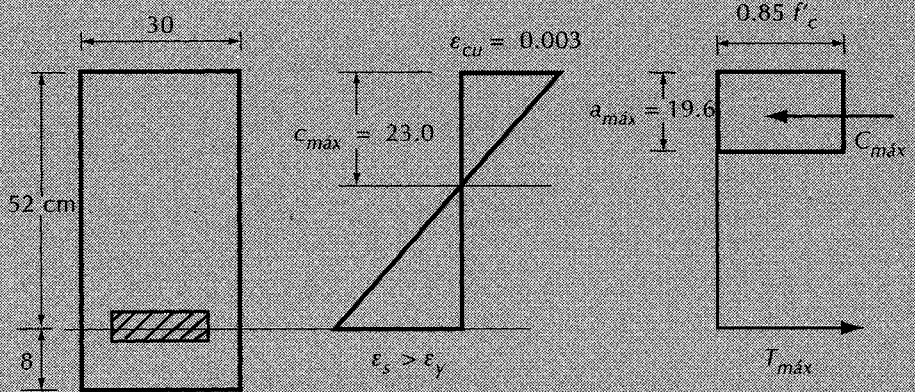
$$c_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y}\, d = \frac{0.003}{0.003 + 0.0021} \times 52$$

$c_b = 30.6$ cm

$c_{máx} = 0.75\ c_b = 23.0$ cm

$a_{máx} = \beta_1\, c_{máx} = 0.85 \times 23 = 19.6$ cm

EJEMPLO 14.3 *(continuación)*



$$C_{máx} = 0.85\, f'_c\, a_{máx}\, b = 0.85 \times 250 \times 19.6 \times 30$$

$$C_{máx} = 124{,}950 \text{ kg}$$

Cálculo de capacidad máxima como sección simplemente armada:

$$M_{n\,máx} = C_{máx}\left(d - \frac{a_{máx}}{2}\right)$$

$$M_{n\,máx} = 124{,}950\left(52 - \frac{19.6}{2}\right) = 5{,}273{,}000 \text{ kg} - \text{cm}$$

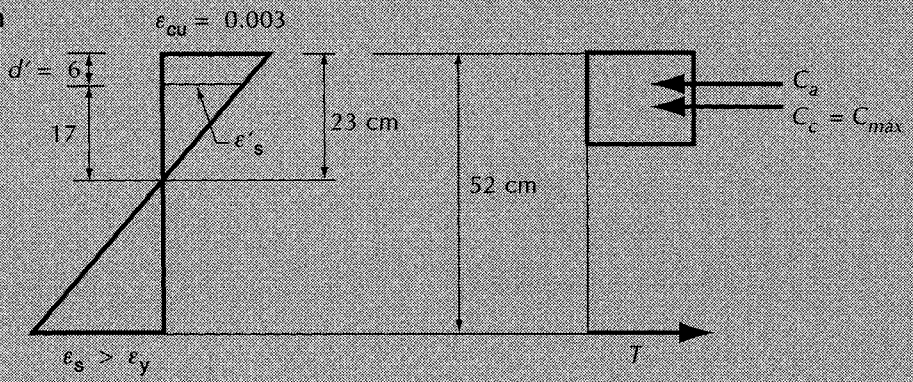
$$M_{n\,máx} = 52.73 \text{ ton-m}$$

$$M_{n\,máx} < M_n = 70 \text{ ton-m}$$

$\therefore$ se requiere acero de compresión.

DETERMINACIÓN DEL ACERO DE COMPRESIÓN

Suponer $d' = 6$ cm



$$M_{na} = M_n - M_{máx} = 70 - 52.73 = 17.27 \text{ ton-m}$$

$$C_a = \frac{M_{na}}{d - d'} = \frac{17.27 \times 10^5}{52 - 6} = 37{,}540 \text{ kg}$$

EJEMPLO 14.3 *(continuación)*

Esfuerzo en el acero de compresión

$$\varepsilon'_s = 0.003\,\frac{23-6}{23} = 0.0022 > \varepsilon_y$$

$$\therefore\ f'_s = f_y = 4200\ \text{kg/cm}^2$$

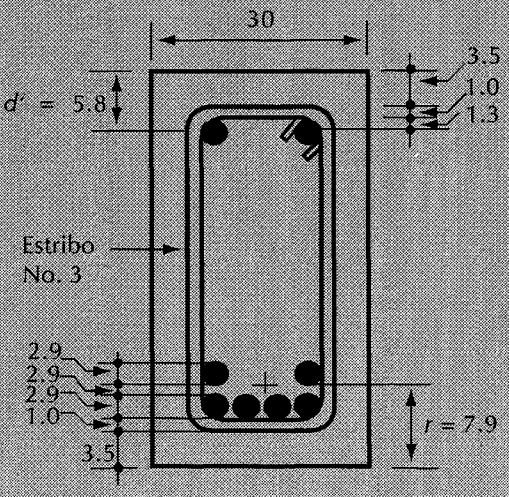
$$A'_s = \frac{C_a}{f_y - 0.85\,f'_c} = \frac{37{,}540}{4200 - 0.85 \times 250} = 9.41\,\text{cm}^2$$

ACERO DE TENSIÓN TOTAL

$$T = C_{máx} + C_a = 124{,}950 + 37{,}540 = 162{,}490\ \text{kg}$$

$$A_s = \frac{162{,}490}{4200} = 38.7\ \text{cm}^2$$

ARMADO PROPUESTO



Acero en compresión:
2 barras No. 8 = 10.2 cm^2 > 9.4

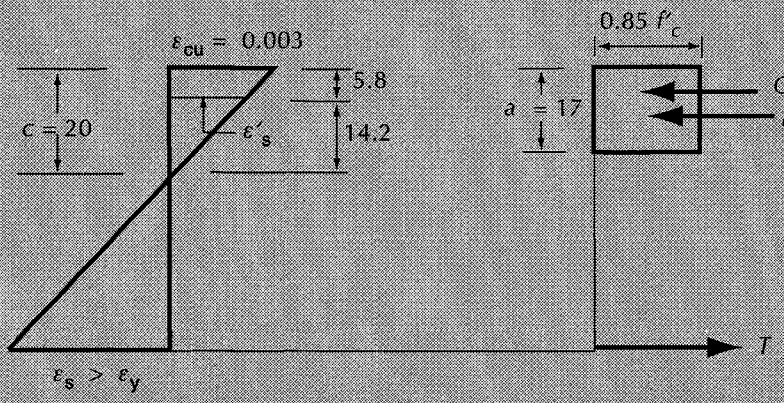
Acero en tensión:
6 barras No. 9 = 38.5 cm^2 ≈ 38.7 cm^2

$$r = \frac{25.7 \times 6 + 12.8 \times 11.8}{38.5} = 7.9\ \text{cm}$$

EJEMPLO 14.3 *(continuación)*

REVISIÓN

Primer tanteo: $c = 20$ cm; $a = 0.85c = 17$ cm



$$\varepsilon'_s = \frac{0.003 \times 14.2}{20} = 0.0021 = \varepsilon_y$$

$$\therefore f'_s = f_y = 4200 \text{ kg/cm}^2$$

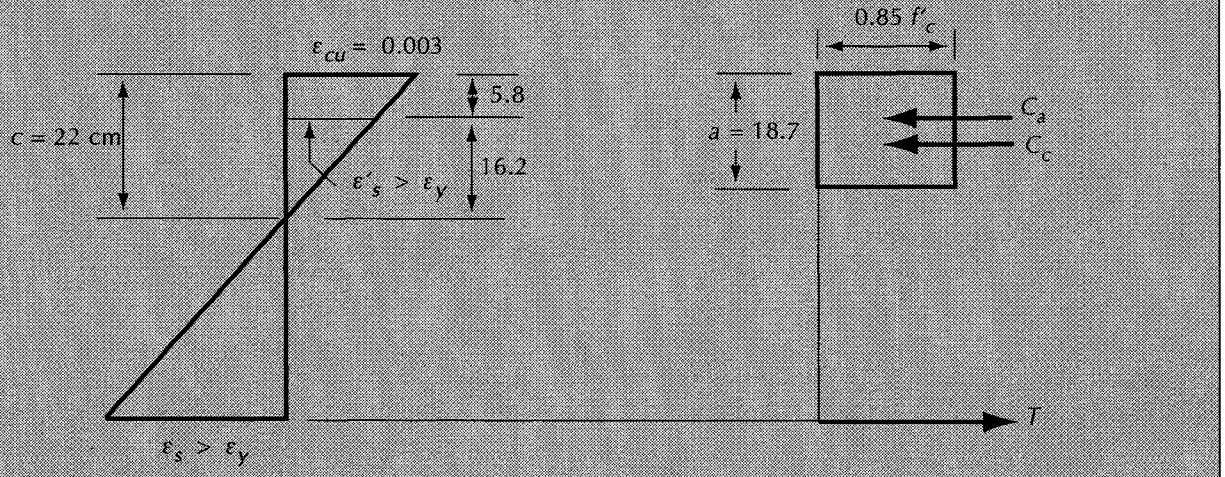
$$C_a = A'_s f_y = 10.2 \times 4200 = 42{,}840 \text{ kg}$$

$$C_c = 0.85\, f'_c\, ab = 0.85 \times 250 \times 17 \times 30 = 108{,}380 \text{ kg}$$

$$C = C_a + C_c = 151{,}220 \text{ kg}$$

$$T = A_s f_y = 38.5 \times 4200 = 161{,}700 \text{ kg} > 151{,}220 \text{ kg}$$

Segundo tanteo: $c = 22$ cm; $a = 0.85c = 18.7$ cm



EJEMPLO 14.3 *(continuación)*

$$C_a = A'_s f_y = 10.2 \times 4200 = 42{,}840 \text{ kg}$$

$$C_c = 0.85\, f'_c\, ab = 0.85 \times 250 \times 18.7 \times 30 = 119{,}210 \text{ kg}$$

$$C = C_a + C_c = 162{,}050 \text{ kg}$$

$$T = A_s f_y = 38.5 \times 4200 = 161{,}700 \text{ kg} \simeq 162{,}050$$

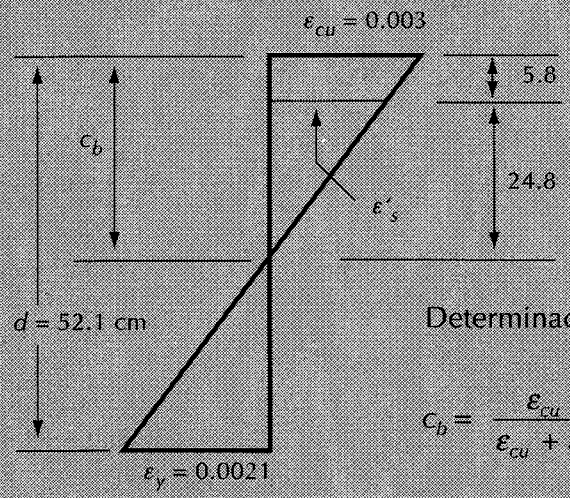
Cálculo del momento

Fuerzas (ton)	*Brazos (m)**	*Momento (ton-m)*
$C_a = 42.84$	0.242	10.37
$C_c = 119.21$	0.207	24.68
$T = 161.70$	0.221	35.74
		$M_n = 70.79$ ton-m

$$M_u = \phi M_n = 0.9 \times 70.79 = 63.71 \text{ ton-m} \simeq 63 \text{ ton-m}$$

*Los brazos se tomaron con respecto a un eje que pasa por el medio peralte.

REVISIÓN DE LA DUCTILIDAD



Determinación de f'_s para la condición balanceada

$$c_b = \frac{\varepsilon_{cu}}{\varepsilon_{cu} + \varepsilon_y}\, d = \frac{0.003}{0.003 + 0.0021}\, 52.1 = 30.6 \text{ cm}$$

EJEMPLO 14.3 ***(continuación)***

$$\varepsilon'_s = 0.003\,\frac{24.8}{30.6} = 0.0024 > \varepsilon_y$$

$\therefore f'_s = f_y$ y puede usarse la ecuación 14.5*b*:

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\,db + A'_s$$

$$\rho_{máx} = 0.75\,\rho_b = 0.75\left(\frac{0.85\,f'_c\,\beta_1}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y}\right)$$

$$= \frac{0.6375\,f'_c\,\beta_1}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y}$$

$$= \frac{0.6375 \times 250 \times 0.85}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200}$$

$$\rho_{máx} = 0.019$$

$$A_{s\,máx} = 0.019 \times 52.1 \times 30 + 10.2 = 39.9\ \text{cm}^2 > 38.5\ \text{cm}^2$$

Deformación en el acero de tensión en el segundo tanteo:

$$\varepsilon_s = \frac{30 \times 0.003}{22} = 0.0041 > 0.004$$

Ejemplo 14.4 Determinación del refuerzo en una sección doblemente armada usando ecuaciones y el sistema SI.

Según los datos del problema, la sección debe resistir un momento de 315×10^6 N·mm y se deben usar las NTC-04.

En primer término se revisa si la sección puede resistir el momento con acero de tensión únicamente. Se encuentra que el momento nominal máximo que puede resistir la sección, usando el área máxima de acero permisible, es de 265×10^6 N·mm. Este momento es menor que el momento nominal aplicado, el que a su vez es igual al momento último dividido entre el factor de carga, F_R, correspondiente a flexión. Por lo tanto, sí se requiere acero de compresión.

El acero de compresión necesario se determina igual que en el ejemplo anterior. La diferencia entre el momento que debe resistir la sección, M, y el momento que puede resistir como simplemente armada, $(M_n)_{máx}$, se divide entre el brazo del par, d-d', para obtener la fuerza de compresión que debe resistir el acero, C_a. El acero de compresión requerido es igual a esta fuerza entre el esfuerzo en el acero, $f_y - f''_c$. Obsérvese que el término f''_c se resta para tomar en cuenta el concreto desplazado por el acero de compresión, aunque su efecto sea muy pequeño. Al calcular el

acero de compresión de esta manera se está suponiendo que alcanza su límite de fluencia, lo cual hay que verificar posteriormente.

El acero de tensión total es igual al máximo correspondiente a sección simplemente armada más una cantidad igual al acero de compresión. En un croquis se muestra el armado propuesto. El recubrimiento d' resultó igual al propuesto en los datos, 40 mm, pero el peralte efectivo es un poco menor. Por otra parte, las áreas de acero son ligeramente superiores a las teóricas.

A continuación se revisa si efectivamente fluye el acero de compresión. Esto se hace calculando la deformación unitaria de este acero, ε'_s, con la ecuación obtenida en la figura 5.9. Obsérvese que las ecuaciones de esta figura son válidas también para las NTC, ya que las hipótesis del bloque equivalente son iguales; únicamente hay que cambiar 0.85 f'_c por f''_c.

EJEMPLO 14.4 ***Determinación del refuerzo en una sección doblemente armada usando ecuaciones. Sistema SI.***

DATOS

$M_u = 315 \times 10^6$ N · mm

Dimensiones de la sección:

$b = 250$ mm, $h = 500$ mm, $d = 450$ mm, $d' = 40$ mm

Materiales:

concreto: $f'_c = 25$ MPa, $f^*_c = 0.8\, f'_c = 20$ MPa
acero: $f_y = 400$ MPa

Reglamento: NTC-04, $\rho_{máx} = 0.75\, \rho_b$

CAPACIDAD MÁXIMA COMO SECCIÓN SIMPLEMENTE ARMADA

Relación balanceada:

$$\rho_b = \frac{f''_c}{f_y} \cdot \frac{600\,\beta_1}{f_y + 600}$$ (ecuación 5.2 en sistema SI)

$f''_c = 0.85 \times 20 = 17$ MPa

$\beta_1 = 0.85$, para $f^*_c \leq 28$ MPa

$$\rho_b = \frac{17}{400} \cdot \frac{600 \times 0.85}{400 + 600} = 0.0217$$

$0.75\, \rho_b = 0.0163 = \rho_{máx}$

EJEMPLO 14.4 ***(continuación)***

$$q_{máx} = \frac{\rho_{máx}\, f_y}{f''_c} = \frac{0.0163 \times 400}{17} = 0.38$$

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\, bd = 0.0163 \times 250 \times 450 = 1834 \text{ mm}^2$$

Resistencia nominal requerida:

$$M_n = M_u / F_R = 315 / 0.90 = 350 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Momento resistente con el acero máximo permisible:

$$(M_n)_{máx} = bd^2\, f''_c\, q\,(1 - 0.5\, q) \qquad \text{(ver ejemplo 5.2)}$$

$$(M_n)_{máx} = 250 \times 450^2 \times 17 \times 0.38\,(1 - 0.5 \times 0.38)$$

$$(M_n)_{máx} = 265 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} < 350 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Como el momento que puede resistir la viga es menor que el momento aplicado, se requiere acero de compresión.

DETERMINACIÓN DEL ACERO DE COMPRESIÓN

$$M_{na} = M_n - (M_n)_{máx} = 350 \times 10^6 - 265 \times 10^6 = 85 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

Fuerza en el acero de compresión:

$$C_a = \frac{M_{na}}{d - d'} = \frac{85 \times 10^6}{450 - 40} = 0.207 \times 10^6 \text{ N}$$

Acero de compresión requerido:

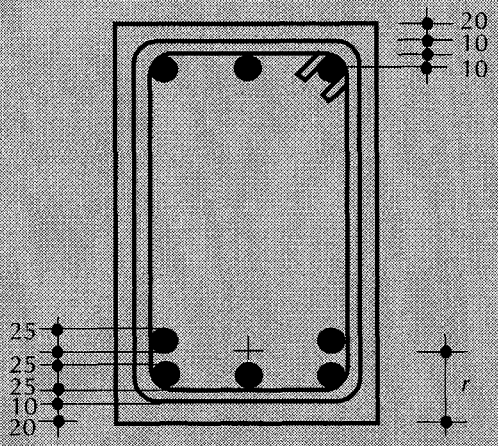
$$\rho_b = \frac{17}{400} \cdot \frac{600 \times 0.85}{400 + 600} = 0.0217$$

Acero de tensión total:

$$A_s = A_{s\,máx} + A'_s = 1834 + 540 = 2374 \text{ mm}^2$$

EJEMPLO 14.4 ***(continuación)***

ARMADO PROPUESTO



Acero en compresión:
2 barras No. 6 + 1 barra No. 4 = 697 mm^2

Acero en tensión:
5 barras No. 8 = 2535 mm^2

$$r = \frac{3 \times 42.5 + 2 \times 92.5}{5} = 62.5 \text{ mm}$$

$$d = 500 - 62.5 = 437.5 \text{ mm}$$

REVISIÓN DE LA FLUENCIA DEL ACERO DE COMPRESIÓN

Profundidad del bloque de compresión:

$$a = \frac{(A_s - A'_s)\, f_y}{f''_c\, b}$$

(equivalente a la ecuación 2 del ejemplo 5.3)

$$a = \frac{(2535 - 697)\, 400}{17 \times 250} = 173 \text{ mm}$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{0.85\, d'}{a}\right)$$

(figura 5.9)

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{0.85 \times 40}{173}\right) = 0.00241 > (\varepsilon_y = 0.0021)$$

EJEMPLO 14.4 ***(continuación)***

REVISIÓN DE LA FLUENCIA DEL ACERO DE TENSIÓN

$$A_{s\,máx} = \rho_{máx}\, bd + A'_s \qquad \text{(ecuación 14.5}b\text{)}$$

$$A_{s\,máx} = 0.0163 \times 250 \times 437.5 + 697$$

$$A_{s\,máx} = 2480 \text{ mm}^2 < 2535 \text{ mm}^2$$

Conviene aumentar el acero de compresión. Si se usan 3 barras No.6:

$$A_{s\,máx} = 0.0163 \times 250 \times 437.5 + 855$$

$$A_{s\,máx} = 2634 \text{ mm}^2 > 2535 \text{ mm}^2$$

REVISIÓN DEL MOMENTO RESISTENTE

$$a = \frac{(A_s - A'_s)\, f_y}{f''_c\, b} = \frac{(2535 - 855)\, 400}{17 \times 250} = 158 \text{ mm}$$

$$\varepsilon'_s = 0.003 \left(1 - \frac{0.85 \times 40}{158}\right) = 0.00235 > (\varepsilon_y = 0.0021)$$

Se está en el caso 1 de la figura 5.9

$$M_n = A'_s\, f_y\, (d - d') + (A_s - A'_s)\, f_y \left(d - \frac{a}{2}\right) \qquad \text{(ecuación 1, fig. 5.9)}$$

$$M_n = 855 \times 400\, (437.5 - 40) + (2535 - 855)\, 400 \left(437.5 - \frac{158}{2}\right)$$

$$M_n = 376.8 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

$$M_u = 0.9\, M_n = 339 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} > 315 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm}$$

También puede obtenerse esta deformación por triángulos semejantes a partir del diagrama de deformaciones unitarias de la sección transversal, como se hizo en el ejemplo anterior. En el ejemplo, el acero de compresión sí fluye, ya que ε'_s resulta mayor que ε_y. No es necesario que el acero de compresión tenga que fluir, pero si no fluye, debe tomarse en cuenta esta situación al revisar el momento resistente.

Después se revisa si el acero de tensión proporcionado no excede el máximo permisible. Esto se lleva a cabo con la ecuación 15.4*b*. Se obtiene en el ejemplo que el área proporcionada resulta mayor que la máxima permisible. Esta situación sí debe corregirse, porque significa que no se cumpla la condición de que la relación de refuerzo, p, sea menor que el 75 por ciento de p balanceada. La corrección se logra aumentando ligeramente el acero de compresión. Con esto se aumenta la resistencia más allá de lo necesario, pero se garantiza la ductilidad requerida.

Finalmente se revisa el momento resistente. Como se incrementó el acero de compresión de acuerdo con lo señalado en el párrafo anterior, se volvió a verificar si alcanzaba su límite de fluencia. Se encontró que tal era el caso, por lo que el momento resistente se calculó con la ecuación correspondiente al caso 1 de la figura 5.9. Si no hubiese sido así, se tendría que haber calculado con las ecuaciones 4, 6 y 7, correspondientes al caso 2, de la misma figura.

14.3.3 Secciones T

Uno de los sistemas de piso más comúnmente utilizados en estructuras de concreto, consiste en vigas que soportan losas de concreto coladas monolíticamente con ellas. Se forman así las llamadas vigas T. Si se .trata de vigas libremente apoyadas, las reglas empíricas de la tabla 11.4, que fijan relaciones peralte/claro, pueden servir para una estimación preliminar de dimensiones. Muy frecuente es el caso de las vigas continuas, como la de la figura 14.4, en el que las dimensiones de la nervadura quedan generalmente determinadas por los requisitos de momento negativo y de fuerza cortante en los apoyos, donde la viga debe dimensionarse como viga rectangular. El espesor del patín depende del diseño de la losa. En las porciones centrales, sujetas a momento positivo, donde la viga actúa como sección T, el problema se reduce, entonces, a determinar el refuerzo necesario en una sección de dimensiones conocidas. Éste es el caso que se ilustra en el ejemplo 14.5.

*Ejemplo **14.5*** Determinación del refuerzo de una sección T de dimensiones dadas.

En este ejemplo se ilustra un procedimiento para determinar el área de acero necesaria en una viga de sección T, cuando se conocen la geometría, el momento flexionante y las resistencias de los materiales. La viga del ejemplo es parte de un sistema de piso formado por varias vigas T con una losa en la parte superior. Esta losa es la que actúa como patín de la viga T. La solución propuesta está basada en las indicaciones de las NTC-04.

El primer paso en la resolución del problema, es la determinación del ancho efectivo del patín, o sea, el tramo de losa que forma parte del área de concreto sujeta a compresión. La determinación precisa de este ancho es un problema complejo. En Teoría de la Elasticidad se han obtenido soluciones para vigas de materiales lineales. En el caso de vigas de concreto reforzado se suele determinar el ancho efectivo mediante recomendaciones de reglamento. Así, en las NTC-04, al igual que en el Reglamento ACI 318-02, se especifica que el ancho efectivo es el menor de los tres valores mostrados en el ejemplo, que, para este caso particular, es la separación centro a centro de las vigas. Esta manera de determinar el ancho efectivo es aproximada.

Para determinar el área de acero se sigue un procedimiento de tanteos como el ilustrado en este ejemplo. Dicho procedimiento

consiste en suponer un valor tentativo del brazo del par interno, z. Como primera aproximación puede utilizarse un valor de 0.9 d o de $(d - t/2)$. Generalmente con ambas expresiones se obtienen valores muy semejantes. En el ejemplo se usó la primera.

A partir del valor tentativo de z, se calculó el área de acero necesaria, suponiendo que el acero de refuerzo fluye, o sea, que la sección es subreforzada. De esta manera se obtuvo un área de 32.5 cm^2. La fuerza de tensión que puede desarrollarse con esta área de refuerzo es de 136,500 kg. Por equilibrio de la sección transversal, la fuerza de compresión en el concreto debe tener este mismo valor.

El siguiente paso consistió en determinar si la fuerza de compresión necesaria para el equilibrio alcanza a desarrollarse dentro del patín, o si es necesaria la contribución del alma de la viga. Si sucede lo primero, el eje neutro cae dentro del patín y la viga es equivalente a una de sección rectangular en la cual se ha eliminado el concreto que está a tensión. Puesto que en los cálculos por flexión generalmente se desprecia la contribución del concreto sujeto a tensión, el procedimiento que se sigue en este primer caso es exactamente el mismo que se seguiría para una viga de sección rectangular con un ancho igual al ancho efectivo del patín.

Cuando la fuerza de compresión no alcanza a desarrollarse dentro del patín, el eje neutro cae dentro del alma y la viga es realmente una viga T. En el ejemplo se presenta esta situación, ya que la fuerza total de compresión requerida es 136,500 kg, mientras que la fuerza que puede desarrollarse en el patín es únicamente 108,800 kg.

En la mayoría de los casos prácticos, el eje neutro cae dentro del patín y la viga se dimensiona como viga rectangular por alguno de los procedimientos ya expuestos. Sin embargo, en el ejemplo los datos se plantearon de tal manera que la viga fuese de sección T, con objeto de ilustrar el procedimiento que se sigue en estos casos.

Las fuerzas de compresión en el patín y en el alma se calcularon usando el bloque rectangular de esfuerzos equivalentes aceptado en las NTC-04 (figura 5.7). Los resultados que se obtienen de esta manera son suficientemente precisos para vigas T, aunque existe un cambio brusco en el ancho de la sección transversal en la unión del patín con el alma. Un procedimiento más preciso consiste en la utilización del diagrama real esfuerzo-deformación del concreto, usando anchos variables de la sección transversal al calcular los volúmenes de esfuerzos, en la forma descrita en el capítulo 5. Si se usa el bloque rectangular de esfuerzos, sucede en algunos casos que la fuerza de compresión alcanza a desarrollarse dentro del patín, aunque el eje neutro cae dentro del alma. Esto ocurre cuando el eje neutro queda ligeramente debajo del patín. En estos casos, la viga puede dimensionarse como si fuese rectangular, aunque el eje neutro esté dentro del alma, puesto que la influencia de esta simplificación es despreciable.

Una vez determinadas en el ejemplo las fuerzas de compresión en el patín y en el alma, se calculó la posición del punto de aplicación de la resultante de estas fuerzas, o sea, de la fuerza total de compresión. Dicho punto de aplicación quedó a 5.5 cm de la cara superior del patín. A continuación se calculó el brazo del par interno, z, que es la distancia entre el centroide del acero de refuerzo y el punto de aplicación de la fuerza de compresión. Este brazo resultó de 41.5 cm, algo menor que el brazo supuesto inicialmente, 42.3 cm. Se efectuó un segundo tanteo con un valor de z = 41 cm. En este tanteo el valor calculado de z = 41.2 cm fue prácticamente igual al supuesto, por lo que no se consideró necesario hacer un nuevo ajuste. Se aprecia que el valor del momento resistente, M_R, determinado suponiendo z = 41.2 cm, es prácticamente igual al valor de M_u requerido. En general, no es necesario efectuar más de un ciclo para ajustar el área de acero, ya que el valor calculado con el valor preliminar de z es suficientemente preciso.

Para proporcionar el acero necesario se propuso un refuerzo consistente en dos barras del No. 8 y tres del No. 10, que dan un área ligeramente superior a la calculada. Se comprobó que el recubrimiento, r, correspondiente a la disposición de las barras adoptadas, es prácticamente igual al valor supuesto en los cálculos iniciales.

A continuación se revisó si el área de acero estaba comprendida entre los valores mínimo y máximo permisibles.

Las NTC-04 no hacen ninguna indicación específica sobre el refuerzo mínimo de secciones T. Por tanto, si se procede con rigor, debe aplicarse la recomendación general de las NTC-04 según la cual el armado mínimo de una viga debe ser el requerido para que el momento resistente de la sección sea por lo menos 1.5 veces el momento de agrietamiento de la sección transformada no agrietada, considerando un módulo de rotura $f_f = 1.4\sqrt{f'_c}$ para concretos clase 2 como el del ejemplo. Los autores consideran que debe tratarse del momento de agrietamiento correspondiente a la sección no agrietada y no al de la sección *transformada* no agrietada. Si se usa este último criterio, el porcentaje mínimo de acero resulta ser función del acero propuesto, cuando debiera ser independiente de este valor. La aplicación literal de las NTC-04 conduce a un procedimiento demasiado laborioso para fijar un límite inferior. En consecuencia, en el ejemplo se ilustra la aplicación del criterio recomendado por los autores.

Puede obtenerse una indicación razonable del acero mínimo conveniente, con las ecuaciones 14.1 o 14.2, utilizando como valor del ancho b, el de la nervadura.

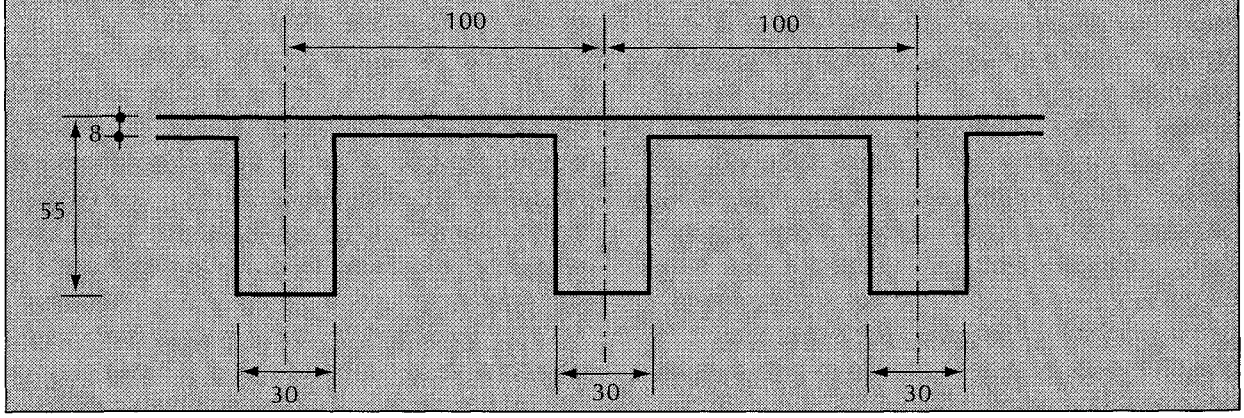
La cantidad máxima de acero permisible se determinó de la manera siguiente. Se obtuvo primero la profundidad del eje neutro, c_b, que corresponde a una viga con porcentaje balanceado del refuerzo. La ecuación para determinar esta profundidad se deduce en la figura 5.12 y es independiente de la forma de la sección transversal, ya que está basada únicamente en condiciones de compatibilidad de deformaciones. El valor de c_b en el ejemplo resultó de 27.6 cm. A partir del valor de c_b se calcula la profundidad del bloque rectangular de esfuerzos, a_b, que fue 23.5 cm. La fuerza de compresión correspondiente a este bloque de esfuerzos fue 172,040 kg y el área de acero necesaria para equilibrar esta fuerza, A_{sb}, fue 41 cm^2, mayor que el área propuesta, por lo que se cumple con el requisito de acero máximo establecido en los datos del problema.

EJEMPLO 14.5 ***Determinación del refuerzo de una sección T de dimensiones dadas.***

DATOS

Geometría

Claro de la viga: $\ell = 9$ m



EJEMPLO 14.5 ***(continuación)***

Acotaciones en cm

Materiales

Concreto: $f'_c = 200$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Momento último requerido

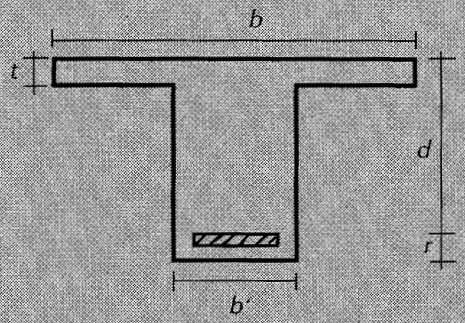
$M_u = 52$ ton-m

Reglamento: NTC-04

Acero máximo

$A_{s\,máx} = A_{sb}$
(A_{sb} = área de acero en condición balanceada)

CÁLCULO DEL ÁREA DE ACERO NECESARIA



Ancho efectivo b, el menor de:

$$\begin{cases} 16\,t + b' = 128 + 30 = 158 \text{ cm} \\ \dfrac{\ell}{4} = \dfrac{900}{4} = 225 \text{ cm} \\ \text{c.a.c.} = 100 \text{ cm} \end{cases}$$

$\therefore\ b = 100$ cm

Peralte efectivo

recubrimiento supuesto: $r = 8$ cm

$d = h - r = 55 - 8$

$d = 47$ cm

Tanteo inicial

Se supone un brazo del par interno, $z \simeq 0.90\,d$

$z = 0.90 \times 47 = 42.3$ cm

$$A_s = \frac{M_u}{F_R f_y z} = \frac{52 \times 10^5}{0.9 \times 4200 \times 42.3} = 32.5 \text{ cm}^2$$

$T = A_s f_y = 32.5 \times 4200 = 136{,}500$ kg

EJEMPLO 14.5 ***(continuación)***

Por equilibrio de fuerzas horizontales:

$$C = T = 136{,}500 \text{ kg}$$

$$C_{patín} = btf''_c$$

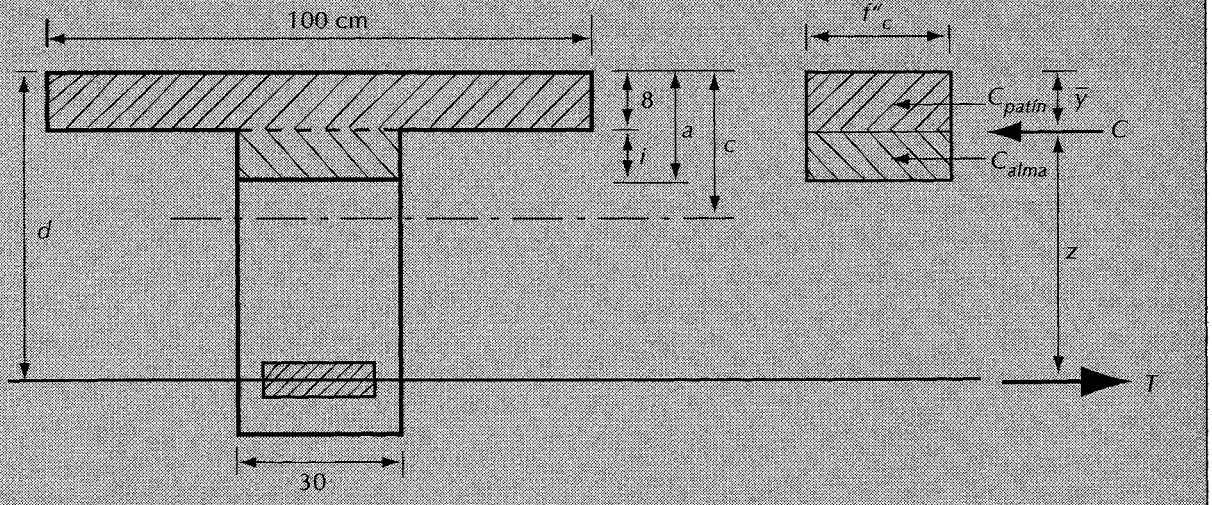
$$f''_c = 0.85\, f^*_c = 0.85\,(0.80\, f'_c)$$

$$= 0.85 \times 0.80 \times 200$$

$$= 136 \text{ kg/cm}^2$$

$$C_{patín} = 100 \times 8 \times 136 = 108{,}800 \text{ kg} < C$$

$\therefore$ la viga es T.



$$C_{alma} = C - C_{patín} = 136{,}500 - 108{,}800 = 27{,}700 \text{ kg}$$

$$C_{alma} = ib' f''_c \; ; \quad i = \frac{C_{alma}}{b' f''_c} = \frac{27{,}700}{30 \times 136}$$

$$i = 6.8 \text{ cm}$$

Punto de aplicación de la fuerza de compresión

$$\bar{y} = \frac{108{,}800 \times 4 + 27{,}700\left(8 + \dfrac{6.8}{2}\right)}{108{,}800 + 27{,}700} = 5.5 \text{ cm}$$

Brazo calculado: $z = d - \bar{y} = 47 - 5.5 = 41.5 < 42.3$

EJEMPLO 14.5 ***(continuación)***

Segundo tanteo: $z = 41$ cm

$$A_s = \frac{52 \times 10^5}{0.9 \times 4200 \times 41} = 33.6 \text{ cm}^2$$

$$C = T = 33.6 \times 4200 = 141{,}120 \text{ kg}$$

$$C_{alma} = 141{,}120 - 108{,}800 = 32{,}320 \text{ kg}$$

$$i = \frac{32{,}320}{30 \times 136} = 7.9 \text{ cm}$$

$$\bar{y} = \frac{108{,}800 \times 4 + 32{,}320\left(8 + \frac{7.9}{2}\right)}{108{,}800 + 32{,}320} = 5.8 \text{ cm}$$

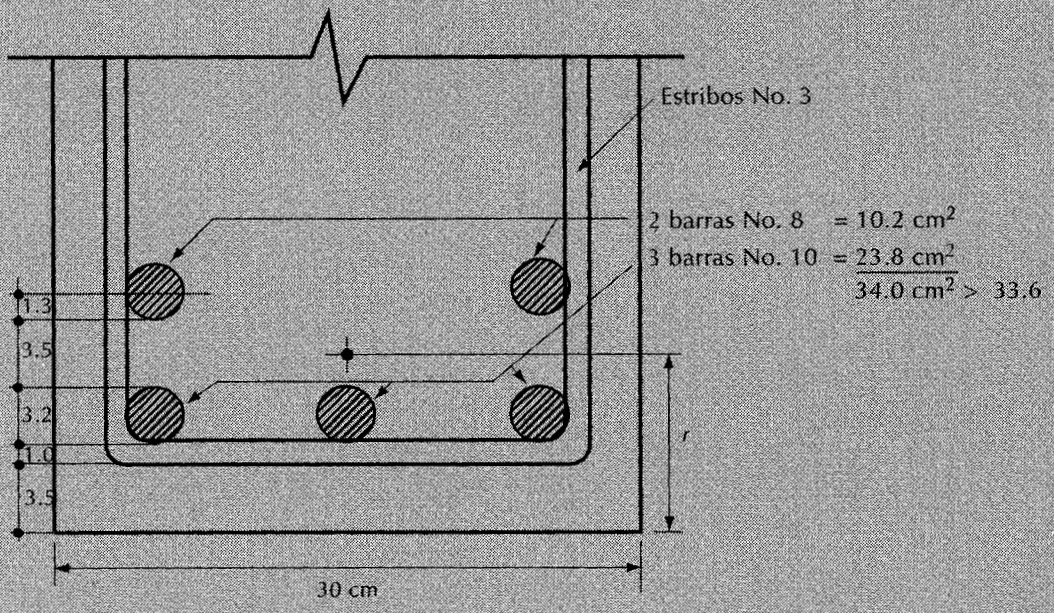
Brazo calculado: $z = 47 - 5.8 = 41.2 \simeq 41$ cm

$$M_R = 0.9 \times 33.6 \times 4200 \times 41.2 = 52.3 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$= 52.3 \text{ ton-m} \simeq M_u = 52 \text{ ton-m}$$

ARMADO PROPUESTO

3 barras No. 10 y 2 barras No. 8:



$$r = \frac{10.2 \times 12.5 + 23.8 \times 6.1}{10.2 + 23.8} = 8.02 \simeq 8 \text{ cm} = r_{supuesto}$$

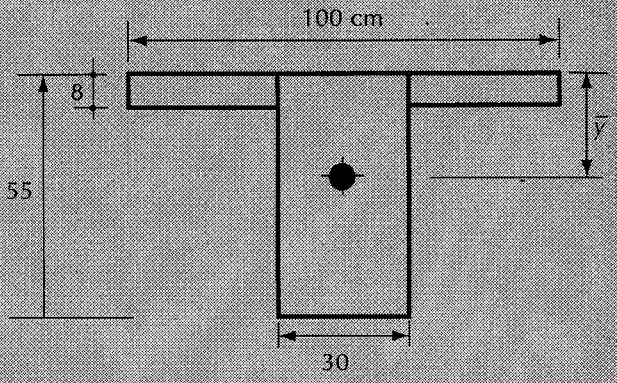
EJEMPLO 14.5 ***(continuación)***

REVISIÓN LIMITACIONES ACERO

Acero mínimo

Momento de agrietamiento

$$M_{ag} = \tilde{f}_t \frac{I_t}{\bar{y}} \qquad \text{(A)}$$



$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{8000\sqrt{f'_c}} = 17.7 \simeq 17$$

Localización centroide:

$$\bar{y} = \frac{70 \times 8 \times 4 + 30 \times 55 \times 55/2}{70 \times 8 + 30 \times 55} = 21.55 \text{ cm}$$

Momento de inercia de la sección sin agrietar:

$$I_t = \frac{1}{12} \times 70 \times 8^3 + 70 \times 8 \times 17.55^2 + \frac{1}{12} \times 30 \times 55^3 +$$

$$+ 30 \times 55 \times 5.95^2 = 649.8 \times 10^3 \text{ cm}^4$$

Módulo de rotura

$$\tilde{f}_t = 1.4\sqrt{f'_c} = 1.4\sqrt{200} = 19.8 \text{ kg/cm}^2$$

Sustituyendo en (A):

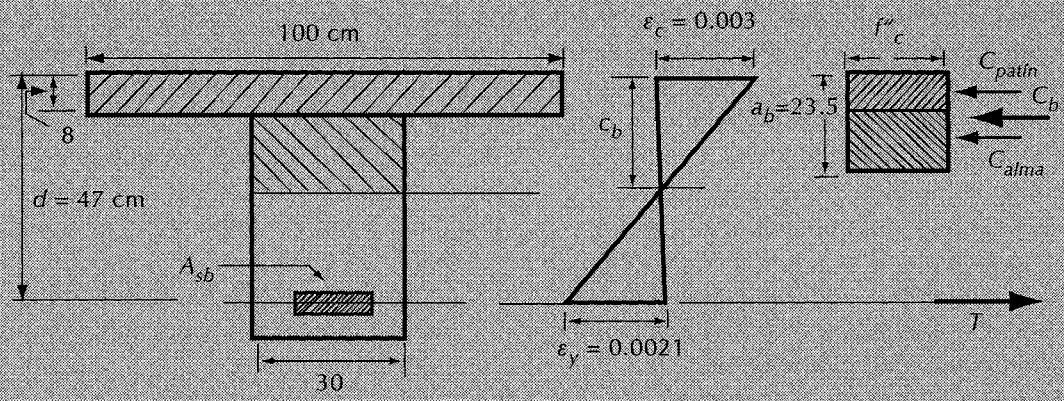
$$M_{ag} = \frac{19.8 \times 649.8 \times 10^3}{55 - 21.55} = 385 \times 10^3 \text{ kg} - \text{cm}$$

$$= 3.85 \text{ ton-m}$$

$$1.5\, M_{ag} = 1.5 \times 3.85 = 5.77 \text{ ton-m} < M_R \simeq 52 \text{ ton-m}$$

EJEMPLO 14.5 ***(continuación)***

Acero máximo



$$\frac{c_b}{d} = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c + \varepsilon_y} \; ; \; c_b \frac{0.003}{0.003 + 0.0021} 47 = 27.6 \text{ cm}$$

$$a_b = \beta_1 c_b = 0.85 \times 27.6 = 23.5 \text{ cm}$$

Fuerza de compresión correspondiente a la condición balanceada:

$$C_b = C_{patín} + C_{alma}$$

$$= 108{,}800 + (a_b - t)\, b' f''_c$$
$$= 108{,}800 + (23.5 - 8)\, 30 \times 136$$
$$= 172{,}040$$

$$T_b = C_b$$

$$A_{sb} = \frac{T_b}{f_y} = \frac{172{,}040}{4200} = 41 \text{ cm}^2 > 34 \text{ cm}^2$$

Ejemplo *14.6* Determinación del refuerzo de una sección T usando ecuaciones y sistema SI.

Este ejemplo está resuelto con el Reglamento ACI 318-02. En primer término se determinó el ancho efectivo del patín con las tres disposiciones comentadas en el ejemplo anterior. Nuevamente rigió la distancia centro a centro entre vigas consecutivas. Después se calculó el momento nominal que hay que resistir y se supuso un recubrimiento de 80 mm para determinar el peralte efectivo.

Como no se sabe de antemano si el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del patín o dentro del alma, se supuso tentativamente que caía dentro del patín. Bajo estas circunstancias, la viga trabaja como viga rectangular con un ancho igual al ancho efectivo del patín. Se usó, por lo tanto, la ecuación deducida en la figura 5.8 para calcular la resistencia a flexión de vigas rectangulares subreforzadas, teniendo como incógnita el valor de o. Obsérvese que el valor de b sustituido en la ecuación es 1500 mm. Se obtuvo un valor de o de 0.047 y un valor de la relación de refuerzo, p, de 0.0029.

A continuación se revisó si era correcta la hipótesis de que el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del patín. Para esto, se calculó la profundidad del bloque, a, necesaria para equilibrar la fuerza de tensión correspondiente a la fluencia del refuerzo; véase la figura 5.10. Como a resultó menor que t, el bloque de esfuerzos de compresión cae dentro del patín y la hipótesis fue correcta. La viga trabaja en realidad como viga rectangular y no como viga T. Es importante hacer notar que si a hubiese resultado mayor que t, no se hubiese podido usar la ecuación deducida en la figura 5.8, ya que se estaría en el caso del inciso 3 de la figura 5.10. En este caso, para encontrar el área de acero se puede proceder de la siguiente manera. Se calcula el valor de A_{sp} con la ecuación 1 de la figura 5.10, y después se calcula el área A_s con la ecuación 4 de la misma figura usando el momento nominal, M_n, que sea necesario resistir.

Finalmente se revisaron las limitaciones de acero. Según el Reglamento ACI 318-02, la relación mínima, $\rho_{mín}$, se aplica al área de la nervadura únicamente. Por eso se usó el valor de b' igual a 400 mm y no el ancho total del patín. La relación balanceada, ρ_b, se calculó con la ecuación deducida en la figura 5.12 para secciones rectangulares, ya que como se ha dicho, es la forma en que trabaja esta viga. Si a hubiese sido mayor que t, la relación balanceada se tendría que calcular con la ecuación deducida en la figura 5.14. Obsérvese que en este caso, la relación ρ_b está definida en términos del área de la nervadura, como se indica en la misma figura.

En el ejemplo 14.6 se cumplen ambas limitaciones de acero.

14.3.4 Secciones de forma cualquiera

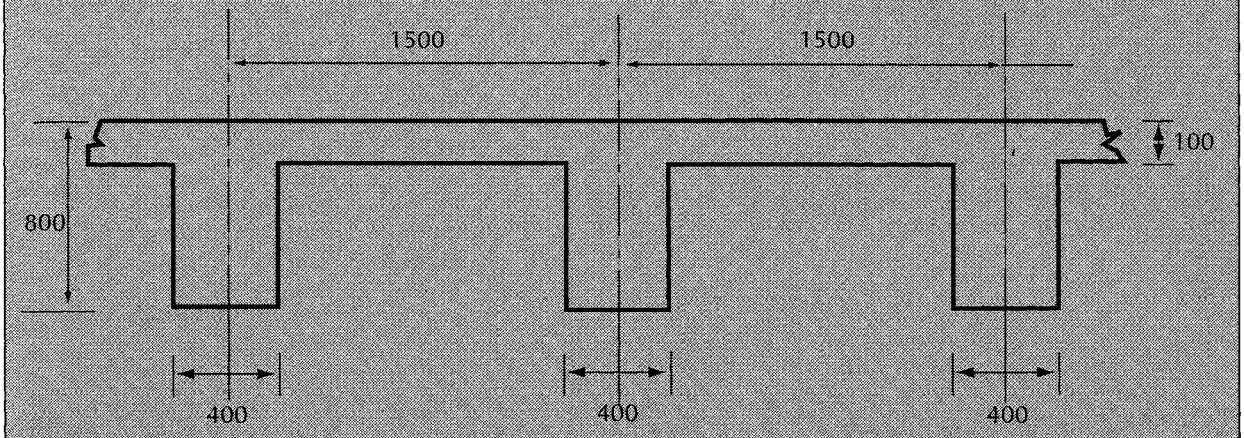
La sencillez geométrica de las secciones que se han estudiado en los incisos anteriores, permite el desarrollo de fórmulas estándar de cálculo y ayudas de diseño que facilitan la labor de dimensionamiento.

Hay situaciones en que existen requisitos técnicos o arquitectónicos que obligan a recurrir a secciones no convencionales, para las cuales no se cuenta con procedimientos directos de cálculo como los mencionados; en tales casos suele recurrirse a tanteos. A continuación se esboza un procedimiento aplicable cuando se trata de un problema en el que no existen restricciones en cuanto a la forma, es decir, cuando el proyectista está libre para escoger la forma que mejor se adapta a los requisitos particulares del caso.

Para establecer dimensiones razonables para un tanteo inicial, puede procederse como sigue. Se supone un peralte compatible con las condiciones del problema, con lo cual puede estimarse el brazo de la palanca disponible como una fracción del peralte total h. Es usual considerar valores de $0.8h$ a $0.9h$ para estos cálculos preliminares. Con el valor del brazo supuesto se calculan las magnitudes de

EJEMPLO 14.6 ***Determinación del refuerzo de una sección T. Sistema SI.***

DATOS



Acotaciones en mm

Claro de las vigas: $\ell = 10{,}000$ mm
Concreto: $f'_c = 25$ MPa
Acero: $f_y = 400$ MPa

Momento último requerido, $M_u = 800 \times 10^6$ N · mm

Reglamento ACI 318-02

CÁLCULO DEL ÁREA DE ACERO NECESARIA

Ancho efectivo del patín, b

$$\begin{cases} 16\,t + b' = 16 \times 100 + 400 = 2000 \text{ mm} \\ \dfrac{\ell}{4} = \dfrac{10{,}000}{4} = 2500 \text{ mm} \\ \text{c.a.c.} = 1500 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\therefore\ b = 1500 \text{ mm}$$

Momento nominal requerido, $M_n = \dfrac{M_u}{\phi} = \dfrac{800 \times 10^6}{0.9} = 889 \times 10^6$

Recubrimiento supuesto, $r = 80$ mm

Peralte efectivo, $d = 800 - 80 = 720$ mm

EJEMPLO 14.6 *(continuación)*

Si se supone que el bloque de compresión queda dentro del patín, se puede aplicar la ecuación de flexión:

$$M_n = bd^2 f'_c \omega (1 - 0.59 \omega) \qquad \text{(figura 5.8)}$$

Sustituyendo y dejando ω como incógnita:

$$889 \times 10^6 = 1500 \times 720^2 \times 25 \omega (1 - 0.59 \omega)$$

$$889 \times 10^6 = 19{,}440 \times 10^6 \omega - 11{,}470 \times 10^6 \omega^2$$

$$\omega = 0.047$$

$$\rho = \frac{\omega f'_c}{f_y} = \frac{0.047 \times 25}{400} = 0.0029$$

$$A_s = 0.0029 \times 1500 \times 720 = 3132 \text{ mm}^2$$

$$T = A_s f_y = 3132 \times 400 = 1.25 \times 10^6 \text{ N}$$

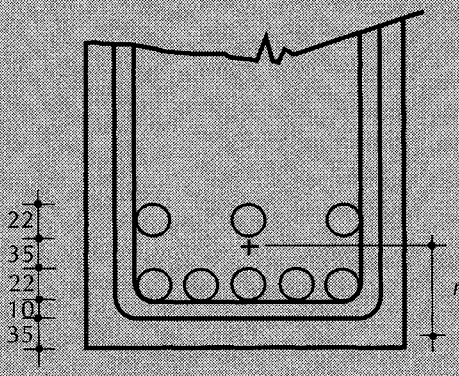
Se revisa si la hipótesis de que el bloque de esfuerzos de compresión queda dentro del patín es correcta:

Profundidad del bloque:

$$a = \frac{A_s f_y}{0.85 f'_c b} = \frac{3132 \times 400}{0.85 \times 25 \times 1500} = 39.3 \text{ mm} \qquad \text{(figura 5.10)}$$

Como $a < t$, la hipótesis es correcta y la viga trabaja como rectangular

ARMADO PROPUESTO



$$A_s = 8 \text{ barras No. } 7 = 3104 \text{ mm}^2$$

$$r = \frac{5 \times 56 + 3 \times 113}{8} = 77 \text{ mm}$$

$$r_{supuesto} = 80 \text{ mm} \simeq r$$

EJEMPLO 14.6 ***(continuación)***

REVISIÓN LIMITACIONES DE ACERO

Acero mínimo:

$$A_{s\,mín} = \rho_{mín}\, b'd = \frac{0.25\sqrt{f'_c}}{f_y}\, b'd = \frac{0.25\sqrt{25} \times 400 \times 720}{400} = 900\,\text{mm}^2$$

(ecuación 14.1 SI)

$$A_s > (A_s)_{mín}$$

Acero máximo:

$$\rho_b = \frac{\beta_1\, 0.85\, f'_c}{f_y}\left(\frac{600}{600 + f_y}\right)$$

(figura 5.12)

$$\rho_b = \frac{0.85^2 \times 25 \times 600}{400 \times 1000} = 0.027$$

$$0.75\,\rho_b = 0.020 > (\rho = 0.0029)$$

Se cumplen las limitaciones de acero.

las fuerzas C y T del par interno. Si se aplican las recomendaciones del ACI, el área de la zona de compresión requerida se puede estimar de acuerdo con la expresión

$$A_{bloque} = \frac{C}{0.85\, f'_c}$$

donde A_{bloque} es el área de concreto correspondiente al bloque de compresión definido por el ACI. El área de acero puede obtenerse por medio de

$$A_s = \frac{T}{f_y}$$

Con estos datos se propone una geometría tentativa y una distribución del refuerzo. La resistencia de la sección propuesta se determina por el método general descrito en la sección 5.6. Si la resistencia es del orden de la requerida, el problema está resuelto. En caso de no serlo, se hacen los ajustes necesarios. El procedimiento de cálculo sugerido se muestra esquemáticamente en la figura 14.5.

Al igual que en las secciones rectangulares y T, debe revisarse si se cumplen los requisitos de acero mínimo y máximo.

Para investigar si el acero es superior a un mínimo conveniente, se siguen las recomendaciones de la sección 14.2.1. Para investigar si el acero es inferior al máximo permitido, puede procederse en la forma indicada en el ejemplo 14.5 para la viga T.

Muchas veces la geometría y el tamaño de la sección han sido fijados previamente por consideraciones ajenas a las de resistencia y comportamiento. En este caso el problema se reduce a determinar por tanteos el acero necesario y a comprobar si se cumplen los requisitos de acero mínimo y máximo.

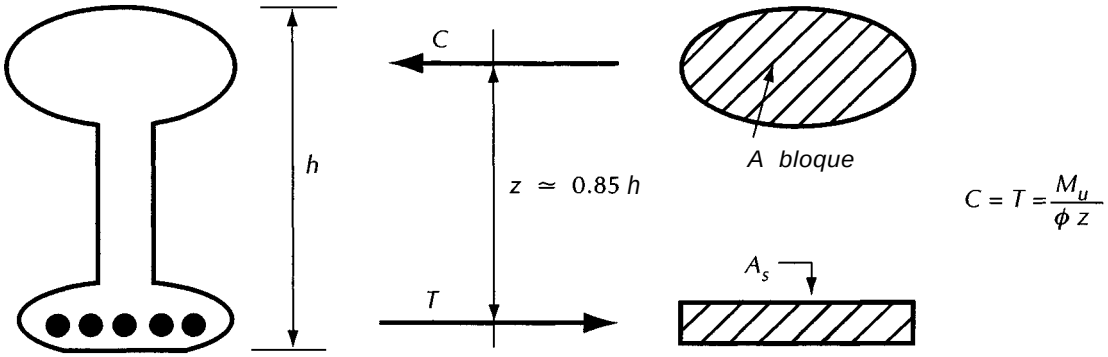


Figura 14.5 Dimensionamiento por flexión de una sección de forma cualquiera.

14.4 Dimensionamiento de vigas

En los ejemplos de esta sección se pretende mostrar los principales aspectos del dimensionamiento completo de vigas. El ejemplo 14.7 trata el dimensionamiento de una viga isostática de sección rectangular. El ejemplo 14.8 ilustra el dimensionamiento de una viga continua de sección T.

El cálculo de los momentos y fuerzas cortantes de vigas continuas puede hacerse por medio de cualquiera de los métodos usuales de análisis estructural, teniendo en cuenta las posiciones de la carga viva que produzcan los efectos más desfavorables. También es posible recurrir a métodos aproximados, como el de los coeficientes propuestos en el Reglamento ACI, cuya aplicación se ilustra en el ejemplo 14.8. Estos coeficientes, que tienen en cuenta de manera aproximada el efecto de las variaciones de carga viva, son aplicables al análisis de vigas continuas y losas en una dirección, siempre que se cumplan las siguientes condiciones:

a) La viga o losa tiene por lo menos dos claros continuos.
b) Los claros son aproximadamente iguales, de tal manera que el mayor de los dos claros adyacentes no exceda al menor en más del 20 por ciento.
c) Las cargas están uniformemente distribuidas.
d) La carga viva por metro cuadrado no es mayor que tres veces la carga muerta.
e) Los miembros son de sección transversal constante.

Los coeficientes del ACI se resumen en la tabla 14.1.

Los coeficientes aproximados propuestos en el Reglamento ACI, implican la existencia de dos juegos de diagramas de fuerza cortante y momento para cada claro, correspondiendo uno a la condición de carga que produce el momento positivo máximo en la zona central del claro y el otro a la condición que da los máximos momentos negativos en los extremos del claro. En las figuras 14.6 y 14.7 se muestran los diagramas para un claro extremo, en que el apoyo extremo es continuo con una columna, y un claro interior, respectivamente. Los valores de las ordenadas y las distancias que aparecen en los diagramas de las figuras citadas pueden deducirse aplicando los principios de estática, ya que el uso de determinado coeficiente de momento, implica un diagrama de

momentos estáticamente compatible. Otras combinaciones de coeficientes pueden tratarse análogamente. Los diagramas descritos facilitan el trazo de envolventes de momento para la determinación de las secciones donde se puede cortar o doblar barras y definen la localización de los puntos de inflexión, dato que se requiere para algunos aspectos del detallado del refuerzo.

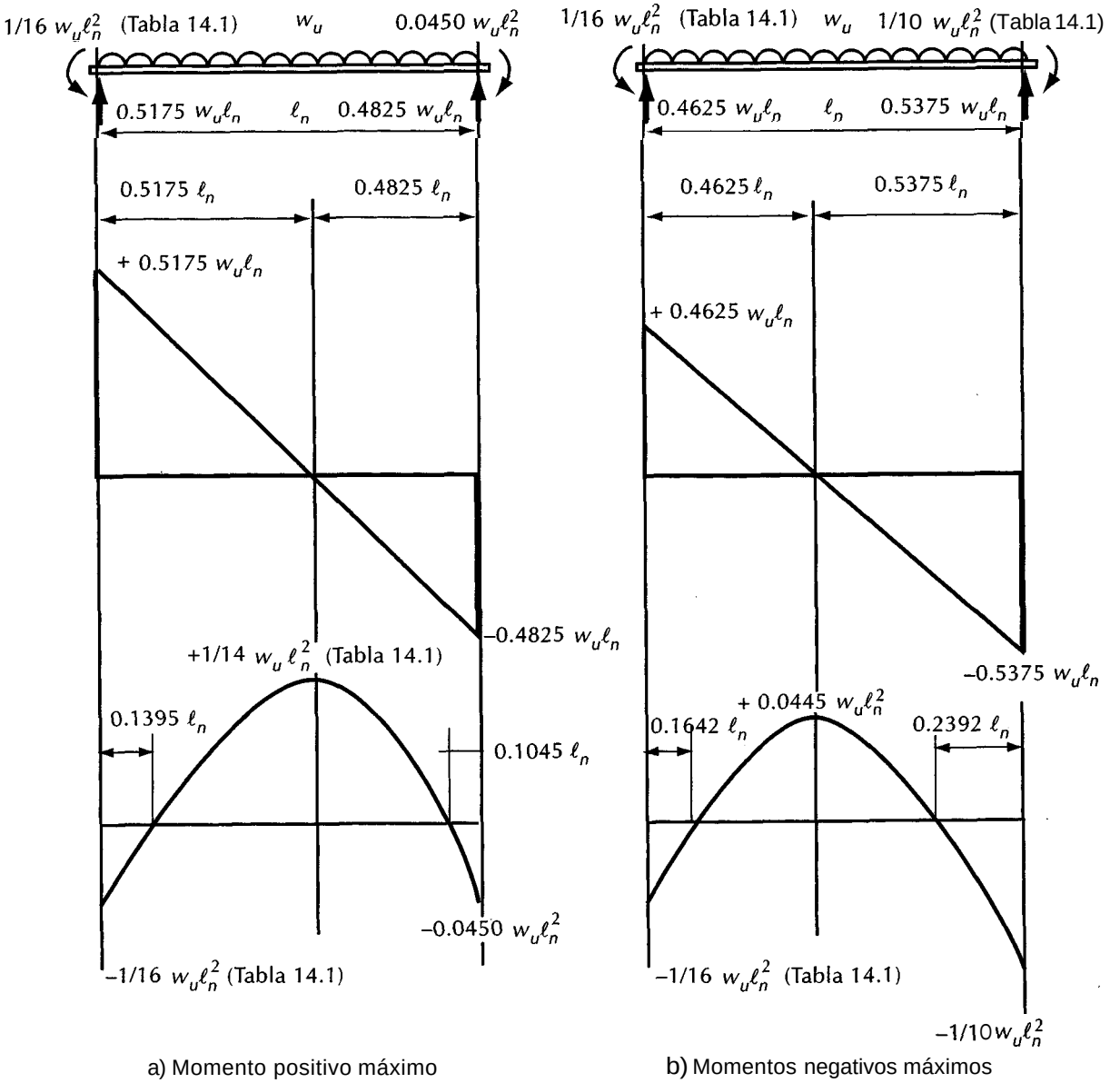
El trazo de las envolventes de momentos en la forma descrita permite detallar el refuerzo de manera que se ajuste con precisión a los

Tabla 14.1 Coeficientes de momentos flexionantes y fuerzas cortantes del Reglamento ACI 318-02

Momento positivo	
Claros extremos	
Extremo discontinuo sin restricción	$w_u \ell_n^2/11$
Extremo discontinuo con restricción	$w_u \ell_n^2/14$
Claros interiores	$w_u \ell_n^2/16$
Momentos negativos en el paño exterior del primer apoyo interior	
Dos claros	$w_u \ell_n^2/9$
Más de dos claros	$w_u \ell_n^2/10$
Momento negativo en los otros paños de apoyos interiores	$w_u \ell_n^2/11$
Momento negativo en los paños de todos los apoyos para losas con claros menores que 3.05 m y para vigas cuando la relación entre la suma de las rigideces de las columnas y las rigideces de las vigas es mayor que ocho en ambos extremos del claro	$w_u \ell_n^2/12$
Momento negativo en la cara interior del apoyo exterior de miembros monolíticos con los apoyos	
Cuando el apoyo es una viga de fachada	$w_u \ell_n^2/24$
Cuando el apoyo es una columna	$w_u \ell_n^2/16$
Fuerza cortante en claros extremos en el paño del primer apoyo interior	$1.15\, w_u \ell_n/2$
Fuerza cortante en los demás apoyos	$w_u \ell_n/2$

Notas:
- ℓ_n es el claro libre para momento positivo y fuerza cortante y el promedio de los claros libres adyacentes para momento negativo.
- w_u es la carga uniforme última total.

requisitos teóricos. Sin embargo, el procedimiento es un tanto tedioso. Por ello, en aras de la simplificación, en algunos manuales, como los de las referencias 14.6 y 14.13, se han propuesto armados estándar que satisfacen de manera conservadora los requisitos implícitos en los coeficientes aproximados de momento del ACI. En la figura 14.8 se muestra una recomendación típica para los claros interiores de marcos.



a) Momento positivo máximo

b) Momentos negativos máximos

Figura 14.6 Claro extremo con apoyo extremo (a la izquierda) continuo con una columna.

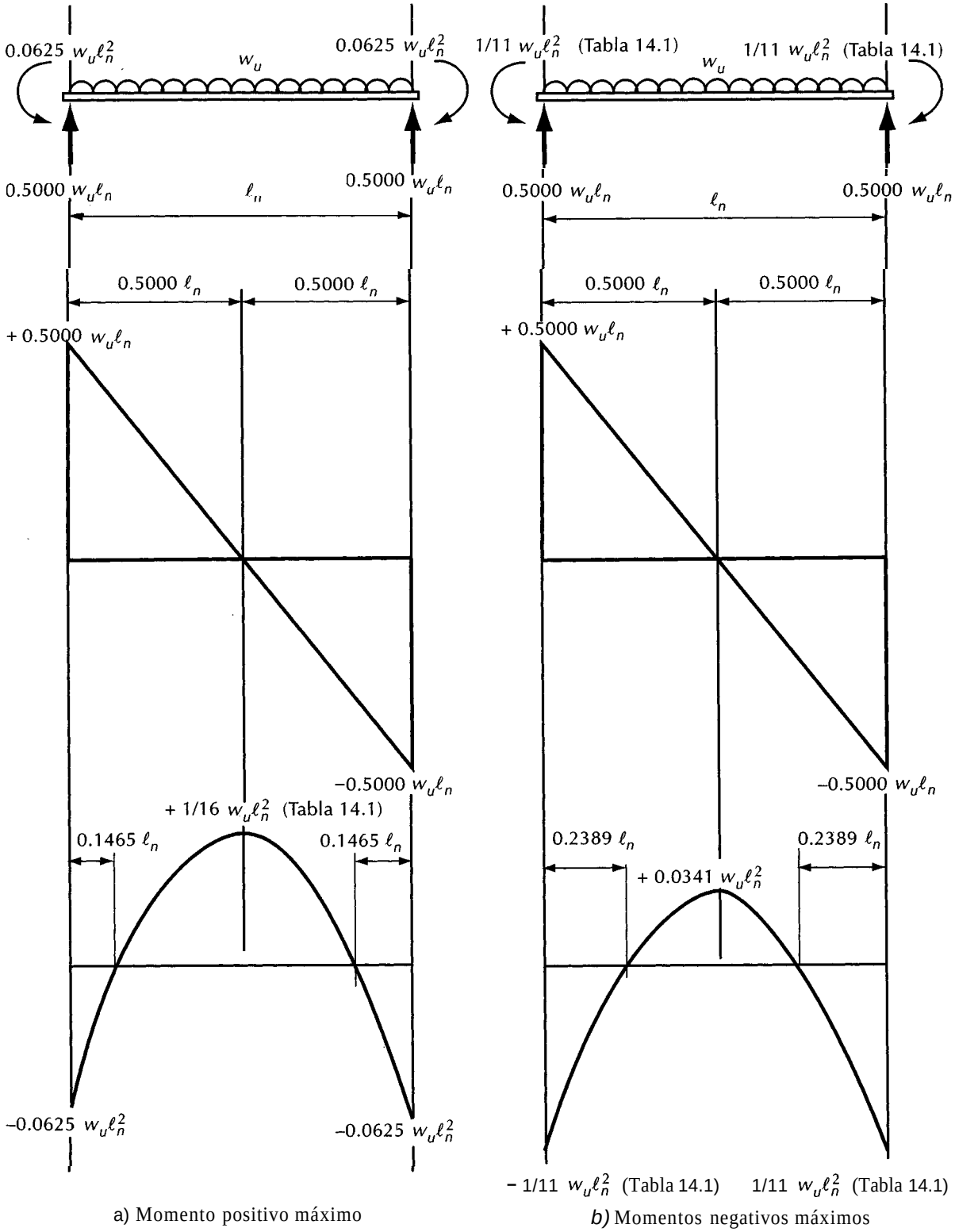


Figura 14.7 Claro interior.

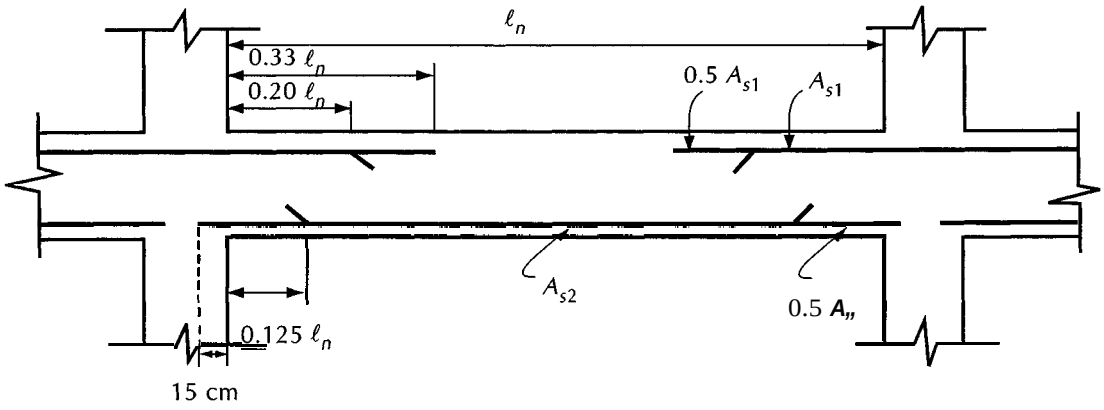


Figura 14.8 Armado estándar típico para un claro interior de una viga continua.

Ejemplo 14.7 Dimensionamiento de una viga isostática de sección rectangular.

La viga del ejemplo es una rectangular sobre dos apoyos, con uno de sus extremos en voladizo.

Las cargas dadas son a nivel de servicio y aparecen desglosadas en cargas vivas, designadas con los subíndices cv, y cargas muertas, designadas con los subíndices *cm.*

Para mayor sencillez en la exposición no se hizo un estudio de variaciones de carga viva, que habría sido aconsejable en un caso real. Se impone la limitación de que la cuantía sea del orden del 40 por ciento de la correspondiente a la condición balanceada. El dimensionamiento se efectuó de acuerdo con las NTC-04.

Puesto que es una combinación de carga viva y carga muerta, las cargas a nivel último se determinaron multiplicando por un factor de carga F_c = 1.4. Las fuerzas cortantes y los momentos debidos a estas cargas se determinaron como se muestra en la hoja de cálculo 2. El momento máximo se presentó en el apoyo B y la fuerza cortante máxima, a la derecha de dicho apoyo.

Para escoger las dimensiones de la sección se determinaron los peraltes efectivos para varios anchos b correspondientes a p = 0.4 ρ_b. Como momento crítico, con un criterio conservador, se tomó el del centro del apoyo, y no el momento en el paño del apoyo como suelen permitir los reglamentos, por no ser el apoyo continuo con la viga. Se determinó también la máxima capacidad admisible en cortante para las diversas combinaciones de b y *d* consideradas. Como se indicó en la sección 7.6.2*b,* esta capacidad máxima es de 2.5 $F_R bd\sqrt{f^*_c}$, aun para vigas con estribos. Se escogió una sección de 30 cm de ancho. El peralte efectivo para esta sección fue 74. Suponiendo un recubrimiento de 6 cm se obtuvo un peralte de 80 cm. Las proporciones de la sección escogida están dentro de los valores usuales y la capacidad en cortante resultó adecuada, ya que la fuerza cortante máxima, 19.8 ton, está entre V_{CR} y $V_{máx.adm}$.

La determinación de las áreas de acero requeridas en las secciones críticas para las dimensiones adoptadas, se muestra en forma tabular en la hoja 4. (El cálculo de las cuantías de acero se hizo con la ayuda de las tablas del Apéndice B.)

Los armados propuestos se ilustran en croquis. Como comprobación se calculó el momento resistente correspondiente a estos armados, que resultó adecuado. Se determinó también el momento resistente, *m,* para dos barras del No. 8, dato útil para el corte

de las barras de refuerzo negativo. Este valor se estimó de manera aproximada suponiendo que el momento resistente es proporcional al área de acero.

Los detalles del corte y anclaje de barras se muestran en la hoja de cálculo 7. Puesto que el refuerzo positivo consistió en sólo dos barras, se mantuvo este armado en todo el tramo. En el extremo libre se prolongó el refuerzo una longitud de 40 cm en la forma especificada en las NTC-04. Según las mismas normas, por lo menos la cuarta parte del refuerzo positivo debe prolongarse hasta los apoyos continuos. En este caso, las dos barras que constituyen el refuerzo positivo se prolongaron una distancia de 30 cm a partir del apoyo. Las NTC-04 no especifican la longitud requerida de penetración. Los 30 cm del ejemplo son superiores a los 15 cm que requiere el Reglamento ACI 318-02 como mínimo. Se cortó una de las tres barras necesarias para resistir el momento negativo. Las secciones donde teóricamente deja de ser necesaria la barra interrumpida, se determinaron por medio de la construcción gráfica mostrada en la hoja de cálculo 7. En la mayoría de los casos prácticos los métodos gráficos semejantes al empleado en el ejemplo tienen una precisión adecuada. Obsérvese que la barra interrumpida se prolongó una distancia igual al peralte efectivo, más allá de la sección en la que teóricamente no era necesaria, y que las otras dos barras se prolongaron también un peralte efectivo más allá del punto de inflexión. La barra interrumpida quedó con una longitud mayor que la longitud de anclaje, L_d, y las otras dos barras con una longitud mayor que $L_d + d$ a partir de la sección teórica de corte de la barra interrumpida. En el extremo del voladizo el refuerzo se prolongó con un criterio semejante al empleado en el apoyo C. El disponer de anclaje adecuado en el extremo de voladizos es especialmente importante cuando en dicho extremo actúa una carga concentrada, como en el ejemplo.

Para ilustrar el dimensionamiento por cortante, para mayor sencillez se consideró únicamente la porción izquierda del tramo *BC.* La separación calculada para estribos del No. 2.5 fue casi igual a la separación máxima admisible, que resultó de 35 cm. En el armado propuesto, se usó en toda la viga la separación calculada de 33 cm. El primer estribo se colocó a una distancia del paño igual a la mitad de esta separación, práctica que es bastante común. El corte de la barra interrumpida quedó en una zona de tensión. Sin embargo, de acuerdo con las NTC-04 no fue necesario hacer una revisión de la resistencia a cortante por este motivo, ya que sólo se interumpió la tercera parte del refuerzo.

Se calculó la deformación del tramo *BC* únicamente, ya que un cálculo previo indicó que la deformación del voladizo no era crítica. Con un criterio conservador se consideró que la carga viva actuaría únicamente en el tramo *BC.* Tanto en la determinación del momento de inercia promedio, como en la del factor promedio para estimar los efectos diferidos, se despreció la influencia de la presencia de acero de compresión en el apoyo *B.* Por sencillez, la deflexión se calculó al centro del claro. Este valor difiere del correspondiente a la deflexión máxima. La deflexión calculada resultó mayor que la máxima admisible según el Reglamento del Distrito Federal. Sin embargo, dadas las consideraciones conservadoras en que se basó la estimación de la deformación, el diseño propuesto podría considerarse aceptable.

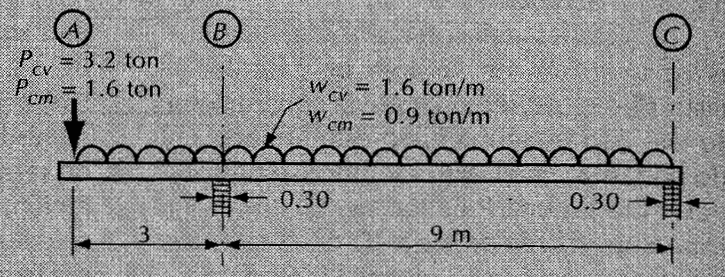
Para la revisión del agrietamiento se tomó $0.6f_y$ como valor aproximado del esfuerzo del acero a nivel de servicio, f_s. Se comprobó que el requisito que establece el Reglamento del Distrito Federal se cumple ampliamente. En caso de duda, el esfuerzo f_s puede determinarse usando el artificio de la sección transformada.

EJEMPLO 14.7 ***Dimensionamiento de una viga isostática de sección rectangular.*** **1**

DATOS

Cargas y geometría general

El valor de w_{cm} incluye una estimación del peso propio



Materiales

Concreto: $f'_c = 200$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Requisitos armado longitudinal

$$\rho \simeq 0.4\,\rho_b$$

Recubrimiento libre: 3.5 cm

Reglamento: NTC-04

CONSTANTES

$f^*_c = 0.8\,f'_c = 0.8 \times 200 = 160$ kg/cm^2
$f''_c = 0.85\,f^*_c = 0.85 \times 160 = 136$ kg/cm^2
$\beta_1 = 0.85$ para $f'_c = 200$ kg/cm^2

$$\rho_{min} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} \qquad \text{(de la ecuación 14.2)}$$

$$= \frac{0.7\sqrt{200}}{4200} = 0.0024$$

$$\rho_b = \frac{f''_c}{f_y} \times \frac{6000\,\beta_1}{f_y + 6000} \qquad \text{(ecuación 5.2)}$$

$$= \frac{136}{4200} \times \frac{6000 \times 0.85}{4200 + 6000} = 0.0162$$

$$n = \frac{E_s}{E_c} = \frac{2 \times 10^6}{113{,}000} \simeq 18 \qquad (E_c = 8000\sqrt{f'_c} = 113{,}000 \text{ kg/cm}^2)$$

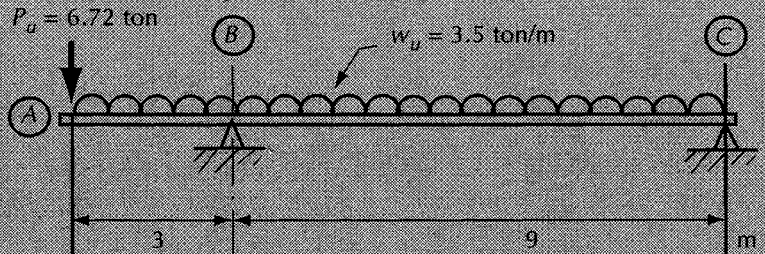
EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **2**

CARGAS ÚLTIMAS (cargas de servicio afectadas de factor de carga)

Factor de carga: $F_c = 1.4$

$P_u = F_c\,(P_{cv} + P_{cm}) = 1.4\,(3.2 + 1.6) = 6.72$ ton
$w_u = F_c\,(w_{cv} + w_{cm}) = 1.4\,(1.6 + 0.9) = 3.5$ ton/m

CÁLCULO DE MOMENTOS Y FUERZAS CORTANTES DE DISEÑO



Momento neg.: M_u	35.9	35.9		ton-m
P_u	6.7			ton
$w_u \times 3$	10.5	15.8	15.8	ton
Reacción libre: RL	17.2	15.8	15.8	ton
Corrección por M: ΔV		+ 4.0	− 4.0	ton $\left(\Delta V = \frac{35.9}{9}\right)$
Cortante V_u	17.2	19.8	11.8	ton
x	$\frac{11.8}{3.5} = 3.37$			m
Momento pos. máximo		+ 19.9		ton-m
Localización punto de inflexión	6.74			m

EJEMPLO 14.7 *(continuación)* 3

ELECCIÓN DE DIMENSIONES DE LA SECCIÓN

$$\rho = 0.4\ \rho_b = 0.4 \times 0.0162 = 0.0065$$

De las tablas del Apéndice B: $\frac{M_u}{bd^2} = 22\ \text{kg/cm}^2$

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{22\,b}} = \sqrt{\frac{35.9 \times 10^5}{22 \times b}} = \sqrt{\frac{163{,}182}{b}} \qquad \text{(ecuación A)}$$

$$V_{CR} = F_R\, bd\,(0.2 + 20\,\rho)\,\sqrt{f'_c} \qquad \text{(ecuación 7.24)}$$

$$= 0.8\, bd\,(0.2 + 20 \times 0.0065)\,\sqrt{160} = 3.34\, bd$$

$$V_{máx.\ adm.} = 2.5\, F_R\, bd\,\sqrt{f'_c} = 2.5 \times 0.8\,\sqrt{160}\, bd = 25.3\, bd$$

De la ecuación A se determinan valores de d correspondientes a distintos valores prácticos de b:

b (cm)	d (cm)	bd (cm^2)	V_{CR} (kg)	$V_{máx.\ adm.}$ (kg)
20	90	1800	6012	45,540
25	81	2025	6763	51,232
30	74	2220	7415	56,166
35	68	2380	7949	60,214

Considerar $b = 30$

Si $r = 6$ cm, $h = 74 + 6 = 80$ cm

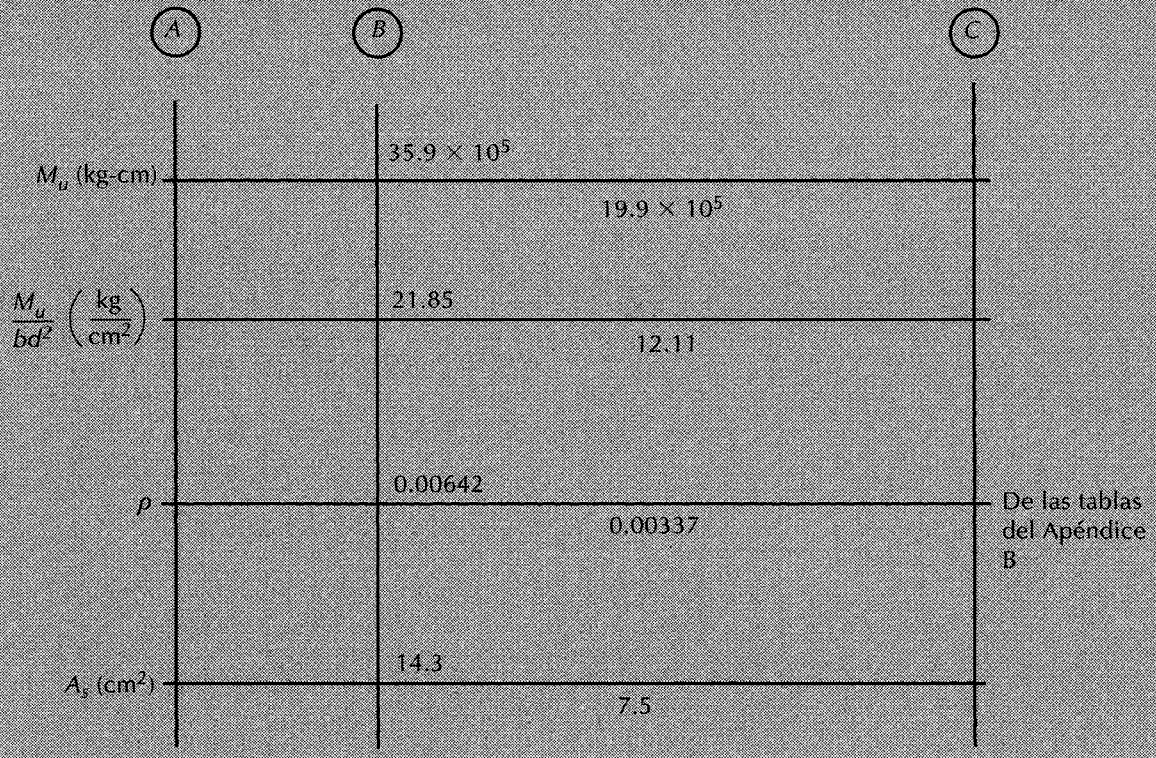
Adoptar: $b = 30$ cm, $h = 80$ cm

EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **4**

CÁLCULO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

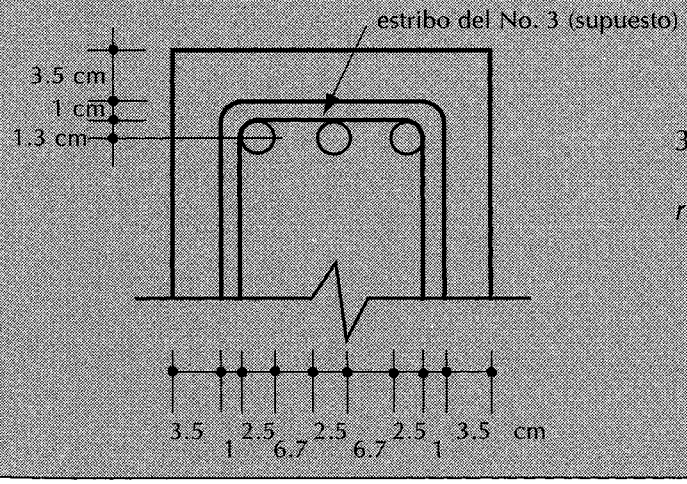
Suponer: $d = h - 6\text{ cm} = 74\text{ cm}$

Cálculo de áreas de acero requeridas en secciones críticas



Armados propuestos

Refuerzo negativo en el apoyo B:



3 barras No. 8 = 15.2 cm² > 14.3

$r = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8\text{ cm} \simeq 6$

EJEMPLO 14.7 *(continuación)* **5**

Momento resistente:

$$d = 80 - 5.8 = 74.2 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{15.2}{30 \times 74.2} = 0.0068$$

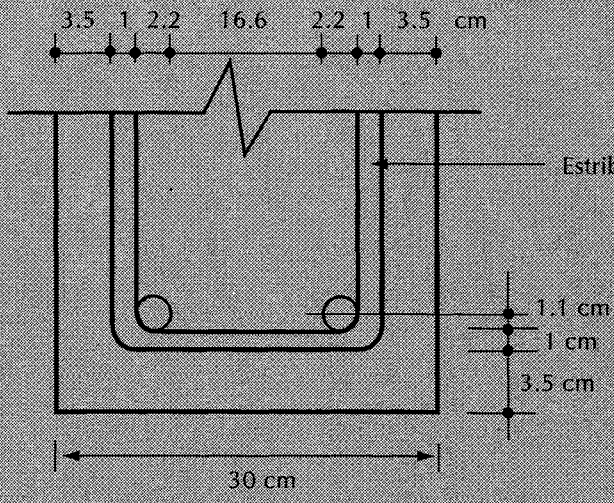
De las tablas del Apéndice B: $\frac{M_R}{bd^2} = 23 \text{ kg/cm}^2$

$$\therefore M_R = 23 \times 30 \times 74.2^2 = 37.99 \times 10^5 \text{ kg-cm} > M_u = 35.9 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

Momento resistente de 2 barras del No. 8:

$$m_r \simeq \frac{a_s}{A_s} \quad M_R = \frac{10.1}{15.2} \times 37.99 = 25.2 \text{ ton} - \text{m}$$

Refuerzo positivo en la sección central del tramo BC:



2 barras No. 7 = 7.7 cm² > 7.5 cm²

$r = 3.5 + 1 + 1.1 = 5.6 \simeq 6$

Momento resistente:

$$d = 80 - 5.6 = 74.4 \text{ cm}$$

$$\rho = \frac{7.7}{30 \times 74.4} = 0.0034$$

De las tablas del Apéndice B: $\frac{M_R}{bd^2} = 12.17 \text{ kg / cm}^2$

$$\therefore M_R = 12.17 \times 30 \times 74.4^2 = 20.21 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$> M_u = 19.9 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **6**

ANCLAJE

Longitud de desarrollo para barras del No. 8

Suponiendo $K_{tr} = 0$:

$$L_{db} = \frac{a_s f_y}{3c\sqrt{f'_c}} \geq 0.11 \frac{d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} \qquad \text{(ecuación 9.16)}$$

$c_1 = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8$ cm

$$c_2 = \frac{6.7 + 2.5}{2} = 4.6 \text{ cm}$$

Considerar $c = 4.6$ cm

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_s f_y}{3c\sqrt{f'_c}} &= \frac{5 \times 4200}{3 \times 4.6\sqrt{200}} = 108 \text{ cm} \\ 0.11\frac{d_b fy}{\sqrt{f'_c}} &= \frac{0.11 \times 2.54 \times 4200}{\sqrt{200}} = 83 \text{ cm} \end{aligned}\right\} L_{db} = 108 \text{ cm}$$

Por ser barras altas y haber acero en exceso:

$$L_d = 108 \times 1.3 \times \frac{14.3}{15.2} = 132 \text{ cm} \qquad \text{(tabla 9.2)}$$

Longitud de desarrollo para barras del No. 7

$c_1 = 3.5 + 1 + 1.1 = 5.6$ cm

$$c_2 = \frac{16.6 + 2.2}{2} = 9.4 \text{ cm}$$

$c = 5.6$ cm

$$\left.\begin{aligned} \frac{a_s f_y}{3c\sqrt{f'_c}} &= \frac{3.88 \times 4200}{3 \times 5.6\sqrt{200}} = 68 \text{ cm} \\ 0.11\frac{d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} &= \frac{0.11 \times 2.22 \times 4200}{\sqrt{200}} = 72 \text{ cm} \end{aligned}\right\} L_{db} = 72 \text{ cm}$$

$$L_d = \frac{72 \times 7.5}{7.7} = 70 \text{ cm}$$

EJEMPLO 14.7 *(continuación)* 7

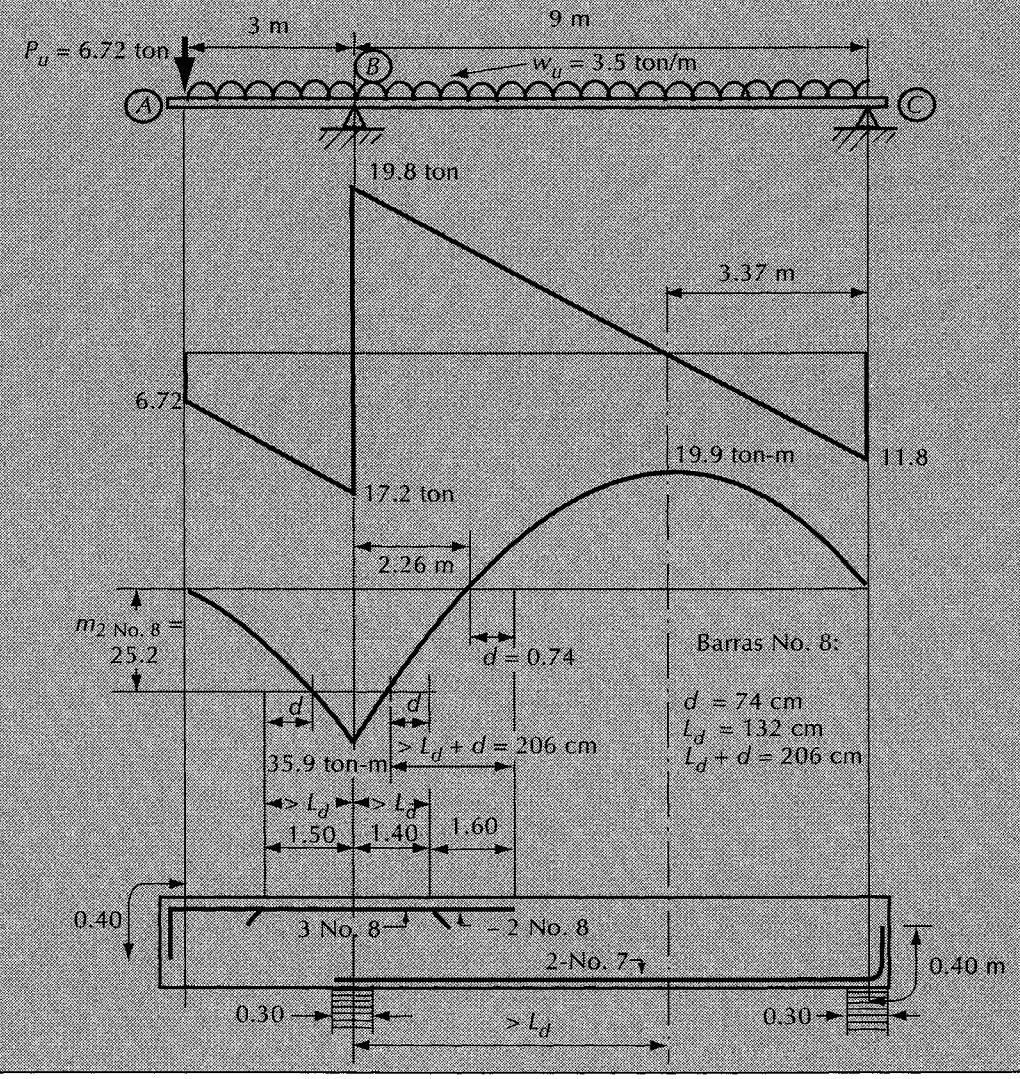
Longitud que debe prolongarse el refuerzo que no se corta más allá de la sección donde teóricamente deja de ser necesario el refuerzo interrumpido

Barras No. 8: $L_d + d = 132 + 74 = 206$ cm
Barras No. 7: $L_d + d = 70 + 74 = 144$ cm

Distancia a la que debe prolongarse el acero negativo más allá del punto de inflexión

$d = 74.2$ cm
$12d_b = 12 \times 2.54 = 30$ cm
$\ell/16 = 900/16 = 56$ cm
} rige: $d = 74.2 \simeq 74$ cm

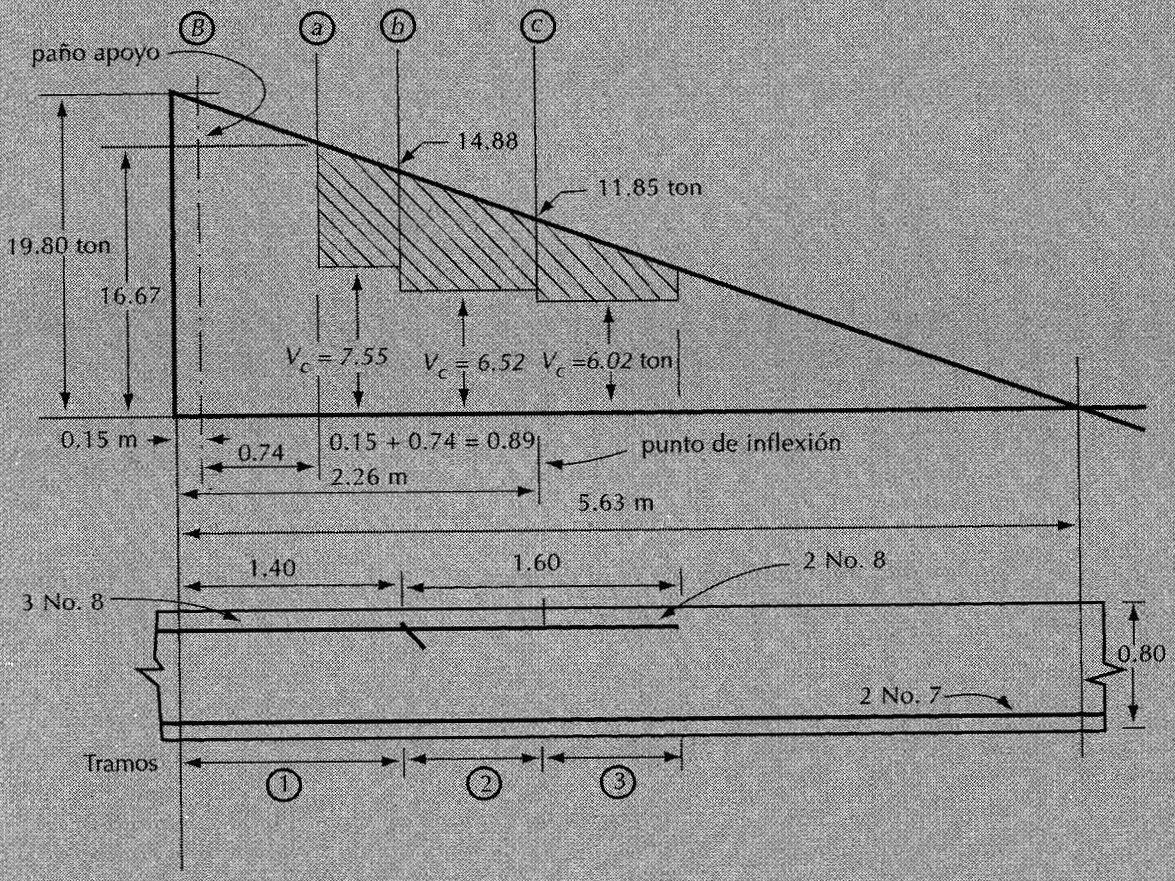
Diagrama de momento y fuerza cortante. Corte de barras.



EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **8**

CÁLCULO DEL REFUERZO TRANSVERSAL

(Parte izquierda del claro *BC*)



Tramo ① A_s = 3 barras del No. 8

$\rho = 0.0068 < 0.015$ (Ver cálculo M_R)

$V_{cR} = F_R\, bd\, (0.2 + 20\, \rho)\, \sqrt{f^*_c}$ (ecuación 7.24)

$= 0.8 \times 30 \times 74\, (0.2 + 20 \times 0.0068)\, \sqrt{160} = 7548$ kg

Tramo ② A_s = 2 barras del No. 8

$\rho = 0.0045 < 0.015$

$V_{cR} = 0.8 \times 30 \times 74\, (0.2 + 20 \times 0.0045)\, \sqrt{160} = 6515$ kg

EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **9**

Tramo ③ $A_s = 2$ barras del No. 7

$\rho = 0.0034$ (Ver cálculo M_R)

$$V_{cR} = 0.8 \times 30 \times 74\ (0.2 + 20 \times 0.0034)\ \sqrt{160} = 6020 \text{ kg}$$

Separación de estribos

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_u - V_{cR}}$$

Para estribos del No. 2.5:

$$s = \frac{0.98 \times 4200 \times 74}{V_u - V_{cR}} = \frac{304{,}600}{V_u - V_{cR}}$$

Separación máxima:

a) Por $\frac{d}{2}$: $\quad s_{máx} = \frac{74}{2} = 37$ cm

b) Por refuerzo mínimo:

$$A_{v\,mín} = 0.25 \sqrt{f'_c}\ \frac{bs}{f_y}$$

$$s_{máx} = \frac{0.98 \times 4200}{0.25 \sqrt{160} \times 30} = 43 \text{ cm}$$

$\therefore$ Rige *a*) $s_{máx} = 37$ cm $\simeq 35$ cm

Separación requerida en la sección crítica, a un peralte del paño de apoyo (*a*):

$$V_u - V_{cR} = 16.67 - 7.55 = 9.12 \text{ ton} = 9120 \text{ kg}$$

$$s_{(a)} = \frac{304{,}600}{9120} = 33 \text{ cm}$$

Separación en sección (*b*):

$$V_u - V_{cR} = 14.88 - 6.52 = 8.36 \text{ ton} = 8360 \text{ kg}$$

$$s = \frac{304{,}600}{8360} = 36 \text{ cm} > 35 \text{ cm}$$

$\therefore s = 35$ cm

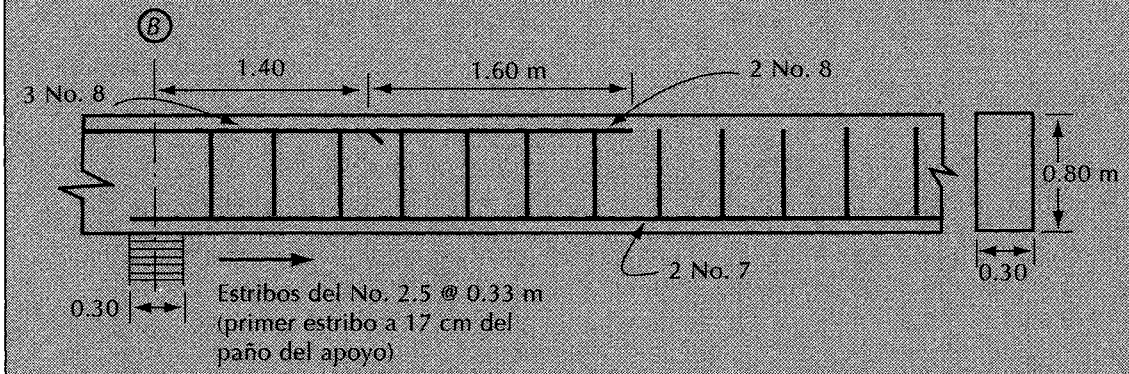
EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **10**

Separación en sección (c):

$$V_u - V_{cR} = 11.85 - 6.02 = 5.83 < 8.36 \text{ ton}$$

$$\therefore s = 35 \text{ cm}$$

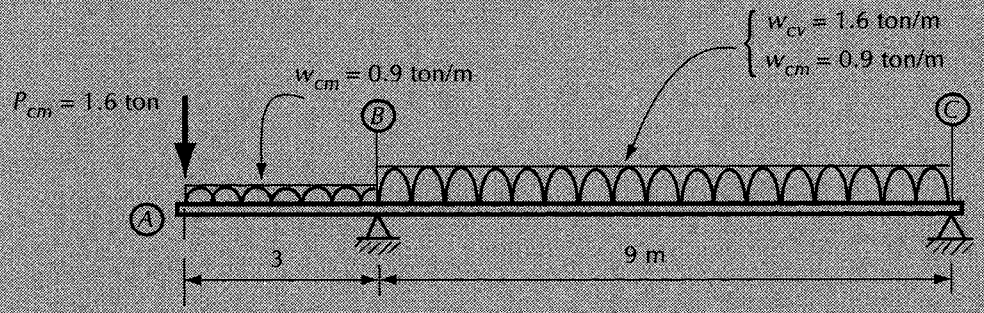
Croquis de refuerzo transversal



CÁLCULO DE DEFORMACIONES

Considerar que el 40 por ciento de la carga viva actúa en forma continua y que la deformación no afectará a elementos no estructurales.

Se calculará únicamente la deformación del tramo *BC*. (Un cálculo previo indicó que la deformación del voladizo no es crítica.) Para obtener el efecto más desfavorable se supondrá que la carga viva está únicamente en el tramo *BC*.

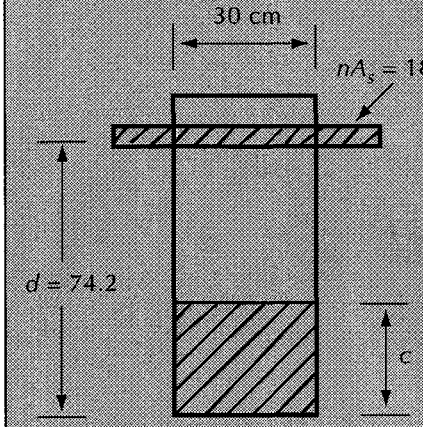


EJEMPLO 14.7 *(continuación)* **11**

Momento de inercia promedio

$$I_e = \frac{I_{e1} + 2I_c}{3} \qquad \text{(según ecuación 11.11)}$$

Momento de inercia de la sección agrietada transformada en el apoyo B (I_{e1}):



$$nA_s\,(d - c) = \frac{bc^2}{2}$$

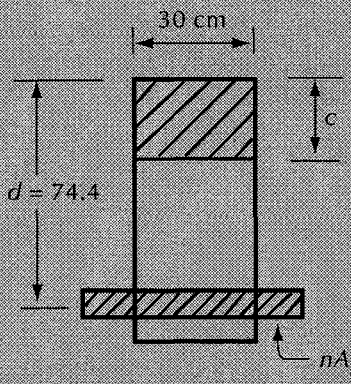
$$274\,(74.2 - c) = \frac{30}{2}\,c^2$$

$$c^2 + 18.3\,c - 1335 = 0$$

$$c = 28.8$$

$$I_{e1} = \frac{1}{3} \times 30 \times 28.8^3 + 274\,(74.2 - 28.8)^2 = 803{,}636 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia de la sección agrietada transformada en el centro del claro BC (I_c):



$$nA_s\,(d - c) = \frac{bc^2}{2}$$

$$139\,(74.4 - c) = \frac{30}{2}\,c^2$$

$$c^2 + 9.3c - 689 = 0$$

$$c = 22\text{cm}$$

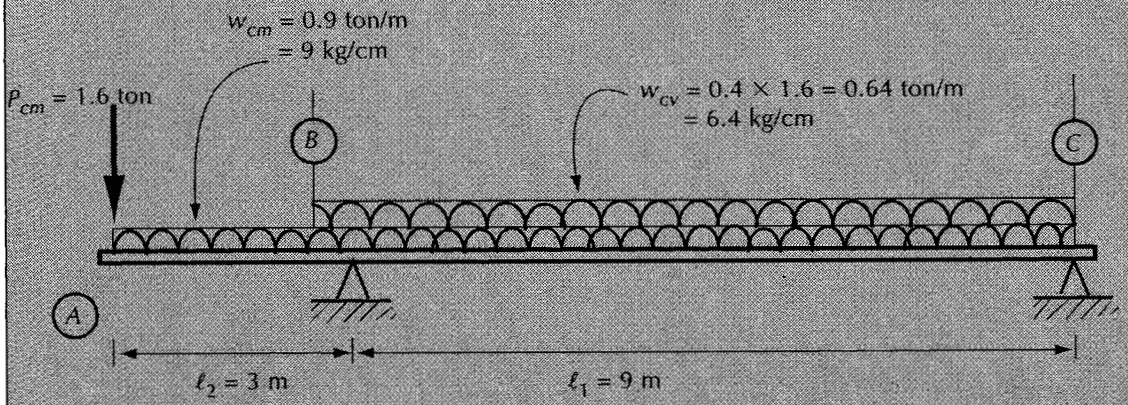
$$I_c = \frac{1}{3} \times 30 \times 22^3 + 139\,(74.4 - 22)^2 = 488{,}140 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia promedio:

$$I_R = \frac{803{,}636 + 2 \times 488{,}140}{3} = 593{,}305 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **12**

Deflexión inmediata debida a la carga sostenida (carga muerta más el 40 por ciento de la carga viva en el claro *BC*) (deflexión a la mitad del claro)



$$(a_i)_1 = a_{w\,cm} + a_{w\,cv} + a_{p\,cm}$$

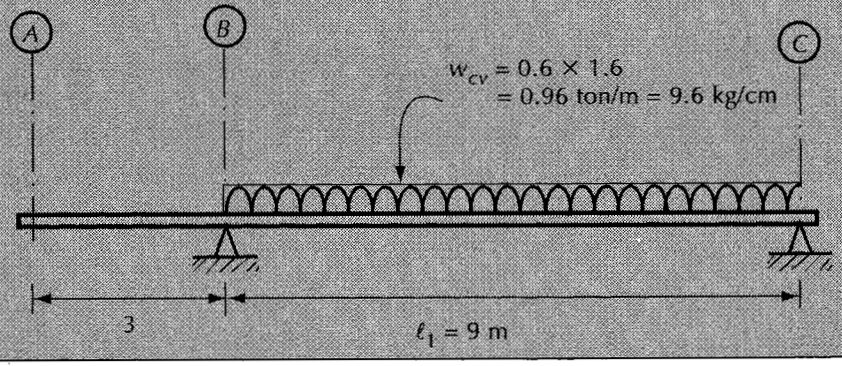
$$= \frac{1}{E_c I_e}\left[\frac{w_{cm}}{48}\left(\frac{5}{8}\ell_1^4 - \frac{3\ell_2^2\ell_1^2}{2}\right) + \frac{5}{384}w_{cv}\ell_1^4 - \frac{P_{cm}\ell_2\ell_1^2}{16}\right]$$

$$= \frac{1}{113{,}000 \times 593{,}305}\left[\frac{9}{48}\left(\frac{5}{8}\times 900^4 - \frac{3\times 300^2 \times 900^2}{2}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{5}{384}\times 6.4 \times 900^4 - \frac{1600 \times 300 \times 900^2}{16}\right]$$

$$(a_i)_1 = 1.3 \text{ cm}$$

Deflexión inmediata debida al 60 por ciento de la carga viva (en el claro *BC*)



EJEMPLO 14.7 *(continuación)* **13**

$$(a_i)_2 = \frac{5}{384}\frac{w_{cv}\,\ell_1^4}{E_c\,I_c} = \frac{5 \times 9.6 \times 900^4}{384 \times 113{,}000 \times 593{,}305}$$

$$(a_i)_2 = 1.2 \text{ cm}$$

Deflexión diferida debida a la carga sostenida (ver ecuación 11.13)

Factor para la sección en el apoyo B:

$$\frac{4}{1 + 50\,\rho'} = \frac{4}{1 + 50 \times 0} = 4$$

Factor para la porción central:

$$\frac{4}{1 + 50\,\rho'} = \frac{4}{1 + 50 \times 0} = 4$$

$$\text{Factor promedio} = \frac{\text{factor apoyo} + 2\ \text{factor central}}{3}$$

$$= \frac{4 + 2 \times 4}{3} = 4$$

$$a_d = 4\,(a_i)_1 = 4 \times 1.3 = 5.2 \text{ cm}$$

Deflexión total

$$a = (a_i)_1 + (a_i)_2 + a_d$$

$$= 1.3 + 1.2 + 5.2; \qquad \boxed{a = 7.7 \text{ cm}}$$

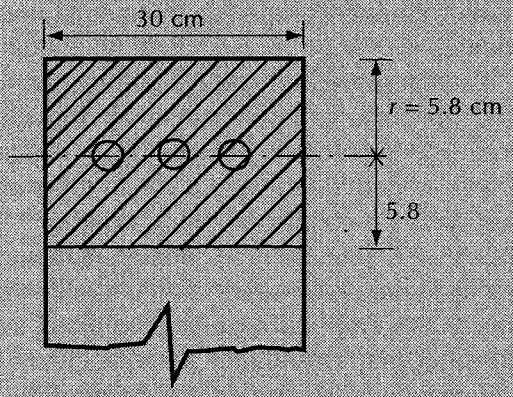
Deflexión admisible (inciso 11.4.2)

$$a_{adm.} = 0.5 \text{ cm} + \frac{L}{240} = 0.5 + \frac{900}{240} = 4.3 \text{ cm}$$

EJEMPLO 14.7 ***(continuación)*** **14**

REVISIÓN DEL AGRIETAMIENTO

(ver inciso 10.8.2)



(Ver datos para el cálculo del momento resistente)

Sección en el apoyo B

$$z = f_s \sqrt[3]{rA}$$

$$A = \frac{30 \times 2 \times 5.8}{3} = 116 \text{ cm}^2$$

$$f_s \simeq 0.6 f_y = 0.6 \times 4200 = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$z = 2520 \sqrt[3]{5.8 \times 116} = 22{,}080 \text{ kg/cm} < 40{,}000$$

Ejemplo 14.8 Dimensionamiento de una viga continua usando los coeficientes aproximados del ACI.

En este ejemplo se ilustra el dimensionamiento del claro extremo y del claro interior contiguo a éste, de una viga continua que forma parte de un marco. Se impuso como restricción que el acero máximo no excediera del 65 por ciento del correspondiente a la condición balanceada. Los momentos se calcularon utilizando los coeficientes aproximados que se resumen en la tabla 14.1.

Las dimensiones se escogieron con base en el momento requerido en la cara exterior del primer apoyo interior, que es el valor crítico según los coeficientes del ACI. Se encontró que una sección de 30 × 60 cm cuenta con una adecuada resistencia tanto a momento como a fuerza cortante.

La determinación del acero requerido en las diversas secciones críticas, se llevó a cabo en forma tabular como se muestra en la hoja de cálculo 4. Los valores del índice de refuerzo ω se calcularon con la ayuda de la gráfica del Apéndice A. Nótese que las fórmulas que aparecen en las gráficas dan valores nominales. Sin embargo, pueden utilizarse también para valores de diseño cuidando de afectar los momentos últimos del valor del coeficiente de resistencia, ϕ, apropiado. Los datos correspon-

dientes a momentos negativos se consignaron encima de la línea trazada para cada renglón, y los correspondientes a momentos positivos, debajo de ella. En las zonas de momento positivo se comprobó que el patín de las vigas tiene amplia capacidad para equilibrar la fuerza de tensión del acero, de manera que la determinación del acero se efectuó como para una viga de sección rectangular, de ancho igual al ancho efectivo de la sección T. (Como las cuantías de acero resultaron muy pequeñas, en este caso los valores de ω se determinaron con la fórmula adecuada, por la falta de precisión de la gráfica.) El acero para las secciones rectangulares de los apoyos, se estimó despreciando la presencia de acero de compresión que, como ya se vio anteriormente, influye poco en la resistencia de vigas subreforzadas.

Los armados propuestos para las distintas secciones se muestran con detalle en las hojas de cálculo 5 a 8. En cada caso se revisó la resistencia proporcionada por el armado propuesto, teniendo en cuenta el peralte efectivo correspondiente al recubrimiento fijado. Se aprecia que en los apoyos, donde el acero queda en la losa, se distribuyó en un ancho superior al de la nervadura, siguiendo las indicaciones del ACI. Se estimaron también los momentos resistentes de varios grupos de barras con vistas a la determinación de las secciones donde se pueda cortar el refuerzo. En la hoja de cálculo 9 se representa un esquema preliminar del refuerzo longitudinal. Se aprecia que en todas las secciones el refuerzo propuesto es superior al requerido.

La revisión del anclaje en la columna extrema A, indicó que el gancho estándar de 90° era ampliamente adecuado para las barras que penetran en la columna. En cuanto a las dos barras ancladas en la viga de borde, se comprobó que las dimensiones de ésta son suficientes para alojar la parte vertical del gancho. Sin embargo, si se considera como sección crítica el paño interior de la viga de borde, el anclaje proporcionado es un poco escaso.

El corte de barras se efectuó con base en un diagrama que muestra la envolvente de momentos (hoja de cálculo 11), determinada con la ayuda de los datos de las figuras 14.6 y 14.7. Por sencillez, en el cálculo de las longitudes de desarrollo necesarias se consideró únicamente el factor de modificación por barras "altas". Se ignoró el pequeño ajuste posible cuando el refuerzo propuesto es superior al requerido teóricamente.

La determinación de los puntos de terminación o corte de barras se hizo gráficamente. No se hicieron cortes de barras del refuerzo negativo, con el fin de no tener que comprobar los requisitos mencionados en la sección 7.6.1*b*, que se deben satisfacer cuando se hacen cortes en zonas de tensión. Aunque esto implica un aumento en el acero longitudinal empleado, se evita el refuerzo transversal adicional que generalmente resulta de la aplicación de las indicaciones de la sección mencionada. Por la misma razón, las barras para refuerzo positivo que se cortaron, se hicieron penetrar en la zona de compresión una distancia aproximadamente igual a un peralte efectivo a partir de los puntos de inflexión. Puede comprobarse que el armado propuesto satisface adecuadamente todos los requisitos de desarrollo por anclaje del refuerzo.

El dimensionamiento del refuerzo transversal se ilustra en el ejemplo, considerando la parte derecha del claro AB. El diagrama de fuerza cortante utilizado, se obtuvo con la ayuda de la figura 14.6*b*, que da los valores más desfavorables. (También se podría haber deducido un diagrama, partiendo del valor de la fuerza cortante en el paño exterior del primer apoyo interior dado en la tabla 14.1, que es algo más conservador que el dado en la figura 14.6*b*). La contribución del concreto se determinó con el método sencillo propuesto por el Reglamento ACI (sección 7.6.1a), según el cual dicha contribución se evalúa por medio de la expresión $V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\,bd$. La determinación de las separaciones de los estribos a diversas distancias a partir del paño del apoyo, se llevó a cabo a partir del diagrama de la

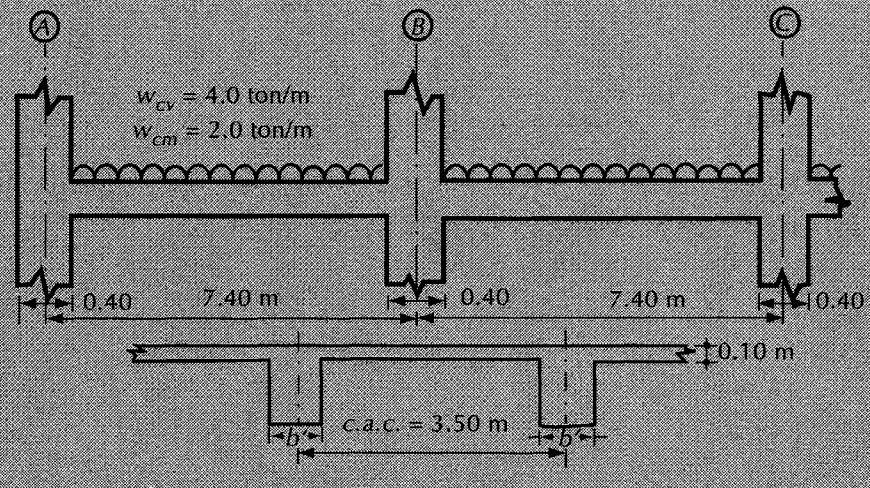
contribución del refuerzo requerido, V_s. Este diagrama se construyó teniendo en cuenta que la pendiente correspondiente está dada por la expresión: m = w/ϕ, ya que los valores de V_s son nominales. A partir de los datos proporcionados por el diagrama de V_s se determinaron las separaciones necesarias en la sección crítica, a un metro y a 1.5 m del paño de apoyo. Se calculó también la distancia a partir del paño del apoyo desde la cual se podía colocar el refuerzo transversal con la separación máxima admisible. Con base en la información anterior se propuso la distribución de estribos mostrados en la hoja de cálculo 15, que cubre conservadoramente los requisitos correspondientes. En vez de los 13 cm que arrojaron los cálculos se usó una separación cerrada a 10 cm en los primeros 97 cm (en vez de los 100 teóricos); y en vez de una separación de 16 cm hasta 150 cm del paño del apoyo, se usaron 15 cm hasta los 172 cm. Después se usó la separación máxima. Obsérvese que, a pesar de que teóricamente se puede prescindir de refuerzo transversal en la porción central del claro, se continúa el refuerzo mínimo en dicha porción, siguiendo una práctica muy común.

La revisión de los requisitos de desarrollo del refuerzo positivo en puntos de inflexión, se ilustró considerando el punto de inflexión derecho del claro AB. Se comprobó que los requisitos establecidos en la sección 9.8 se cumplen ampliamente. Una vez escogidas las dimensiones de la sección y detallado el refuerzo, es necesario comprobar si el comportamiento en condiciones de servicio es adecuado. Esto implica la estimación de la deflexión y la evaluación del riesgo de agrietamiento de acuerdo con lo que establece el Reglamento ACI 318-02 (secciones 11.4.1 y 10.8.1).

EJEMPLO 14.8 ***Dimensionamiento de una viga continua usando los coeficientes aproximados del ACI.*** **1**

DATOS

Cargas y geometría general



EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **2**

Materiales

Concreto: $f'_c = 250$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Requisitos armado longitudinal

$\rho \simeq 0.65\ \rho_b$
Recubrimiento libre: 3.5 cm

Reglamento: ACI 318-02

CONSTANTES

$$\rho_{min} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.8\sqrt{250}}{4200} = 0.0030 \qquad \text{(ecuación 14.1)}$$

$$\rho_b = \frac{\beta_1\ 0.85 f'_c}{f_y} \times \frac{6000}{6000 + f_y} \qquad \text{(figura 5.12)}$$

$$= \frac{0.85 \times 0.85 \times 250 \times 6000}{4200\ (6000 + 4200)} = 0.0253$$

$$V_c = 0.5\sqrt{f'_c}\ b'd = 0.5\sqrt{250}\ b'd = 7.9\ b'd \qquad \text{(ecuación 7.6)}$$

CARGA ÚLTIMA

$$w_u = 1.2\ w_{cm} + 1.6\ w_{cv} = 1.2 \times 2 + 1.6 \times 4 \qquad \text{(sección 1.7.2)}$$

$$w_u = 8.80 \text{ ton/m}$$

ELECCIÓN DE DIMENSIONES DE LA SECCIÓN

Momento máximo

$$M_{u\ max} = \frac{1}{10} w_u \ell_n^2 \qquad \text{(tabla 14.1)}$$

$$= \frac{1}{10} \times 8.80 \times 7^2 = 43.12 \text{ ton} - \text{m}$$

EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **3**

Fuerza cortante máxima

$$V_{U_{máx}} = \frac{1.15 \times w_u \ell_n}{2} \qquad \text{(tabla 14.1)}$$

$$= \frac{1.15 \times 8.80 \times 7}{2} = 35.42 \text{ ton} \qquad \text{(tabla 14.1)}$$

Cuantía de acero

$$\rho = 0.65\ \rho_b = 0.65 \times 0.0253 = 0.0164$$

Determinación de dimensiones

Usando la gráfica del Apéndice A (u otra ayuda semejante)

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.0164 \frac{4200}{250} = 0.276$$

De la gráfica: $\dfrac{M_n}{b' d^2 f'_c} = \dfrac{M_u}{\phi\, b' d^2 f'_c} = 0.230$

$$d = \sqrt{\frac{43.12 \times 10^5}{0.9 \times 0.230 \times 250\, b'}} = \sqrt{\frac{83{,}324}{b'}}$$

$$V_{u\ máx\ admisible} = \phi\, 2 \sqrt{f'_c}\, b'd = 0.75 \times 2 \sqrt{250}\, b'd \qquad \text{(sección 7.6.1}b\text{)}$$

$$V_{u\ máx\ admisible} = 23.71\, b'd$$

b' (cm)	d (cm)	$b'd$ (cm^2)	$V_{u\ máx\ admisible}$
20	65	1300	30,823
25	58	1450	34,380
30	53	1590	37,699
35	49	1715	40,663

Considerar $b' = 30$ cm

Si $r = 6$ cm; $\quad h = 53 + 6 = 59$ cm

Adoptar, redondeando

$b' = 30$ cm
$h = 60$ cm

EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **4**

CÁLCULO ÁREAS DE ACERO

$d = 60 - 6 = 54$ cm

$w_u \ell_n^2 = 8.80 \times 7^2 = 431$ ton-m

Para sección rectangular:

$$\phi\, b' d^2\, f'_c = 0.9 \times 30 \times 54^2 \times 250 = 196.8 \times 10^5$$

Para sección T:

$$\phi\, b d^2\, f'_c = 0.9 \times 175 \times 54^2 \times 250 = 1148 \times 10^5$$

Ancho T = b $\left\{ \begin{array}{l} 16t + b' = 190 \\ \ell_n/4 = 175 \\ \text{c.a.c.} = 350 \end{array} \right\}$ $\therefore\ b = 175$ cm

	(A)		(B)		(C)
Coeficientes (tabla 14.1)	1/16	1/10	1/11	1/11	1/11
	1/14		1/16		
M_u (ton-m)	26.94	43.10	39.18	39.18	39.18
	30.79		26.94		
$\dfrac{M_u \times 10^5}{\phi\, b d^2\, f'_c}$	0.139	0.221	0.199	0.199	0.199
	0.0268		0.0235		
ω	0.150	0.258	0.230	0.230	0.230
	0.0272		0.0238		
$\rho = \dfrac{\omega f'_c}{f_y}$	0.0089	0.0154	0.0137	0.0137	0.0137
$= 0.0595\ \omega$	0.0016		0.0014		
A_s (cm^2)	14.4	24.9	22.2	22.2	22.2
	15.1		13.2		

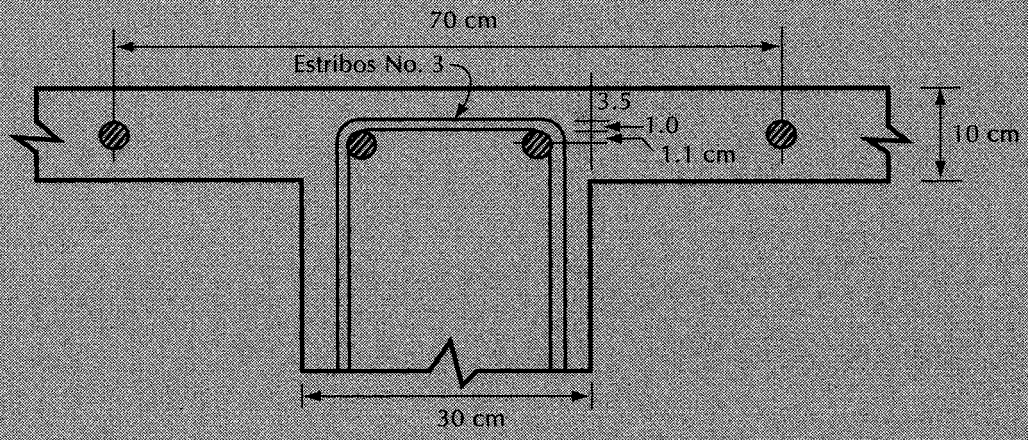
($A_{smín} = 0.0033 \times 30 \times 54 = 5.4$ cm^2)

EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** **5**

ARMADOS

Refuerzo negativo en el apoyo A

$$r = 3.5 + 1 + 1.1 = 5.6 \text{ cm}$$



4 barras No. 7 = 15.5 cm^2 > 14.4 cm^2

Ancho para colocación del refuerzo negativo (ACI, inciso 10.6.6):

$$b = 175$$

$$\frac{\ell_n}{10} = 70 \text{ cm}$$

Momento resistente:

$$d = 60 - 5.6 = 54.4$$

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c} = \frac{15.5}{30 \times 54.4} \times \frac{4200}{250} = 0.160$$

De la gráfica del Apéndice A (u otra ayuda semejante):

$$\frac{M_R}{\phi f'_c b' d^2} = 0.1449; \quad M_R = 0.1449 \times 0.9 \times 250 \times 30 \times 54.4^2$$

$$= 28.94 \times 10^5 \text{ kg-m}$$

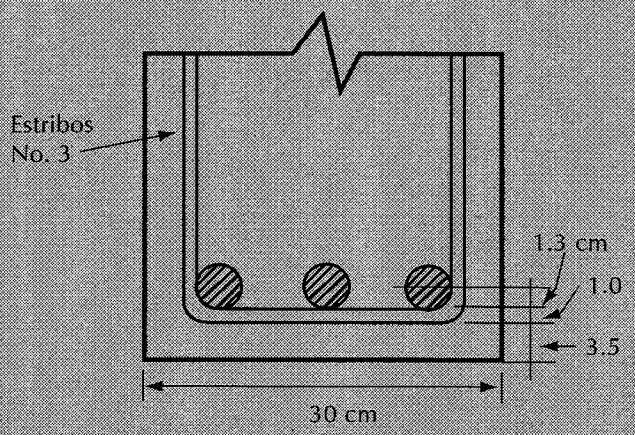
$$= 28.94 \text{ ton-m} > 26.94 \text{ ton-m}$$

Momento resistente de 2 barras No. 7:

$$m_{r\,(2\text{-No. }7)} = \frac{1}{2} \times 28.94 = 14.47 \text{ ton} - \text{m}$$

EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **6**

Refuerzo positivo en el centro del claro AB



3 barras No. 8 = 15.2 cm^2 ≃ 15.1 cm^2

$r = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8$ cm

Momento resistente:

$$d = 60 - 5.8 = 54.2 \text{ cm}$$

$$\omega = \frac{15.2}{175 \times 54.2} \times \frac{4200}{250} = 0.0269$$

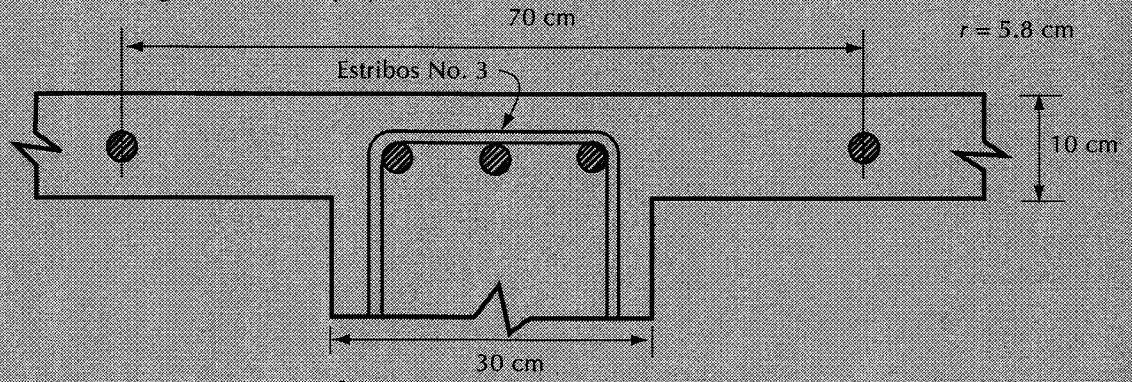
De la gráfica del Apéndice A (u otra ayuda semejante):

$$\frac{M_R}{\phi f'_c b d^2} = 0.0265; \qquad M_R = 0.0265 \times 0.90 \times 250 \times 175 \times 54.2^2$$
$$= 30.65 \times 10^5 \text{ kg.cm}$$
$$= 30.65 \text{ ton-m} \simeq 30.79 \text{ ton-m}$$

Momento resistente de 2 barras del No. 8:

$$m_{r\,(2\text{-No. }8)} = \frac{2}{3} \times 30.65 = 20.4 \text{ ton-m}$$

Refuerzo negativo en el apoyo B



5 barras No. 8 = 25.4 cm^2 > 24.9

EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** 7

Momento resistente

$$d = 54.2$$

$$\omega = \frac{25.4}{30 \times 54.2} \times \frac{4200}{250} = 0.262$$

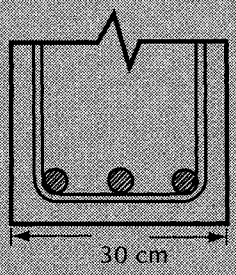
De la gráfica del Apéndice A:

$$\frac{M_R}{\phi f'_c b d^2} = 0.2215; \quad M_R = 0.2215 \times 0.90 \times 250 \times 30 \times 54.2^2$$
$$= 43.92 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$
$$= 43.92 \text{ ton-m} > 43.10 \text{ ton-m}$$

Momento resistente de 3 barras del No. 8:

$$m_{r_{(3\text{-No. }8)}} = \frac{3}{5} \times 43.92 = 26.4 \text{ ton} - \text{m}$$

Refuerzo positivo en el centro del claro BC



2 barras del No. 8 y 1 del No. 7 = 14 cm^2 > 13.2 cm^2
$r = 5.8$ cm

Momento resistente

$d = 54.2$ cm

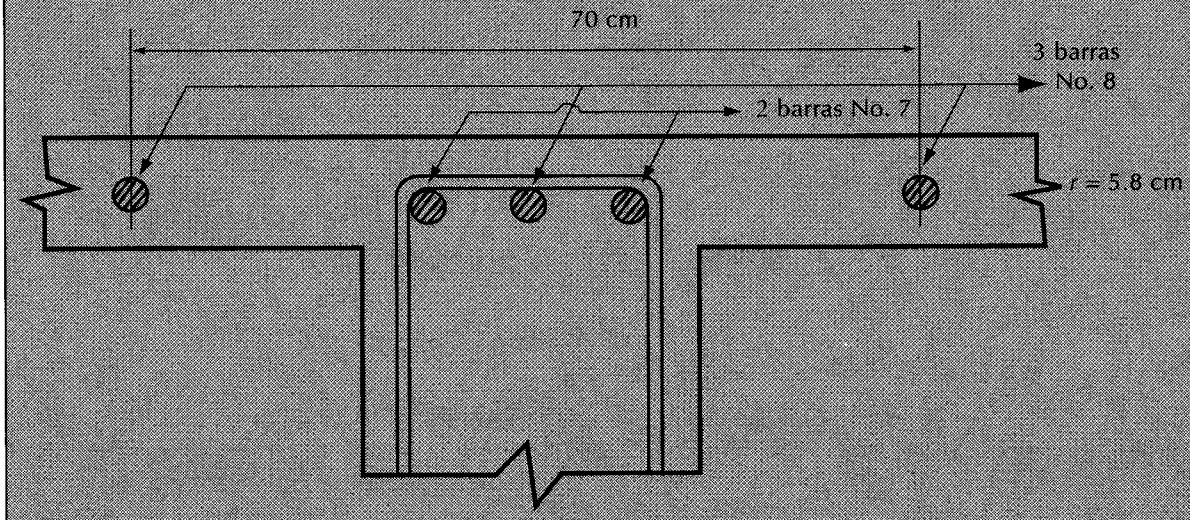
$$\omega = \frac{14}{175 \times 54.2} \times \frac{4200}{250} = 0.0248$$

De la gráfica del Apéndice A:

$$\frac{M_R}{\phi f'_c b d^2} = 0.0244; \quad M_R = 0.0244 \times 0.9 \times 250 \times 175 \times 54.2^2$$
$$= 28.22 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$
$$= 28.22 \text{ ton-m} > 26.94 \text{ ton-m}$$

EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **8**

Refuerzo negativo en el apoyo C



3 barras No. 8 + 2 barras No. 7 = 22.9 cm^2 > 22.2 cm^2

Momento resistente

$d = 54.2$ cm

$$\omega = \frac{22.9}{30 \times 54.2} \times \frac{4200}{250} = 0.237$$

De la gráfica del Apéndice A:

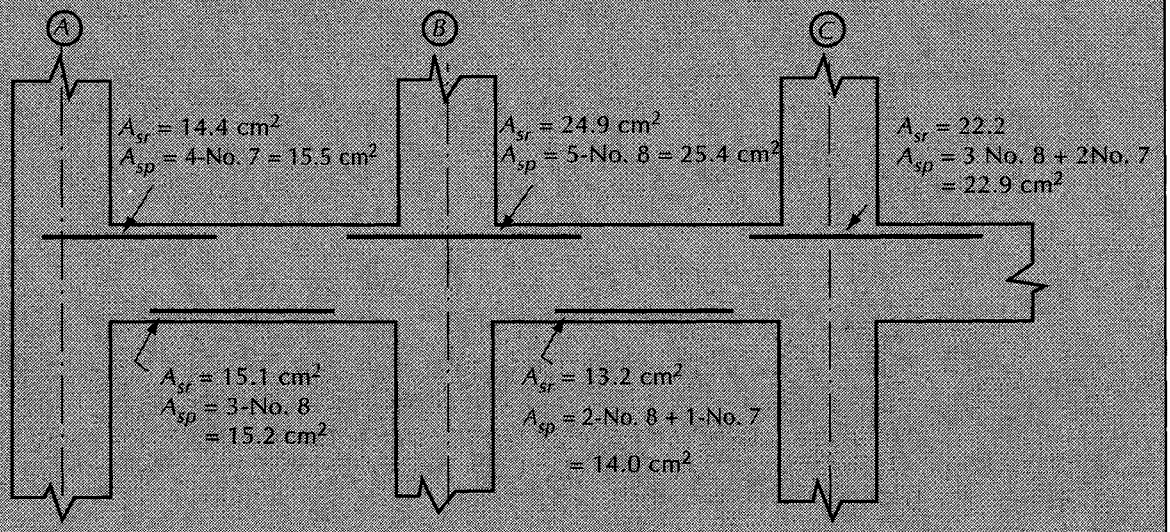
$$\frac{M_R}{\phi f'_c b' d^2} = 0.2039; \quad M_R = 0.2039 \times 0.9 \times 250 \times 30 \times 54.2^2$$
$$= 40.43 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$
$$= 40.43 \text{ ton-m} > 39.18 \text{ ton-m}$$

Momento resistente de 3 barras del No. 8

$m_{r\,(3\text{-No.}8)} = 26.4$ ton-m (ver hoja de cálculo 7)

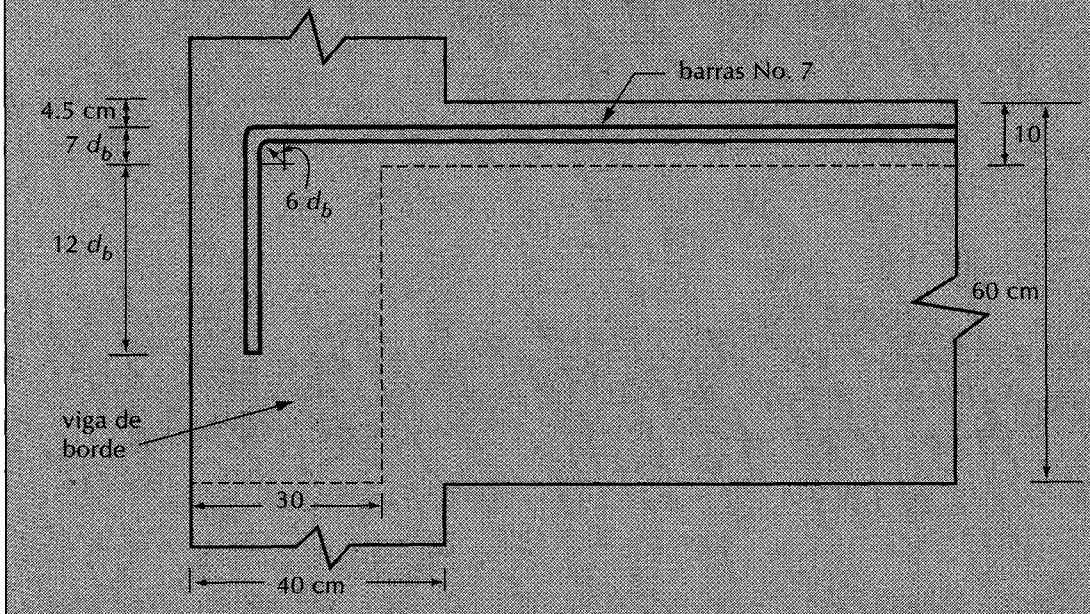
EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** **9**

Esquema preliminar del refuerzo longitudinal



A_{sr} = acero teóricamente requerido
A_{sp} = acero propuesto

REVISIÓN ANCLAJE EN COLUMNA EXTERIOR



EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **10**

Longitud básica del gancho estándar

$$L_{hb} = \frac{0.075\,\beta f_y d_b}{\sqrt{f'_c}} = \frac{0.075 \times 1 \times 4200 \times 2.22}{\sqrt{250}} = 44 \text{ cm} > 8d_b > 15 \text{ cm} \quad \text{(ecuación 9.17)}$$

Factores de modificación (tabla 9.3):

Por recubrimiento superior a 6 cm: 0.7
Por refuerzo propuesto superior al requerido: $A_{sr}/A_{sp} = 14.7/15.5$
Longitud ajustada:

$$L_{dh} = 0.7 \times \frac{14.7}{15.5} \times 44 = 29 \text{ cm}$$

Longitud disponible = 40 − 5 = 35 cm > 29 cm
Longitud para parte vertical del gancho = 19 d_b + 4.5 cm = 42 cm + 4.5
= 46.5 cm < 60 cm

DATOS PARA DETERMINACIÓN DE CORTE DE BARRAS Y REVISIÓN DE REQUISITOS DE ANCLAJE

Longitudes de desarrollo (sección 9.6.1)

Usando la ecuación simplificada de la tabla 9.1:

para barras No. 7 de lecho inferior,

$$\ell_d = \frac{4200 \times 2.22}{5.3\sqrt{250}} = 111 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$$

para barras No. 7 de lecho superior,

$$\ell_d = \frac{4200 \times 1.3 \times 2.22}{5.3\sqrt{250}} = 145 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$$

para barras No. 8 de lecho inferior,

$$\ell_d = \frac{4\,200 \times 2.54}{5.3\sqrt{250}} = 127 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$$

para barras de No. 8 de lecho superior,

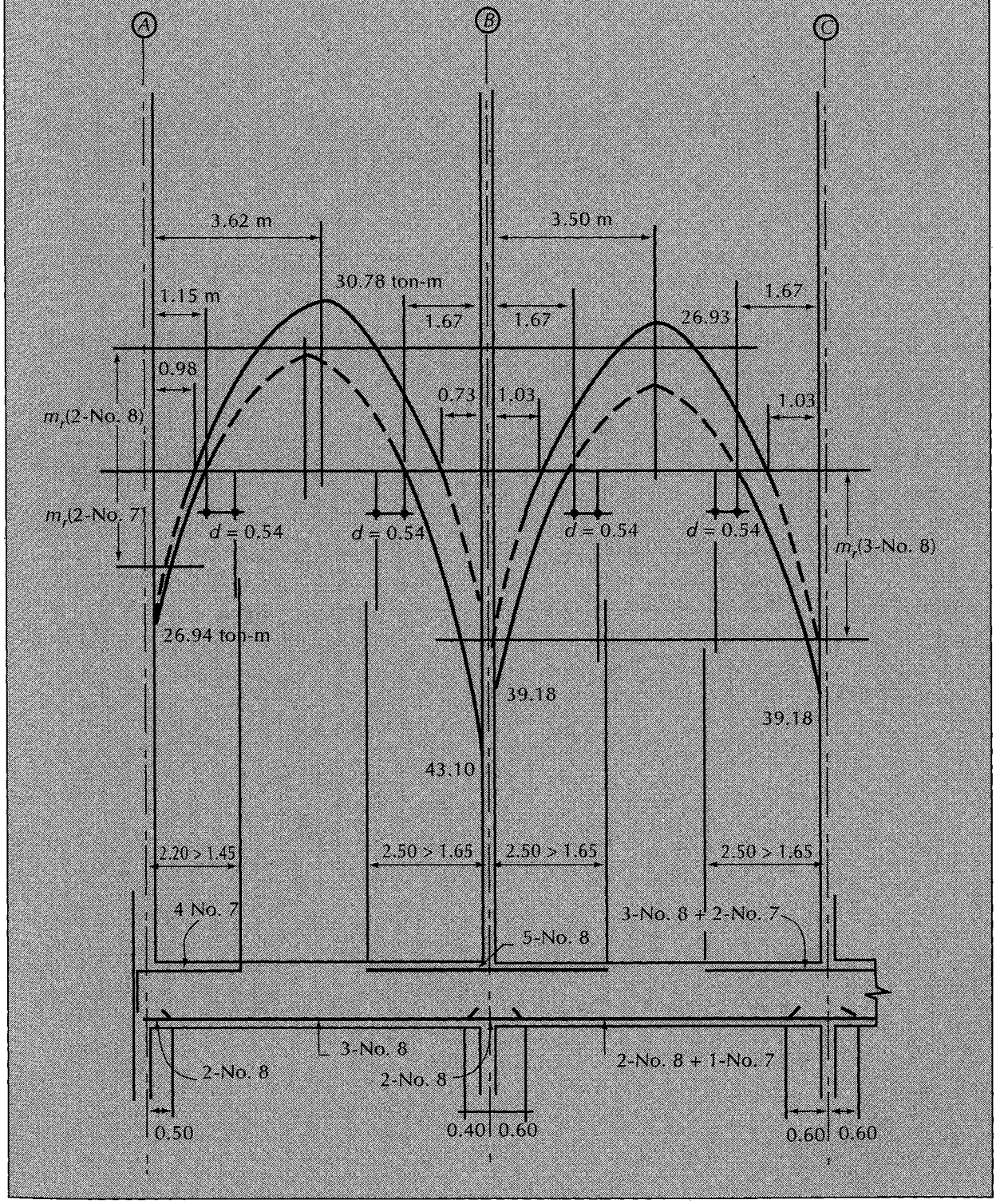
$$\ell_d = \frac{4200 \times 1.3 \times 2.54}{5.3\sqrt{250}} = 165 \text{ cm} > 30 \text{ cm}$$

Distancia que debe prolongarse el refuerzo más allá del punto de inflexión

Barras del No. 8 $\left\{ \begin{array}{l} d = 54 \text{ cm} \\ \ell_n/16 = 700/16 = 44 \text{ cm} \\ 12d_b = 12 \times 2.54 = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \therefore$ usar 54 cm

Barra del No. 7: usar 54 cm.

EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** **11**



EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **12**

Distancia mínima que debe prolongarse el refuerzo más allá de donde teóricamente deja de ser necesario

Barras del No. 8 $\left\{ \begin{array}{l} d = 54 \text{ cm} \\ 12d_b = 12 \times 2.54 = 30 \text{ cm} \end{array} \right\} \therefore$ usar 54 cm

Barras del No. 7: usar 54 cm.

DIMENSIONAMIENTO DE ESTRIBOS

(Parte derecha del claro AB)

Diagrama de fuerza cortante

(Ver figura 14.6)

$V_u = 0.5375\, w_u \ell_n = 0.5375 \times 8.80 \times 7 = 33.11$ ton

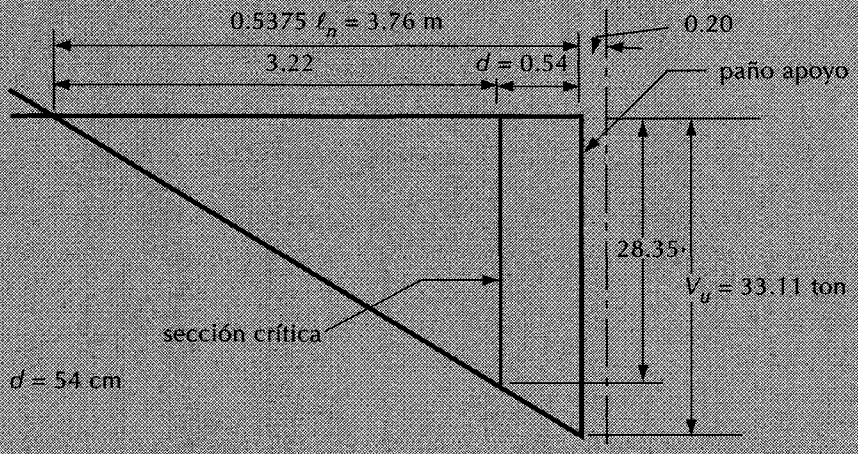


Diagrama de V_s

$$\left. \begin{array}{l} V_n = V_c + V_s \\ V_n = \dfrac{V_u}{\phi} \end{array} \right\} \frac{V_u}{\phi} = V_c + V_s$$

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** **13**

$V_c = 7.9\ b'd = 7.9 \times 30 \times 54 = 12{,}800$ kg (hoja de cálculo 2)

$$V_{s\ paño\ apoyo} = \frac{33{,}110}{0.75} - 12{,}800 = 31{,}347 \text{ kg}$$

$$V_{s\ sección\ crítica} = \frac{28{,}350}{0.75} - 12{,}800 = 25{,}000 \text{ kg}$$

Según el ACI se requieren estribos si $V_u > \frac{1}{2}\phi V_c$

$$\frac{1}{2}\phi V_c = \frac{1}{2} \times 0.75 \times 12{,}800 = 4800 < V_u$$

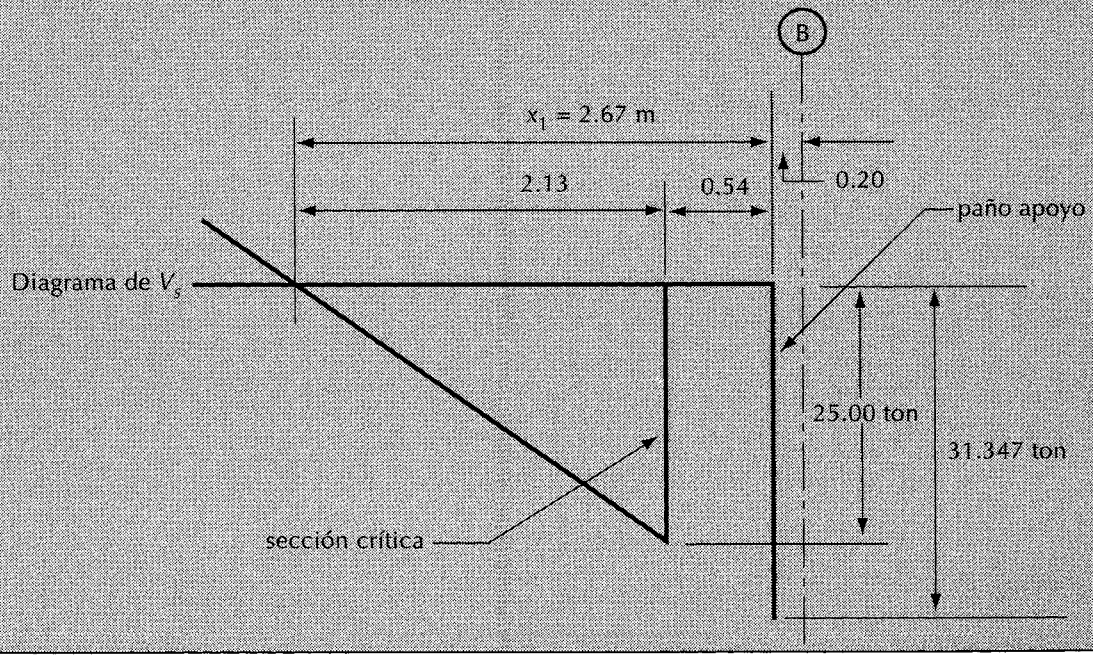
$\therefore$ se requieren estribos

Distancia a partir del paño de apoyo donde $V_s = 0$

Pendiente del diagrama de V_s:

$$m = \frac{w_u}{\phi} = \frac{8.80}{0.75} = 11.73 \text{ ton/m}$$

$$V_s = 0 \text{ para } x_1 = \frac{31.347}{11.73} = 2.67 \text{ m}$$



EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **14**

Distancia a partir del paño del apoyo en que se necesitarán estribos

Se requieren estribos siempre que $V_u > 1/2\ \phi V_c = \frac{1}{2} \times 0.75 \times 12{,}800 = 4800$ kg

Del diagrama de fuerza cortante:

$$x_2 = \frac{V_u - \phi V_c / 2}{w_u} = \frac{33.11 - 4.80}{8.80} = 3.22 \text{ m}$$

Separación máxima admisible de estribos

Si $V_s > \sqrt{f'_c}\, b'd$; $s_{máx} = d/4$

Si $V_s < \sqrt{f'_c}\, b'd$; $s_{máx} = d/2$

$\sqrt{f'_c}\ b'd = 15.8\ b'd = 15.8 \times 30 \times 54 = 25{,}600 \text{ kg} > V_s$

$\therefore\ s_{máx} = d/2 = 27$ cm

Por $A_{v\,mín} = \dfrac{0.2\sqrt{f'_c}\, b's}{f_y}$ (ecuación 7.15)

$$s_{máx} = \frac{1.42 \times 4200}{0.2\sqrt{250} \times 30} = 63 > 27, \text{ estribos No. 3}$$

$\therefore$ rige $s_{máx} = 27$ cm

Determinación de separaciones requeridas a diversas distancias a partir del paño del apoyo

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$$ (estribos No. 3)

$V_s = V_{s\ paño\ apoyo} - mx$

$m = \dfrac{w_u}{\phi} = 11.73 \text{ ton/m} = 117.3 \text{ kg/cm}$

x = distancia desde el paño del apoyo (cm)

$$s = \frac{A_v f_y d}{(V_{s\ paño\ apoyo} - mx)} = \frac{1.42 \times 4200 \times 54}{(V_{s\ paño\ ap.} - mx)} = \frac{322{,}000}{(V_{s\ paño\ ap.} - mx)}$$

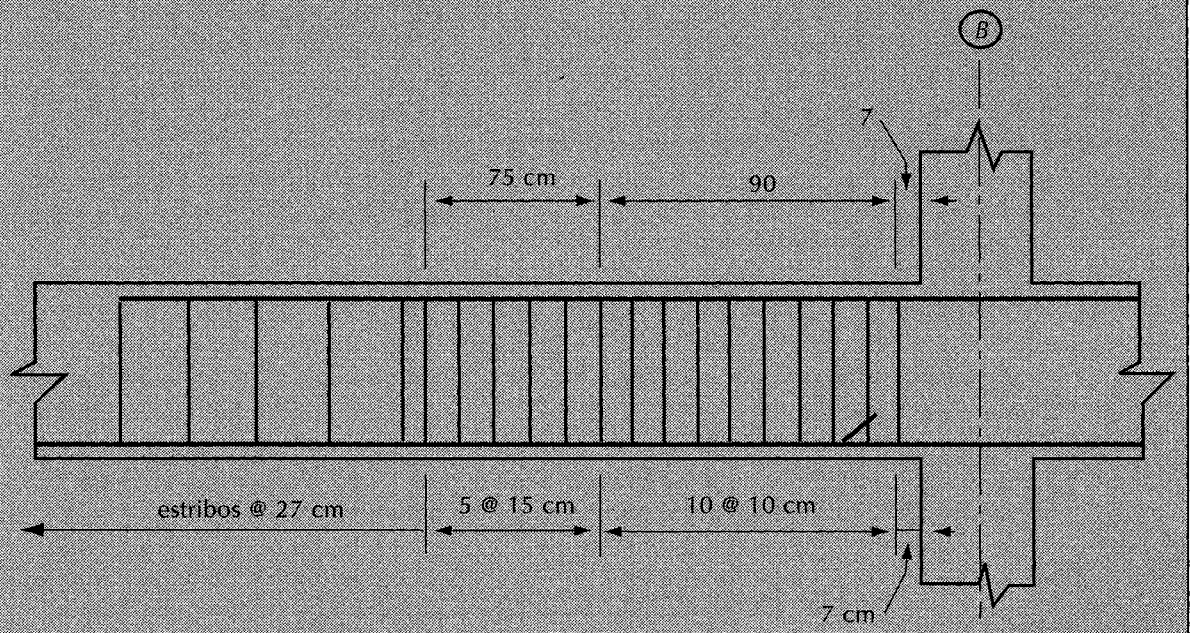
EJEMPLO 14.8 ***(continuación)*** **15**

x (cm)	s (cm)	
54	13	(sección crítica)
100	16	
150	23	

Distancia a partir de la cual se pueden usar estribos a cada 27 cm:

$$27 = \frac{322{,}000}{(31{,}347 - 117.3\,x)}\ ;\ x = 165\ \text{cm}$$

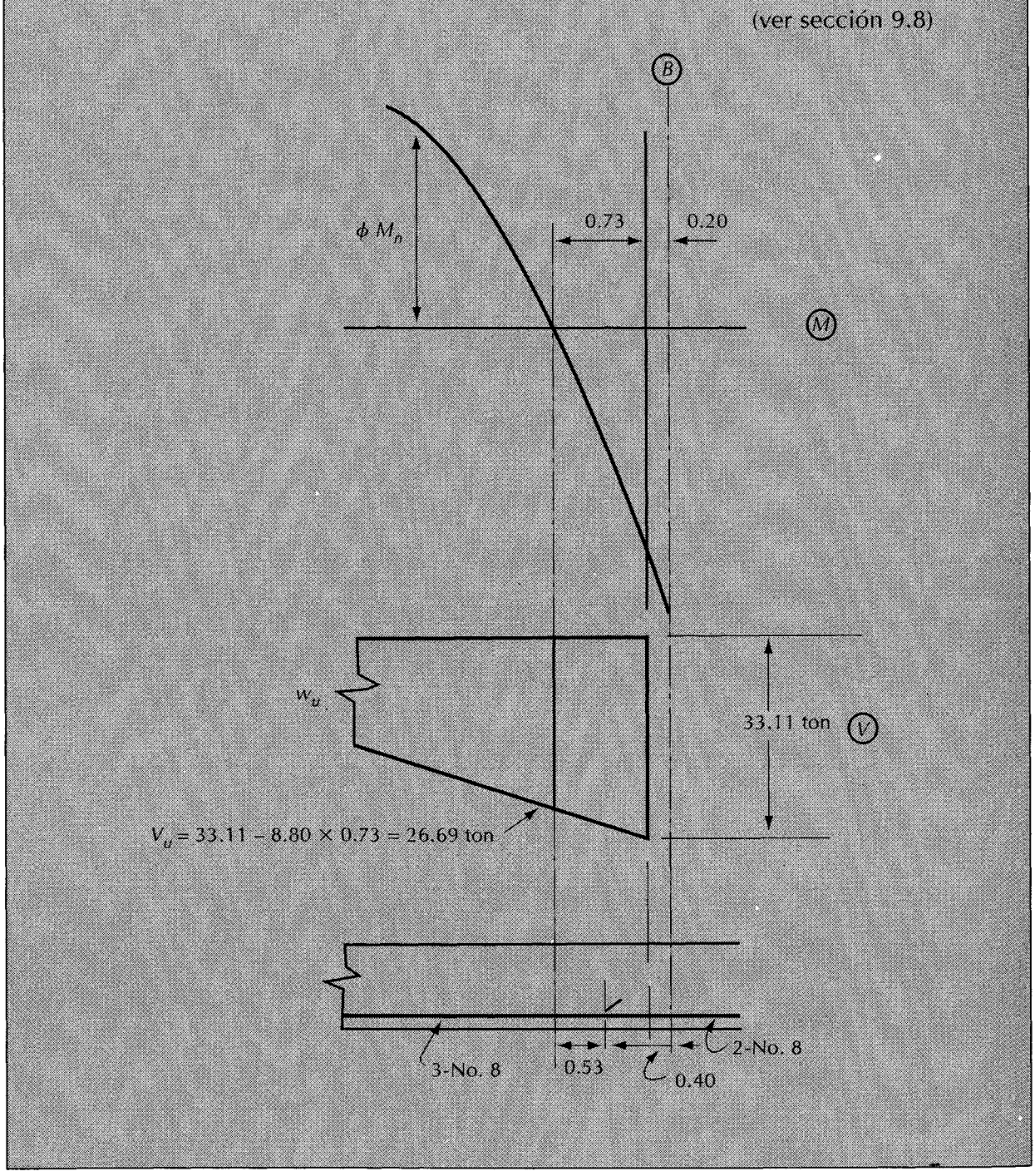
Detalle refuerzo transversal



Estribos No. 3 de dos ramas

EJEMPLO 14.8 *(continuación)* **16**

REVISIÓN DE REQUISITOS DE DESARROLLO EN PUNTOS DE INFLEXIÓN PARA EL REFUERZO POSITIVO



EJEMPLO 14.8 *(continuación)* 17

Longitud de desarrollo disponible = L_{disp}

$$L_{disp} = \frac{M_n}{V_u} + L_a \geq L_d \qquad \text{(ecuación 9.23)}$$

$$M_n = \frac{M_{R3\text{-No. }8}}{\phi} = \frac{30.65}{0.9} = 34.06 \text{ ton} - \text{m} \qquad \text{(ver hoja de cálculo 6)}$$

$$L_a \leq \left\{ \begin{matrix} L_{a_{real}} = 93 - 40 = 53 \text{ cm} \\ 12\, d_b = 12 \times 2.54 = 30 \text{ cm} \\ d = 54 \text{ cm} \end{matrix} \right\} \therefore L_a = 30 \text{ cm}$$

$$L_{disp} = \frac{34.06}{26.69} + 0.30 = 1.58 > L_d = 1.27 \text{ m} \qquad \text{(ver hoja de cálculo 10)}$$

Referencias

14.1 *Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo I, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.*

14.2 *Comité ACI 318. Building Code Requirements for Reinforced Concrete (ACI 318-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.*

14.3 *Eurocódigo 2 "Proyecto de Estructuras de Hormigón". Asociación Española de Normalización y Certificación, Madrid, 1993.*

14.4 *Robles F.-V., F. Manual de Diseño de Obras Civiles, Sección H: Concreto Reforzado. México, D. F., Comisión Federal de Electricidad, 1970.*

14.5 González *Cuevas, O. M. Manual de Diseño de Concreto Reforzado, Vol. 1, Flexo-compresión y cortante. México, D. F., Instituto Mexicano del Cemento y del Concreto, 1970.*

14.6 *Comité ACI 315. ACI Detailing Manual (SP-66). Detroit, American Concrete Institute, 1994.*

14.7 *Comité ACI 340. Design Handbook: Beams, One-Way Slabs, Brackets, Footings, Pile Caps, Columns, Two-Way Slabs, and Seismic Design in Accordance with the Strength Design Method of 318-95, SP-017, Detroit, 1997.*

14.8 Portland *Cement Association. Notes on ACI 318-02 Building Code Requirements for Structural Concrete with Design Applications.* Skokie, *2002.*

14.9 Loera, *Santiago, y Mendoza, Carlos Javier. Comentarios, Ayudas de Diseño y Ejemplos de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, DDF. Series del Instituto de Ingeniería de la UNAM,* No. *ES-2, noviembre 1991.*

14.10 –. *Ayudas de diseño, México, D. F.,* Sociedad *Mexicana de Ingeniería Estructural, 1983.*

14.11 *Serrano* Lizaola, *Raúl y De Santiago Luna,* Luis *Miguel. Programa Interactivo de Cálculo para el Análisis, Revisión y Dimensionamiento de Vigas de Concreto Reforzado.* XIII *Congreso* Nacional *de Ingeniería Estructural. Sociedad Mexicana* de *Ingeniería Estructural. Puebla,* 2002.

14.12 *Sánchez Carranza, A., y Rojo Magdaleno, M. Elaboración de ayudas de diseño con microcomputadora. Taller de Ingeniería No. 89. México,* D. *F., Universidad Autónoma Metropolitana* (Azcapotzalco), *1983.*

14.13 –. *CRSI Design Handbook. Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 2002.*

Ejercicios

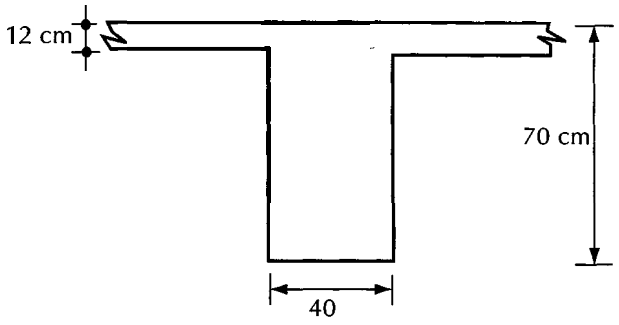
(Observación: los siguientes ejercicios pueden resolverse con las NTC-04 o con el Reglamento ACI 318-02, salvo cuando se indique lo contrario.)

14.1 Calcular y detallar el refuerzo por flexión de una sección de 30 × 100 cm para que resista un momento M_u = 90 ton-m. Supóngase un concreto de f'_c = 200 kg/cm^2 y un acero de f_y = 4200 kg/cm^2.

14.2 Dimensionar una sección rectangular con relación $h/b \cong 2.5$ para que resista un momento M_u = 60 ton-m. La relación de refuerzo, p, debe ser aproximadamente de 0.4 ρ_b y las dimensiones h y b serán múltiplos de 5 cm. El concreto debe ser de f'_c = 300 kg/cm^2 y el acero de f_y = 4200 kg/cm^2

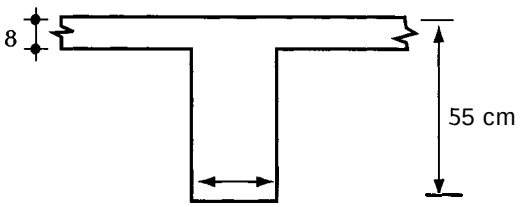
14.3 Calcular el refuerzo de una sección rectangular de 25 × 60 cm para que resista un momento flexionante M_u = 65 ton-m. Supóngase un concreto de f'_c = 200 kg/cm^2 y un acero de f_y = 4200 kg/cm^2. El refuerzo de tensión no debe exceder del 75 por ciento del correspondiente a la sección balanceada.

14.4 Calcular el área de acero de la siguiente sección para que resista un momento M_u = 160 ton-m. Comprobar si el acero es menor del 75 por ciento del correspondiente a la condición balanceada.



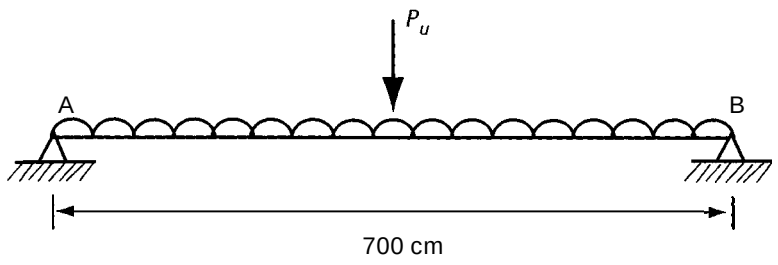
f'_c = 200 kg/cm^2
f_y = 4200 kg/cm^2
Claro de la viga = 640 cm
Distancia centro a centro de nervaduras = 250 cm

14.5 Calcular el área de acero de la siguiente sección para que resista un momento M_u = 30 ton-m. Comprobar si la cantidad de acero es mayor que la mínima admisible y menor que el 75 por ciento de la correspondiente a la condición balanceada.



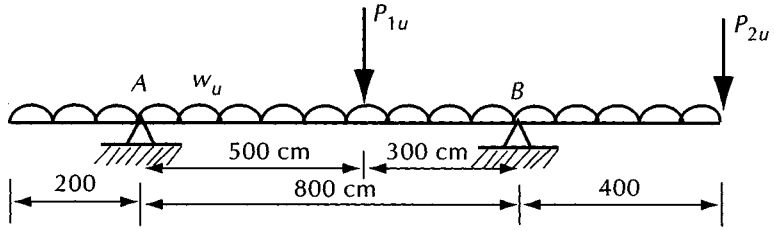
f'_c = 250 kg/cm^2
f_y = 4200 kg/cm^2
Claro de la viga = 900 cm
Distancia centro a centro de nervaduras = 100 cm

14.6 Dimensionar la siguiente viga de sección rectangular.



$f'_c = 250$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$P_u = 20$ ton
$w = 3$ ton/m (incluye peso propio)
$P_{servicio} = 10$ ton
$w_{servicio} = 1.5$ ton/m
$A_s \leq 0.75\, A_{sb}$

14.7 Dimensionar la siguiente viga rectangular. Las cargas de servicio que deben considerarse en las comprobaciones de agrietamiento y deformaciones, son el 40% de las indicadas.

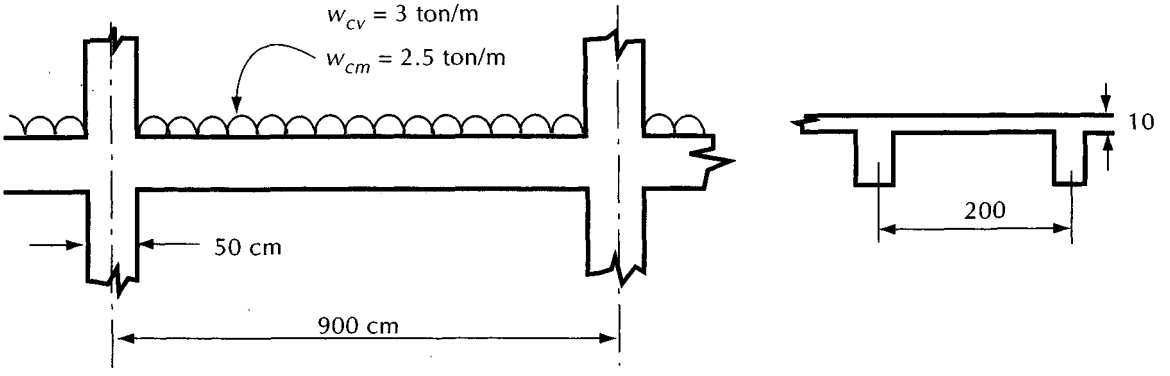


$f'_c = 300$ kg/cm^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2
$w = 3.5$ ton/m
$P_{1u} = 25$ ton
$P_{2u} = 5$ ton

14.8 Determinar la deflexión del claro AB del ejemplo 14.7, considerando que el 30 por ciento de la carga viva actúa en forma continua. Comprobar si la deflexión calculada satisface los requisitos que establece el Reglamento ACI 318-02 para miembros cuya deformación no afecta a elementos no estructurales.

14.9 Revisar si el refuerzo negativo del apoyo B y el positivo del claro AB de la viga del ejemplo 14.7, satisfacen los requisitos de agrietamiento que establece el Reglamento ACI 318-02.

14.10 Hacer un diseño completo del claro interior de la viga continua mostrada en el croquis, incluyendo la revisión de la deflexión y del agrietamiento. Calcular los momentos con los coeficientes de la tabla 14.1. Para todos los aspectos del dimensionamiento, aplíquense las indicaciones de las NTC-04. Para la revisión de deflexión, considerar que el 45 por ciento de la carga viva actúa en forma continua y que la deformación puede afectar a elementos no estructurales.



Concreto : f'_c = 300 kg /cm^2
Acero principal: f_y = 6000 kg/cm^2
Acero estribos: f_y = 4200 kg/cm^2

CAPÍTULO 15

Dimensionamiento de columnas

15.1 Introducción. /15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas. 115.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas. /15.4 Ejemplos.

15.1 Introducción

En este capítulo se trata el dimensionamiento de columnas dados la carga axial y el momento que deben resistir. El comportamiento de columnas sometidas a combinaciones de carga axial y momento se analizó en el capítulo 6, donde también se expusieron diversos procedimientos para determinar la resistencia de columnas cortas de dimensiones y refuerzo dados. Los efectos de esbeltez fueron estudiados en el capítulo 13. En los ejemplos desarrollados en el presente capítulo se supone que dichos efectos de esbeltez ya están considerados en los valores de la carga axial y el momento para los cuales deben proponerse secciones adecuadas. Los métodos de dimensionamiento utilizados están basados en el uso de diagramas de interacción.

15.2 Recomendaciones para el dimensionamiento de columnas

ACERO MÍNIMO

Los porcentajes mínimos de refuerzo recomendados para columnas son, por lo general, mayores que los recomendados para vigas. En los reglamentos de construcción suelen especificarse porcentajes mínimos del orden de uno por ciento. Las NTC-O4 indican que la relación entre el área del refuerzo vertical y el área total de la sección no sea menor que $20/f_y$ estando f_y expresado en kg/cm^2. También se recomienda usar por lo menos una barra en cada esquina de columnas no circulares y un mínimo de seis barras en columnas circulares.

SEPARACIÓN ENTRE BARRAS

Suele especificarse que la separación libre entre las barras longitudinales no sea inferior a 1.5 veces el diámetro de la barra, 1.5 veces el tamaño máximo del agregado, ni que 4 cm.

HACES DE BARRAS

Debido a que los porcentajes de refuerzo usados en columnas son altos, a veces es necesario recurrir al empleo de haces o paquetes de barras, lo cual simplifica el armado, como se muestra en la figura 15.1. En general, se permite utilizar hasta cuatro barras por haz. Las barras deben ligarse firmemente entre sí. Se considera que el área del haz es la suma de las áreas de las barras. La longitud de desarrollo del haz es igual a la de una barra individual incrementada en ciertos factores que dependen del número de barras por haz. Según el Reglamento ACI 318-02, el factor es 1.20 para haces de tres barras y de 1.33 para haces de cuatro barras.

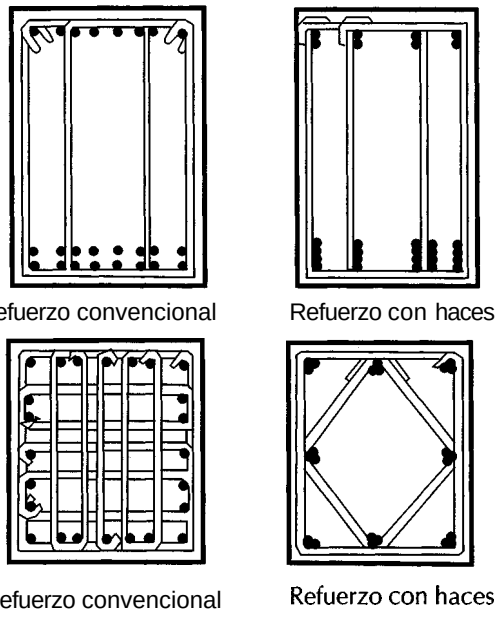


Figura 15.1 Sugerencias para el uso de haces de varillas en vigas y columnas.

Se recomienda no cortar todas las barras de un haz en la misma sección. Los haces evitan el congestionamiento del refuerzo, pero obligan a poner especial cuidado en los detalles de empalmes y dobleces. El recubrimiento de un haz debe ser el de una barra hipotética de tal diámetro que su área sea el área del haz. Para las separaciones entre haces se hacen recomendaciones semejantes.

DETALLES EN LOS CAMBIOS DE SECCIÓN

Es frecuente que se cambien las dimensiones de las columnas al pasar de un piso a otro de una estructura. En estos casos, las barras deben doblarse en forma gradual, para evitar componentes desfavorables de esfuerzos. En la figura 15.2 se muestran las recomendaciones que a este respecto se presentan en la referencia 15.1, que son semejantes a las de Reglamento ACI 318-02. Según este Reglamento, en la zona de cambio debe colocarse refuerzo transversal capaz de resistir una y media veces la componente horizontal de la fuerza que actúe en las porciones inclinadas de las barras de la columna.

REFUERZO MÁXIMO

Aunque en algunos reglamentos se permiten porcentajes máximos de refuerzo longitudinal del orden de 8 por ciento, pocas veces puede colocarse esta cantidad de refuerzo por restricciones de orden constructivo. Las NTC-04 especifican un máximo de 6 por ciento.

EXCENTRICIDAD MÍNIMA

Las NTC-O4 especifican que debe considerarse siempre una excentricidad mínima igual a $0.05h \geq 2$ cm, siendo h la dimensión de la columna en la dirección de flexión.

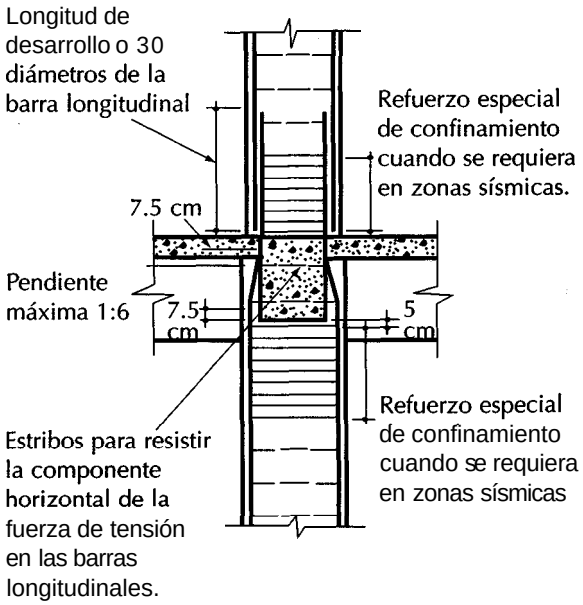


Figura 15.2 Detalles del refuerzo en los cambios de sección de columnas.

REFUERZO TRANSVERSAL

El refuerzo transversal puede consistir en hélices o en estribos.

En el caso de hélices, éstas deben anclarse en sus extremos mediante 2.5 vueltas según las NTC-04 y 1.5 vueltas según el Reglamento ACI 318-02. El esfuerzo de fluencia no debe ser superior a 4200 kg/cm^2. El diámetro y la separación de las hélices se calculan de acuerdo con lo indicado en el capítulo 4. Además deben respetarse ciertas limitaciones establecidas en los reglamentos que tienen por objeto asegurar una acción confinante efectiva y, al mismo tiempo, permitir la correcta colocación del concreto. Así, suele especificarse que la separación libre máxima entre vueltas consecutivas no exceda de 7 a 8 cm, mientras que la separación libre mínima se limite a unos 2.5 cm o a 1.5 veces el tamaño máximo del agregado.

En el caso de estribos, éstos deben colocarse de manera que restrinjan el pandeo lateral de las barras longitudinales. Tanto el Reglamento ACI 318-02 como las NTC-04, especifican que todas las barras de esquina y cada barra alternada estén restringidas por la esquina de un estribo con ángulo interno máximo de 135°. La distancia libre de las barras no restringidas a las barras restringidas se limita a 15 cm. La separación centro a centro entre barras restringidas se suele limitar a unos 35 cm, como se aprecia en la figura 15.3. El significado de estos requisitos junto con detalles típicos de anclaje, se ilustran en la figura 15.3. En la figura 15.4 se muestran

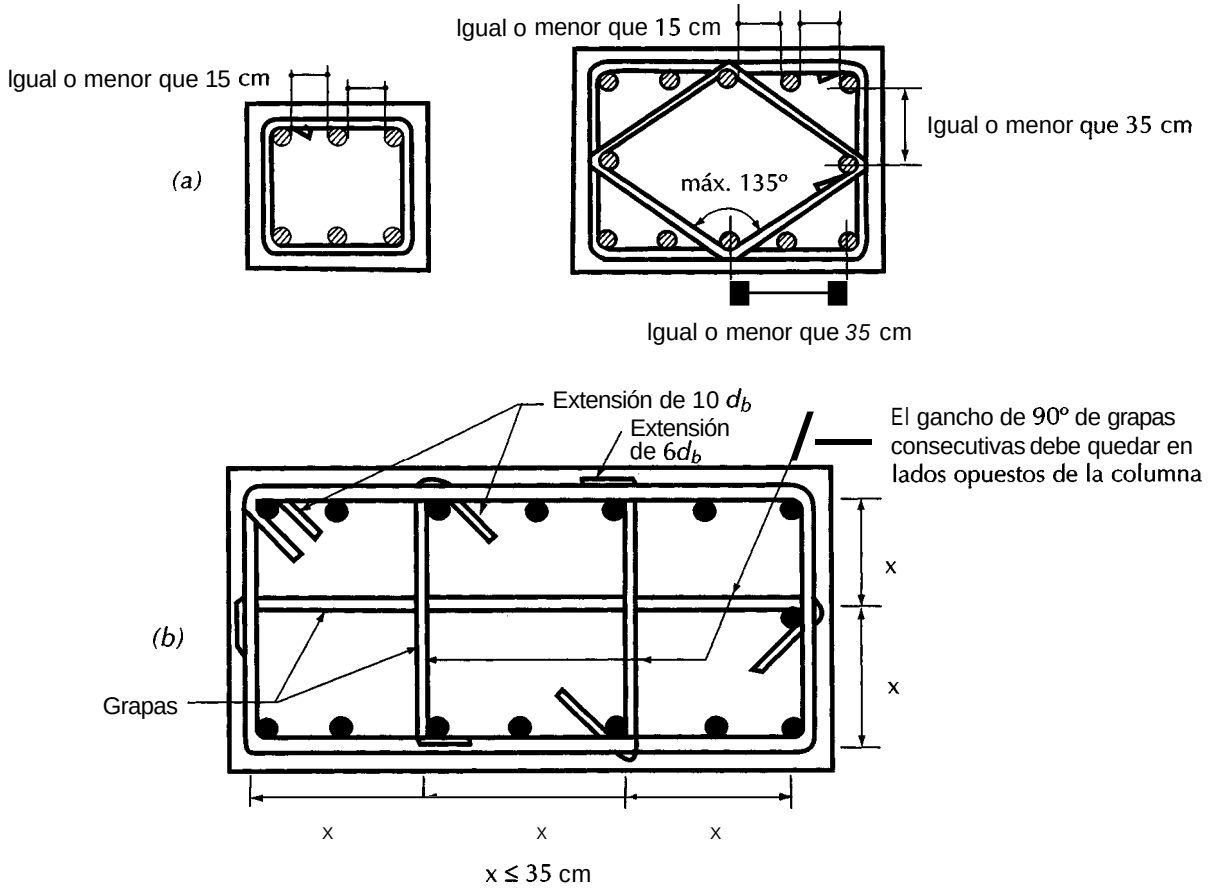
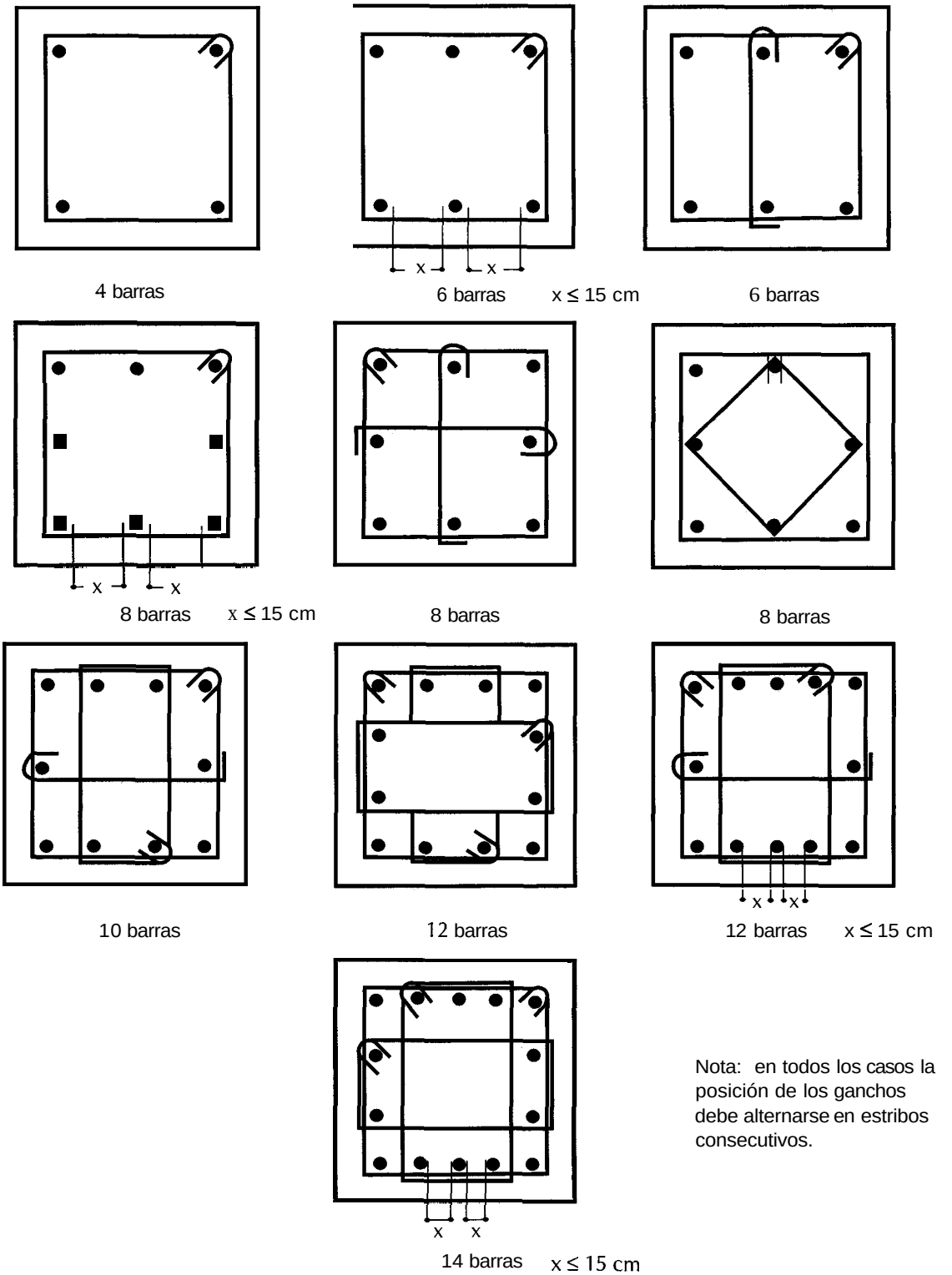


Figura 15.3 Detalles del refuerzo transversal de columnas.



4 barras

6 barras $x \leq 15$ cm

6 barras

8 barras $x \leq 15$ cm

8 barras

8 barras

10 barras

12 barras

12 barras $x \leq 15$ cm

14 barras $x \leq 15$ cm

Nota: en todos los casos la posición de los ganchos debe alternarse en estribos consecutivos.

Figura 15.4 Arreglos de estribos para columnas.

algunos arreglos típicos de estribos para columnas rectangulares.

Para proporcionar restricción lateral pueden usarse grapas en la forma representada en la figura 15.3*b*. Cuando las barras están colocadas en la periferia de un círculo, se puede usar un estribo circular. Como en el caso de vigas, los estribos deben estar adecuadamente anclados en sus extremos.

Según el Reglamento ACI 318-02, la separación de los estribos no debe exceder de 16 veces el diámetro de la barra longitudinal, 48 veces el diámetro de los estribos, ni de la menor dimensión de la columna. En lugar de la primera de estas restricciones, las NTC-04 limitan la separación máxima a $850/\sqrt{f_y}$ veces el diámetro de la barra (o de la barra de menor diámetro de un paquete), siendo f_y el esfuerzo de fluencia de las barras longitudinales en kg/cm^2, y en lugar de la tercera, especifican la mitad de la menor dimensión de la columna. Además, las NTC-04 especifican que la separación máxima se reduzca a la mitad en una longitud no menor que la dimensión transversal máxima de la columna, un sexto de su altura, ni que 60 cm, encima y debajo de cada unión de columna con vigas o losas. El ACI 318-02 se limita a indicar que el primer estribo encima o debajo de la losa o viga se coloque a la mitad de la separación máxima a partir de los paños de la unión.

En cuanto al diámetro de los estribos, el Reglamento ACI 318-02 especifica valores según el diámetro de las barras longitudinales. Las NTC exigen que la fuerza de fluencia que puede desarrollar un estribo no sea menor que seis por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra o el mayor paquete restringido por el estribo.

Además de satisfacer los requisitos mínimos arriba reseñados, el refuerzo transversal debe proporcionar suficiente resistencia frente a las fuerzas cortantes o torsiones que pudieran actuar sobre la columna. En caso de estructuras expuestas a sismos, deben tenerse en cuenta las recomendaciones adicionales que se mencionan brevemente en el capítulo 20.

15.3 Ayudas de diseño para el dimensionamiento de columnas

Una de las ayudas más útiles para el dimensionamiento de columnas es el diagrama de interacción. La forma de construir los diagramas de interacción se describió en el capítulo 6, donde también se explica cómo se utilizan para determinar la resistencia a combinaciones de momento y carga axial de secciones de características conocidas. El problema inverso, consistente en determinar las dimensiones y el refuerzo requeridos para resistir una fuerza axial y un momento dados, puede también resolverse con la ayuda de los diagramas de interacción mediante un proceso de tanteos como el ilustrado en los ejemplos del siguiente inciso.

En el Apéndice C se reproducen algunos diagramas típicos tomados de los elaborados por González Cuevas y Cano [15.2]. Estos diagramas están basados en las hipótesis de las NTC-04 relativas al bloque equivalente de esfuerzos de compresión, figura 15.7. Cada una de las figuras del Apéndice C incluye un conjunto de diagramas adimensionales para diferentes valores del parámetro q. Para que estos diagramas sean adimensionales, se tiene que elaborar un conjunto para cada combinación de f'_c y de f_y a partir de valores de f'_c mayores a 350 kg/cm^2. En la referencia 15.2 se presentan conjuntos de diagramas para valores de f'_c que van de 350, y menos, a 700 kg/cm^2, en intervalos de 50 kg/cm^2, y para valores de f_y de 4200 y de 6000 kg/cm^2, para columnas rectangulares y circulares. Se proporcionan gráficas para distintos valores de d/h, en el caso de secciones rectangulares y de d/D, en el de secciones circulares.

Aunque las gráficas son adimensionales y las hipótesis relativas al bloque equivalente de esfuerzos de compresión son semejantes en las NTC y en el Reglamento ACI, existe una diferencia en la magnitud del esfuerzo uniforme en el bloque, ya que en las NTC es 0.85 f^*_c mientras que en el ACI es 0.85 f'_c. Las gráficas del Apéndice C dan resultados correctos para el Reglamento ACI si el esfuerzo f'_c de las gráficas se multiplica por 0.8, que es el factor para pasar de f'_c a f^*_c en las NTC. Por ejemplo, las gráficas correspondientes a un concreto de 250 kg/cm^2 serían válidas con el Reglamento ACI para un concreto de 250 × 0.8, o sea, de 200 kg/cm^2. Desde luego, los valores de F_R deben sustituirse por los correspondientes de ϕ.

Los diagramas pueden utilizarse de distintas maneras. Considérese, por ejemplo, el diagrama de la figura 15.5*a*, que muestra esquemáticamente el formato empleado en los de la referencia 15.2.

Una forma de proceder puede consistir en suponer una sección y calcular los parámetros *K* y R. Estos parámetros definen un punto en el diagrama al que corresponderá un valor de q, del cual puede deducirse el valor de p necesario. Si este valor está comprendido entre límites aceptables, el problema está resuelto. De lo contrario es necesario ensayar otra sección. El valor del factor de resistencia F_R se supone igual a 0.70 si el núcleo no está confinado y la falla es de compresión, e igual a 0.80 si el núcleo cuenta con un confinamiento adecuado o cuando la falla sea en tensión.

Otra forma de proceder consiste en suponer una sección y definir un punto en el diagrama a partir del parámetro *K* o R y la relación *e/h*.

Si se limita la cuantía p a un valor dado, puede calcularse el valor de q correspondiente. Se puede, entonces, definir un punto en el diagrama a partir de este valor y de la relación *e/h*. Se harán los ajustes necesarios en la sección supuesta hasta encontrar una que dé un valor de P_u semejante al requerido.

En la figura 15.5*b* se presenta un diagrama de los incluidos en la referencia 15.3, elaborados con las hipótesis del Reglamento ACI. Estos diagramas dan directamente el valor de la cuantía p en vez del índice de refuerzo ***o***. Las líneas radiales corresponden a distintos valores del término f_s/f_y, donde f_s es el esfuerzo en las barras de acero en tensión más alejadas dé la cara en compresión. El valor de *O* corresponde a un diagrama de deformaciones unitarias como el del punto 4 del ejemplo 6.1. El valor de 1 corresponde al punto de la falla balanceada, ya que f_s es igual al esfuerzo de fluencia. Por arriba de esta última línea las fallas son en compresión y debe usarse un valor de + de 0.65 para columnas de estribos y de 0.70 para columnas con refuerzo helicoidal. Por debajo de la línea marcada con ε_s = 0.0050, las fallas son por tensión y debe usarse un valor de ϕ de 0.90. Entre ambas líneas, el valor de + varía linealmente como se muestra en la figura 6.4. Este diagrama se usa en el ejemplo 15.2 más adelante.

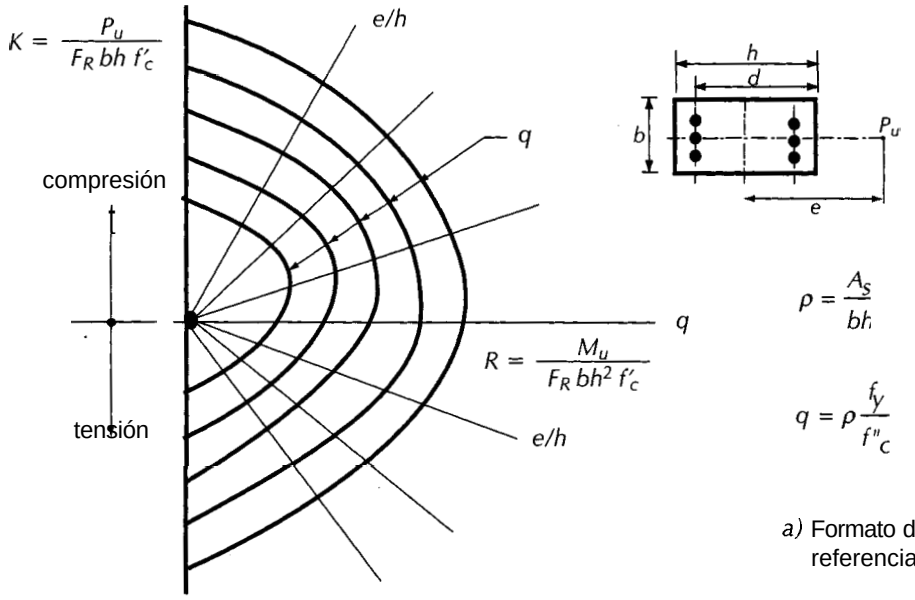
Obsérvese que en la figura 15.5*b* hay una línea horizontal marcada con $K_{máx}$. Corresponde a la limitación que establece el Reglamento ACI 318-02 para columnas con poca excentricidad, según la cual, la máxima capacidad para carga axial que puede atribuirse a columnas está dada por las siguientes expresiones:

Para columnas zunchadas:

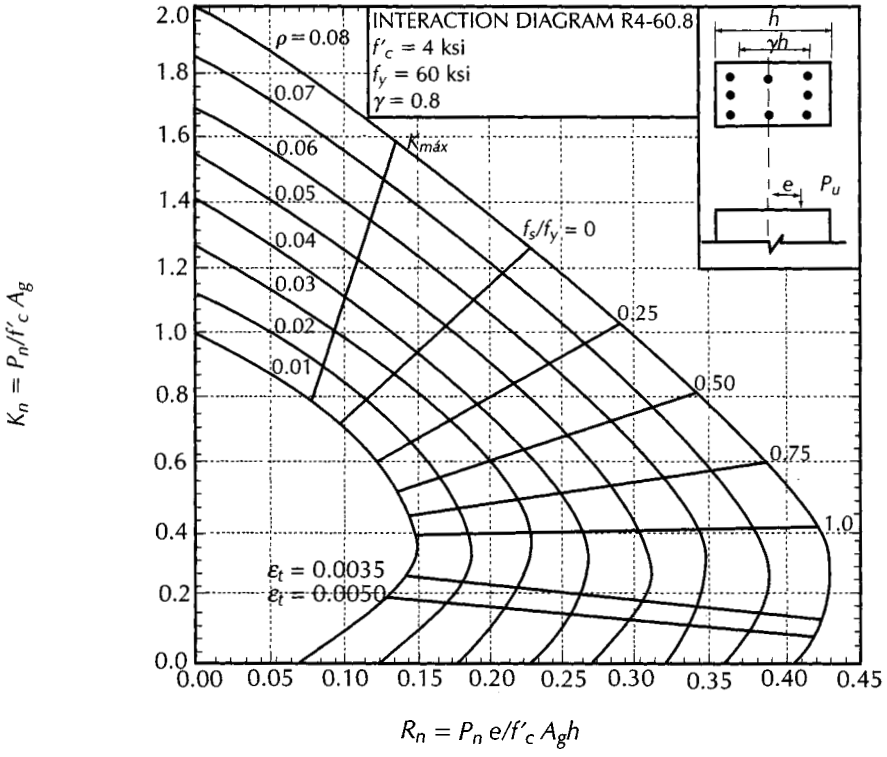
$$\phi P_{n\,(máx)} = 0.85\,\phi\,[0.85\,f'_c\,(A_g - A_s) + f_y\,A_s] \qquad (15.1)$$

Para columnas de estribos:

$$\phi P_{n\,(máx)} = 0.80\,\phi\,[0.85\,f'_c\,(A_g - A_s) + f_y A_s] \qquad (15.2)$$



a) Formato de los diagramas de la referencia 15.2 (hipótesis NTC-04).



b) Ejemplo de diagrama de la referencia 15.3 (hipótesis ACI-02).

Figura 15.5 Formatos típicos de diagramas de interacción.

En estas expresiones, P_n es la capacidad nominal. El factor de resistencia ϕ se toma igual a 0.70 para columnas zunchadas e igual a 0.65 para columnas de estribos. Las expresiones 15.1 y 15.2 rigen respectivamente para excentricidades aproximadamente iguales a $0.05h$ y $0.10h$, que corresponden a las excentricidades mínimas especificadas en versiones anteriores del Reglamento ACI. Simplifican considerablemente el dimensionamiento de columnas con excentricidades pequeñas.

Los diseñadores que se basen en las Recomendaciones internacionales CEB-FIP pueden recurrir al texto de Jiménez Montoya [15.4], que incluye una gama muy amplia de diagramas de interacción basados en las hipótesis de dichas recomendaciones.

En la referencia 15.7 se presentan diagramas para secciones en cruz y otras secciones poco comunes.

Son útiles también las ayudas de diseño en forma de tablas que dan directamente la carga axial y el momento flexionante que puede resistir una sección de dimensiones dadas, con una cierta área de acero y con materiales de resistencias conocidas. Dados los valores de P, y M_u requeridos, pueden encontrarse en las tablas distintas alternativas de secciones, con el refuerzo correspondiente, que proporcionan una resistencia adecuada. Véase, por ejemplo, la referencia 15.5.

Diagramas de interacción como los del Apéndice C, o tablas como las mencionadas anteriormente, han sido muy útiles para el diseño de columnas. Sin embargo, en la actualidad, con la amplia disponibilidad de computadoras personales, resulta más práctico usar programas que proporcionan el diagrama de interacción y la resistencia a flexocompresión de columnas específicas, introduciendo como datos sus dimensiones, lechos de acero, tamaño de las barras y resistencias del concreto y del acero. En las Referencias 15.6 y 15.8 se presentan programas de este tipo.

15.4 Ejemplos

Ejemplo 15.1. Dimensionamiento de una columna de sección circular zunchada.

El dimensionamiento de la columna circular de este ejemplo está basado en las NTC-04. La columna forma parte de una estructura de marcos ortogonales, en la que el análisis indicó que la columna está sujeta a momentos de dos direcciones perpendiculares entre sí. Puesto que se trata de una columna circular, el problema de flexión biaxial puede reducirse a uno de flexión uniaxial, componiendo los momentos M_x y M_y vectorialmente. Los valores de las acciones dadas corresponden al nivel de servicio para las dos combinaciones de carga básica: a) carga muerta y viva, y b) carga muerta, carga viva y sismo.

Como se señaló en la sección 15.3, el dimensionamiento de columnas puede llevarse a cabo por un proceso de tanteos auxiliado por diagramas de interacción. El procedimiento implica proponer una sección e investigar, con la ayuda de los diagramas, si la sección propuesta puede resistir las cargas con una cuantía de refuerzo que esté comprendida entre los límites admisibles. En el ejemplo se presenta únicamente el tanteo final, que proporcionó una Solución adecuada.

Para elegir el diagrama apropiado, es necesario determinar la relación d/D, donde d es el diámetro de un círculo que pasa por los centros de las barras, y D es el diámetro de la sección de la columna. Cuando el valor de d/D no coincide con los valores para los cuales existen diagramas, puede recurrirse a la interpolación, cuando se requiera precisión.

Se determinó un valor del índice q para cada una de las condiciones de carga consideradas, comprobándose que regía la de carga muerta, viva y sismo. Por tratarse de una

EJEMPLO 15.1 ***Dimensionamiento de una columna de sección circular, zunchada (NTC-04).***

DATOS

Cargas
Las cargas dadas son a nivel de servicio.

a) Condición carga muerta más carga viva

$P = 150$ ton
$M_x = 15$ ton-m
$M_y = 3$ ton-m

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$P = 130$ ton
$M_x = 35$ ton-m
$M_y = 12$ ton-m

Materiales

Concreto: $f'_c = 300$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2
Tamaño máximo agregado = 2.5 cm

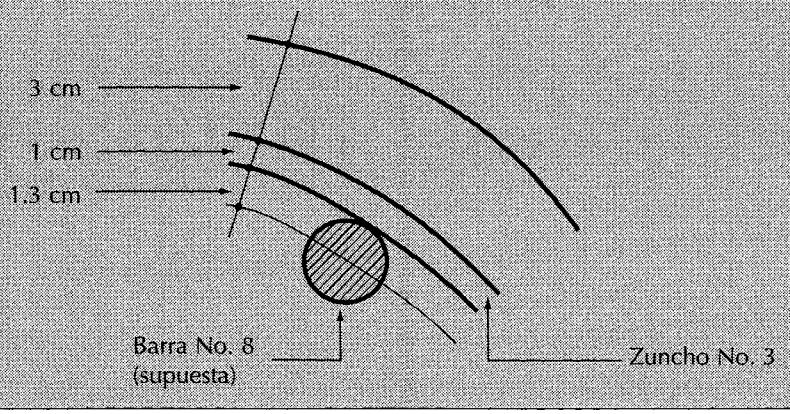
Recubrimiento libre: 3 cm
Reglamento: NTC-04

Se pide: determinar la sección y el refuerzo usando las gráficas del Apéndice C. Detallar el zuncho.

DATOS PARA EL CÁLCULO

$f^*_c = 0.8\, f'_c = 0.8 \times 300 = 240$ kg/cm^2
$f''_c = 0.85\, f^*_c = 204$ kg/cm^2
Estimación del recubrimiento r

$r = 3 + 1 + 1.3 = 5.3$ cm $\cong 5.5$ cm



EJEMPLO 15.1 ***(continuación)***

RESISTENCIAS REQUERIDAS

Composición de momentos

a) Condición carga muerta más carga viva

$$M = \sqrt{M_x^2 + M_y^2} = \sqrt{15^2 + 3^2} = 15.3 \text{ ton-m}$$

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$$M = \sqrt{35^2 + 12^2} = 37.0 \text{ ton-m}$$

Resistencias

a) Condición carga muerta más carga viva

$P_u = F_c P = 1.4 \times 150 = 210$ ton
$M_u = F_c M = 1.4 \times 15.3 = 21.4$ ton-m
$e = 21.4/210 = 0.10$ m

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$P_u = 1.1 \times 130 = 143$ ton
$M_u = 1.1 \times 37 = 40.7$ ton-m
$e = 40.7/143 = 0.28$ m

DIMENSIONAMIENTO SECCIÓN Y REFUERZO PRINCIPAL

Diámetro supuesto: $D = 55$ cm

$d = D - 2r = 55 - 2 \times 5.5 = 44$ cm

$d/D = 44/55 = 0.8$ ∴ Usar figura C.19 del Apéndice C

a) Condición carga muerta más viva

$e/D = 0.10/0.55 = 0.18$

$$K = P_u/F_R D^2 f'_c = \frac{210{,}000}{0.8 \times 55^2 \times 300} = 0.29 \Big\} \quad q < 0.2$$

EJEMPLO 15.1 ***(continuación)***

b) Condición carga muerta más carga viva más sismo

$$\left.\begin{aligned} e/D &= 0.28/0.55 = 0.51 \\ K &= \frac{143{,}000}{0.80 \times 55^2 \times 300} = 0.20 \end{aligned}\right\} q = 0.5 \text{ (rige)}$$

$$\rho = q \frac{f''_c}{f_y} = 0.5 \frac{204}{4200} = 0.024$$

$$A_s = \rho \frac{\pi D^2}{4} = \frac{0.024 \times \pi \times 55^2}{4} = 57 \text{ cm}^2$$

Usar 8 barras No. 10 = 63.4 cm^2 > 57 cm^2

DIMENSIONAMIENTO ZUNCHO

$$\rho_s = 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) \frac{f'_c}{f_y} \geq 0.12 \frac{f'_c}{f_y} \qquad \text{(ecuación 4.8)}$$

$$\frac{A_g}{A_c} = \frac{D^2}{(D - 2 \times 3)^2} = \frac{55^2}{(55 - 6)^2} = 1.26$$

(3 = recubrimiento libre)

$$\left.\begin{aligned} 0.45 \left(\frac{A_g}{A_c} - 1\right) \frac{f'_c}{f_y} &= 0.45\,(1.26 - 1) \frac{300}{4200} = 0.0084 \\ 0.12 \frac{f'_c}{f_y} &= 0.12 \frac{300}{4200} = 0.0086 > 0.0084 \end{aligned}\right\} \therefore \rho_s = 0.0086$$

De la ecuación 4.2:

$$\rho_s = \frac{4 A_e}{s d_s}$$

(d_s = diámetro del núcleo centro a centro de la hélice.
A_e = área zuncho)

$$s = \frac{4 A_e}{\rho_s d_s}$$

EJEMPLO 15.1 ***(continuación)***

Para zuncho del No.3

$$s = \frac{4 \times 0.71}{0.0086\,(55-7)} = 6.9 \text{ cm} \approx 7 \text{ cm}$$

separación libre máxima = 7 cm > (7.0 – 1) = 6.0 cm

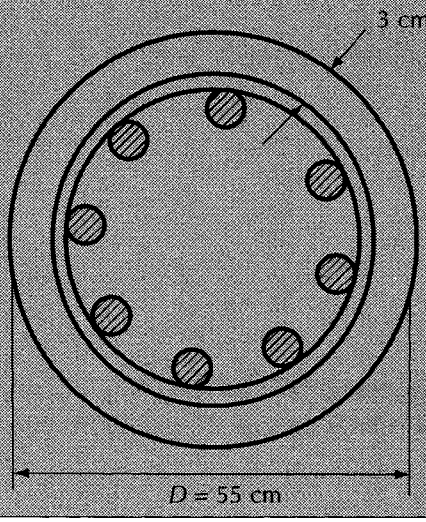
separación libre mínima = 1.5 × 2.5 = 4 cm < 6.0 cm

(2.5 cm: tamaño máximo agregado)

SECCIÓN ADOPTADA

8 barras del No. 10

Zuncho del No. 3 con un paso s = 7 cm



columna zunchada se tomó $F_R = 0.80$ para el cálculo de K. El valor de 9 correspondiente a la condición de carga muerta más viva resultó inferior a los que abarca el diagrama.

El área de acero requerida se proporcionó con ocho barras del No. 10, que pueden alojarse en la columna con suficiente holgura entre ellas aun cuando se prevea la posibilidad de hacer traslapes. El recubrimiento al centro de la barra, se modifica ligeramente, puesto que se habían supuesto barras del No. 8. Pero no es necesario repetir los cálculos.

El área del núcleo utilizado para calcular la cuantía ρ_s es la definida por un círculo que coincide con el paño exterior del zuncho, y cuyo diámetro, por lo tanto, será igual al diámetro de la columna menos dos veces el recubrimiento libre del zuncho. En cambio, el diámetro d_s utilizado en la ecuación 4.2 es el diámetro de la hélice medido centro a centro. Generalmente los valores calculados del paso s se redondean a medio centímetro.

Ejemplo 15.2 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras.

El propósito de este ejemplo es ilustrar la aplicación de los diagramas de interac-

ción de la referencia 15.3, que están basados en las hipótesis del Reglamento ACI 318-02, al dimensionamiento de columnas. Las características de los materiales corresponden a una de las combinaciones previstas en la referencia citada.

Para hacer una primera estimación de la sección requerida, se recurrió a la ecuación 15.2, considerando que sólo actúa la carga axial y despreciando la contribución del refuerzo. Resultó así una sección de 48.4 cm de lado. Siguiendo la práctica usual de usar múltiples de cinco centímetros para las medidas de las columnas, la dimensión obtenida se redondeó a 50 cm.

Escogida tentativamente la sección de 50 × 50 cm, se calcularon los valores de K_n y R_n requeridos para poder entrar en la gráfica.

EJEMPLO 15.2 ***Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en las cuatro caras (ACI 318-02).***

DATOS

Cargas

$P_u = 290$ ton
$M_u = 45$ ton-m

Materiales

$f'_c = 280$ kg/cm^2 = 4000 lb/pulg^2
$f_y = 4200$ kg/cm^2 = 60,000 lb/pulg^2

Recubrimiento: 3.5 cm

Reglamento: ACI 318-02

Se pide: determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas de la referencia 15.3. Detallar los estribos.

EXCENTRICIDAD: $e = M_u/P_u = 45/290 = 0.155$ m

ESTIMACIÓN PRELIMINAR

Suponer que sólo actúa P_u y que $\rho = 0$.

De la ecuación 15.2:

$$P_u = \phi P_n = 0.80\,\phi\,[0.85\,f'_c\,(A_g - A_s) + f_y A_s]$$

$$A_g = \frac{P_u}{0.80\,\phi\,(0.85)\,280} = \frac{290{,}000}{0.8 \times 0.65 \times 0.85 \times 280} = 2343 \text{ cm}^2$$

$$b = \sqrt{2343} = 48.4$$

Ensayar una columna de 50 × 50 cm = 20 × 20″

EJEMPLO 15.2 ***(continuación)***

DETERMINACIÓN DE K_n y R_n PARA ENTRAR EN EL DIAGRAMA DE INTERACCIÓN DE LA FIGURA 15.5b

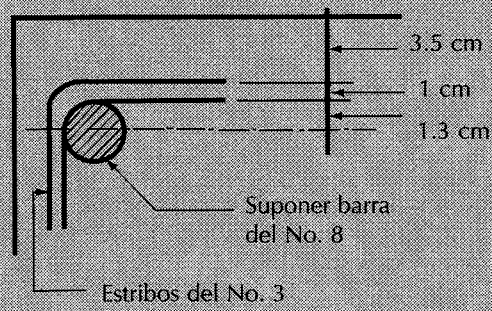
$$e = \frac{45}{290} = 0.155 \text{ m} = 6.1''$$

$$P_n = \frac{290}{\phi} = \frac{290}{0.65} = 446 \text{ ton} = 982 \text{ kips}$$

$$K_n = \frac{982{,}000}{4000 \times 20^2} = 0.61$$

$$R_n = \frac{982{,}000 \times 6.1}{4000 \times 20^2 \times 20} = 0.19$$

ELECCIÓN DE LA GRÁFICA



$r = 3.5 + 1 + 1.3 = 5.8 \simeq 6$ cm

$\gamma h = h - 2r = 50 - 2 \times 6 = 38$ cm

$$\gamma = \frac{38}{50} = 0.76$$

$\therefore$ Usar la gráfica R4–60.8 de la referencia 15.3, para $\gamma = 0.80$

$f'_c = 4000$ lb/pulg^2 y
$f_y = 60{,}000$ lb/pulg^2

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO LONGITUDINAL

$K_n = 0.61$
$R_n = 0.19$
$\Big\}$ $\rho = 0.03$ (de la gráfica R4–60.8)

$$A_s = 0.03 \times 50^2 = 75 \text{ cm}^2$$

Usar 12 barras del No. 9 = 76.7 cm^2

EJEMPLO 15.2 *(continuación)*

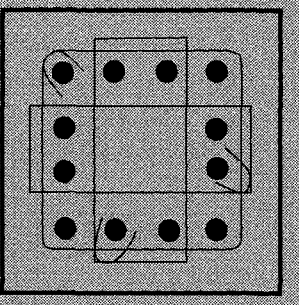
DETERMINACIÓN DEL REFUERZO TRANSVERSAL

Considerar estribos del No. 3

$16 \times 2.9 = 46$
$48 \times 1 = 48$
$b = 50$ cm
$\Big\}$ ∴ usar estribos @ 46 cm

SECCIÓN ADOPTADA

Sección 50 por 50 cm
12 barras del No. 9
estribos del No. 3 @ 46 cm.



Para seleccionar la gráfica apropiada se calculó el valor de γ, que es la relación entre la distancia entre las barras de los lados opuestos y la dimensión total de la columna, ambas medidas en la dirección paralela al plano de flexión. Se obtuvo un valor de $\gamma = 0.76$, por lo que se utilizó la gráfica R4–60.8 de la referencia 15.3, que corresponde a $\gamma = 0.80$. Esta gráfica es la incluida en la figura 15.56.

El punto que corresponde a la intersección de K_n y R_n cae dentro de la zona de fallas en compresión. El valor de la cuantía $p = 0.03$ obtenido de la gráfica, está comprendido entre los límites admisibles, de manera que se aceptó la sección de 50×50 cm supuesta inicialmente. El refuerzo requerido se proporcionó con 12 barras del No. 9. La disposición de estribos propuesta puede apreciarse en el croquis al final del ejemplo.

Ejemplo 15.3 Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero

Puede suceder que se imponga como restricción para el dimensionamiento de columnas, el que la cuantía del refuerzo sea del orden de un valor prefijado. En el ejemplo, que sigue las especificaciones de las NTC-04, se establece la condición de que la cuantía sea aproximadamente igual a 0.025.

Para resolver el problema se procedió por tanteos, suponiendo una sección y haciendo ajustes hasta encontrar una que tuviera la resistencia necesaria con una cuantía semejante a la especificada.

Se presenta en el ejemplo un tanteo para una sección de 40×40 cm. La relación d/h, que se requiere para escoger la gráfica, resultó ser 0.88. Por lo tanto se utilizó en el ejemplo la gráfica de la figura C.5 del Apéndice C, que corresponde a un valor de $d/h = 0.90$. En caso de desearse mayor precisión, podría hacerse una interpolación entre los datos obtenidos con la figura C.5 y los que se deducen de la figura C.3, correspondiente a un valor de $d/h = 0.85$.

Utilizando el valor de q correspondiente a $p = 0.025$ y el de la relación e/h, se definió un punto en el diagrama cuya ordenada K fue igual a 0.68. Se comprobó que la resistencia era ligeramente inferior a la requerida. Se procedió

EJEMPLO 15.3 ***Dimensionamiento de una columna cuadrada con refuerzo en dos caras para una cuantía dada de acero (NTC-04).***

DATOS

Cargas

$M_u = 23.5$ ton-m

$P_u = 111$ ton

Materiales

$f'_c = 200$ kg/cm^2

$f_y = 4200$ kg/cm^2

Cuantía de acero

$\rho \simeq 0.025$

Recubrimiento al centro del refuerzo

$r \simeq 5$ cm

Reglamento: NTC-04

Se pide: determinar la sección y el refuerzo usando los diagramas del Apéndice C. Detallar los estribos.

DATOS PARA EL CÁLCULO

$f^*_c = 0.8\, f'_c = 0.8 \times 200 = 160$ kg/cm^2

$f''_c = 0.85\, f^*_c = 0.85 \times 160 = 136$ kg/cm^2

CÁLCULO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

Tanteo inicial

Suponer una sección de 40×40 cm

Excentricidad:

$$e = \frac{23.5}{111} = 0.21 \text{ m}$$

Elección de diagrama:

$$\frac{d}{h} = \frac{40 - 5}{40} = 0.88 \quad \therefore \text{ usar la figura C.5 del Apéndice C.}$$

$$\left.\begin{aligned} q = \rho\, \frac{f_y}{f''_c} &= 0.025\, \frac{4200}{136} = 0.77 \\ \frac{e}{h} &= \frac{21}{40} = 0.53 \end{aligned}\right\} \quad K = 0.45$$

$$P_u = KF_R\, bh\, f'_c = 0.45 \times 0.70 \times 40^2 \times 200$$
$$= 100{,}800 \text{ kg} < 111{,}000 \text{ kg}$$

EJEMPLO 15.3 *(continuación)*

Ajuste del acero:

$$K = \frac{P_u}{F_R\, bh\, f''_c} = \frac{111{,}000}{0.70 \times 40^2 \times 200} = 0.50$$

$$\frac{e}{h} = \frac{21}{40} = 0.53$$

} $q = 0.85$

$$\rho = q\,\frac{f''_c}{f_y} = 0.85\,\frac{136}{4200} = 0.0275$$

$A_s = 0.0275 \times 40^2 = 44.0\ \text{cm}^2$

Usar 4 barras No. 10 + 2 barras No. 9 = 44.6 cm^2 > 44 cm^2

REFUERZO TRANSVERSAL

Separación estribos:

Considerar estribos No. 3

$48 \times 1 = 48$ cm

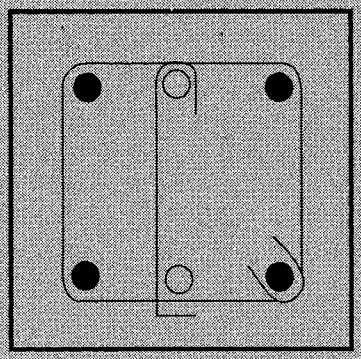
$$\frac{850\, d_b}{\sqrt{f''_y}} = \frac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42 \text{ cm}$$

$$\frac{b}{2} = 20 \text{ cm}$$

} ∴ separación estribos = 20 cm

SECCIÓN ADOPTADA

Sección 40 × 40 cm
4 barras del No. 10 y
2 barras del No. 9
Estribos del No. 3 @ 20 cm



entonces a hacer un ajuste en el acero definiendo un nuevo punto en el diagrama a partir del valor de K necesario y de la relación *e/h*. La cuantía correspondiente a este nuevo tanteo fue sólo ligeramente superior a la especificada.

Los estribos del No. 3 propuestos cumplen ampliamente el requisito de que su fuerza de fluencia sea por lo menos igual al 6 por ciento de la fuerza de fluencia de la mayor barra restringida. Conservadoramente se utilizó una grapa para las dos barras del No. 9, aunque estrictamente no es necesaria, ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm.

La separación de 20 cm propuesta debe reducirse a la mitad en las porciones extremas de las columnas de acuerdo con lo indicado en la sección 15.2.

Ejemplo 15.4 Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante.

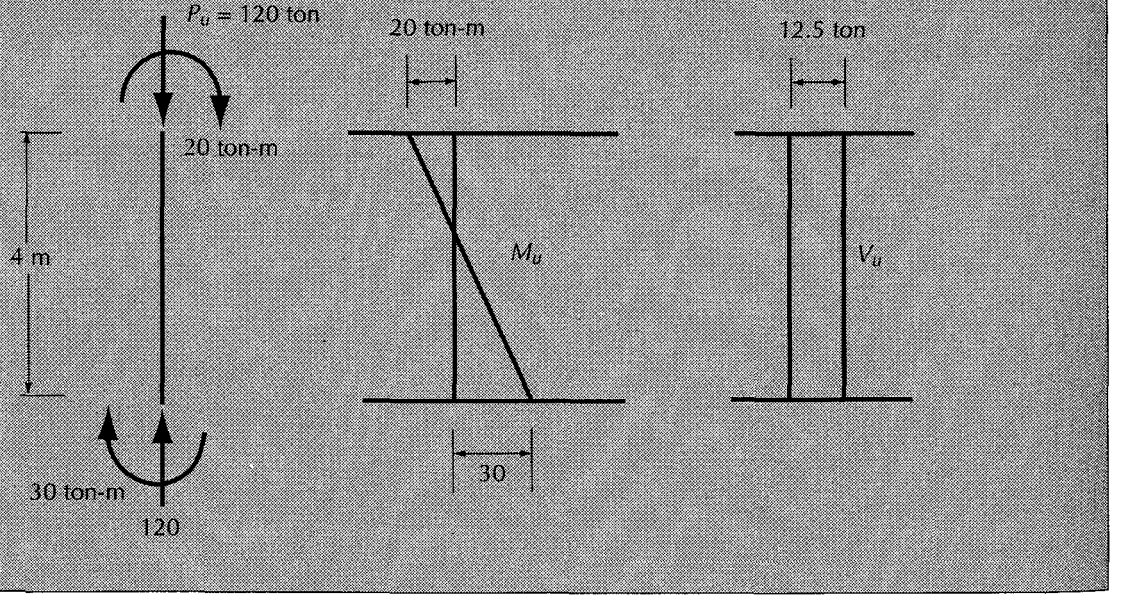
Las columnas de estructuras expuestas a acciones sísmicas pueden estar sujetas a fuerzas cortantes significativas cuyo efecto debe considerarse proporcionando un refuerzo transversal adecuado. En el presente ejemplo se ilustra cómo hacer esto de acuerdo con las NTC-04.

Se propuso una sección de 30 × 45 cm, cuya resistencia a flexocompresión se comprobó ser suficiente utilizando como refuerzo seis barras del No. 11 distribuidas en dos caras. Para el refuerzo transversal se emplearon estribos del No. 3, que, de acuerdo con las especificaciones de las NTC-04, que fue-

EJEMPLO 15.4 ***Dimensionamiento de una columna rectangular considerando el efecto de una fuerza cortante (NTC-04).***

DATOS

Acciones internas



EJEMPLO 15.4 ***(continuación)***

Materiales

Concreto: $f'_c = 250$ kg/cm^2

Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Refuerzo en dos caras

Recubrimiento al centro de las barras: $r = 5$ cm

Reglamento: NTC-04

Se pide: determinar la sección y el refuerzo teniendo en cuenta la influencia de la fuerza cortante. Detallar los estribos.

DATOS PARA EL CÁLCULO

$f^*_c = 0.80\, f'_c = 0.80 \times 250 = 200$ kg/cm^2

$f''_c = 0.85\, f^*_c = 0.85 \times 200 = 170$ kg/cm^2

DIMENSIONAMIENTO POR FLEXOCOMPRESIÓN

Suponer: $b = 30$ cm; $h = 45$ cm; $d = 40$ cm

$d/h = 40/45 = 0.89$ ∴ usar figura C.5 del Apéndice C.

$$K = \frac{P_u}{F_R\, bh\, f'_c} = \frac{120{,}000}{0.70 \times 30 \times 45 \times 250} = 0.51$$

$$R = \frac{M_u}{F_R\, bh^2\, f'_c} = \frac{30 \times 10^5}{0.70 \times 30 \times 45^2 \times 250} = 0.28$$

$\Big\}\ q = 0.90$

$$\rho = q\,\frac{f''_c}{f_y} = 0.90\,\frac{170}{4200} = 0.0364$$

$A_s = 0.0364 \times 30 \times 45 = 49.1$ cm^2

Usar 6 barras del No. 11 = 57.5 cm^2 > 49.1 cm^2

EJEMPLO 15.4 *(continuación)*

REFUERZO TRANSVERSAL

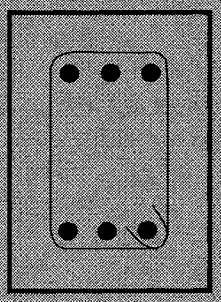
Considerar estribos del No. 3

$48 \times 1 = 48$ cm
$b/2 = 15$ cm
$\dfrac{850\, d_b}{\sqrt{f_y}} = \dfrac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42$ cm

$\therefore$ separación estribos = 15 cm

SECCIÓN PROPUESTA

Sección de 30 × 45 cm
6 barras del No. 11
Estribos No. 3 @ 15 cm
en porción central, 9@
7.5 cm en los extremos



$h = 45$ cm
60 cm
400/6 = 67 cm

$\therefore$ la longitud en que debe mantenerse la separación de 7.5 cm debe ser igual o superior a 67 cm

REVISIÓN POR CORTANTE

(Ver sección 7.6.2)

$$0.7\, f^*_c\, A_g + 2000\, A_s = 0.7 \times 200 \times 30 \times 45 + 200 \times 57.5$$
$$= 304{,}000 \text{ kg} > P_u = 120{,}000 \text{ kg}$$

$$\rho = \frac{A_s \text{ (cara de compresión mínima)}}{bd}$$

$$= \frac{28.7}{30 \times 40} = 0.024 > 0.015$$

EJEMPLO 15.4 *(continuación)*

$$\therefore V_{CR} = 0.5\, F_R\, bd \sqrt{f^*_c}\left(1 + 0.007\, \frac{P_u}{A_g}\right)$$

$$= 0.5 \times 0.8 \times 30 \times 40 \sqrt{200}\left(1 + 0.007\, \frac{120{,}000}{30 \times 45}\right)$$

$$= 11{,}000 \text{ kg}$$

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{(V_u - V_{CR})} = \frac{0.8 \times 1.42 \times 4200 \times 40}{(12{,}500 - 11{,}000)}$$

$$s = 127 \text{ cm} > \frac{d}{2} = 20 \text{ cm}$$

Refuerzo transversal adoptado

En los extremos: 9 estribos del No. 3 @ 7.5 cm, que abarcan un tramo superior al mínimo especificado de 67 cm.
En la porción central: estribos del No. 3 @ 15 cm por los requisitos de separación máxima.

ron reseñadas en la sección 15.2, deben colocarse a 15 cm en la porción central de la columna y a la mitad de esta separación en los extremos.

La revisión del efecto de la fuerza cortante se efectuó de acuerdo con las indicaciones de la sección 7.6.2, que prevén la manera de tomar en cuenta la influencia favorable de la presencia de una fuerza de compresión. La separación de estribos calculada fue mayor que la mínima especificada de $d/2$ para miembros sometidos a fuerza cortante. Esta separación, que en el ejemplo fue igual a 20 cm, resultó mayor que la de 15 cm requerida por especificaciones de la separación máxima del refuerzo transversal en columnas.

Ejemplo 15.5 Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial.

El problema de la flexión biaxial en secciones rectangulares se presenta con frecuencia en el dimensionamiento de estructuras de concreto. Considérese, por ejemplo, el caso de las columnas de edificios sujetas a acciones sísmicas, para las cuales el Reglamento del Distrito Federal exige que se tome en cuenta el efecto total del sismo que actúa en una dirección principal, más el 30 por ciento del correspondiente al que pueda actuar en la otra dirección. En el ejemplo, donde se han seguido las indicaciones de las NTC-04, P_R es la carga última que debe soportar la sección con las excentricidades indicadas.

El dimensionamiento se llevó a cabo con la ayuda de la fórmula de Bresler, cuya aplicación se comentó en la sección 6.4.2.

El problema debe resolverse por tanteos. En los tanteos conviene que la relación entre el lado largo y el lado corto de la columna sea similar a la relación entre las excentricidades. Se muestra en el ejemplo el tanteo final. Se procuró ajustar la cuantía al 3 por ciento especificado en los datos. En el

cálculo de P_{RO}, P_{RX} y P_{RY} se utilizó como valor del factor de resistencia $F_R = 0.70$, el correspondiente a la falla en compresión. Los diagramas indicaron que, en efecto, ésta fue la modalidad de falla que rigió.

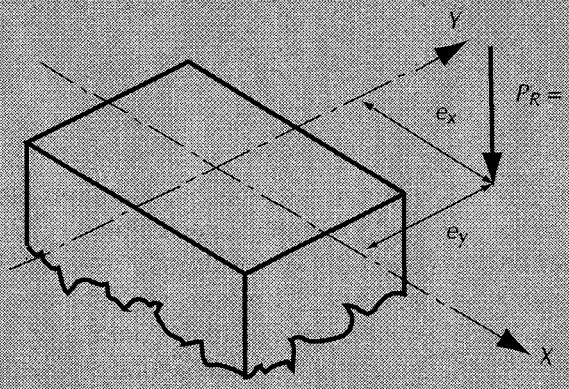
En el arreglo de estribos mostrado en el croquis de armado, se aprecia que no fue necesario proporcionar una grapa para restringir la barra central del lado menor, ya que la separación libre entre barras es menor que 15 cm. El estribo del No. 3 propuesto cumple ampliamente los requisitos de capacidad en la fluencia mencionados en la sección 15.2. La separación es la correspondiente a la porción central de la columna. En los extremos, esta separación debe reducirse a la mitad en la forma indicada en la sección citada. No debe olvidarse que en caso de actuar fuerzas cortantes significativas, es necesario verificar que el refuerzo transversal proporciona la resistencia necesaria.

EJEMPLO 15.5 ***Dimensionamiento de una sección rectangular sujeta a compresión y flexión biaxial (NTC-04).***

DATOS

Carga

$e_x = 35$ cm
$e_y = 20$ cm



Materiales

Concreto: $f'_c = 300$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Refuerzo en las cuatro caras
Recubrimiento al centro de las barras: $r = 6$ cm
$p \simeq 0.03$

Reglamento: NTC-04

Se pide: determinar las dimensiones y el refuerzo de una sección rectangular.

Detallar los estribos.

EJEMPLO 15.5 *(continuación)*

MÉTODO DE SOLUCIÓN

Fórmula de Bresler (ver sección 6.4.2)

$$P_R = \frac{1}{1/P_{RX} + 1/P_{RY} - 1/P_{RO}}$$

donde

P_R = carga normal resistente de diseño, aplicada con las excentricidades e_x y e_y

P_{RO} = carga axial resistente de diseño suponiendo $e_x = e_y = 0$

P_{RX} = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad e_x

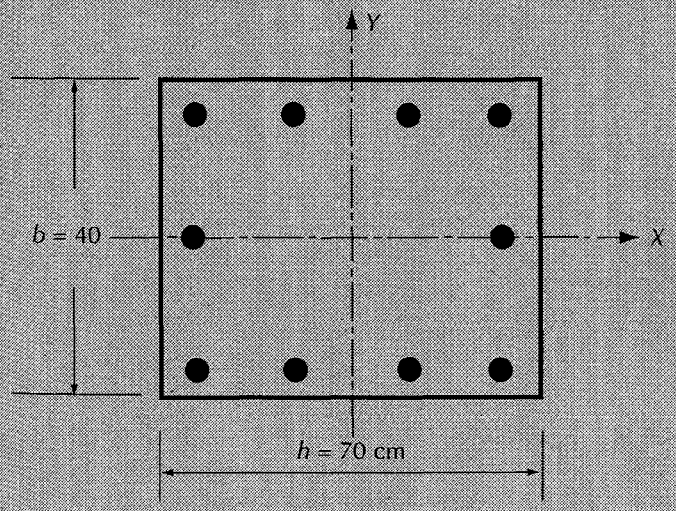
P_{RY} = carga normal de diseño aplicada con la excentricidad e_y

DATOS PARA EL CÁLCULO

$f^*_c = 0.80\, f'_c = 0.8 \times 300 = 240$ kg/cm^2

$f''_c = 0.85\, f^*_c = 0.85 \times 240 = 204$ kg/cm^2

SECCIÓN SUPUESTA



Considerar $\rho \simeq 0.03$

$A_s = 0.03 \times 40 \times 70 = 84$ cm^2

10 barras del No. 10 = 79.4 cm^2

$$\therefore \rho = \frac{79.4}{40 \times 70} = 0.028 \simeq 0.03$$

$$q = \rho \frac{f_y}{f''_c} = 0.028 \frac{4200}{204} = 0.58$$

EJEMPLO 15.5 *(continuación)*

DETERMINACIÓN DE LA RESISTENCIA P_R

Cálculo de P_{RO}

$$P_{RO} = F_R (f''_c A_c + A_s f_y)$$
$$= 0.70 [204 (2800 - 79.4) + 79.4 \times 4200]$$
$$= 622{,}000$$

Cálculo de P_{RX}

$$d/h = \frac{70 - 6}{70} = 0.91 \therefore \text{usar la figura C.13}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{e_x}{h} &= \frac{35}{70} = 0.50 \\ q &= 0.58 \end{aligned}\right\} \quad K_x = 0.30$$

$$P_{RX} = K_x F_R bh f'_c = 0.30 \times 0.70 \times 2800 \times 300 = 176{,}400 \text{ kg}$$

Cálculo de P_{RY}

$$d/b = \frac{40 - 6}{40} = 0.85 \therefore \text{usar figura C.11}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{e_y}{b} &= \frac{20}{40} = 0.5 \\ q &= 0.58 \end{aligned}\right\} \quad K_y = 0.28$$

$$P_{RY} = K_y F_R bh f'_c = 0.28 \times 0.70 \times 2800 \times 300 = 164{,}600 \text{ kg}$$

Cálculo de P_R

$$P_R = \frac{1}{\frac{1}{176{,}400} + \frac{1}{164{,}600} - \frac{1}{622{,}000}} = 98{,}650 \text{ kg} \approx 100{,}000 \text{ kg}$$

$\therefore$ La sección propuesta es adecuada

EJEMPLO 15.5 *(continuación)*

REFUERZO TRANSVERSAL

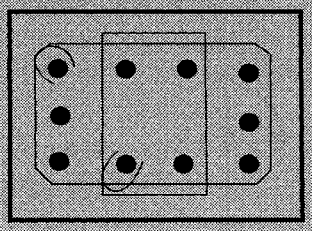
$48 \times 1 = 48$ cm

$b/2 = 20$ cm

$\dfrac{850\, d_b}{\sqrt{f_y}} = \dfrac{850 \times 3.2}{\sqrt{4200}} = 42$ cm

} separación estribos = 20 cm

SECCIÓN ADOPTADA



Sección de 40 × 70 cm
10 barras del No. 10
Estribos del No. 3 @ 20 cm

Referencias

15.1 *Blume, J. A., N. M. Newmark y L.N. Corning. Design of Multistory Reinforced Concrete Buildings. Skokie, III.,* Portland *Cement Association,* 1961.

15.2 González *Cuevas, O. M., y Cano Licona, J. "Diagramas de interacción", Universidad Autónoma Metropolitana, México,* 2004.

15.3 *Comité ACI* 340 *Design Handbook: Beams, One-Way Slabs, Brackets, Footings, Pile Caps, Columns, Two-Way Slabs, and Seismic Design in Accordance with the Strength Design Méthod of* 318-95, SP-017 *Detroit,* 1997.

15.4 Jiménez Montoya, *P., et al. Hormigón armado, Tomo II: Ábacos para el cálculo de secciones en el estado último de agotamiento* (10ª *edición). Barcelona, Gustavo* Gili, 1979.

15.5 *González Cuevas, O. Manual de Diseño de Concreto Reforzado. Vol. 1: Flexocompresión y cortante. México, D.F., Instituto Mexicanq del Cemento y del Concreto,* 1970.

15.6 *González Cuevas, O. M., y Cano Licona, J."Programa de Cómputo para Columnas en* Flexocompresión", *Universidad Autónoma Metropolitana, México,* 2004

15.7 *Marín, J.* y *A.* Güell. *Manual para el Cálculo de Columnas de Concreto Armado. Fundación Venezolana de Investigaciones Sismológicas,* 1984.

15.8 *Corona Carlos, G.A. "Programa de Cómputo para Diagramas de Interacción de Columnas de Secciones Diversas, Puebla,* 2004.

Ejercicios

(Observación: los siguientes ejercicios pueden resolverse con las NTC-04 o con el Reglamento ACI 318-02 salvo cuando se indique lo contrario.)

15.1 Utilizando los diagramas de la referencia 15.2, determinar los valores de P_r y M_r que resiste la sección dimensionada en el ejemplo 15.2

15.2 Detallar el refuerzo de una columna corta cuadrada de estribos para que resista una carga de 300 toneladas. Las dimensiones de la columna deben ser 45×45 cm. Suponer $f'_c = 200$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Detallar los estribos.

15.3 Dimensionar una columna corta cuadrada para una carga muerta de 100 ton y una carga viva de 70 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer $p \simeq 0.025$, $f'_c = 300$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2.

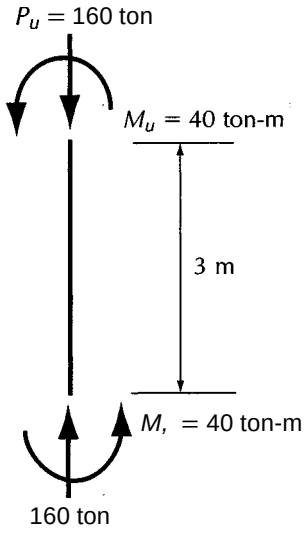
15.4 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para una carga muerta de 80 ton y una carga viva de 140 ton, ambas a nivel de servicio. Suponer $f'_c = 250$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Detallar el zuncho.

15.5 Dimensionar una columna circular corta con refuerzo helicoidal para que resista una carga última $P_r = 200$ ton con una excentricidad igual a 15 cm. Suponer $f'_c = 300$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Detallar el zuncho.

15.6 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última $P_r = 250$ ton y un momento último $M_r \simeq 40$ ton-m. Suponer $f'_c = 250$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Detallar los estribos.

15.7 Dimensionar una columna corta cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras, que resista una carga última de 300 ton con una excentricidad $e_x = 20$ en una de las direcciones principales y una excentricidad $e_y = 30$ cm en la otra dirección. Suponer $f'_c = 250$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Detallar los estribos.

15.8 Dimensionar la columna del croquis como cuadrada, con refuerzo en las cuatro caras. Detallar los estribos. Revisar el efecto de la fuerza cortante. Suponer $f'_c = 200$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2.



CAPÍTULO 16

Losas en una dirección

16.1 Introducción. /16.2 Comportamiento y dimensionamiento. 116.3 Ejemplo de diseño de una losa con carga uniformemente distribuida. 116.4 Cargas concentradas. 116.5 Ejemplo de diseño de una losa con carga distribuida y carga concentrada.

16.1 Introducción

Las losas son elementos estructurales cuyas dimensiones en planta son relativamente grandes en comparación con su peralte. Las acciones principales sobre las losas son cargas normales a su plano, ya que se usan para disponer de superficies útiles horizontales como los pisos de edificios o las cubiertas de puentes. En ocasiones, además de las cargas normales actúan cargas contenidas en su plano, como en el caso de losas inclinadas, en las que la carga vertical tiene una componente paralela a la losa, o cuando la losa actúa como un diafragma horizontal que une marcos verticales de distinta rigidez o sujetos a fuerzas horizontales diferentes.

En este capítulo se estudia el tipo más sencillo de losas: aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros paralelos en dos de sus lados quedando libres en los otros dos, como se ilustra en la figura 16.1. En los capítulos 17 y 18 se estudian otros tipos de losas cuyo comportamiento y dimensionamiento son más complejos. Las losas mostradas en la figura 16.1 se conocen con el nombre de losas *en una dirección* porque, como se verá en la siguiente sección, trabajan únicamente en la dirección perpendicular a los apoyos. Estos apoyos pueden ser las vigas principales de un marco, vigas secundarias que se apoyan a su vez en vigas principales o en muros, o muros de mampostería que soportan la losa directamente.

En la figura 16.2 se muestra un sistema de piso usado frecuentemente cuando los

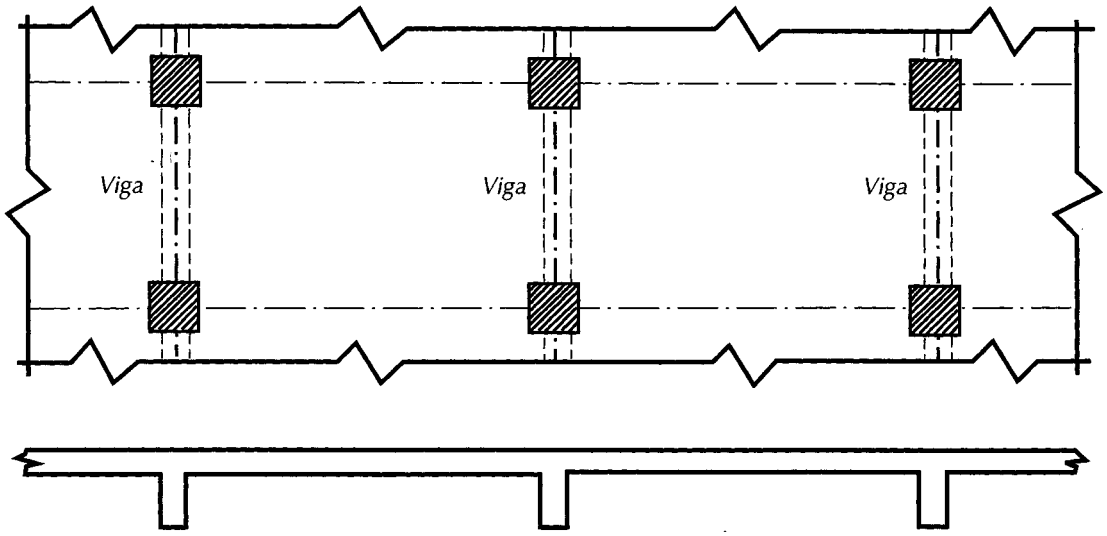


Figura 16.1 Losa en una dirección.

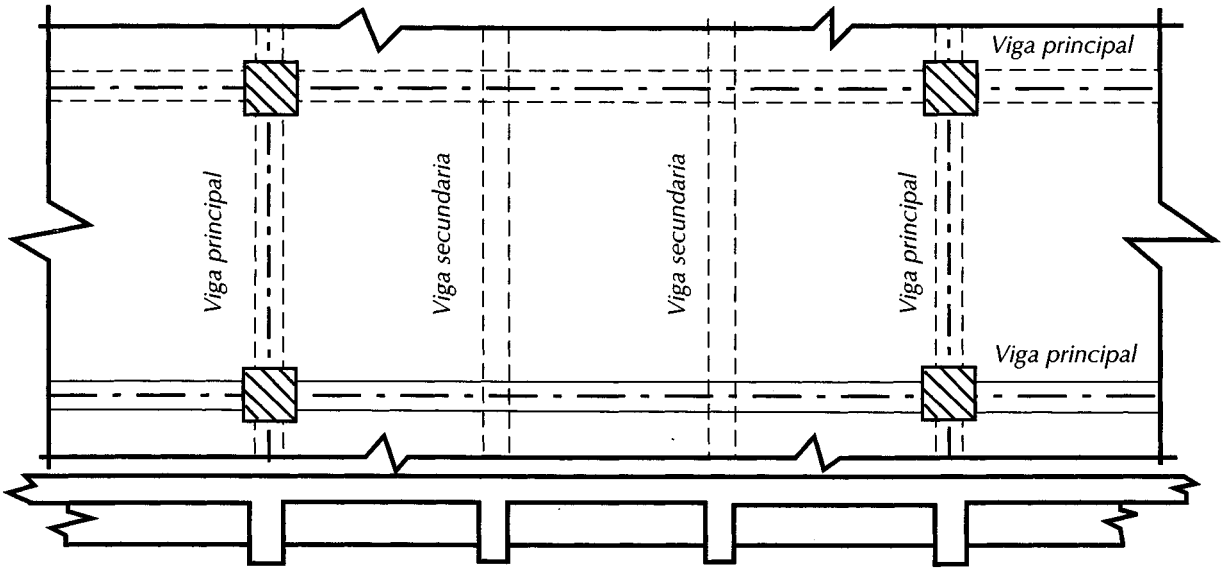


Figura 16.2 Sistema de piso con vigas secundarias.

marcos de un edificio forman tableros de losa de dimensiones relativamente grandes. Se suele en estos casos colocar vigas secundarias en la dirección corta del tablero, de tal manera que se forman varios tableros de losa más pequeños. Cuando la relación entre el lado largo y el lado corto de estos tableros es mayor que dos, las losas se pueden diseñar como losas en una dirección aunque estén apoyadas en realidad en sus otros lados, ya que, como se verá en el siguiente capítulo, trabajan en forma similar a las losas mostradas en la figura 16.1.

16.2 Comportamiento y dimensionamiento

16.2.1 Comportamiento

Las losas en una dirección se comportan esencialmente como vigas. Puede considerarse que la losa es una viga cuyo ancho es la longitud del apoyo (figura 16.3), o bien, como se hace más frecuentemente, puede suponerse que la losa está formada por una serie de vigas paralelas e independientes de un metro de ancho, como se muestra en la

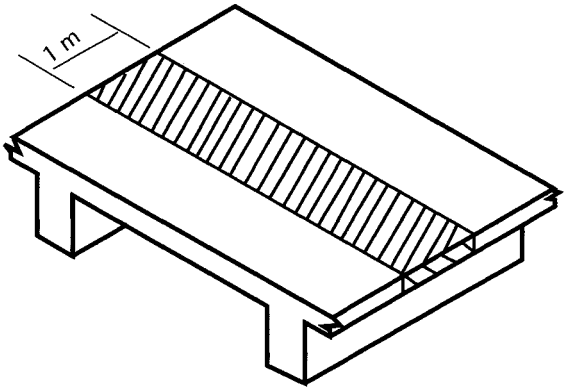


Figura 16.3 Franja de losa que trabaja como viga de un metro de ancho.

misma figura, que se flexionan uniformemente.

16.2.2 Momentos flexionantes

El diseño de estas losas es, por consiguiente, similar al de las vigas, con algunas características que se señalan a continuación. Se recomienda iniciar el diseño fijando un valor del peralte que garantice que no ocurran deflexiones excesivas, ya que esto es el factor que suele regir en el diseño. Para ello puede usarse la tabla 11.4, tomada del Reglamento ACI 318-02, la cual proporciona espesores de losa con los que no se exceden las deflexiones permisibles, o bien puede fijarse un espesor tentativo y calcular las deflexiones como se explica en el capítulo 11 de este texto.

Una vez determinado el espesor total de la losa, se calcula el peralte efectivo restando el recubrimiento del espesor. El Reglamento ACI 318-02 recomienda un recubrimiento libre de 2 cm para losas no expuestas a la intemperie o no coladas contra el suelo, como las zapatas de cimentación. Para este mismo caso, las NTC-04 recomiendan recubrimientos de 1.5 a 2.5 cm según la resistencia del concreto.

El cálculo de los momentos flexionantes y de las fuerzas cortantes puede realizarse después, considerando que la losa es una viga continua de un metro de ancho con carga uniforme. Puede usarse cualquier (método de análisis elástico o bien los coeficiehtes de momentos que se presentan en los manuales de diseño. En la tabla 14.1 se reproducen los coeficientes aproximados del Reglamento ACI 318-02. Las condiciones que deben cumplirse para poder aplicar estos coeficientes se reseñaron en la sección 14.4.

Según el Reglamento ACI 318-02, cuando no se utilizan los coeficientes de la tabla 14.1 y se hace un análisis formal, el claro ℓ puede tomarse como el claro libre siempre que no sea mayor de 3.05 m y que las losas se cuelen integralmente con los apoyos. Si no se cumplen estas condiciones, el claro será la distancia entre los ejes de apoyo, o bien, el claro libre más el peralte total de la losa, el valor que sea menor. Las NTC-04 especifican, al igual que para vigas, que el claro se cuente a partir del centro de los apoyos, excepto cuando el ancho de éstos es mayor que el peralte efectivo; en este caso, el claro se cuenta a partir de la sección que se halla a medio peralte efectivo del paño interior de los apoyos.

Debe notarse que el método de calcular los momentos flexionantes y fuerzas cortantes considerando franjas de losa de un metro de ancho es conservador, ya que como la losa no puede por lo general deformarse libremente en dirección perpendicular a las franjas, se desarrollan esfuerzos de compresión normales a las franjas que aumentan ligeramente la resistencia en la dirección considerada.

16.2.3 Acero de refuerzo

Ya habiendo determinado el peralte efectivo, d, y los momentos flexionantes, se calcula el refuerzo necesario con las ecuaciones de flexión de vigas, con las gráficas del Apéndice A o con las tablas del Apéndice B. Generalmente, las losas son elementos subreforzados, por lo que se pueden aplicar las ecuaciones correspondientes a este tipo de elementos previa comprobación de que las relaciones de refuerzo, p, resulten menores que la relación balanceada, ρ_b. El refuerzo obtenido se coloca en dirección paralela a las franjas, o sea, en la dirección del claro considerado. En dirección perpendicular es necesario colocar también refuerzo para resistir los esfuerzos producidos por contracción del concreto y por cambios de temperatura, y por falta de uniformidad de la carga. Ya que la losa no puede acortarse libremente en dirección perpendicular al claro, se agrietaría si no se colocase este último refuerzo. Tanto el refuerzo por flexión como el de contracción y cambios de temperatura, deben satisfacer ciertos requisitos de cuantía y separación que se mencionan a continuación.

El Reglamento ACI 318-02 establece requisitos para el refuerzo de flexión y para el refuerzo de contracción y temperatura. Las relaciones, p, de estos refuerzos, deben ser por lo menos iguales a los valores señalados en la tabla 16.1, y la separación entre barras no debe exceder de 45 cm ni de tres veces el espesor de la losa, para el refuerzo de flexión, ni de cinco veces dicho espesor, para el refuerzo por contracción y temperatura.

Las NTC-04 especifican que el refuerzo por flexión sea el mínimo recomendado para vigas, o sea

$$A_{smín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (16.1)$$

o en sistema SI

$$A_{smín} = \frac{0.22\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (16.1\ SI)$$

El ancho b se considera de 100 cm y el área obtenida de esta manera es la necesaria para una franja de un metro de ancho.

La separación del refuerzo no debe ser superior a la especificada para el refuerzo por contracción y temperatura. Para este refuerzo las NTC-04 recomiendan la misma área mínima que para otros elementos estructurales que tengan una dimensión mínima de 1.50 m. La ecuación correspondiente para una franja de un metro de ancho es la siguiente:

$$A_{scontr} = \frac{66{,}000\,h}{f_y\,(h + 100)} \qquad (16.2)$$

o en sistema SI:

$$A_{scontr} = \frac{6470\,h}{f_y\,(h + 1000)} \qquad (16.2\ SI)$$

donde h es el espesor de la losa.

El área que se obtiene con esta ecuación es también la necesaria para una franja de un metro de ancho y es aplicable a losas no expuestas directamente a la intemperie. Si no se cumple con esta condición, el valor calculado con la ecuación 16.2 debe multiplicarse por 1.5. La separación entre barras no debe exceder de 50 cm ni de $3.5h$.

Las NTC-04 permiten calcular el refuerzo por contracción y temperatura en forma simplificada usando una relación de refuerzo, p, de 0.002 para losas no expuestas a la intemperie y de 0.003 para el caso de que sí lo estén.

En el dimensionamiento de losas es frecuente calcular primero el área de acero por metro de ancho de losa, después elegir el diámetro de la barra, y, por último, calcular la separación entre barras. Este último cálculo puede hacerse en forma rápida con la siguiente ecuación:

$$s = \frac{100\,A_b}{A_s} \qquad (16.3)$$

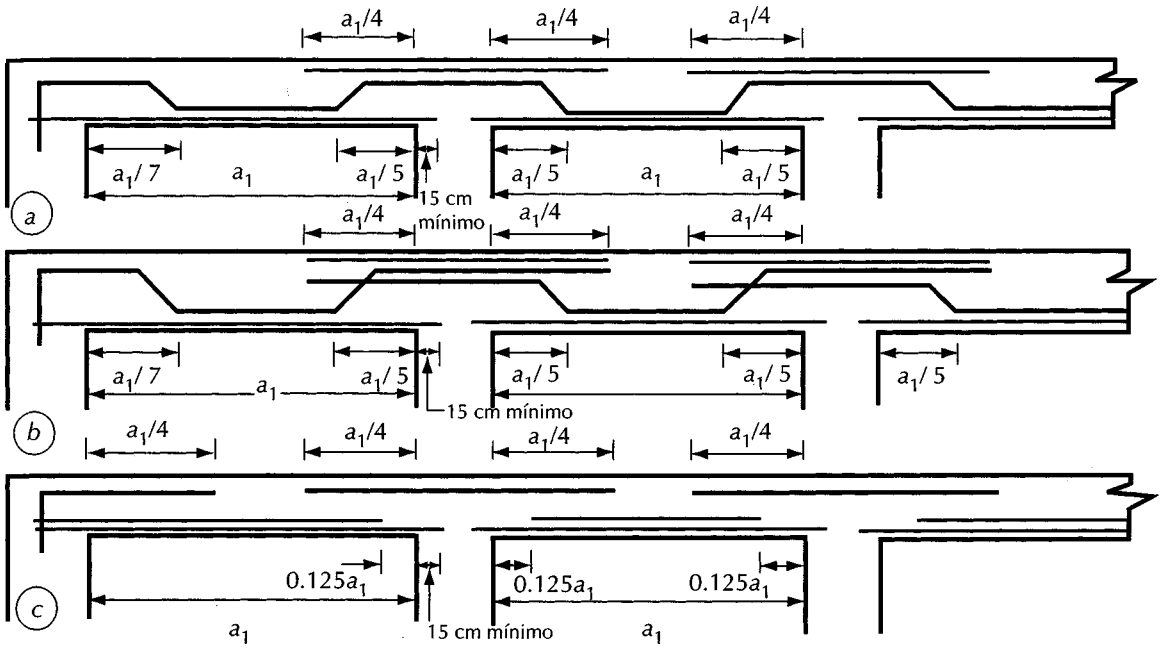
donde s es la separación entre barras; A_b, el área de cada barra, y A_s el área por metro de ancho de losa.

El refuerzo por flexión debe detallarse de tal manera que se satisfagan los requeri-

Tabla 16.1 Relaciones de refuerzo, p, para calcular el acero por contracción y temperatura según el Reglamento ACI *318-02.*

Tipos de acero	$\rho_{mín}$
Barras corrugadas con f_y igual a *2800* o *3500* kg/cm^2	*0.0020*
Barras corrugadas o malla de alambre soldado corrugado o liso con f_y igual a *4200* kg/cm^2	*0.0018*
Barras con f_y mayor de *4200* kg/cm^2	*0.0018* x 4200/f_y

En ningún caso ρ debe ser menor de *0.0014.*



Notas: a) Los dobleces son a 45°. *b*) En losas perimetralmente apoyadas, los cortes y dobleces se hacen en función del claro corto para el refuerzo en ambas direcciones. c) En el apoyo extremo debe proporcionarse un anclaje adecuado a partir del paño de apoyo.

Figura 16.4 Detalles típicos del refuerzo de losas.

mientos de acero en las secciones de momento negativo y positivo y, además, que se cumplan los requisitos de longitud de desarrollo. Es difícil ajustarse a las necesidades teóricas de refuerzo en todas las secciones de una losa. En la práctica se ha de buscar que las separaciones sean lo más cercanas a los valores teóricos, pero al mismo tiempo conviene modularlas para obtener distribuciones regulares y armados sencillos que simplifiquen la construcción y la supervisión. También puede aprovecharse la posibilidad de redistribución de momentos que permiten los reglamentos y que consiste en reducir los momentos negativos y aumentar los positivos en cantidades limitadas y siempre que se conserve el momento estático total. (Debe tenerse en cuenta que no se permite recurrir a la redistribución de momentos si los momentos se estimaron con base en los coeficientes aproximados de la tabla 14.1.)

En la figura 16.4 se muestran algunas recomendaciones típicas para la colocación del refuerzo por flexión. Estas recomendaciones son válidas cuando los claros y las condiciones de la carga en cada claro son semejantes. En caso contrario, los dobleces y cortes de barras deben hacerse con la ayuda de un diagrama de momentos. Para mayor información sobre detallado del refuerzo de losas, véase la referencia 16.3. El acero por contracción y temperatura, no mostrado en la figura, se coloca en forma de barras rectas en el lecho inferior de la losa por encima del refuerzo por flexión. Algunos proyectista~colocan parte de este refuerzo inmediatamente debajo del refuerzo para momento negativo.

16.2.4 Revisión por cortante

La fuerza cortante no es un factor importante en la mayoría de las losas. Sin embargo, debe revisarse, y en caso de que la sección de concreto no pueda resistir la fuerza cortante, debe aumentarse dicha sección, ya que por razones constructivas no es posible usar refuerzo por cortante en estas losas.

16.3 Ejemplo de diseño de una losa con carga uniformemente distribuida

En el ejemplo 16.1 se ilustra el diseño de una losa en una dirección con el Reglamento ACI 318-02. Se trata de una estructura muy sencilla de dos tableros de 9 por 7 m, la cual, además de las vigas principales que unen las columnas en las dos direcciones, tiene vigas secundarias en la dirección del claro corto, de tal manera que la losa queda dividida en tableros más pequeños de 7 por 3 m. Ya que la relación entre claro largo y claro corto en estos tableros es mayor que dos, se puede considerar que la losa trabaja en una sola dirección, que es la del lado corto.

Como datos se tiene que la carga viva de servicio, o sea, sin factor de carga, es de 600 kg/m^2, y que la losa tiene acabados y recubrimiento en su parte superior que pesan otros 150 kg/m^2. El peso de estos recubrimientos puede ser considerablemente mayor, como en casos en que sea necesario hacer rellenos para dar pendientes o para nivelar con otras secciones de la estructura.

El primer paso en el cálculo consiste en determinar el espesor de la losa, el cual se requiere para estimar el peso propio y posteriormente para calcular el área de acero por flexión. Se usó la tabla 11.4 para este fin, considerando los claros extremos como más desfavorables, ya que tienen un apoyo continuo y otro no. El valor que corresponde a este caso es el de 1/24. De acuerdo con el Reglamento ACI 318-02, el claro ℓ puede tomarse como el claro libre cuando su valor sea menor de 3.05 m. Así se hizo en el ejemplo, obteniendo el claro libre como la diferencia entre el claro centro a centro de apoyos y el ancho de las vigas. El valor de h también pudo fijarse por estimación, pero habría sido necesario verificar posteriormente las deflexiones si se hubiese escogido un valor menor que el de la tabla 11.4. También se pudo haber usado el valor de 1/24 para los claros de los extremos y el valor de 1/28 para los claros interiores, pero el espesor de la losa no hubiese sido uniforme en toda la estructura, lo cual no es recomendable salvo en casos excepcionales.

A continuación se calcularon las cargas de diseño multiplicando las cargas de servicio por los factores de carga correspondientes, que son 1.2 para las cargas muertas y 1.6 para la carga viva. Se obtuvo una carga de diseño de 1456 kg/m^2. Si se considera una franja de losa de un metro de ancho, esta franja tiene una carga de 1456 kg/m y el valor del factor w_u / $ resulta de 10.64 ton-m.

Para calcular el área de acero por flexión, se ordenaron los cálculos en forma de tabla, como se muestra en el ejemplo. En el primer renglón se anotaron los coeficientes del factor w, ℓ_n^2 tomados de la tabla 14.1. El factor 1/24 corresponde a momento negativo en los apoyos extremos; 1/12, a momento negativo en todos los otros apoyos cuando el claro es menor que 3.05 m como en este ejemplo; 1/14, a momento positivo en el claro extremo, considerando que la losa está restringida por la viga de borde del eje A, y 1/16, a momento positivo en claros interiores.

A partir de los coeficientes, se calcularon los momentos flexionantes, multiplicando los coeficientes por $w, 1$$. Por ejemplo, el valor de 0.443 es igual a 1/24 por 10.64. Conviene analizar con cuidado las unidades del factor $w_u \ell_n^2$ y de los momentos flexionantes. Puesto que la carga w_u está en ton/m^2 y el claro ℓ_n está en metros, el factor

$w_u \ell_n^2$ y los momentos flexionantes deben tener unidades de ton (o de fuerza en general). Sin embargo, si se considera una franja de 1 m de ancho, la carga *w,* queda expresada en unidades de ton/m, y el factor w, ℓ_n^2, así como los momentos, quedan ya en ton-m (o fuerza por longitud).

En el renglón 3 se calcularon los valores de $M_u/\phi\ bd^2f'_c$ considerando para ϕ un valor de 0.90. Así, el valor de 0.034 es el resultado de la operación

$$\frac{0.443 \times 10^5}{0.9 \times 100 \times 8.5^2 \times 200}$$

El valor d = 8.5 cm se obtuvo restando del espesor h = 11 cm, un recubrimiento libre de 2 cm y un radio de barra de 0.5 cm. Es por lo tanto el peralte efectivo medido desde el centro de la barra. Para b se tomó un valor de 100 cm porque se está considerando una franja de 1 m de ancho.

El renglón 4 señala los valores de ω obtenidos de la gráfica del Apéndice A, la cual representa la ecuación general de flexión para miembros subreforzados.

Ya conocidos los valores de ω, se calcularon los valores de p, renglón 5, y el valor de $\rho_{mín}$ obtenido de la tabla 16.1. En el apoyo A, el valor calculado de ρ resultó menor que $\rho_{mín}$. Por ser tan pequeños los valores obtenidos de ρ, no se revisó si eran menores que ρ_b; en caso de duda debe hacerse esta revisión.

En el renglón 6 se muestran los valores de A, obtenidos multiplicando los valores de ρ por el ancho de la franja de losa, o sea, 100 cm, y por el peralte de 8.5 cm. En las secciones en que el valor calculado de ρ resultó menor que $\rho_{mín}$, se usó este último valor.

Finalmente, en el renglón 7 de la tabla se muestran las separaciones de las barras suponiendo que se usan del No. 2.5. En el apoyo A se excede la separación máxima permisible de tres veces el espesor de la losa, que en este ejemplo resulta de 33 cm, el cual, a su vez, es menor que el máximo de 45 cm.

El acero por contracción y temperatura se calculó también con el valor de ρ de la tabla 16.1. No se exceden las separaciones máximas de 45 cm o de cinco veces el espesor de la losa.

Para la revisión por cortante se usó la mayor fuerza cortante, que es la que actúa en el apoyo interior de los claros extremos (tabla 14.1).

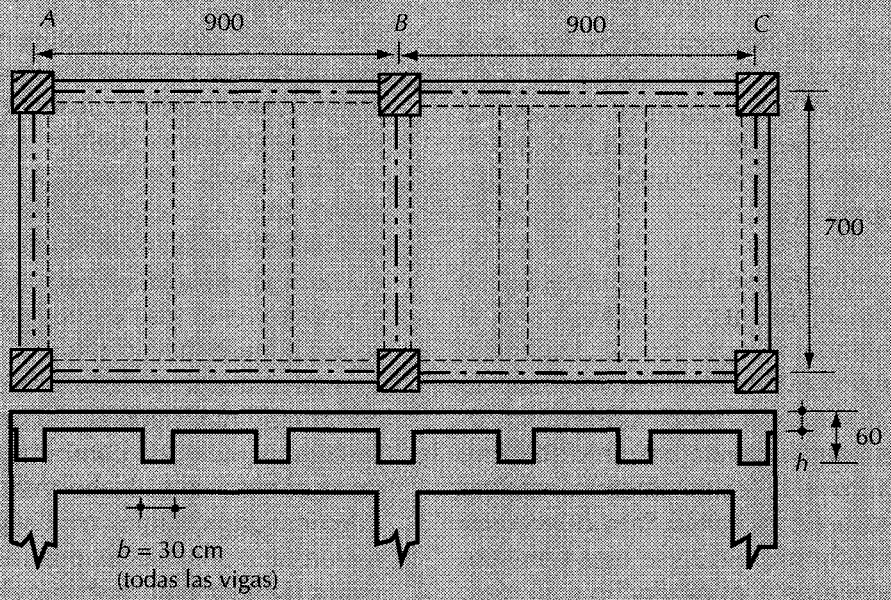
La fuerza cortante, V_u, resultó mucho menor que la fuerza cortante de diseño, ϕV_c, que puede resistir el concreto sin refuerzo por cortante. Por lo tanto, no es necesario revisar el peralte de la losa como hubiese sido el caso si V_u fuese mayor que ϕV_c.

Al final del ejemplo se muestra el croquis de armado que sigue las recomendaciones de la figura 16.4*a*. La combinación de la barra recta corrida en el lecho inferior y de los columpios proporciona una separación de 20 cm en las zonas de momento positivo. En las zonas de momento negativo de los apoyos interiores se combinan columpios y bastones que en conjunto proporcionan una separación de 40/3 cm, que es algo menor que la separación requerida de 17.5 cm. En el apoyo extremo se combinan un columpio y una L que dan una separación de 20 cm. El acero por contracción y temperatura se muestra de punta a una separación de 32 cm. Las secciones de corte y de doblez se marcan de acuerdo con la figura 16.4*a*. El anclaje en el extremo debe revisarse de acuerdo con las indicaciones del Reglamento ACI 318-02 que se resumen en las secciones 9.6.1 y 9.7.

Aunque la losa se ha diseñado como losa en una dirección por tener una relación de lado largo a lado corto mayor que dos, de todas maneras se desarrollan pequeños momentos negativos en los apoyos de las losas sobre las vigas longitudinales de 9 m. Conviene por lo tanto colocar el área mínima de acero en estas secciones en el lecho superior de la losa, doblando parte del acero por contracción y temperatura y completándolo con bastones, para evitar un posible agrietamiento.

EJEMPLO 16.1 ***Diseño de una losa en una dirección por el Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



w (carga viva) = 600 kg/m^2 (carga de servicio)
w (recubrimientos y acabados) = 150 kg/m^2
f'_c = 200 kg/cm^2
f_y = 4200 kg/cm^2

CÁLCULO DEL ESPESOR

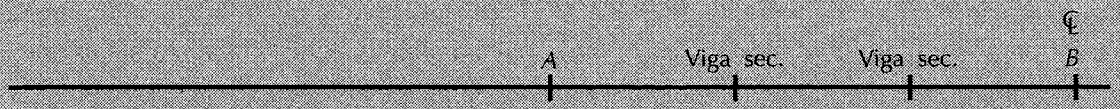
$h = \ell/24$
ℓ_n = 300 − 30 = 270
h = 270/24 = 11 cm

CARGAS

w (carga viva) = 600 kg/m^2
w (recubrimientos y acabados) = 150 kg/m^2
w (peso propio) 1 × 0.11 × 2400 = 264 kg/m^2
$w_u = 1.2\ D + 1.6\ L$
w_u = 1.2 (150 + 264) + 1.6 × 600 = 1456 kg/m^2 ≃ 1.46 ton/m^2
$w_u \ell_n^2$ = 1.46 × 2.7^2 = 10.64 ton-m

EJEMPLO 16.1 ***(continuación)***

CÁLCULO DE ÁREAS DE ACERO POR FLEXIÓN



Concepto								
1. Coeficientes de momento:								
negativos	1/24		1/12		1/12		1/12	
positivos		1/14		1/16		1/16		
2. Momentos (ton-m)								
negativos	0.443		0.887		0.887		0.887	
positivos		0.760		0.665		0.665		
3. $M_u / \phi\, bd^2 f'_c$								
negativos	0.034		0.068		0.068		0.068	
positivos		0.058		0.051		0.051		
4. ω (Apéndice A)								
negativos	0.03		0.07		0.07		0.07	
positivos		0.06		0.05		0.05		
5. $\rho = \omega\, f'_c/f_y$								
negativos	0.0014		0.0033		0.0033		0.0033	
positivos		0.0029		0.0024		0.0024		
$\rho_{min} = 0.0018$								
6. $A_s = \rho\, bd$ (cm^2/m)								
negativos	1.19		2.80		2.80		2.80	
positivos		2.46		2.04		2.04		
7. $s = 100\, A_b/A_s$								
negativos	41.1		17.5		17.5		17.5	
positivos		19.9		24.0		24.0		

EJEMPLO 16.1 (*continuación*)

ACERO POR CONTRACCIÓN Y TEMPERATURA

$$\rho = 0.0018$$

$$A_s = \rho\, bd = 0.0018 \times 100 \times 8.5 = 1.53 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s = \frac{100\, A_b}{A_s} = \frac{49}{1.53} = 32 \text{ cm}$$

REVISIÓN POR CORTANTE

$$V_u = 1.15\, w_u \ell_n/2$$

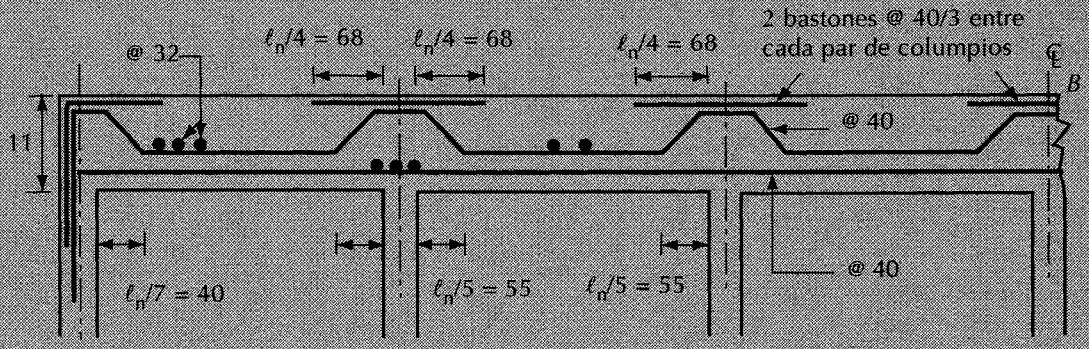
$$V_u = 1.15 \times 1460 \times 2.70/2 = 2266 \text{ kg}$$

$$V_c = 0.5 \sqrt{f'_c}\, bd = 0.5 \sqrt{200} \times 100 \times 8.5 = 6010$$

$$\phi V_c = 0.85 \times 6010 = 5110 \text{ kg}$$

$$V_u < \phi V_c$$

CROQUIS DE ARMADO



Barras No. 2.5
Recubrimiento libre = 2 cm

16.4 Cargas concentradas

En el ejemplo de la sección anterior se supuso que la losa tenía una carga uniformemente distribuida en toda su área. En ocasiones, además de la carga distribuida debida al peso propio y a la carga viva de este tipo, actúan cargas concentradas sobre la losa. Esto es común en el caso de puentes o de pisos que soportan maquinaria, tanques o cargas similares.

Para diseñar losas en una dirección con cargas concentradas, se presentan aquí dos métodos que difieren en sus principios. El primero es el que se conoce como método *del ancho efectivo* [16.1]. Se basa en la hipótesis de suponer que la carga es resistida por una franja de losa de ancho efectivo, b_e, simétrica respecto a la carga, como se muestra en la figura 16.5. El ancho efectivo depende de las dimensiones de la placa de carga o área que ocupa la carga concentrada, de su posición dentro de la losa y de las condiciones de apoyo de la losa. Una vez determinado b_e, como se indica a continuación, se diseña la franja de losa como si fuera una viga de ancho b_e y peralte d. El refuerzo necesario se adiciona al que se requiera por carga distribuida, verificando que con el acero total la losa siga siendo subreforzada.

En la determinación del ancho efectivo, b_e, se distinguen tres casos (figura 16.5):

a) Si la carga actúa en el centro geométrico de la losa

$$b_e = \frac{b_o + \beta\ell_y}{\ell_x + \beta\ell_y}\,\ell_x \text{ para } \ell_x \le 3\beta\ell_y \quad (16.4)$$

$$b_e = \frac{3}{4}\left(b_o + \beta\ell_y\right) \text{para } \ell_x > 3\beta\ell_y \quad (16.5)$$

b) Si la carga actúa a igual distancia de los apoyos, pero descentrada con respecto a los bordes libres, el ancho efectivo tendrá el menor de los siguientes valores:

- el correspondiente al caso a
- el dado por las expresiones

$$b_e = \frac{b_o + \frac{1}{3}\beta\ell_y}{\ell_x + \frac{1}{3}\beta\ell_y}\,\ell_x + \text{e, para } \ell_x \le \beta\ell_y \quad (16.6)$$

$$b_e = \frac{3}{4}\left(b_o + \frac{1}{3}\beta\ell_y\right) + \text{e, para } \ell_x > \beta\ell_y \quad (16.7)$$

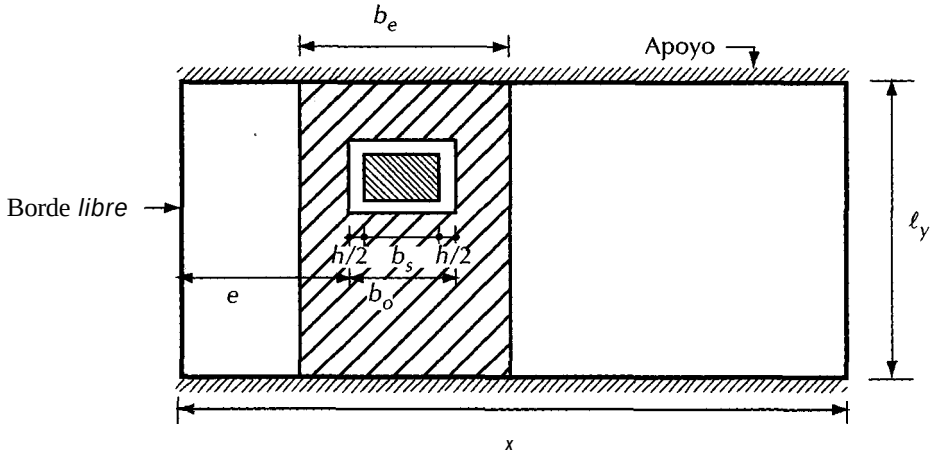


Figura 16.5 Método del ancho efectivo para losas con carga concentrada.

c) Si la carga actúa descentrada respecto a los bordes libres y a diferente distancia de los apoyos, al ancho efectivo tendrá el valor

$$b_e = (b'_e - b_o)\left(1 - 2\frac{y_o}{\ell_y}\right)^2 \qquad (16.8)$$

siendo b'_e el ancho efectivo correspondiente al caso anterior y y_o la distancia del centro teórico de aplicación de la carga al apoyo más próximo.

El factor β que aparece en las ecuaciones anteriores depende de las condiciones de apoyo de la losa. Si están libremente apoyadas, se toma $\beta = 1$; si están empotradas, $\beta = \frac{1}{2}$; y en casos intermedios, $\beta = \frac{2}{3}$.

El segundo método para diseñar losas con cargas concentradas está basado en la teoría de las líneas de fluencia (véase la referencia 16.2, páginas 30-34 y 95). Este método que se presenta en las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal, consiste en incrementar la suma de los momentos resistentes de la losa, por unidad de ancho, positivos y negativos, en las dos direcciones y en todo punto del tablero, en la cantidad

$$\frac{P}{2\pi}\left(1 - \frac{2}{3}\frac{r}{R}\right) \qquad (16.9)$$

donde P es la carga concentrada; r, el radio del círculo de igual área a la de aplicación de la carga; y R, la distancia del centro de la carga al borde más próximo a ella. El método no especifica en qué cantidad se incrementan los momentos negativos y en qué cantidad los positivos, sino que basta con que la suma de ambos se incremente en la cantidad indicada por la ecuación 16.9. Sin embargo, es conveniente distribuir el incremento total en proporción aproximada a los momentos negativos y positivos obtenidos por carga distribuida. Obsérvese que en dirección paralela a los apoyos también debe colocarse refuerzo para incrementar los momentos, el cual será adicional al de contracción y temperatura.

Es importante notar que en este método el incremento en la suma de los momentos positivo y negativo debe hacerse en todos los puntos de la losa a los que llega la influencia de la carga concentrada. Esto se debe a que se trata de evitar la formación de un mecanismo de colapso en forma de cono alrededor de la carga concentrada con líneas de fluencia radiales en la parte inferior de la losa (momento positivo) y una línea de fluencia circular en la parte superior (momento negativo).

Este segundo método se aplica a las losas que trabajan en una dirección, con relación ancho a claro no menor que $\pi/2$, cuando la distancia de la carga a un borde libre no es menor que la mitad del claro. No es necesario incrementar los momentos resistentes en un ancho de losa mayor que 1.5 ℓ centrado con respecto a la carga, siendo ℓ el claro de la losa.

Los dos métodos presentados se refieren al diseño por flexión de las losas. También debe revisarse que no ocurra una falla en cortante por penetración de la carga concentrada, en forma similar a la que ocurre en el caso de losas apoyadas directamente sobre columnas (secciones 7.5.3, 7.6.1*c* y 7.6.2*c*).

16.5 Ejemplo de diseño de una losa con carga distribuida y carga concentrada

En el ejemplo 16.2 se diseña una losa que tiene una carga viva distribuida uniformemente de 300 kg/m^2 y una carga concentrada de 8 ton, ambas a nivel de servicio. La losa forma parte de una serie continua de tramos iguales y sólo se ha diseñado el tramo con carga concentrada usando el método de las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal.

Para calcular el espesor, h, se empleó la tabla 11.4 para el caso de los apoyos continuos, ya que es un claro interior. Como el ancho de las vigas de apoyo es mayor que el peralte efectivo, fue necesario hacer dos tanteos respecto al peralte para determinar el claro efectivo, ya que éste es igual al claro libre más medio peralte efectivo de cada lado.

El factor de carga usado fue de 1.4, que es el que señala el Reglamento del Distrito Federal.

El cálculo de los momentos producidos por la carga distribuida se efectuó con los coeficientes de la tabla 14.1. La suma de los momentos negativo y positivo causados por la carga concentrada, en cada dirección, por unidad de ancho, se calculó con la ecuación 16.9. El valor de r se obtuvo igualando el área de un círculo, πr^2, con el área que ocupa la carga concentrada, que en este ejemplo es de 1 m^2. Obsérvese que aunque la ecuación 16.9 conduce a unidades de fuerza para la suma de los momentos negativo y positivo, en el ejemplo se le asignó unidades de kg-m (fuerza por longitud). Al hacer esto se está suponiendo que esta suma de momentos habrá que resistirla en una franja de 1 m de ancho, al igual que los momentos producidos por la carga distribuida.

La suma de momentos negativo y positivo debido a la carga concentrada se distribuyó en momento negativo y momento positivo proporcionalmente al valor de estos momentos bajo condición de carga distribuida, aunque pudo usarse cualquier otra distribución razonable. Sumando los momentos por carga distribuida y por carga concentrada, se obtuvieron los momentos totales de 2892 y 1988 kg-m mostrados en el ejemplo.

A continuación se dividió la losa en las cuatro franjas mostradas en el croquis del ejemplo para fines de proporcionar las áreas de acero correspondientes. La franja A está centrada respecto a la carga concentrada y tiene un ancho de 1.5 1; en esta franja se requiere acero para resistir la carga distribuida y la carga concentrada. En las franjas B sólo se requiere acero para resistir la carga distribuida, ya que el efecto de la carga concentrada no alcanza a afectar estas franjas; la franja B de la parte superior es tan pequeña que en la práctica se incorpora a la franja A. En la dirección paralela a las vigas de apoyo se tiene la franja *C;* como el efecto de la carga concentrada se extiende hasta una distancia de 0.75 ℓ a cada lado de la carga, la franja C se extiende en rigor hasta las losas vecinas, o bien, pueden reforzarse ligeramente en forma adicional las vigas de apoyo.

El acero negativo para la franja A se calculó con el momento de 2892 kg-m, que es la suma del producido por carga distribuida y por carga concentrada. Obsérvese que en la ecuación general de flexión se usó para b un valor de 100 cm por las razones ya explicadas. Se obtuvo un refuerzo consistente en barras del No. 3 a cada 13 cm. También se calculó el área de acero negativo que se requiere para resistir la carga concentrada y la separación correspondiente. Estos valores deben cumplirse en las zonas de la losa en que no hay momento negativo por carga distribuida, como en el centro del claro. El cálculo se hizo por simple proporcionalidad entre el momento por carga concentrada y el momento total. En forma similar se calculó el acero positivo para esta franja, obteniéndose barras del No. 3 a cada 20 cm para momento total y para momento por carga concentrada, ya que rige el área mínima.

Para la franja B únicamente se consideraron los momentos producidos por la carga distribuida, ya que, como se dijo anteriormente, esta franja está fuera de la zona de influencia de la carga concentrada. Para el acero positivo no se alcanzó la relación $\rho_{mín}$, por lo que se usó este valor, que es de 0.0023.

En la franja C, la suma de los momentos negativo y positivo se dividió por igual entre momento negativo y momento positivo. Por lo tanto, el acero positivo total se obtuvo sumando el área del acero requerido por contracción y temperatura, calculado con la ecuación 16.2, y la mitad de la requerida para resistir la carga

concentrada. El acero negativo es únicamente la mitad del área necesaria para resistir la carga concentrada. El área de acero negativo resultó menor que la mínima mientras que la del acero positivo resultó casi igual, por lo que se usó la separación de 20 cm.

Es importante mencionar que las NTC-*04* señalan que el peralte efectivo debe reducirse en *2* cm para el cálculo del refuerzo de lecho superior en losas de espesor menor o igual a *20* cm, a menos que se tomen precauciones especiales para garantizar que las dimensiones de cálculo no variarán durante la construcción. En este ejemplo no se hizo la reducción de *2* cm porque se supuso que se tomarían estas precauciones.

Al final del ejemplo se muestran los croquis de colocación del refuerzo para los tres tipos de franja. En la franja A se decidió usar únicamente barras rectas, ya que es necesario tener en todas las secciones el área requerida por carga concentrada. Así, en el centro del claro se requiere una separación del refuerzo negativode *20* cm, por lo que se conservó la separación de 13 cm requerida en los apoyos. Para el refuerzo positivo se obtuvo una separación de 20 cm en el centro del claro y en los apoyos, ya que rigió el área mínima.

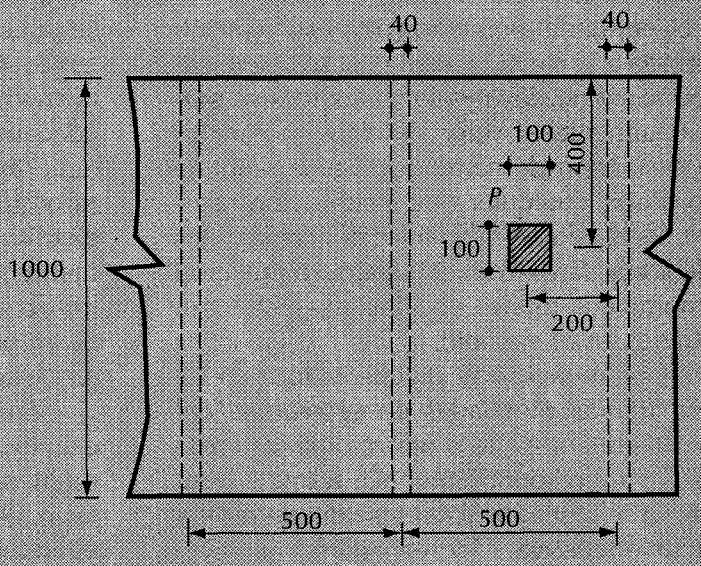
El armado de la franja *B* sigue las recomendaciones de la figura 16.4*a*.

En la franja C también se corrieron las barras rectas a todo el ancho de la losa, por lo mencionado en el caso de la franja A.

En el ejemplo no se incluye la revisión por cortante por penetración en la zona de aplicación de la carga concentrada. Esta revisión debe hacerse por los procedimientos señalados en la sección *7.2.*

EJEMPLO 16.2 ***Diseño de una losa con cargas distribuida y concentrada según las NTC-04.***

DATOS



w (carga viva) = 300 kg/m^2
P = 8 ton
f'_c = 200 kg/cm^2
$f^*_c = 0.8\, f'_c$ = 160 kg/cm^2
$f''_c = 0.85\, f^*_c$ = 136 kg/cm^2
f_y = 4200 kg/cm^2

EJEMPLO 16.2 (*continuación*)

CÁLCULO DEL ESPESOR

Primer tanteo; $d = 12$ cm

$h = \frac{\ell}{28}$; recubrimiento: $r = 2$ cm

$\ell = 500 - 40 + 12 = 472$ cm

$h = \frac{472}{28} = 17$

Segundo tanteo; $d = 17 - 2 = 15$ cm

$\ell = 500 - 4 + 15 = 475$

$h = \frac{475}{28} = 17$ cm

$d = 17 - 2 = 15$ cm

CARGAS

w (carga viva) = 300 kg/m^2
P (carga viva) = 8000 kg
w = (carga muerta) = $0.17 \times 1 \times 2400 = 408$ kg/m^2
w_u (total) = $1.4\ (300 + 408) = 991$ kg/m^2
$P_u = 1.4 \times 8000 = 11{,}200$ kg

MOMENTOS

a) Por carga distribuida

$$M\,(-) = \frac{w_u \ell^2}{11} = \frac{991 \times 4.75^2}{11} = 2033\ \text{kg} - \text{m}$$

$$M\,(+) = \frac{w_u \ell^2}{16} = \frac{991 \times 4.75^2}{16} = 1397\ \text{kg} - \text{m}$$

b) Por carga concentrada

$$M\,(-) + M\,(+) = \frac{P_u}{2\pi}\left(1 - \frac{2r}{3R}\right) \qquad \text{(ecuación 16.9)}$$

$$r = \sqrt{\frac{1 \times 1}{\pi}} = 0.56\ \text{m}$$

$$M\,(-) + M\,(+) = \frac{11{,}200}{2\pi}\left(1 - \frac{2 \times 0.56}{3 \times 2}\right) = 1450\ \text{kg} - \text{m}$$

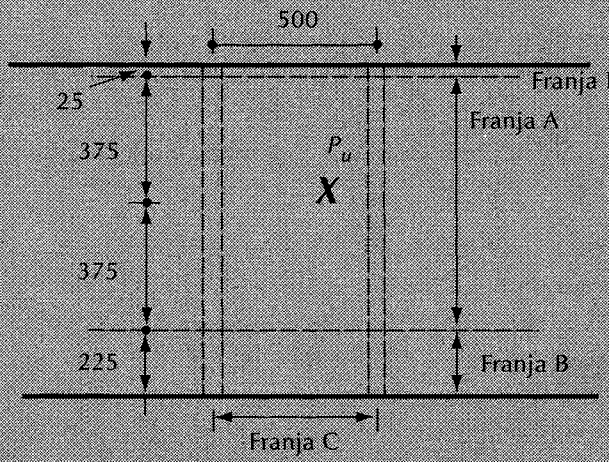
EJEMPLO 16.2 (*continuación*)

c) Momentos totales

$$M(-) = 2033 + \frac{1450 \times 2033}{(2033 + 1397)} = 2033 + 859 = 2892 \text{ kg} - \text{m}$$

$$M(+) = 1397 + \frac{1450 \times 1397}{(2033 + 1397)} = 1397 + 591 = 1988 \text{ kg} - \text{m}$$

CÁLCULO DE ÁREAS DE ACERO



a) Para la franja A

Acero negativo

$$\frac{M_u}{F_R\, bd^2 f''_c} = \frac{289{,}200}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.105$$

$\omega = 0.11$ (Gráfica del Apéndice A)

$$\rho = \frac{\omega f''_c}{f_y} = \frac{0.11 \times 136}{4200} = 0.0036$$

$$\rho_{mín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7 \times \sqrt{200}}{4200} = 0.0023 \quad \text{(ecuación 16.1)}$$

$\rho > \rho_{mín}$

$A_s = 0.0036 \times 100 \times 15 = 5.4 \text{ cm}^2/\text{m}$

EJEMPLO 16.2 (*continuación*)

$$s = \frac{100\ A_b}{A_s} = \frac{71}{5.4} = 13 \text{ cm (barras del No. 3)} < s_{máx}$$

$$(A_s)_{concentr.} = \frac{859}{2892} \times 5.4 = 1.6 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$(A_s)_{mín} = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.45 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s_{concentr.} = \frac{71}{3.45} = 20 \text{ cm}$$

Acero positivo

$$\frac{M_u}{F_R bd^2 f''_c} = \frac{198{,}800}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.072$$

$$\omega = 0.07$$

$$\rho = \frac{0.07 \times 136}{4200} = 0.0023 = \rho_{mín}$$

$$A_s = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.45 \text{ cm}^2/\text{m}$$

$$s = \frac{71}{3.45} = 20 \text{ cm (barras del No. 3)} < s_{máx}$$

$$(A_s)_{concentr.} = A_{s\ mín}$$

$$s_{concentr.} = \text{barras No. 3 @ 20 cm}$$

b) Para la franja B

Acero negativo

$$\frac{M_u}{F_R bd^2 f''_c} = \frac{203{,}300}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.074$$

$$\omega = 0.075$$

$$\rho = \frac{0.075 \times 136}{4200} = 0.0024 > \rho_{mín}$$

EJEMPLO 16.2 (*continuación*)

$$(A_s) = 0.0024 \times 100 \times 15 = 3.6 \text{ cm}^2/\text{ m}$$

$$s = \frac{71}{3.6} = 20 \text{ cm (barras del No. 3)} < s_{máx}$$

Acero positivo

$$\frac{M_u}{F_R bd^2 f''_c} = \frac{139{,}700}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.05$$

$$\omega = 0.05$$

$$\rho = \frac{0.05 \times 136}{4200} = 0.0017 < \rho_{mín}$$

$$A_s = 0.0023 \times 100 \times 15 = 3.4 \text{ cm}^2/\text{ m}$$

$$s = \frac{71}{3.45} = 20 \text{ cm (barras del No. 3)} < s_{máx}$$

c) *Para la franja C*

Acero positivo

$$(A_s)_{contr.} = \frac{66{,}000 \times 17}{4200\,(17 + 100)} = 2.3 \text{ cm}^2/\text{ m} \qquad \text{(ecuación 16.2)}$$

$$\frac{M_u}{F_R bd^2 f''_c} = \frac{0.5 \times 145{,}000}{0.9 \times 100 \times 15^2\, 136} = 0.026$$

$$\omega = 0.03$$

$$\rho = \frac{0.03 \times 136}{4\,200} = 0.00097$$

$$(A_s)_{carga\ conc.} = 0.00097 \times 100 \times 15 = 1.45 \text{ cm}^2/\text{ m}$$

$$(A_s)_{total} = 1.45 + 2.3 = 3.75 \text{ cm2/ m} > (A_s)_{mín}$$

EJEMPLO 16.2 (*continuación*)

$$s = \frac{71}{3.75} = 19 \text{ cm (usar barras del No. 3 @ 20 cm)}$$

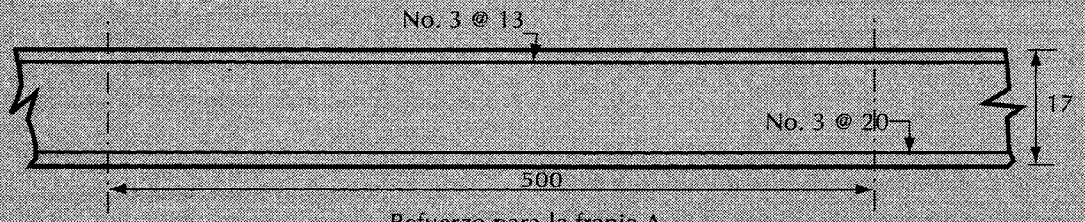
Acero negativo

$$\frac{M_u}{F_R b d^2 f''_c} = \frac{0.5 \times 145{,}000}{0.9 \times 100 \times 15^2 \times 136} = 0.026$$

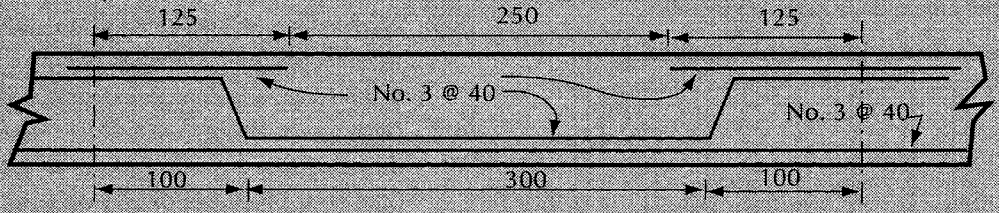
Usar $(A_s)_{mín} = 3.45 \text{ cm}^2/\text{m}$

$$s = \frac{71}{3.45} = 20 \text{ cm (barras del No. 3)}$$

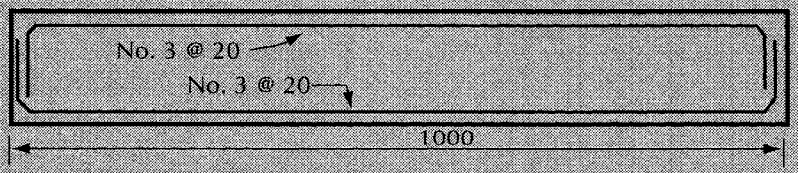
CROQUIS DE COLOCACIÓN DEL REFUERZO



Refuerzo para la franja A



Refuerzo para la franja B



Refuerzo para la franja C

Referencias

16.1 Jiménez Montoya, P, A. García Meseguer, F. Morán Cabré. Hormigón Armado. Madrid, Editorial Gustavo Gili, 1982.

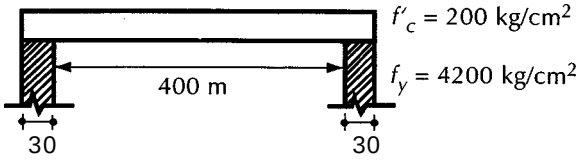
16.2 Wood, R. H., Plastic and *Elastic Design* of *Slabs* and Plates. Londres, Thames and Hudson, 1967.

16.3 —. *CRSI* Handbook Design. Chicago, Concrete Reinforcing Steel Institute, 2002

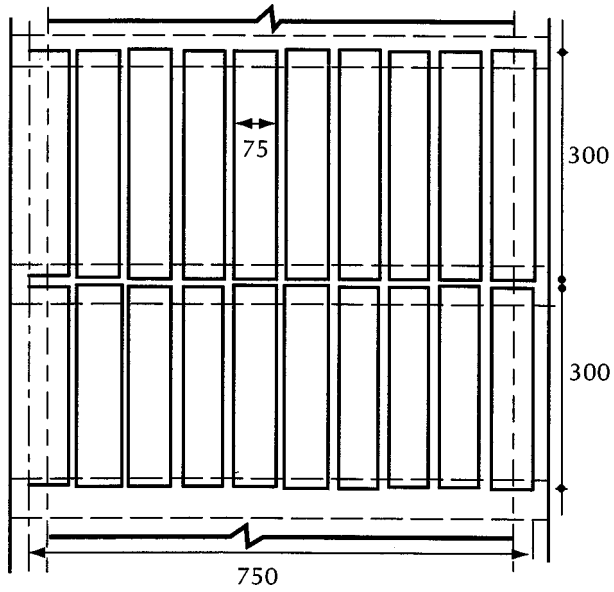
Ejercicios

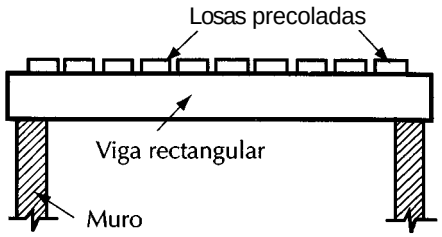
(Observación: los siguientes ejercicios pueden resolverse con las NTC-04 o con el Reglamento ACI 318-02, salvo cuando se indique lo contrario.)

16.1 Calcular el peralte y el acero de refuerzo de una losa libremente apoyada que trabaja en una dirección y con una carga w_u = 800 kg/m^2 que incluye el peso propio. Determinar el agrietamiento y las deflexiones de corta duración y larga duración, bajo una carga permanente de servicio de 400 kg/m^2.



16.2 Dimensionar las losas precoladas y las vigas rectangulares del siguiente sistema de piso. Para el cálculo de deflexiones a largo plazo considérese el 50 por ciento de la carga de servicio.





f'_c = 200 kg/cm^2

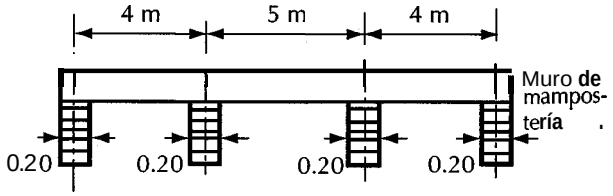
f_y = 4200 kg/cm^2

carga de servicio (no incluye peso propio) =
w = 300 kg/m^2

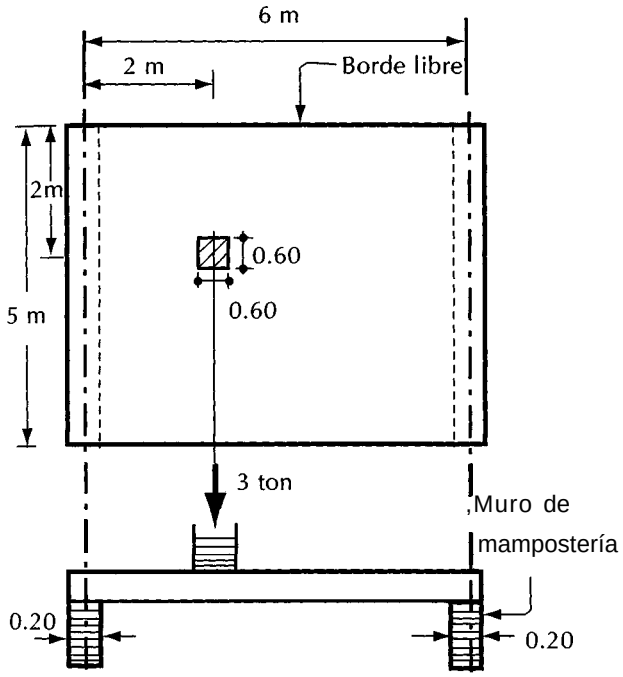
Deflexión máxima para las losas = 1 cm
Deflexión máxima para las vigas = 2.5 cm
Ancho máximo de grietas = 0.3 mm

16.3 Resolver el problema anterior suponiendo que el sistema de piso está formado por una losa colada monolíticamente con nervaduras a cada 3 m.

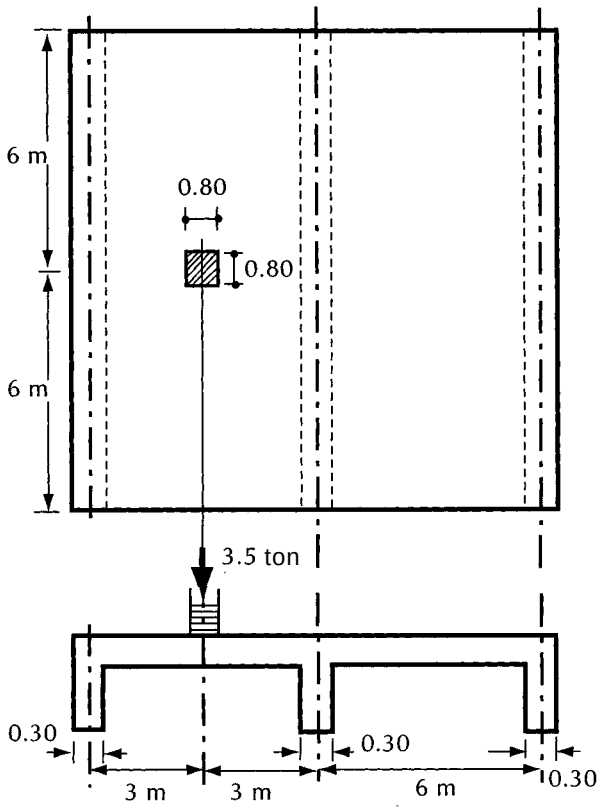
16.4 Dimensionar la losa continua del croquis utilizando los coeficientes aproximados de la tabla 14.1. Considerar una carga muerta de servicio, sin incluir el peso propio, igual a 600 kg/m^2 y una carga viva de servicio igual a 1000 kg/m^2. Suponer f'_c = 200 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. Revisar agrietamientos y deflexión. Para estimación de la deflexión diferida, considerar que el 60 por ciento de la carga viva actúa en forma permanente.



16.5 Dimensionar la losa del croquis sometida a una carga concentrada de servicio de 3 ton en la forma indicada. Utilizar el método de ancho equivalente. Considerar además una carga uniforme total a nivel de servicio, sin incluir el peso propio, igual a 800 kg/m^2. La mitad de la carga es carga viva y la mitad es carga muerta. Suponer f'_c = 250 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. Utilizar el Reglamento ACI 318-02. Revisar el peralte requerido por cortante por penetración.



16.6 Dimensionar la losa del croquis sujeta a una carga concentrada de 3.5 ton aplicando las indicaciones de las NTC-04. Considerar además una carga total a nivel de servicio, sin incluir el peso propio, igual a 600 kg/m^2. Suponer f'_c = 250 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. Usar un factor de carga F_c = 1.4. Revisar el peralte requerido por cortante por penetración.



CAPÍTULO 17

Losas apoyadas perimetralmente

17.1 Introducción. /17.2 Comportamiento y modos de falla. /17.3 Análisis de losas. /17.4 Dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente. /17.5 Ejemplo de diseño.

17.1 Introducción

Las losas apoyadas perimetralmente son aquellas que están apoyadas sobre vigas o muros en sus cuatro lados, como se muestra en la figura 17.1, y que por lo tanto trabajan en dos direcciones, a diferencia de las estudiadas en el capítulo anterior que trabajan sólo en una dirección.

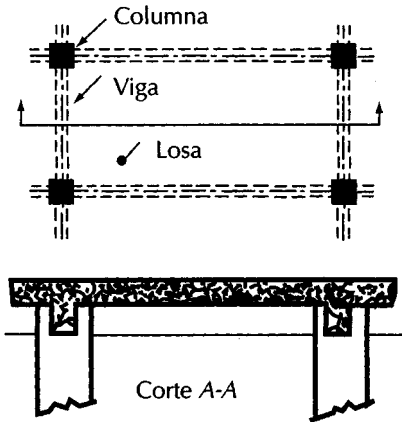


Figura 17.1 Losas apoyadas perimetralmente.

La diferencia entre losas que trabajan en una dirección y losas apoyadas perimetralmente puede verse también en la forma que adquieren las losas cuando se deflexionan bajo la acción de cargas normales a su plano: las primeras se deforman en curvatura simple mientras que las segundas lo hacen en curvatura doble. Una característica estructural importante de los apoyos de estas losas es que su rigidez a flexión es mucho mayor que la rigidez a flexión de la propia losa. Los métodos de diseño estudiados en este capítulo sólo pueden aplicarse si se cumple esta condición. Cuando las losas se apoyan en muros no hay duda al respecto, ya que su rigidez a flexión puede considerarse infinita. Cuando se apoyan en vigas de dimensiones usuales calculadas como se indica en el capítulo 14 de este texto, también puede considerarse que se cumple la condición mencionada. Sin embargo, en algunas ocasiones las losas se apoyan sobre vigas de poco peralte que tienen una rigidez flexionante relativamente pequeña. En estos casos se debe recurrir a otros métodos de diseño, como los que se mencionan en el capítulo 19.

17.2 Comportamiento y modos de falla

Las losas apoyadas perimetralmente forman parte, comúnmente, de sistemas estructurales integrados por columnas, vigas y losas. El comportamiento de éstas no puede estudiarse rigurosamente en forma aislada, sino que debe analizarse todo el sistema, ya que las características de cada elemento influyen en el comportamiento de los otros. Sin embargo, en este capítulo, por simplicidad y conveniencia en el estudio, se considerarán las losas en forma aislada. Esto permitirá el planteamiento de métodos de diseño suficientemente precisos

para fines prácticos, siempre que se cumpla la hipótesis mencionada en la sección anterior de que los apoyos tengan una rigidez a flexión mucho mayor que la de las losas. En la sección 19.2 se presenta una introducción al comportamiento de sistemas de piso.

La gráfica carga-deflexión en el centro del claro de una losa apoyada perimetralmente, ensayada hasta la falla, tiene la forma mostrada en la figura 17.2, en la que se distinguen las siguientes etapas.

a) *Una etapa lineal* O-A, en la que el agrietamiento del concreto en la zona de esfuerzos de tensión es despreciable. El agrietamiento del concreto por tensión, representado por el punto A, ocurre bajo cargas relativamente altas. Las cargas de servicio de losas se encuentran generalmente cerca de la carga correspondiente al punto A.

b) *La etapa A-B,* en la que existe un agrietamiento del concreto en la zona de tensión y los esfuerzos en el acero de refuerzo son menores que el límite de fluencia. La transición de la etapa O-A a la etapa A-B es gradual, puesto que el agrietamiento del concreto se desarrolla paulatinamente desde las zonas de momentos flexionantes máximos, hacia las zonas de momentos flexionantes menores. Por la misma razón, la pendiente de la gráfica carga deflexión en el tramo A-B, disminuye poco a poco.

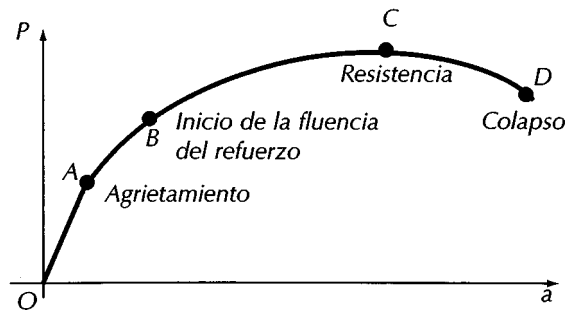


Figura 17.2 Gráfica carga-deflexión de una losa.

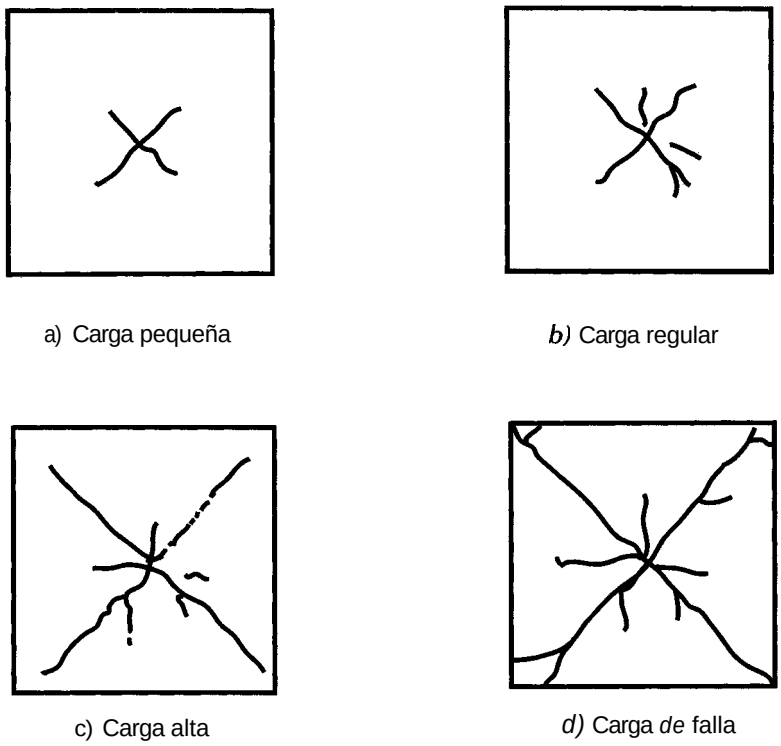
c) La etapa B-C, en la que los esfuerzos en el acero de refuerzo sobrepasan el límite de fluencia. Al igual que el agrietamiento del concreto, la fluencia del refuerzo empieza en las zonas de momentos flexionantes máximos y se propaga paulatinamente hacia las zonas de momentos menores.

d) Por último, la rama descendente C-D, cuya amplitud depende, como en el caso de las vigas, de la rigidez del sistema de aplicación de cargas.

Para ilustrar el avance del agrietamiento y de la fluencia del refuerzo en distintas etapas de carga, se presentan en la figura 17.3 las configuraciones de agrietamiento en la cara inferior de una losa cuadrada simplemente apoyada sujeta a carga uniformemente repartida en su cara superior, para distintos valores de la carga aplicada. Puede verse en esta figura que el agrietamiento empieza en el centro de la losa, que es la zona de momentos flexionantes máximos, y avanza hacia las esquinas a lo largo de las diagonales. Los análisis elásticos de losas (sección 17.3) indican que los momentos principales en una losa de este tipo se presentan precisamente en las diagonales. En etapas cercanas a la falla se forman grietas muy anchas a lo largo de las diagonales, que indican que el acero de refuerzo ha fluido y ha alcanzado grandes deformaciones. Las deformaciones por flexión de la losa se concentran en estas líneas, que reciben el nombre de líneas de fluencia, mientras que las deformaciones en las zonas comprendidas entre las líneas de fluencia son, en comparación, muy pequeñas.

La amplitud de las zonas de comportamiento inelástico depende del porcentaje de refuerzo de flexión. Generalmente, este porcentaje es pequeño en losas, por lo que tales elementos resultan subreforzados y las zonas inelásticas son amplias.

En la descripción anterior del comportamiento, se ha supuesto que la falla ocurre por flexión y que no hay efecto de cortante.



a) Carga pequeña

b) Carga regular

c) Carga alta

d) Carga *de* falla

Figura 17.3 Configuraciones de agrietamiento para distintos valores de la carga aplicada.

En la sección 7.5.3 de este texto, se ha señalado que en el caso de losas apoyadas directamente sobre columnas y de losas sujetas a cargas concentradas altas, es frecuente que la falla ocurra en cortante por penetración antes de que se alcance la resistencia en flexión. Este tipo de falla se estudia en la sección mencionada.

17.3 Análisis de losas

Se entiende por análisis de losas la determinación de las acciones internas en una losa dada cuando se conoce la carga aplicada. Esta determinación es más difícil que el caso de vigas, debido a que las losas son elementos altamente hiperestáticos. El análisis de losas puede efectuarse aplicando los métodos de la Teoría de la Elasticidad que se describen brevemente más adelante. Los resultados así obtenidos sólo son válidos en la etapa de comportamiento lineal, o sea, para cargas cuya magnitud es del orden de la correspondiente al punto A de la figura 17.2. Además, los resultados son sólo aproximados aun para estas cargas, debido a que el concreto reforzado no cumple con las características ideales de los materiales lineales, homogéneos y elásticos.

Si se plantean las condiciones de equilibrio y compatibilidad de deformaciones del elemento diferencial de la losa mostrado en la figura 17.4, se obtiene la siguiente ecuación*

$$\frac{\partial^4 z}{\partial x^4} + \frac{2\,\partial^4 z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 z}{\partial y^2} = \frac{w}{N} \qquad (17.1)$$

* La deducción completa de esta ecuación se presenta en el libro Theory *of* Plates and *Shells,* por S. Timoshenko [17.11, Véase también la referencia 17.9.

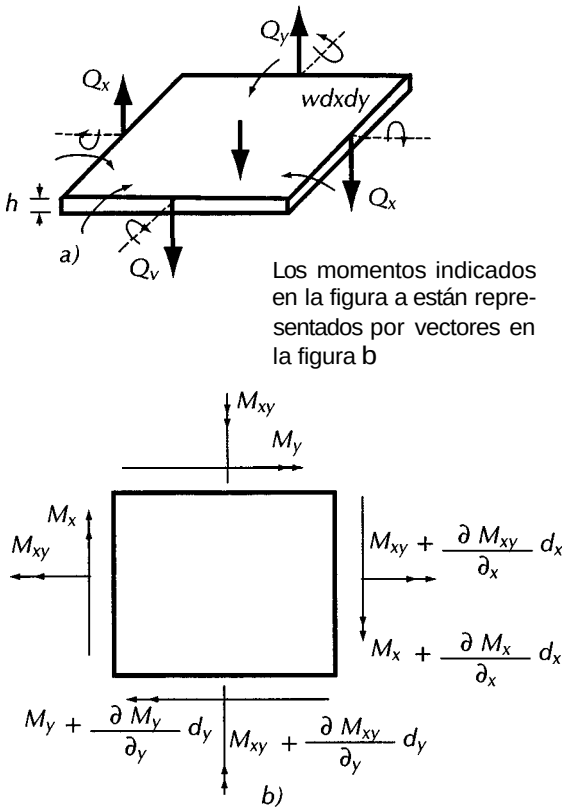


Figura 17.4 Elemento diferencial de losa.

donde:

z = deflexiones de la losa en dirección perpendicular a su plano.
x, y = coordenadas en el plano de la losa
w = carga aplicada
N = rigidez de la losa, expresada por la ecuación

$$N = \frac{Eh3}{12(1 - 2\,\mu)}$$

h = peralte total de la losa
E = módulo de elasticidad
μ = coeficiente de Poisson

Además de las condiciones de equilibrio y continuidad expresadas por la ecuación 17.1, deben cumplirse las condiciones de frontera o condiciones de borde de la losa. Por ejemplo, si un borde es empotrado, la deflexión y la rotación deben ser nulas en dicho borde. Estas condiciones de frontera se satisfacen ajustando las constantes de integración que aparecen al resolver la ecuación diferencial 17.1. Una vez resuelta la ecuación 17.1, las acciones internas pueden determinarse con las ecuaciones que se deducen en la referencia 17.1

La determinación de las acciones internas por el procedimiento descrito es demasiado laboriosa para fines prácticos, además de que tiene las limitaciones indicadas anteriormente. Sin embargo, en casos comunes se han obtenido soluciones, las cuales, con algunas modificaciones, se han utilizado para obtener coeficientes de diseño. Por ejemplo, en la figura 17.5 se muestra la distribución de momentos flexionantes en una losa cuadrada libremente apoyada sujeta a carga uniformemente distribuida. En esta losa los momentos

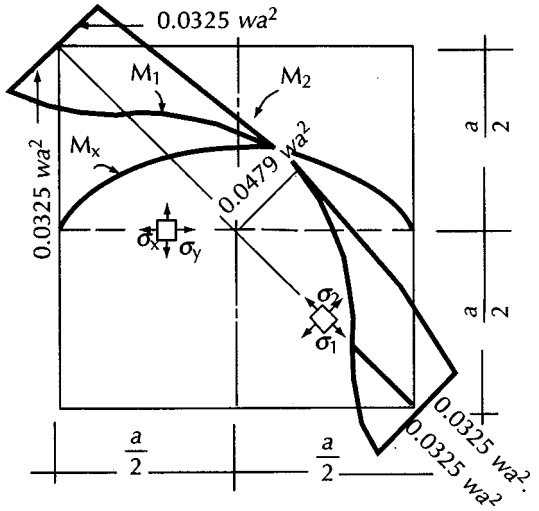


Figura 17.5 Distribución de momentos en una losa cuadrada.

máximos se presentan a lo largo de las diagonales, lo cual explica la forma de su mecanismo de colapso, ya que el acero de refuerzo fluye siguiendo los ejes de momentos máximos.

La ecuación diferencial 17.1 se integra generalmente mediante series, lo cual tiene la limitación de ser aplicable únicamente a ciertas formas sencillas de placas y de condiciones de apoyo. Existen dos métodos que salvan esta limitación, si bien conducen a sistemas de ecuaciones lineales de número muy elevado. Estos métodos son el de diferencias finitas y el de elementos finitos. El primero es un método de integración numérica y el segundo de discretización de la estructura por medio de su sustitución por otra formada por elementos de forma cuadrangular o triangular. Estos métodos, que caen fuera del alcance de este texto, requieren el uso de computadoras para resolver los sistemas de ecuaciones resultantes, pero permiten el análisis de losas de forma irregular, con cualquier tipo de carga y con discontinuidades de carga o geometría.

Existen también métodos aproximados para el análisis de losas. Uno de ellos es el de Marcus [17.2, 17.31 o método de las rigideces relativas que permite visualizar el comportamiento de losas apoyadas perimetralmente y que se usó para fines de diseño durante algún tiempo. Supóngase una losa rectangular libremente apoyada en todo su perímetro en la que se han señalado las dos franjas centrales C_1 y L_1 que corresponden al claro corto y al claro largo, respectivamente (figura 17.6*a*). Supóngase también que la losa tiene una carga uniformemente distribuida w. El punto central de la losa forma parte de las franjas C_1 y L_1 simultáneamente, por lo que se pueden igualar las deflexiones en el punto medio de cada franja, como si fuesen vigas simplemente apoyadas, de la siguiente manera:

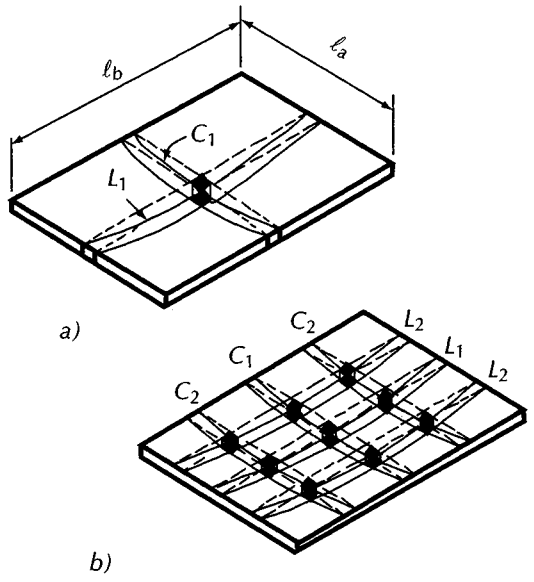


Figura 17.6 Franjas en el método de Marcus.

$$\frac{5w_a\ell_a^4}{384\,EI} = \frac{5w_b\ell_b^4}{384\,EI} \qquad (17.2)$$

donde w_a y w_b son las fracciones de la carga w que corresponden a las franjas C_1 y L_1, respectivamente. Simplificando esta ecuación se obtiene:

$$\frac{w_a}{w_b} = \frac{\ell_b^4}{\ell_a^4} \qquad (17.3)$$

Ahora bien, por condiciones de equilibrio, la suma de las cargas w_a y w_b debe ser la carga total w:

$$w_a + w_b = w \qquad (17.4)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones 17.3 y 17.4 se obtiene:

$$w_a = \frac{\ell_b^4}{\ell_a^4 + \ell_b^4}\, w \qquad (17.5)$$

$$w_b = \frac{\ell_a^4}{\ell_a^4 + \ell_b^4} w \qquad (17.6)$$

Las ecuaciones 17.5 y 17.6 permiten obtener las cargas con las que se diseñan las franjas C y L como si fuesen vigas aisladas. Este método permite obtener coeficientes para distintas relaciones entre ℓ_a y ℓ_b y permite también, siguiendo el mismo razonamiento, analizar losas con distintas condiciones de apoyo. Las ecuaciones 17.5 y 17.6 indican también que la carga se reparte en forma inversamente proporcional a la cuarta potencia de los claros, o sea, que la losa trabaja más en dirección del claro corto que en la del claro largo.

El método es aproximado porque no toma en cuenta que las franjas de losa paralelas no pueden deformarse en forma independiente entre sí. En efecto, si se considera la intersección de las franjas C_2 y L_2 en la figura 17.66, se puede ver que sus cuatro vértices tienen deflexiones diferentes por estar localizados a diferentes distancias de los apoyos de la losa. Por lo tanto, el elemento de la figura 17.6*b* que tiene a la losa horizontal y a la losa deflexionada como caras superior a inferior, respectivamente, adquiere la forma de un cubo deformado, lo cual se debe a la existencia de esfuerzos y momentos torsionantes que se presentan en todos los elementos de intersección, excepto el central. Por lo tanto, la carga total en la losa es resistida no únicamente por momentos flexionantes, sino también por momentos torsionantes, como lo indica el análisis por Teoría de la Elasticidad. Esto hace que el método resulte muy conservador. Por ejemplo, en una losa cuadrada simplemente apoyada, el momento máximo al centro del claro calculado con este método sería

$$\frac{(w/2)\ell^2}{8} = 0.0625\, w\ell^2 \qquad (17.7)$$

mientras que el análisis exacto por Teoría de la Elasticidad (figura 17.5) indica un valor de 0.0479 wf^2.

El método de análisis de losas más empleado en la práctica consiste en el uso de tablas de coeficientes de momentos, obtenidas mediante alguno de los métodos más refinados mencionados antes. La determinación de los momentos por medio de estos coeficientes resulta expedita pero desde luego sólo se pueden analizar losas de forma regular y con carga uniforme.

Al establecer las tablas de coeficientes de momentos, se modifican los resultados de los análisis elásticos para tomar en cuenta las diferencias más importantes entre las losas ideales y las losas de concreto reforzado. Algunas de estas diferencias son las siguientes:

a) Las distribuciones de momentos en las losas de concreto reforzado son diferentes de las distribuciones elásticas, debido a la influencia del agrietamiento.

b) Las condiciones de apoyo de losas de estructuras reales no corresponden a las condiciones ideales de las losas analizadas elásticamente. Por ejemplo, las losas reales suelen apoyarse sobre vigas que tienen una rigidez a flexión finita, o sea, que tienen cierta flexibilidad, mientras que las losas ideales están soportadas sobre apoyos infinitamente rígidos. También las vigas de esctructuras reales trabajan como vigas T con un ancho de patín difícil de definir, lo que implica incertidumbre en su rigidez. Esto no se toma en cuenta en los análisis elásticos comunes.

c) De acuerdo con las distribuciones teóricas de momentos, éstos varían a lo largo de los ejes de la losa, como puede verse en la figura 17.5. Debido a que no resulta práctico distribuir el acero de refuerzo siguiendo las distribuciones teóricas, es usual considerar dos o tres zonas de mo-

mentos constantes. Por ejemplo, la distribución teórica a lo largo del eje central de la figura 17.5 puede simplificarse como se muestra en la figura 17.7. De esta forma se logran separaciones uniformes del acero de refuerzo en zonas amplias de la losa. Obsérvese que no es necesario que en la distribución idealizada de momentos, el momento de diseño sea igual al momento máximo, ya que aprovechando la redistribución de momentos que ocurre en el interior de la losa cuando el acero de refuerzo empieza a fluir en las secciones de momento máximo, se puede diseñar para un momento menor que el máximo.

Los reglamentos de construcción presentan por lo general tablas de coeficientes de momentos que se utilizan para fines de diseño. Más adelante se incluye la tabla que aparece en las NTC-O4 del Reglamento del Distrito Federal.

17.4 Dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente

17.4.1 Coeficientes de momentos

El Reglamento del American Concrete Institute había incluido, hasta antes de su edición de 1971, tablas de coeficientes de momentos para el diseño de losas apoyadas perimetralmente. A partir de 1971, el Reglamento ACI incluyó un método general para el diseño de sistemas de piso con vigas cuya rigidez puede variar desde infinito hasta cero. Si la rigidez es infinita, se está en el caso de losas apoyadas perimetralmente; y si es cero, se está en el caso de losas o placas planas, como las estudiadas en el siguiente capítulo.

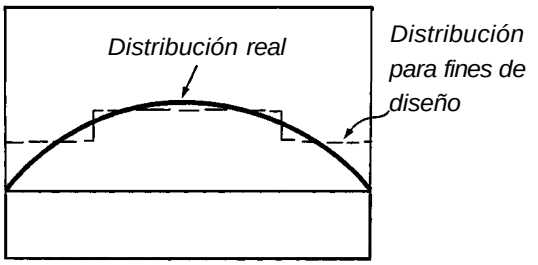


Figura 17.7 Distribución real de momentos y distribución idealizada para fines de diseño en una losa.

Aunque el método que se presenta ahora en el Reglamento ACI (versión 2002) es más general y toma en cuenta las variables más importantes que influyen en el comportamiento de sistemas de piso, resulta más complicado desde el punto de vista operacional que el uso de tablas de coeficientes de momentos, como las incluidas en versiones anteriores o en otros reglamentos de construcciones.

Ya que el método del Reglamento ACI 318-02 no se refiere, por lo tanto, a losas sobre apoyos rígidos exclusivamente, como las consideradas en este capítulo, no se incluye en esta parte del texto y sólo se presenta a continuación el método de las NTC-04.

Para dimensionar losas por este método, se obtienen los momentos flexionantes utilizando los coeficientes que se presentan en la tabla 17.1. Los momentos así obtenidos son momentos por unidad de ancho, por ejemplo, kg-m/m. Después se calculan el peralte y el porcentaje de refuerzo utilizando las fórmulas de flexión, como si se tratase de vigas de ancho unitario. Por ejemplo, si los momentos están en unidades kg-m/m, se considera que la losa está formada por vigas de 1 m de ancho sujetas a los momentos flexionantes determinados a partir de los coeficientes de la tabla.

El método de las NTC-04 está basado en uno desarrollado originalmente por Siess y Newmark [17.4, 17.51. Obsérvese que se incluyen coeficientes para losas construidas monolíticamente con las vigas de apoyo y para losas apoyadas sobre vigas de acero. Esto se debe a que, en el primer caso, las vigas proporcionan cierta restricción a la losa

contra giro, mientras que el segundo caso la losa puede girar libremente.

Existe la posibilidad de que los momentos en un borde común a dos tableros adyacentes resulten distintos en cada tablero. En estos casos, las NTC-04 especifican que se distribuyan las dos terceras partes del momento de desequilibrio entre los tableros adyacentes, si éstos son monolíticos con sus apoyos, o la totalidad si no lo son. Para la distribución debe suponerse que la rigidez del tablero es proporcional a d^3/a_1.

Las losas que se dimensionen con los coeficientes de la tabla 17.1 deben considerarse divididas, en cada dirección, en dos franjas de borde y una central, como se muestra en la figura 17.8. La determinación de los anchos de las franjas se hace de la siguiente manera. Para relaciones de claro corto o claro largo mayores que 0.5, las franjas centrales tienen un ancho igual a la mitad del claro perpendicular a ellas, y cada franja extrema tiene un ancho igual a la cuarta parte del mismo. Para relaciones menores que 0.5, la franja central perpendicular al lado largo tiene un ancho igual a $a_2 - a_1$ y cada franja extrema, igual a $a_1/2$, donde a_1 es el claro corto y a_2 es el claro largo. Los momentos determinados con los coeficientes de la tabla 17.1, corresponden a las franjas centrales. Los coeficientes de las franjas extremas son iguales a los de la tabla multiplicados por 0.60.

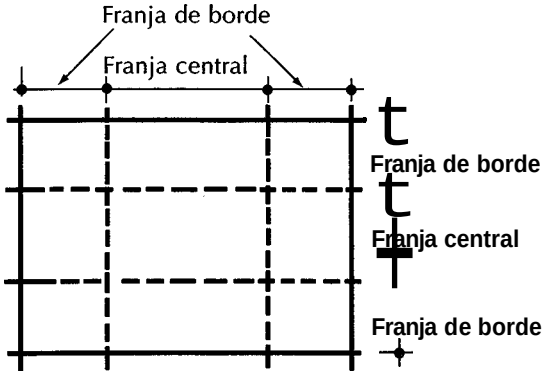


Figura 17.8 División de una losa en franjas centrales y franjas de borde.

Para doblar barras y aplicar los requisitos de adherencia y anclaje de acero de momento positivo (capítulo 9), se supone que las líneas de inflexión están localizadas a una distancia de un sexto del claro corto a partir de los bordes del tablero. Para los mismos requisitos del acero del momento negativo, se suponen localizadas las líneas de inflexión a un quinto del claro corto, a partir de los bordes del tablero.

El método descrito puede aplicarse únicamente si se satisfacen las siguientes limitaciones:

a) Los tableros son aproximadamente rectangulares.
b) La distribución de las cargas que actúan sobre la losa es aproximadamente uniforme en cada tablero.
c) Los momentos negativos en el apoyo común de dos tableros adyacentes no difieren entre sí en más del 50 por ciento del menor de ellos.
d) La relación de carga viva a carga muerta no es mayor que 2.5 para losas monolíticas con sus apoyos, ni mayor que 1.5 en otros casos.

Cuando las losas no cumplen estas limitaciones, es necesario aplicar otros procedimientos como, por ejemplo, la utilización de soluciones elásticas, como las presentadas en la referencia 17.1. Si las losas son muy irregulares, están sujetas a cargas no uniformes, tienen agujeros o condiciones de apoyo poco usuales, es más conveniente, por lo general, recurrir a otro tipo de soluciones no incluidas en este texto. Pueden consultarse a este respecto las referencias 17.6 a 17.11.

Cuando se diseña por el método de las NTC-04, los coeficientes de momento posi-

Tabla 17.1 Coeficientes de momentos a, para tableros rectangulares, franjas centrales. Para las franjas extremas multiplíquense los coeficientes por 0.60.

Tablero	Momento	Claro	*Relación de lados corto a largo, m = a_1/a_2*													
			0		0.5		0.6		0.7		0.8		0.9		1.0	
			I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II	I	II
Interior	Neg. en bordes	corto	998	1018	553	565	489	498	432	438	381	387	333	338	288	292
Todos los bordes continuos	interiores	largo	516	544	409	431	391	412	371	388	347	361	320	330	288	292
	positivo	corto	630	668	312	322	268	276	228	236	192	199	158	164	126	130
		largo	175	181	139	144	134	139	130	135	128	133	127	131	126	130
De borde	Neg. en bordes	corto	998	1018	568	594	506	533	451	478	403	431	357	388	315	346
Un lado corto discontinuo	interiores	largo	516	544	409	431	391	412	372	392	350	369	326	341	297	311
	Neg. en bordesdisc.	largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
	positivo	corto	630	668	329	356	292	306	240	261	202	219	167	181	133	144
		largo	179	187	142	149	137	143	133	140	131	137	129	136	129	135
De borde	Neg. en bordes	corto	1060	1143	583	624	514	548	453	481	397	420	346	364	297	311
Un lado largo discontinuo	interiores	largo	587	687	465	545	442	513	411	470	379	426	347	384	315	346
	Neg. en borde disc.	corto	651	0	362	0	321	0	283	0	250	0	219	0	190	0
	positivo	corto	751	912	334	366	285	312	241	263	202	218	164	175	129	135
		largo	185	200	147	158	142	153	138	149	135	146	134	145	133	144
Deesauina	Neg. en bordes	corto	1060	1143	598	653	530	582	471	520	419	464	371	412	324	364
Los lados adyacentes discontinuos	interiores	largo	600	713	475	564	455	541	429	506	394	457	360	410	324	364
	Neg. bordes disc.	corto	651	0	362	0	321	0	277	0	250	0	219	0	190	0
		largo	326	0	258	0	248	0	236	0	222	0	206	0	190	0
	positivo	corto	751	912	358	416	306	354	259	298	216	247	176	199	137	153
		largo	191	212	152	168	146	163	142	158	140	156	138	154	137	153
Extremo	Neg. en borde cont.	corto	1060	1143	970	1070	890	1010	810	940	730	870	650	790	570	710
Tresbordes discontinuos un lado largo continuo	Neg. en bordes disc.	corto	651	0	370	0	340	0	310	0	280	0	250	0	220	0
		largo	220	0	220	0	220	0	220	0	220	0	220	0	220	0
	positivo	corto	751	912	730	800	670	760	610	710	550	650	490	600	430	540
		largo	185	200	430	520	430	520	430	520	430	520	430	520	430	520
Extremo	Neg. en borde cont.	largo	570	710	570	710	570	710	570	710	570	710	570	710	570	710
Tres bordes discontinuos un lado corto continuo	Neg. en borde disc.	corto	570	0	480	0	420	0	370	0	310	0	270	0	220	0
		largo	330	0	220	0	220	0	220	0	220	0	220	0	220	0
	positivo	corto	1100	1670	960	1060	840	950	730	850	620	740	540	660	430	520
		largo	200	250	430	540	430	540	430	540	430	540	430	540	430	540
Aislado Cuatro lados discontinuos	Neg. en borde disc.	corto	570	0	550	0	530	0	470	0	430	0	380	0	330	0
		largo	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0	330	0
	positivo	corto	1100	1670	830	1380	800	1330	720	1190	640	1070	570	950	500	830
		largo	200	250	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830	500	830

Caso I. Losa colada monolíticamente con sus apoyos.
Caso II. Losa no colada monolíticamente con sus apoyos.
Los coeficientes multiplicados por $10^{-4}\, wa_1^2$ dan momentos por unidad de ancho.
Para el caso I, a_1 y a_2 pueden tomarse como los claros libres entre paños de vigas; para el caso II se tomarán como los claros entre ejes, pero sin exceder el claro libre más dos veces el espesor de la losa.

tivo pueden incrementarse y los de momentos negativos reducirse en igual cantidad, o viceversa, pero ningún coeficiente puede reducirse en más del 33 por ciento del valor consignado en la tabla 17.1.

17.4.2 Peralte *mínimo*

Las NTC-04 incluyen también disposiciones sobre peralte mínimo y sobre relaciones mínimas de refuerzo. Respecto al peralte, seña-

lan que el cálculo de deflexiones puede omitirse si el peralte efectivo de la losa es por lo menos igual al perímetro del tablero divido entre 250 para concreto clase I y 170 para concreto clase 2. Para calcular este perímetro, los lados discontinuos deben incrementarse en 50 por ciento si los apoyos de la losa no son monolíticos con ella, y 25 por ciento si lo son. En losas alargadas no es necesario tomar un peralte mayor que el que corresponde a un tablero con $a_2 = 2a_1$. Estas disposiciones son aplicables a losas en que $f_s \leq 2520$ kg/cm^2 y w ≤ 380 kg/m^2; para otras combinaciones de f_s y w, el peralte efectivo mínimo se obtendrá multiplicando por 0.032 $\sqrt[4]{f_s w}$ el valor obtenido en la forma arriba indicada (0.182 $\sqrt[4]{f_s w}$ si f_s se expresa en MPa y w en kN/m^2). En esta expresión, f_s es el esfuerzo en el acero en condiciones de servicio, en kg/cm^2 (puede suponerse igual a 0.6 f_y), y w es la carga en condiciones de servicio, en kg/m^2. Cuando no se satisfacen estos requisitos, es necesario calcular la deflexión para compararla con la que se considere admisible. En el inciso 9.2.2 de la referencia 17.9, se reseñan diversos procedimientos para la estimación de la deflexión de losas perimetralmente apoyadas.

También en la referencia 17.12 se presenta un método muy práctico que permite calcular las deflexiones a partir de los momentos flexionantes en las franjas de borde y en las franjas centrales. En este método se utilizan coeficientes que son función de las propiedades de la sección transversal, de los módulos de elasticidad, del flujo plástico y de la edad del concreto.

En la práctica, al igual que en losas en una dirección, conviene iniciar el diseño fijando el peralte con reglas como las mencionadas y calcular después el área necesaria de refuerzo. Esto se ilustra en el ejemplo de la siguiente sección.

17.4.3 Acero mínimo

Respecto al acero mínimo, se utiliza la misma ecuación que para losas en una dirección

$$A_s = \frac{66{,}000\, h}{f_y\,(h + 100)} \qquad (17.8)$$

donde A_s es el área mínima por metro de ancho de la losa. Esta área debe multiplicarse por 1.5 si la losa está expuesta a la intemperie. En vez de la ecuación 17.8 puede proporcionarse, por simplicidad, una relación mínima $\rho_{mín}$ de 0.002 en losas protegidas de la intemperie y de 0.003 en losas expuestas a ella.

La separación entre barras no debe exceder de 50 cm ni de 3.5 h, excepto en la proximidad de cargas concentradas superiores a una tonelada en donde la separación máxima será de 2.5 d.

17.4.4 Fuerza cortante

En la mayoría de los casos, el dimensionamiento de losas apoyadas perimetralmente queda regido por flexión. Sin embargo, es necesario revisar la seguridad contra fuerza cortante. Para estos fines, la fuerza cortante que actúa en un ancho unitario puede calcularse con la expresión

$$V = (a_1/2 - d)w \left[0.95\text{-}0.5\ \frac{a_1}{a2}\right] \qquad (17.9)$$

Se puede ver que los dos primeros términos del segundo miembro de la ecuación proporcionan la fuerza cortante a un peralte del paño del apoyo, sección crítica, sin considerar la acción de la losa en dos direcciones, y el tercer término es una corrección para tomar en cuenta esta acción. Cuando en un tablero existan bordes continuos y bordes discontinuos, el valor de V_u obtenido de la ecuación 17.9 debe incrementarse en

15 por ciento. La resistencia de la losa a fuerza cortante se supondrá igual a 0.5 $F_R bd \sqrt{f^*_c}$, es decir, igual a la de una viga sin refuerzo en el alma.

17.4.5 Cargas lineales y concentradas

Es frecuente que las losas apoyadas perimetralmente soporten además de cargas distribuidas, cargas lineales y concentradas como las producidas por un muro que se apoye sobre la losa, por maquinaria, o por vehículos en el caso de losas de puente.

Para tomar en cuenta el efecto de cargas lineales, las NTC-O4 especifican sustituir la carga lineal por una carga uniformemente distribuida cuyo valor se obtiene dividiendo el peso total de la carga lineal entre el área del tablero y multiplicando el resultado por los factores de la tabla 17.2. Este método puede aplicarse siempre que la carga lineal no sea mayor que el 50 por ciento de la carga total.

Para el caso de cargas concentradas, las NTC-04 recomiendan el mismo procedimiento descrito en la sección 16.2 para losas en una dirección. Consiste en incrementar la suma de los momentos resistentes, por unidad de ancho, positivo y negativo, en cada dirección y en todos los puntos de la losa, en la cantidad

$$\frac{P}{2\pi}\left(1 - \frac{2r}{3R}\right) \qquad (17.10)$$

siendo *r* el radio del círculo de igual área a la de aplicación de la carga y R la distancia del centro de la carga al borde más próximo a ella. Este procedimiento puede aplicarse siempre que la carga concentrada esté aplicada en la zona de intersección de las franjas centrales de la losa. En el ejemplo 16.2 se ha ilustrado su aplicación.

Tabla 17.2 Factores para transformar cargas lineales en cargas distribuidas equivalentes

Relación de lados m = a_1/a_2	0.5	0.8	1.0
Muro paralelo al lado corto	1.3	1.5	1.6
Muro paralelo al lado largo	1.8	1.7	1.6

En el caso de cargas concentradas, debe revisarse siempre la posible falla en cortante por penetración alrededor de la carga.

17.4.6 Cargas en las vigas de apoyo

Para calcular las cargas que actúan sobre las vigas en que se apoyan las losas, las NTC recomiendan calcular las áreas tributarias sobre cada viga, como se muestra en la figura 17.9. Así, la viga del eje 1 soportará la carga que corresponde al trapecio rayado; y la viga del eje A, la que corresponde al triángulo rayado. Para determinar estas áreas tributarias se trazan líneas a 45° desde los vértices del tablero, las cuales definen los triángulos y trapecios indicados en la figura.

El área tributaria de cada viga multiplicada por el valor de la carga distribuida, proporciona la carga total en la viga, la cual se divide entre su claro para obtener una carga uniformemente distribuida sobre la viga. Obsérvese que el momento flexionante en la viga que se obtiene de esta manera es menor que el obtenido considerando la distribución real. Por ejemplo, en la viga del eje A se obtendrá un momento flexionante mayor si se considera que la viga tiene una carga triangular que si esta misma carga se distribuye uniformemente en la viga. Sin embargo, se ha visto experimentalmente y en la práctica, que la losa y la viga trabajando en conjunto tienen una resistencia mayor que la que se obtiene con los métodos de diseño usuales, por lo que es posible reducir los momentos flexionantes de diseño de las vigas. (En la referencia 17.5 se recomienda usar la distribución real de cargas y reducir los momentos en las vigas en 20 por ciento.)

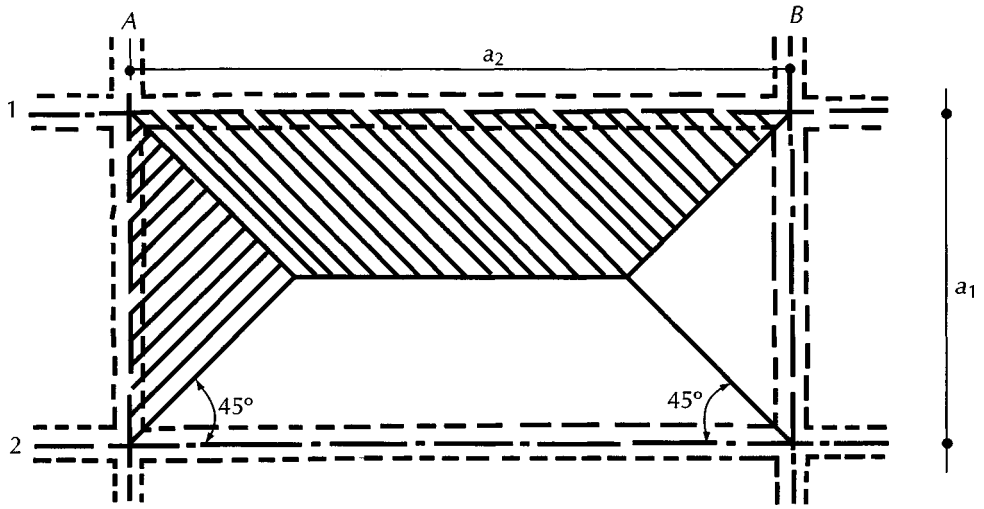


Figura 17.9 Áreas tributarias para el diseño de vigas.

17.5 Ejemplo de diseño

El método de diseño de losas apoyadas perimetralmente de las NTC-04 se ilustra en el ejemplo 17.1. Se trata del diseño de un tablero de esquina (tablero I) y un tablero de borde (tablero II) de un sistema de piso que continúa en las dos direcciones. Existe, además de la carga distribuida, una carga lineal transmitida por un muro que corre en dirección del claro corto.

El diseño se inicia con la determinación del peralte mínimo para el que no es necesario calcular las deflexiones y que se utiliza como peralte tentativo. Para este cálculo se determinó el perímetro del tablero 1, que es el más desfavorable por tener más lados discontinuos, incrementando en 25 por ciento la longitud de estos lados discontinuos. Se revisó si se cumplían las condiciones de $f_s \leq 2520$ kg/cm^2 y w ≤ 380 kg/m^2, encontrándose que no se cumple la segunda, por lo que el perímetro se corrigió multiplicándolo por el factor $0.032\sqrt[4]{f_s w}$. En este paso fue necesario también transformar la carga lineal del muro en carga uniformemente distribuida usando la tabla 17.2 para el caso de muro paralelo al lado corto; el factor de transformación resultó de 1.5. Para estimar el peso propio, se supuso en esta etapa un espesor tentativo de 10 cm. El peralte mínimo obtenido de estos cálculos resultó de 11 cm; aumentándole 1.5 cm de recubrimiento libre y el radio de la barra de refuerzo, se obtiene un espesor de losa de 13 cm.

Una vez determinado el espesor de la losa, se corrigió la carga total usando el peso propio de la losa de 13 cm. También se calculó la carga de diseño, multiplicando la carga en condiciones de servicio por el factor de carga $F_c = 1.4$.

Después se calcularon los claros libres a_1 y a_2 que, como se indica al pie de la tabla 17.1, son los que deben usarse en el cálculo de momentos. También se calculó la relación entre claros a_1/a_2 y el factor 10-4 $w_u a_1^2$ que es común en el cálculo de momentos. En este ejemplo, las vigas son de concreto colada4 monolíticamente con la losa, por lo que se está en el caso I de la tabla 17.1.

Los cálculos de momento se hicieron en forma de tabla, como se indica en el ejemplo:

El tablero I es un tablero de esquina y el II es de borde con lado corto discontinuo; los coeficientes correspondientes a estos dos casos se obtuvieron de la tabla 17.1. Ya que la relación entre claro corto y claro largo resultó de 0.75, se interpolaron los valores correspondientes a relaciones de 0.70 y 0.80. Por ejemplo, el valor de a_i de 445 que aparece en el primer renglón, es el promedio de 471 y 419. Los valores de M_i se obtuvieron como el producto de a_i por el factor común $10^{-4}\, w_u a_1^2$.

El apoyo localizado sobre el eje 2 es común a los dos tableros y tiene momentos distintos en cada uno. Como la diferencia no es muy grande (1049 kg-m en el tablero de esquina contra 1006 en el de borde), pudo hacerse el diseño con el momento mayor sin perder mucha precisión. Sin embargo, para ilustrar el procedimiento, se distribuyeron las dos terceras partes de la diferencia entre los dos tableros, tocándoles la misma cantidad a cada uno, ya que el término d^3/a_1 es igual en los dos.

La separación de las barras de refuerzo se calculó también en forma de tabla. Previamente se calcularon la relación mínima, con la recomendación simplificada de considerarla de 0.002 en vez de usar la ecuación 17.8, y la separación máxima, que resultó de 45 cm.

Obsérvese que se se calcularon dos valores del término $F_R b d^2 f''_c$, uno para el refuerzo positivo con un valor de d = 11 cm, y otro para el refuerzo negativo con un valor de d = 9 cm. Esto se hizo así para tomar en cuenta la disposición de las NTC-04 que indica reducir el peralte efectivo en 2 cm para calcular el acero de lecho superior en losas de espesor menor o igual a 20 cm cuando no se tienen precauciones especiales en la construcción para evitar la variación de dicho peralte.

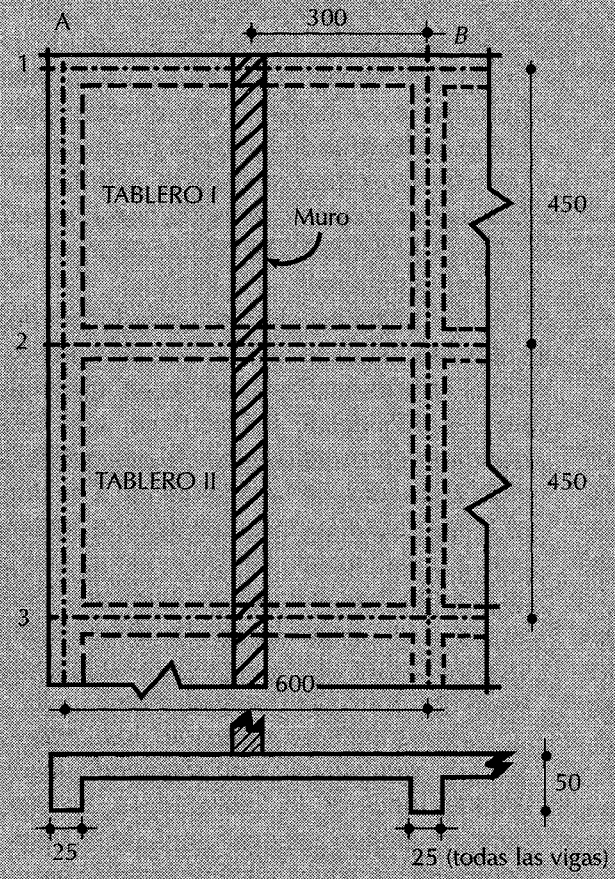
Algunos de los valores calculados de ρ resultaron menores que $\rho_{mín}$. En todos estos casos, el área de acero se calculó a partir de $\rho_{mín}$ = 0.002. Las separaciones, calculadas con la expresión 100 A_b/A_s (ecuación 16.3), no excedieron en ningún caso a la máxima permisible. Se revisó la posible falla por cortante, encontrándose que la resistencia de la sección sin refuerzo excede ampliamente a la fuerza cortante calculada con la ecuación 17.9, por lo que no es necesario modificar el peralte tentativo.

Se ilustra en el ejemplo la forma de calcular la carga sobre las vigas de apoyos. Las áreas tributarias se obtuvieron trazando líneas a 45° desde los vértices, con lo cual quedan determinadas las alturas del trapecio y del triángulo. En la viga del eje 2 se duplicó el área tributaria porque existe un tablero de losa a cada lado de la viga, mientras en la viga del eje A sólo existe un tablero. Obsérvese que a las cargas obtenidas debe sumársele el peso propio de la viga y, en su caso, alguna carga aplicada directamente.

Finalmente se muestran los croquis de armado que se trazaron siguiendo las recomendaciones de la figura 16.4*a*. En el claro corto se tienen separaciones de 30 cm, excepto en las zonas de momento negativo de los ejes 2 y 3, en donde las combinaciones de columpio y bastones permiten obtener una separación de 20 cm, prácticamente igual a la requerida en el eje 2. En forma similar se armó la franja central del claro largo. Puesto que en muchas secciones rigió el valor de $\rho_{mín}$, no es posible modificar mucho el armado de las franjas extremas o de borde.

EJEMPLO 17.1 ***Diseño de una losa apoyada perimetralmente por el método de las NTC-04.***

DATOS



w (carga viva) = 200 kg/m^2
w (recubrimientos) = 120 kg/m^2
w muro = 1200 kg/m
f'_c = 250 kg/cm^2 (clase 1)
f^*_c = 200 kg/cm^2
f''_c = 170 kg/cm^2
f_y = 4200 kg/cm^2

Acotaciones en cm

CÁLCULO DEL PERALTE

Para el tablero I que es el más desfavorable:

perímetro = 600 + 450 + 1.25 (600 + 450) = 2360 cm

$f_s = 0.6 \times 4200 = 2520$ kg/cm^2

$$w_{muro} = \left(\frac{1200 \times 4.50}{4.50 \times 6}\right) 1.5 = 300 \text{ kg/m}^2$$

w (carga viva, rec., peso propio y muro) = 200 + 120 + 240 + 300
= 860 kg/m^2 > 380 kg/m^2

$w_{muro} < 0.5\ w_{total}$

EJEMPLO 17.1 ***(continuación)***

Factor de corrección del perímetro = $0.032\sqrt[4]{2520 \times 860} = 1.2$

perímetro corregido = $1.2 \times 2360 = 2832$ cm

$$d_{mín} = \frac{2832}{250} = 11.3 \simeq 11 \text{ cm}$$

$$h = d_{mín} + 2 = 13 \text{ cm}$$

CARGAS

$w\ (total) = 620 + 0.13 \times 2400 = 932$ kg/m^2

$w_u = 1.4 \times 932 = 1305$ kg/m^2

CÁLCULO DE MOMENTOS EN LAS FRANJAS CENTRALES

$a_1 = 450 - 25 = 425$ cm; $a_2 = 600 - 25 = 575$ cm

$a_1/a_2 = 425/575 \simeq 0.75$ (caso 1)

$10^{-4}\, w_u a_1^2 = 10^{-4} \times 1305 \times 4.25^2 = 2.357$ kg-m

Tablero	*Momento*	*Claro*	α_i	M_i (kg-m)
De esquina (I)	Negativo en bordes interiores	Corto Largo	445 411	1049 (1035) 969
	Negativo en bordes discontinuos	Corto Largo	264 229	622 540
	Positivo	Corto* Largo*	237 141	559 332
De borde con un lado corto discontinuo (II)	Negativo en bordes interiores	Corto Largo	427 361	1006 (1020) 851
	Negativo en borde discontinuo	Largo	229	540
	Positivo	Corto* Largo*	221 132	521 311

*En los valores marcados con asterisco, $\rho < \rho_{mín}$

EJEMPLO 17.1 *(continuación)*

Corrección del momento en el borde común:

Diferencia de momentos = 1049 − 1006 = 43

$$\frac{2}{3} \times 43 = 28 \text{ kg-m}$$

$$\text{Momento de diseño} = 1049 - \frac{28}{2} = 1035$$

$$= 1006 + \frac{28}{2} = 1020$$

DETERMINACIÓN DEL REFUERZO

$\rho_{mín} = 0.002$

$s_{máx} = 50$ cm o $(3.5\ h = 3.5 \times 13 = 45 \text{ cm} < 50 \text{ cm})$

$F_R\ bd^2\ f''_c = 0.9 \times 100 \times 11^2 \times 170 = 185 \times 10^4$ (acero positivo)

$F_R\ bd^2\ f''_c = 0.9 \times 100 \times 9^2 \times 170 = 124 \times 10^4$ (acero negativo)

M_i (kg-m)	$Q = (M_i/F_R bd^2 f''_c$	ω (Apén. A)	$\rho = \omega f''_c/f_y$	A_s (cm²/m)	s (cm) (barras No.3)
1035	0.083	0.090	0.0036	3.3	21.7
969	0.078	0.080	0.0032	2.9	24.4
622	0.050	0.050	0.0020	1.8	39.0
540	0.043	0.043	0.0017*	1.8	39.4
559	0.030	0.030	0.0012*	2.2	32.3
332	0.018	0.020	0.0008*	2.2	32.3
1020	0.082	0.090	0.0036	3.3	21.7
851	0.069	0.070	0.0028	2.6	27.8
540	0.044	0.043	0.0017*	1.8	39.4
521	0.028	0.030	0.0012*	2.2	32.3
311	0.017	0.017	0.0007*	2.2	32.3

*En los valores marcados con asterisco, $\rho < \rho_{mín}$

EJEMPLO 17.1 ***(continuación)***

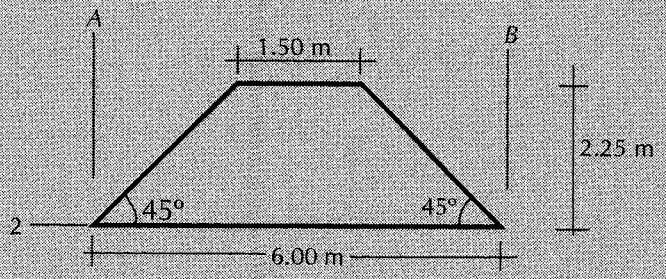
REVISIÓN CORTANTE

$$V = (2.13 - 0.11)\ 1305\ [0.95 - 0.5(4.25/5.75)] = 1530 \text{ kg} \quad \text{(ecuación 17.9)}$$

$$V_c = 0.5 \times 0.8 \times 100 \times 11\ \sqrt{200} = 6223 \text{ kg} > V$$

CARGAS SOBRE LAS VIGAS DE APOYO

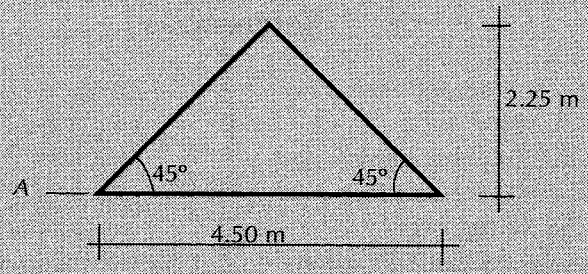
Viga eje 2



$$\text{Área tributaria a cada lado} = \frac{(6.00 + 1.50)}{2} \times 2.25 = 8.44 \text{ m}^2$$

$$\textit{Carga} = 8.44 \times 1305 \times 2/6 = 3671 \text{ kg/m}$$

Viga eje *A*



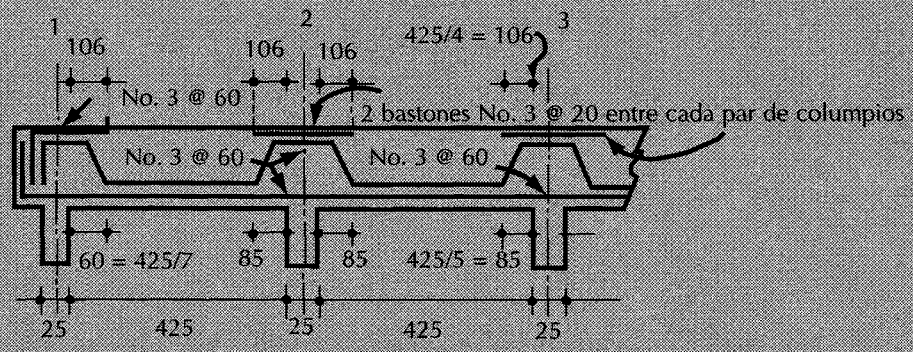
$$\text{Área tributaria} = \frac{4.50 \times 2.25}{2} = 5.06 \text{ m}^2$$

$$\text{Carga} = 5.06 \times 1305/4.50 = 1467 \text{ kg/m}$$

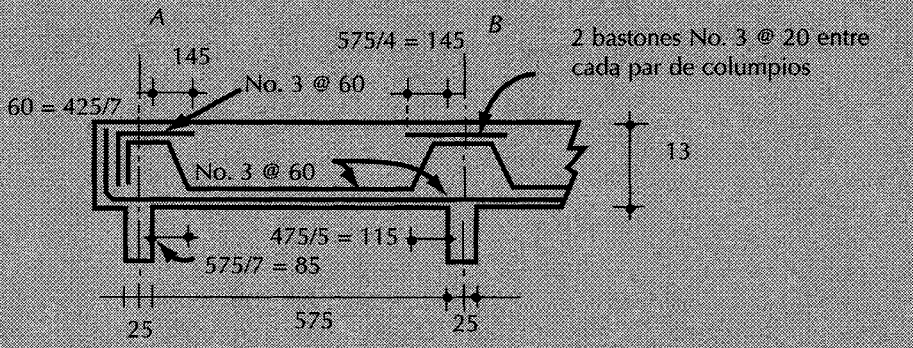
Las cargas obtenidas deben sumarse al peso propio de la viga.

EJEMPLO 17.1 ***(continuación)***

CROQUIS DE ARMADO



CLARO CORTO - FRANJA CENTRAL



CLARO LARGO - FRANJA CENTRAL

Referencias

7.1 Timoshenko, S. Theory of Plates and Shells. Nueva York, Mc Graw-Hill, 1940.

7.2 Marcus, H. Die Theori Elastischer Gewebe *und Ihre* Anwendung auf die Berechnung Biegsamer Platten. Berlín, Springer Verlag, 1924.

17.3 Muñoz Casas, A. Concreto. México, D.F., Editorial Latina, 1955.

17.4 Siess, C.P., y N. M. Newmark. " Rational Analysis and Design of Two-Way Concrete Slabs". *Journal* of the American Concrete Institute. Detroit, diciembre 1948.

17.5 Newmark, N. M., y C. P. Siess, "Proposed Design Specifications for Two-Way Floor Slabs". *Journal* of the American Concrete *Institute,* Detroit, abril 1950.

17.6 Esteva, M., L. "Coeficientes de diseño para losas con bordes libres". Revista Ingeniería. México, D.F., julio 1963.

17.7 Johansen, K.W. Yield Line Theory. Londres, Cement and Concrete Association, 1962.

17.8 Hillerborg, A. Strip Method of Design. Wexham Springs, Slough, Inglaterra, Viewpoint Publication, Cement and Concrete Association, 1975.

17.9 Park, R, y W. L. Gamble. Reinforced Concrete Slabs. Nueva York, Wiley, 1980. Losas de Concreto Reforzado. México, Limusa, 1994.

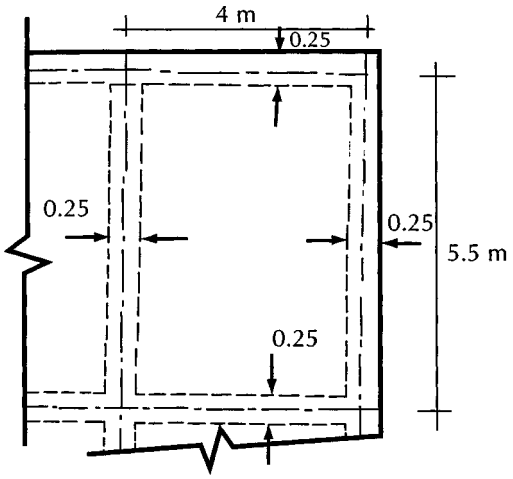
17.10 Jones, L. L., y R. H. Wood. Yield Line *Analysis of* Slabs. Londres, Thames and Hudson-Chatto and Windus, 1967.

17.11 Law, F. M. "Design of Irregular Shaped Two-Way Slabs". *Journal* of the Arnerican *Concrete* Institute. Detroit, noviembre 1971.

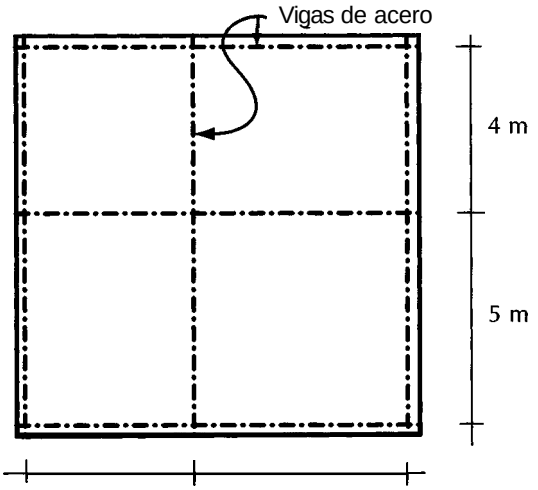
17.12 Ghali, A. "Prediction of Deflections of Two-Way Floor Systems". *ACI* Structural *Journal*. Detroit, septiembre-octubre, 1989.

Ejercicios

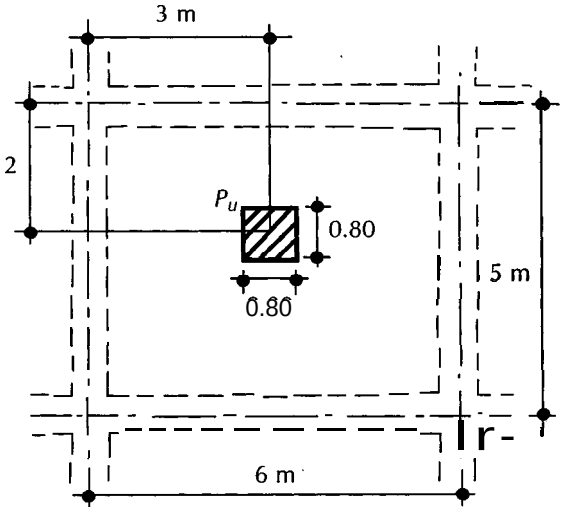
17.1 Dirnensionar el siguiente tablero de losa, suponiendo que está sometido a una carga w, = 1.5 ton/m^2, que f'_c = 200 kg/crn^2 y que f_y = 4200 kg/cm^2. Usar las NTC-O4 considerando un factor de carga F_c = 1.4.



17.2 Dimensionar la losa del siguiente sistema de piso, sujeto a una carga muerta de servicio de 500 kg/rn^2 (sin incluir el peso propio) y una carga viva de servicio de 700 kg/m^2. Usar las NTC-04 y suponer que f'_c = 200 kg/cm^2 y que f_y = 4200 kg/cm^2. La losa está apoyada sobre vigas de acero. Hacer un croquis detallado del refuerzo propuesto.



17.3 Dimensionar el tablero interior mostrado en el croquis usando las NTC-04. Considerar una carga uniforme total w_u = 3 ton/rn^2 y una carga concentrada P_u = 6 ton. Suponer f'_c = 200 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. La losa está colada monolíticamente con los apoyos.



El ancho de todas las vigas es igual a 0.30 m.

CAPÍTULO 18

Losas planas

18.1 Introducción y definiciones. /18.2 Comportamiento y dimensionamiento. 118.3 Ejemplo de dimensionamiento por el método de la estructura equivalente (NTC-04).

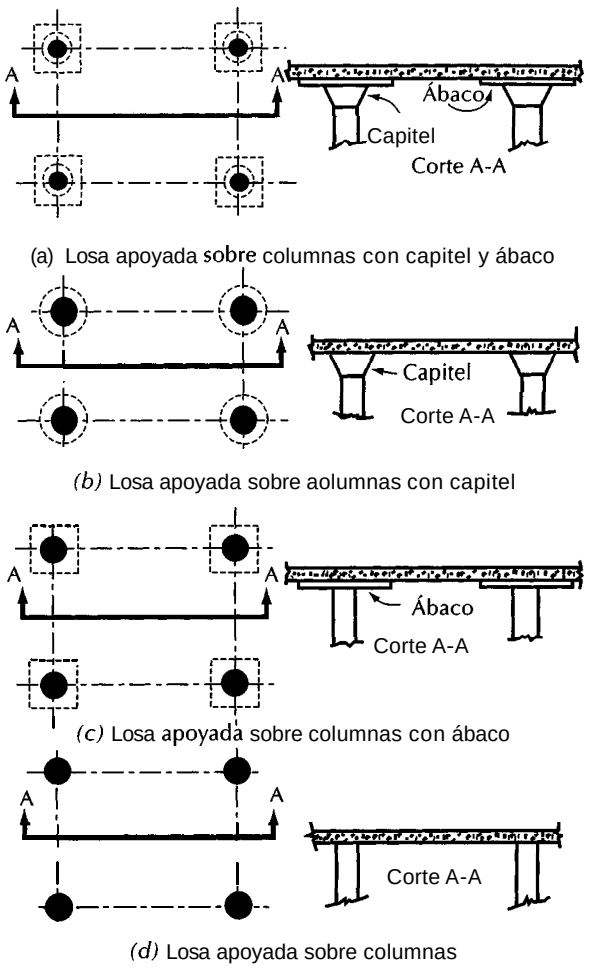


Figura 18.1 Distintos tipos de losas planas.

18.1 Introducción y definiciones

Las losas planas son aquellas que se apoyan directamente sobre las columnas, sin la intermediación de vigas, como se muestra en la figura 18.1. Pueden tener ampliaciones en la columna o en la losa (figuras 18.1*a* y 18.1 c), o ser de peralte uniforme (figura 18.1*d*); en este último caso se denominan placas planas. También pueden ser macizas o aligeradas. El aligeramiento se logra incorporando bloques huecos o tubos de cartón, o bien formando huecos con moldes recuperables de plástico u otros materiales. Las losas aligeradas reciben a veces el nombre de losas encasetonadas o reticulares.

Las ampliaciones de las columnas en su parte superior se denominan capiteles. Tienen por función principal aumentar el perímetro de la sección crítica en cortante por penetración, acción que rige en muchas ocasiones el dimensionamiento de este tipo de losas. Las caras del capitel no deben formar un ángulo mayor de 45° con el eje de las columnas (figura 18.2*a*). Si se excede este ángulo, la parte que queda fuera del mayor cono circular recto que puede inscribirse en el capitel no se considera útil. El diámetro del capitel en su intersección con la losa se representa con la letra c.

El ábaco es una zona de la losa alrededor de la columna, con mayor peralte. Generalmente es cuadrado o rectangular y se recomienda que sus dimensiones en planta no sean menores que un sexto del claro en la dirección considerada a cada lado del eje de columnas. La proyección del ábaco por abajo de la losa debe quedar comprendida dentro de ciertos límites. El mínimo es tal que el peralte

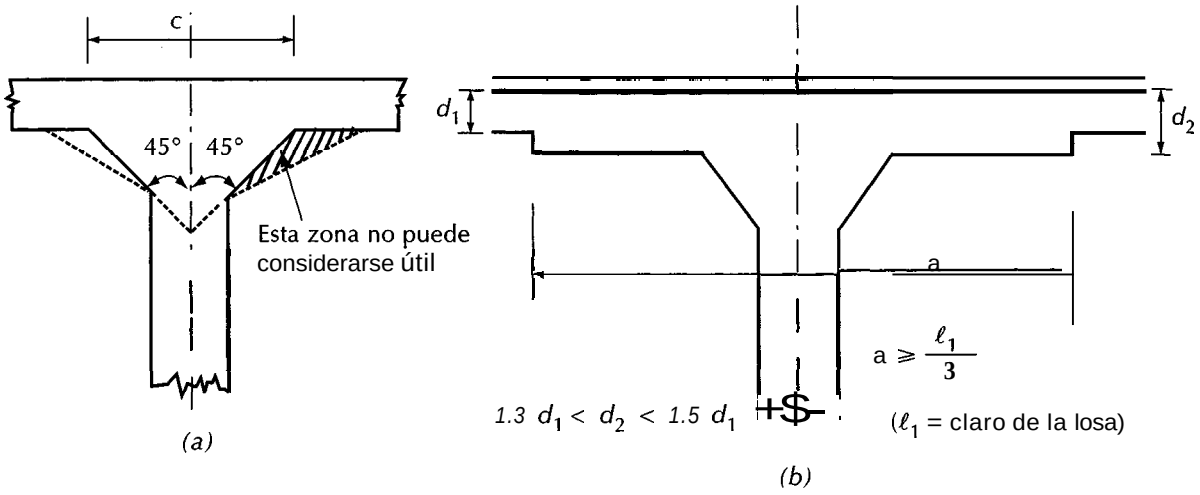


Figura 18.2 Requisitos para capiteles y ábacos según las NTC-04.

efectivo del ábaco sea por lo menos ***1.3*** veces al peralte efectivo de la losa y el máximo que sea a lo sumo ***1.5*** veces dicho peralte (figura 18.2*b*). El ábaco tiene por función aumentar el peralte de la losa en la zona en que se presenta el mayor momento flexionante y en donde es crítico el cortante por penetración. Desde estos puntos de vista resulta muy conveniente, pero tiene la desventaja de complicar la cimbra.

Las placas aligeradas deben llevar ábacos macizos alrededor de las columnas, especialmente para poder resistir en forma adecuada el cortante por penetración. Se recomienda que estos ábacos tengan una dimensión mínima de un sexto del claro correspondiente, medida desde el eje de columnas, o de ***2.5*** h, medida desde el paño de la columna, con el objeto de que el cono potencial de falla no atraviese huecos o casetones (figura 18.3*a*). También se recomienda que las losas aligeradas que lleven volados rematen en una viga maciza cuyo ancho sea por lo menos igual al espesor de la losa o a ***25*** cm (figura 18.3*b*), y que la longitud del volado no exceda de diez veces dicho espesor (figura 18.3*c*) [18.1]. En la parte superior de la losa, sobre los casetones, debe existir una capa de concreto cuyo espesor se recomienda no sea menor de 3 cm, o de 5 cm, si existe la posibilidad de cargas concentradas elevadas. La distancia centro a centro de nervaduras no debe exceder de *1* m o de ***118*** del claro, lo que sea menor.

Para fines de diseño, se acostumbra dividir las losas planas en franjas como las mostradas en la figura ***18.4.*** En cada tablero se distinguen tres franjas. Una franja central, cuyo ancho es igual a la mitad del claro del tablero en la dirección en que se mide el ancho, y dos franjas extremas o franjas de columnas, cuyo ancho es la cuarta parte de dicho claro. La división en franjas se hace en las dos direcciones del tablero, así que en la figura ***18.4*** se podrían representar otras tres franjas en dirección perpendicular a las mostradas cuyos anchos serían $\ell_1/2$ para la central y $\ell_1/4$ para cada una de las dos franjas extremas.

18.2 Comportamiento y dimensionamiento

Las losas planas pueden fallar en cortante por penetración, o por flexión. El primer tipo de falla se ha descrito ampliamente en la sección, ***7.2.3*** de este texto y consiste en la penetra-

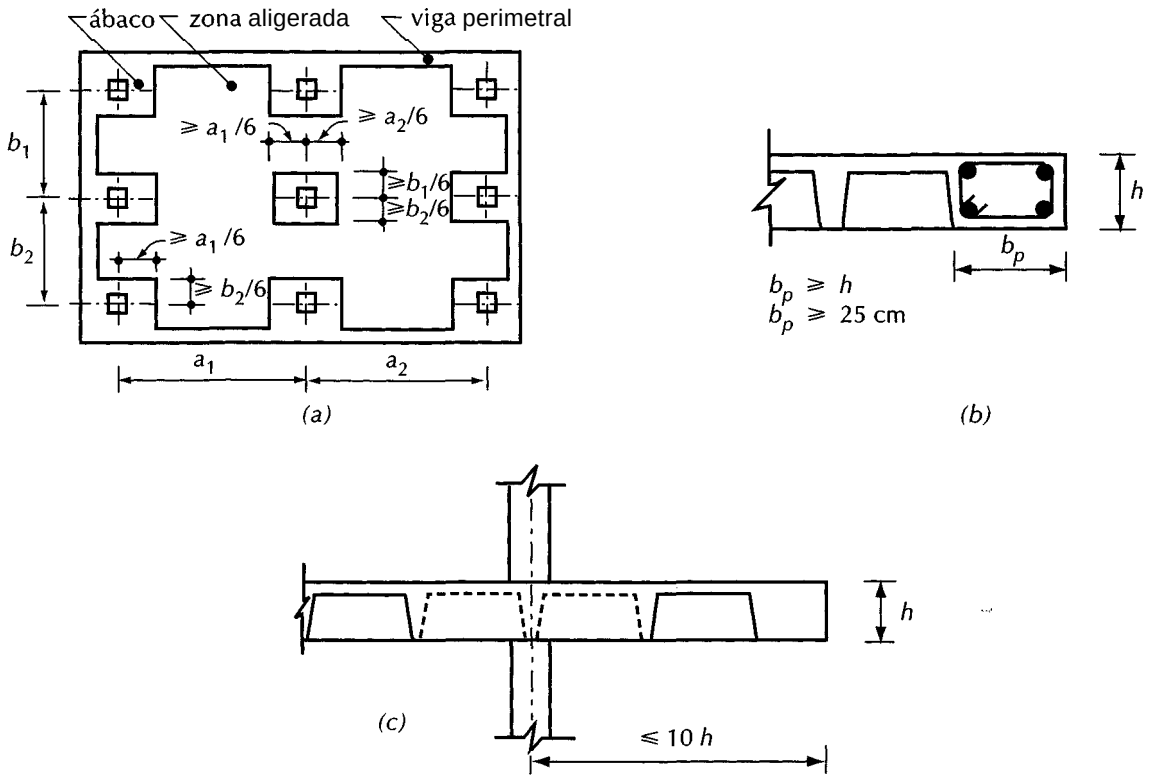


Figura 18.3 Recomendaciones para ábacos, vigas perimetrales y volados en losas planas aligeradas [18.1].

ción de la columna dentro de la losa formándose un cono o pirámide truncada. Cuando la estructura es asimétrica o resiste cargas laterales, se transmiten simultáneamente carga axial y momento flexionante entre losa y columna, por lo que se tiene la situación representada en la figura 7.17. Es frecuente que el cortante por penetración sea el factor crítico en el diseño de losas planas, especialmente cuando no se usan capiteles y ábacos.

Las fallas por flexión ocurren generalmente después de que las losas experimentan grandes deformaciones y de que el acero de refuerzo fluye en varias zonas, ya que son estructuras subreforzadas. Existen dos configuraciones básicas de agrietamiento. En una, las grietas se forman en la cara superior de la losa a lo largo de los ejes de columnas y en la cara inferior a lo largo de los ejes centrales. En la otra configuración se forman grietas radiales que parten de las columnas en la cara superior de la losa y grietas circunferenciales en la cara inferior.

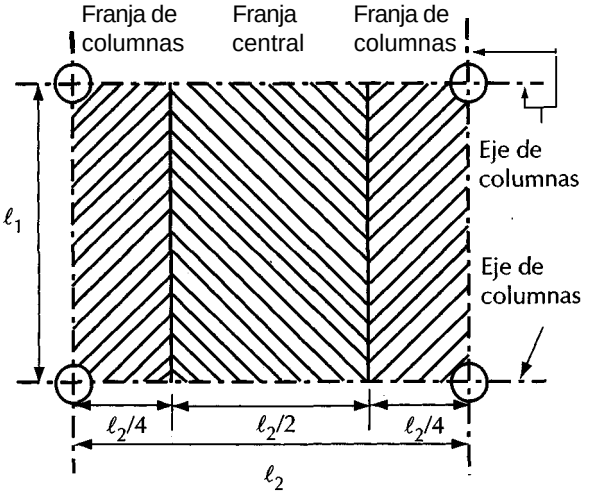


Figura 18.4 Definición de franjas.

Para el diseño de losas planas se han empleado dos métodos: el método directo y el método de la estructura equivalente, los cuales se presentan a continuación.

18.2.1 Método directo

Considérese un tablero de losa plana como el mostrado en la figura 18.5*a* sujeto a una carga uniformemente distribuida de magnitud w por unidad de área. Si el tablero se aísla del resto de la losa a lo largo de los ejes A-C y *B-D* y se considera como una viga ancha de claro ℓ_1 y ancho ℓ_2, esta viga quedaría sujeta a una carga uniformemente distribuida de magnitud $w\ell_2$ por unidad de longitud como se muestra en la figura 18.5*b*. En la figura 18.5*c* se indica el diagrama de momentos de esta viga ancha, señalando con $M_{A\text{-}B}$, el momento en el apoyo de la izquierda que queda localizado sobre las columnas A y *B;* con $M_{C\text{-}D}$ el momento en el apoyo de la derecha localizado sobre las columnas C y *D;* y con $M_{E\text{-}F}$ el momento en el centro del claro. Es un principio conocido de estática que el momento positivo en el centro del claro de una viga continua, más el promedio de los momentos negativos en los apoyos, es igual al momento en el centro del claro de una viga libremente apoyada. Este momento, que se conoce como momento estático total, M_O (figura 18.5*c*), tiene por lo tanto el valor

$$M_O = M_{E\text{-}F} + \frac{M_{A\text{-}B} + M_{C\text{-}D}}{2} - \frac{(w\ell_2)\,\ell_1^2}{8} \qquad (18.1)$$

ya que $w\ell_2$ es la carga por unidad de longitud y ℓ_1 es el claro de la viga.

La ecuación 18.1 permite calcular el momento estático total, pero no indica cómo se distribuye este momento en las diferentes zonas de la losa. No permite determinar, por ejemplo, el valor de los momentos negativos, $M_{A\text{-}B}$ y $M_{C\text{-}D}$, ni del momento positivo $M_{E\text{-}F}$. Tampoco permite conocer la distribución de

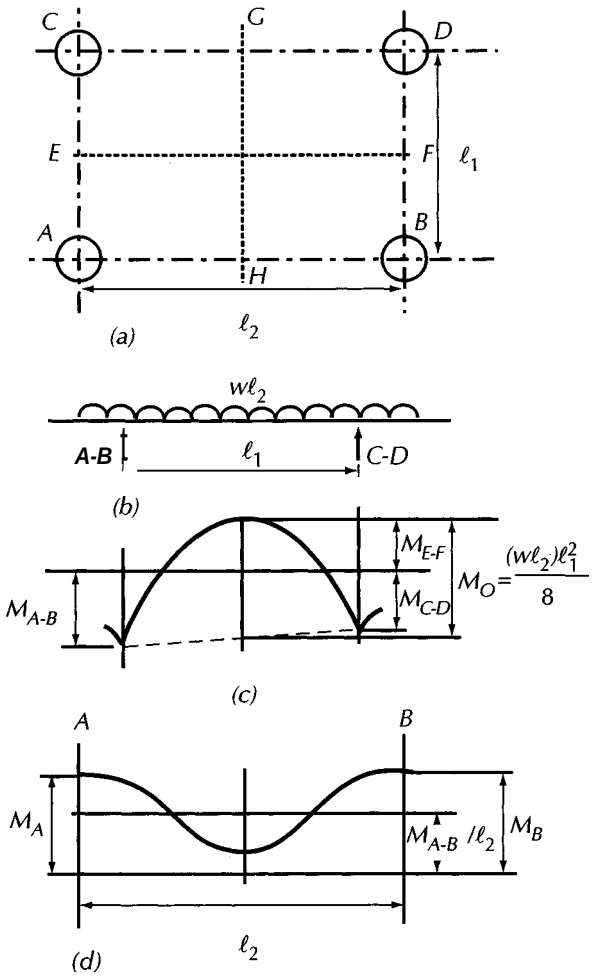


Figura 18.5 Momento estático total en un tablero de losa.

cada uno de estos tres momentos a lo ancho del tablero, ℓ_2. Supóngase que de alguna manera se conociese el valor de $M_{A\text{-}B}$. Si este momento se distribuye uniformemente a lo ancho del tablero, se tendría un momento $M_{A\text{-}B}/\ell_2$ por unidad de ancho, como se muestra en la figura 18.5*d*. Pero no se distribuye así, sino que el momento alcanza su valor máximo en el eje de columnas y su valor mínimo en el centro del claro, en virtud de que la losa está más restringida contra giro, o sea, que tiene mayor rigidez flexionante, en el eje de columnas. Por lo tanto, los momentos se distribuyen a lo ancho

del tablero como se indica en forma aproximada con línea curva en la figura 18.5*d*. Lo mismo que se ha dicho respecto al momento $M_{A\text{-}B}$ sucede con los momentos $M_{C\text{-}D}$ y $M_{E\text{-}F}$.

El método directo de diseño de losas planas consiste básicamente en los siguientes pasos:

a) Ajustar el cálculo del momento estático total para tomar en cuenta que los apoyos mostrados en la figura 18.5*b* no son puntuales.
b) Distribuir el momento estático total entre los momentos negativos $M_{A\text{-}B}$ y $M_{C\text{-}D}$ y el momento positivo $M_{E\text{-}F}$, figura 18.5*c*.
c) Distribuir cada uno de los tres momentos anteriores a lo ancho del tablero.

Para cada uno de estos tres pasos, el método directo utiliza coeficientes obtenidos principalmente en forma experimental.

En la figura *18.5* se ha obtenido el momento estático total considerando que el tablero de losa se sustituía por una viga ancha de claro ℓ_1 y ancho ℓ_2. El mismo razonamiento puede hacerse, considerando que el tablero de losa se sustituye por una viga de ancho ℓ_1 y claro ℓ_2. Es importante notar que en el método directo debe hacerse el análisis y la distribución del momento estático total en las dos direcciones, usando en cada una de ellas la carga total *w* por unidad de área.

En el Reglamento ACI se incluyeron coeficientes y disposiciones para llevar a cabo los tres pasos señalados del método directo para losas planas hasta antes de la edición de *1971.* Posteriormente las losas planas y las losas apoyadas perimetralmente se unificaron en métodos de diseño que se presentan en el siguiente capítulo de este texto. Por lo tanto, la presentación detallada de las especificaciones del Reglamento ACI se pospone para ese capítulo. Aunque son generales para cualquier sistema de entrepiso, el caso de losas planas puede deducirse como un caso particular en que las vigas tienen una rigidez flexionante nula.

Las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal no incluyen el método directo para el diseño de losas planas sino únicamente el método de la estructura equivalente que se verá a continuación. Esto se debe, principalmente, a que el método directo es aplicable en el caso de cargas verticales, mientras que el problema más serio en el comportamiento de las losas planas es el efecto de fuerzas horizontales causadas por viento o sismo, las cuales son preponderantes en la Ciudad de México.

18.2.2 Método *de la estructura equivalente (NTC-04)*

Este método consiste en dividir a la estructura en un sistema de marcos cuyas columnas son las de la estructura y cuyas trabes son franjas de losa comprendidas entre las líneas medias de tableros adyacentes. En la figura *18.6* se ilustra este concepto. Así, en el eje 2 de la estructura mostrada, la trabe del marco será la franja de losa que tiene un ancho $[(a_1/2) + (a_2/2)]$. En el eje *B,* será la franja de ancho $[(b_1/2) + (b_2/2)]$. Obsérvese que los marcos deben considerarse en las dos direcciones y debe aplicarse la carga total de la franja en cada marco. Así, el marco del eje B tendrá una carga por unidad de longitud de $w[(b_1/2) + (b_2/2)]$ siendo *w* la carga por unidad de área; y el marco del eje *2* tendrá una carga de $w[(a_1/2) + (a_2/2)]$. Además de la carga vertical, los marcos pueden estar sujetos a fuerzas horizontales.

Uno de los problemas más complicados en el método de la estructura equivalente consiste en estimar la rigidez a flexión de las vigas del marco, que en realidad no son vigas, sino franjas de losa de un ancho mucho mayor que la sección transversal de las columnas. A diferencia de marcos constituidos por columnas y vigas, en sistemas de losa plana la rigidez de las vigas no está concentrada en el eje de columnas; la rigidez de la losa es ma-

yor en el eje de columnas y va disminuyendo hacia los extremos de las franjas mostradas en la figura 18.6. Otra complicación radica en que el comportamiento de los sistemas de losa plana es diferente bajo cargas verticales y bajo cargas laterales. Se ha visto que bajo las primeras, los momentos flexionantes se distribuyen en forma más uniforme a lo ancho de las franjas de losa que bajo la acción de las segundas. Por esta razón, resulta necesario hacer

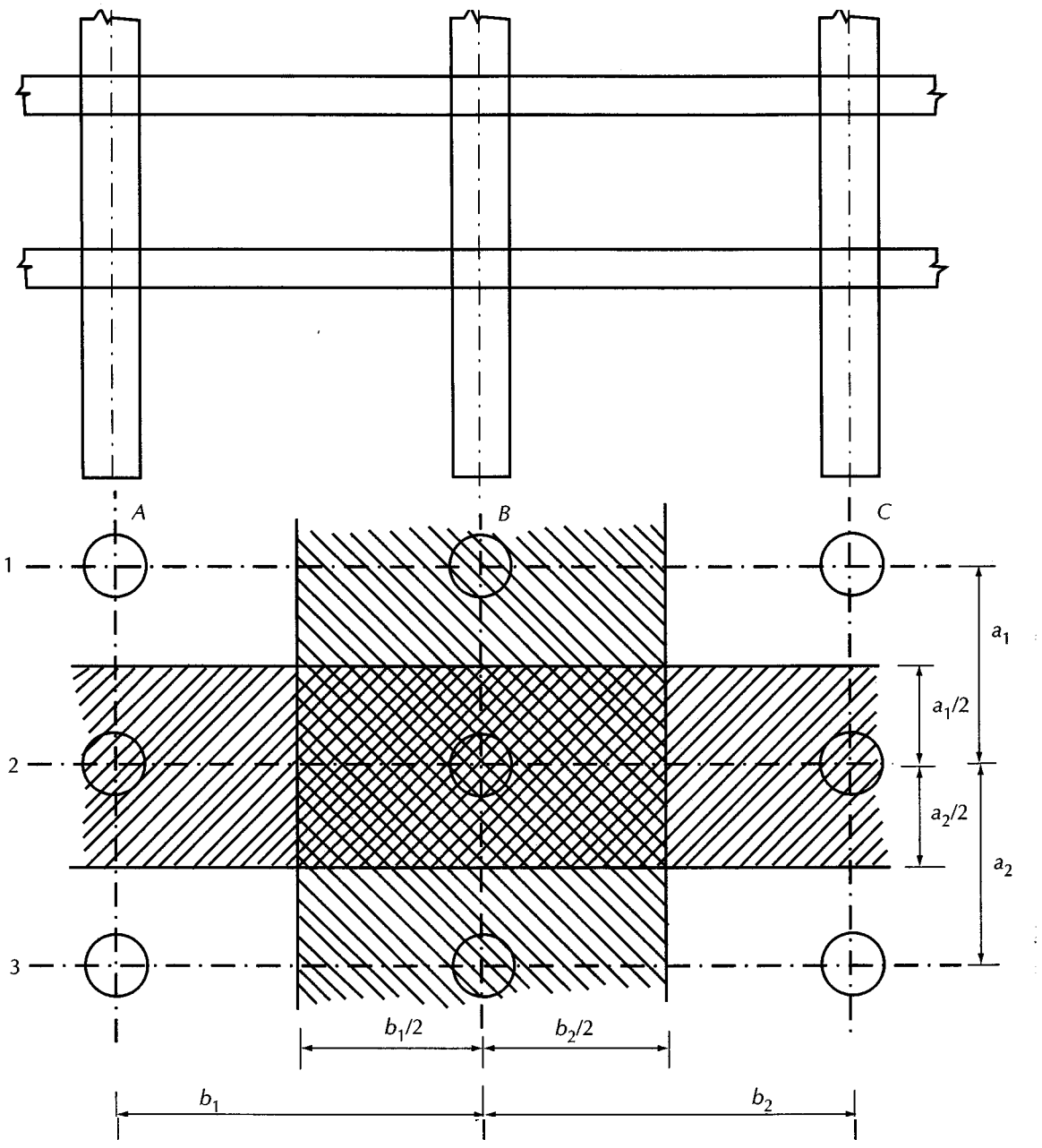


Figura 18.6 Estructura equivalente.

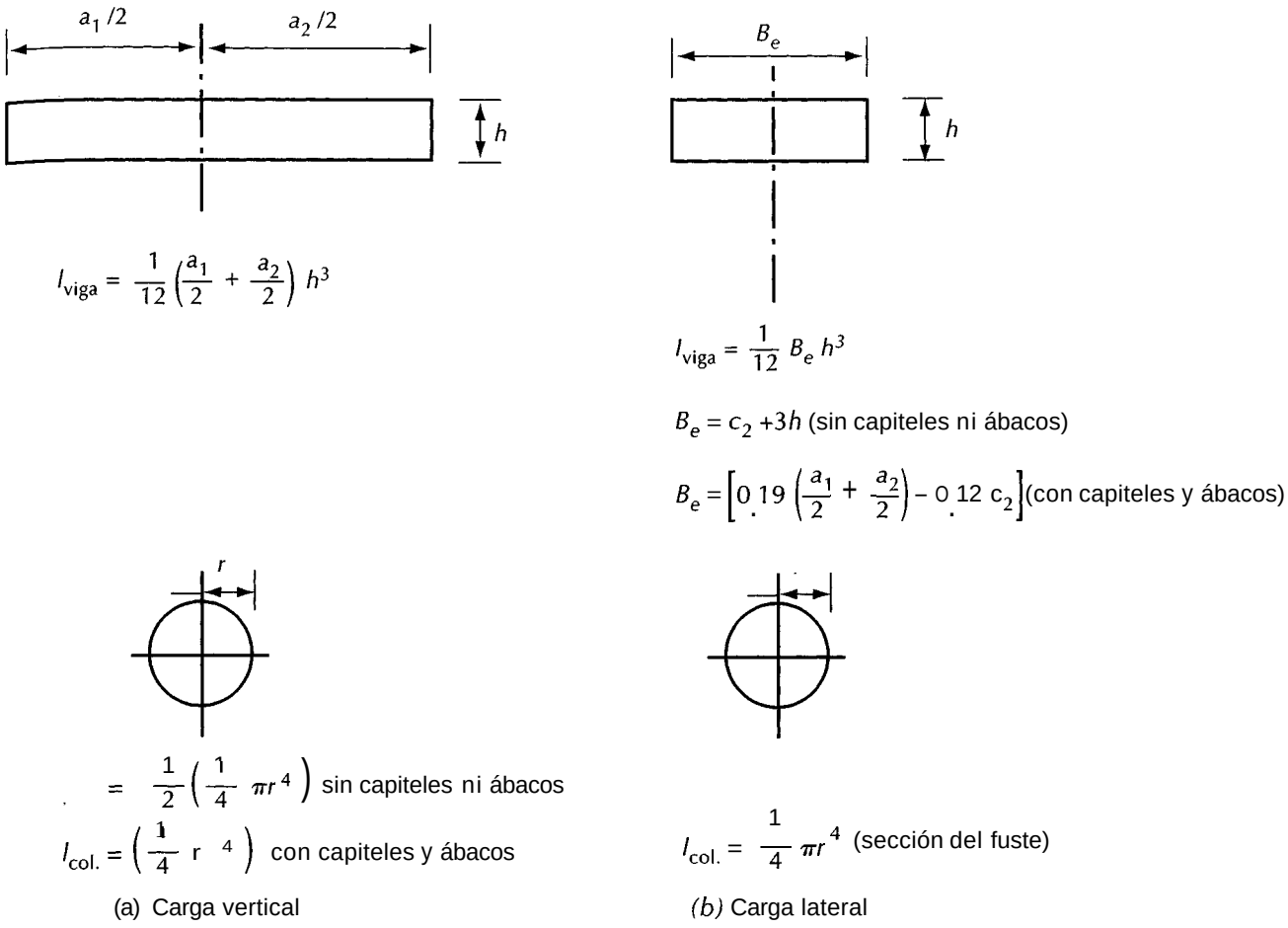


Figura 18.7 Momentos de inercia de vigas y columnas en el método de la estructura equivalente.

consideraciones diferentes para llevar a cabo el análisis estructural cuando la estructura está sujeta a cargas verticales que cuando lo está a cargas laterales. También es necesario considerar por separado los sistemas sin capiteles ni ábacos y aquellos que sí los tienen, porque las rigideces de losas y columnas son diferentes. A continuación se presentan las disposiciones de las NTC-04 para calcular las rigideces de columnas y vigas de los marcos equivalentes, efectuar el análisis estructural, calcular los momentos flexionantes bajo cargas verticales y laterales, y distribuir el refuerzo necesario por flexión.

a) Cargas verticales en sistemas sin capiteles *ni* ábacos

Las rigideces de las vigas pueden calcularse usando el ancho completo de la franja de losa y la sección completa sin agrietar y sin considerar el refuerzo. Por ejemplo, la viga del eje 2 de la figura 18.6 tendría la sección transversal mostrada en la figura 18.7*a;* su ancho sería $a_1/2 + a_2/2$ y el momento de inercia sería el indicado en la misma figura. En cambio para las columnas debe usarse la mitad del momento de inercia correspondiente a la sección completa y sin agrietar. En el ejemplo

de la figura 18.6, el momento de inercia de las columnas circulares sería $\pi r^4/4$; en la estructura equivalente se toma la mitad de este valor como se indica en la figura 18.7*a*.

Al tomar la mitad del momento de inercia de las columnas, se reduce también a la mitad su rigidez a flexión. Esto se hace así, para considerar que las columnas restringen menos a la franja de losa de ancho $a_1/2 + a_2/2$ que a una viga de ancho pequeño localizada en el eje de columnas. La reducción al 50 por ciento de la rigidez a flexión de las columnas se obtuvo por comparación de análisis efectuados bajo esta hipótesis con análisis más precisos [18.2].

En el caso de losas aligeradas, debe tomarse en cuenta la presencia de agujeros al calcular la rigidez de la viga. En las zonas de casetones, no resulta una sección rectangular completa, como la de la figura 18.7*a*, sino una sección con nervaduras y un patín completo en la parte superior. Por lo contrario, en la zona de ábacos macizos, la sección transversal de la losa sí es como la mostrada en la figura 18.7*a*. Resulta entonces una viga con momento de inercia variable a lo largo de su eje. En el ejemplo 18.1 se ilustra esta situación.

Ya calculadas las rigideces a flexión de vigas y columnas, se plantea la estructura equivalente y se analizan los marcos por alguno de los métodos usuales de análisis elástico. Es importante recordar que las cargas verticales totales deben aplicarse a los marcos en cada una de las dos direcciones. Nótese también que para poder efectuar el análisis, es necesario establecer previamente dimensiones tentativas del espesor de la losa, del tamaño de ábacos y capiteles, en su caso, y de la sección de las columnas. Para el espesor de las losas pueden usarse las especificaciones de peralte mínimo para no calcular deflexiones, las cuales se presentan más adelante en esta misma sección; para ábacos y capiteles, las recomendaciones de la sección 18.1; y para la sección de las columnas, cálculos aproximados de carga axial y momentos flexionantes.

Una vez obtenidos los momentos flexionantes en las vigas de los marcos, que son en realidad las franjas mostradas en la figura 18.6, es necesario distribuir este momento a lo ancho de las franjas. La distribución no es uniforme por las razones expuestas en la sección 18.2.1 en relación con la figura 18.5, sino que es de la forma indicada en la figura 18.5*d*. Para hacer esta distribución a lo ancho de las vigas, las NTC-04 proponen los porcentajes siguientes para ser aplicados a los momentos obtenidos en el análisis:

	Franjas de columnas	Franjas centrales
Momentos positivos	60	40
Momentos negativos	75	25

En la figura 18.8 se ilustra la distribución de momentos de la tabla anterior para la franja del eje 2 de la figura 18.6 en su intersección con el eje C y para la zona de momento positivo entre los ejes C y B. Se señala la sección crítica para momento negativo, al paño de la columna, en la cual el 75 por ciento se asigna a la franja de columnas y el 25 por ciento restante a las dos medias franjas centrales. La sección crítica de momento positivo queda localizada a la mitad del claro b_2, y en ella el 60 por ciento del momento corresponde a la franja de columnas y el 40 por ciento restante a las dos medias franjas centrales. Se observa que en la franja de columnas los momentos resultan mayores que en la franja central, tal como lo indica la distribución cualitativa de la figura 18.5*d*.

A partir de los momentos flexionantes calculados para cada franja, se determina el refuerzo por flexión necesario para carga vertical. Al menos la mitad del refuerzo negativo en las franjas de columna debe quedar en un ancho $c_2 + 3h$ centrado con respecto a los ejes de columnas. El resto del refuerzo para carga vertical se distribuye uniformemente en el ancho de cada franja, excepto el necesario para

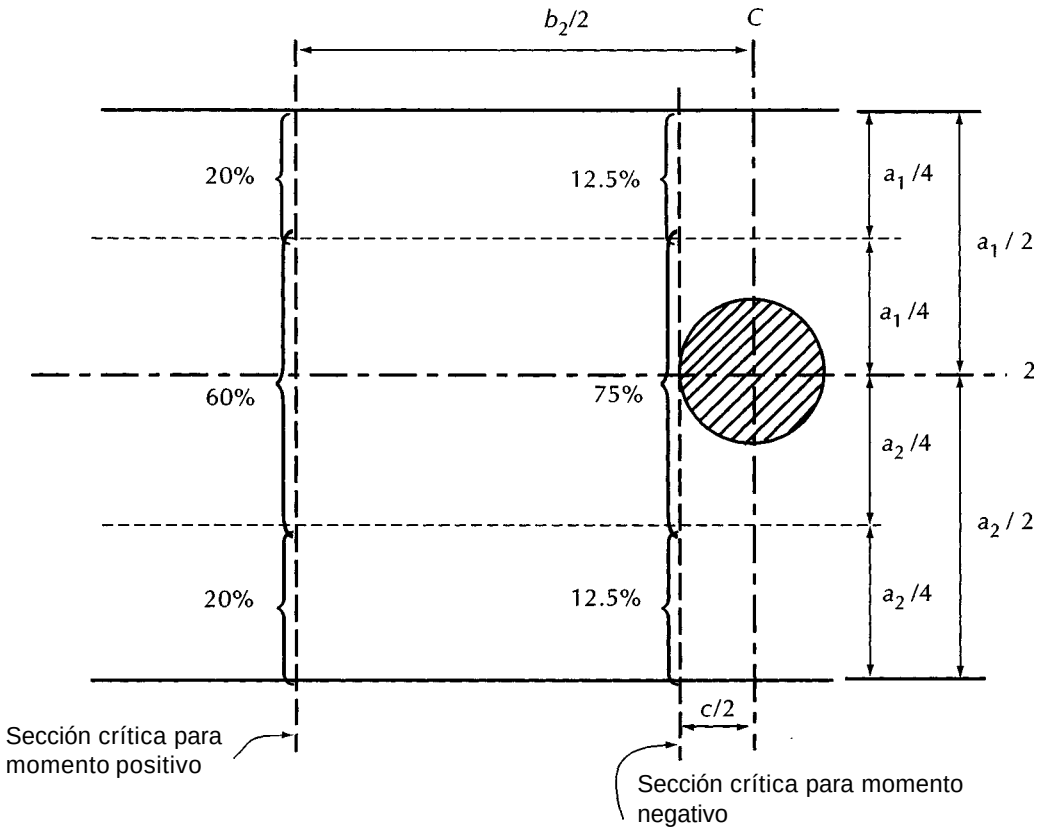


Figura 18.8 Distribución de momentos flexionantes en franja de columnas y franja central.

momento negativo exterior en claros extremos, es decir, el refuerzo negativo que se coloca perpendicularmente al borde de la losa, que debe colocarse como si fuese refuerzo para sismo de acuerdo con lo que se indica más adelante.

El procedimiento que se ha descrito para efectuar el análisis bajo carga vertical en sistemas sin ábacos ni capiteles, puede usarse, según las NTC-04, si se cumplen los siguientes requisitos:

- la estructura da lugar a marcos sensiblemente simétricos;
- todos los entrepisos tienen el mismo número de crujías;
- el mayor claro en toda la estructura no excede al menor en más de un quinto de este último, ya sea que el menor sea paralelo o perpendicular al mayor;
- el espesor de la losa es aproximadamente igual al 5 por ciento del claro mayor del mayor tablero; y
- la carga viva por metro cuadrado es aproximadamente la misma en los distintos tableros de un piso.

Cuando no se cumplen las limitaciones anteriores, debe recurrirse a métodos más precisos, como el del elemento finito, o al método generalizado del ACI que se presenta en el capítulo 19 de este texto.

b) Cargas verticales en sistemas con capiteles y ábacos

Tanto el momento de inercia de la losa como el de la columna, se calculan con las secciones completas, es decir, no se reduce a la mi-

tad el momento de inercia de las columnas. Para estas últimas, debe considerarse la sección tansversal del fuste. De esta manera simplificada se está tomando en cuenta que la presencia de ábacos y capiteles aumenta la rigidez a flexión de las columnas y que las losas están más restringidas que cuando no existen estos elementos [18.6].

También la presencia de capiteles y ábacos produce momentos de inercia variables a lo largo de los ejes de vigas y columnas. Puede suponerse al respecto que el momento de inercia de las vigas es infinito desde el centro de la columna hasta el borde del capitel y que en la zona del ábaco corresponde al peralte de este elemento. También puede suponerse que el momento de inercia es infinito desde la sección inferior del capitel hasta la cara superior de la losa. En el Apéndice D se presentan ayudas de diseño para efectuar los cálculos de rigideces a flexión y factores de transporte en elementos estructurales con estas características. Si se usa para el análisis estructural un programa de computadora que tome en cuenta las dimensiones de los nudos, se debe asignar como dimensión vertical la distancia desde el arranque del capitel hasta la cara superior de la losa, y como dimensión horizontal a cada lado del eje de columnas, la distancia de dicho eje al borde del capitel.

Una vez calculados los momentos de inercia y las rigideces como se ha mencionado en los dos párrafos anteriores, el planteamiento de los marcos equivalentes, su análisis y la distribución de los momentos flexionantes en las franjas de columnas y en las centrales, se hacen de la misma manera que en el caso anterior de sistemas sin capiteles ni ábaco~Es importante recordar que se debe aplicar la carga total a los marcos en las dos direcciones.

Los requisitos señalados al final del caso anterior también deben cumplirse para estos sistemas con capiteles y ábacos, pero el valor de 5 por ciento para el espesor de la losa debe cambiarse por 3.5 por ciento. Además se cumplirán los siguientes requisitos adicionales:

- La estructura no excederá de cuatro niveles;
- si la estructura tiene tres o cuatro niveles, los momentos en las columnas de orilla del penúltimo entrepiso se incrementarán 25 por ciento sobre lo que suministre el análisis;
- las columnas, ábacos y capiteles serán rectangulares, sin que la dimensión mayor exceda a la menor en más de 20 por ciento de ésta. Las columnas y capiteles podrán ser también circulares, con ábacos cuadrados;
- las columnas de orilla deberán tener capiteles y ábacos completos, iguales a los interiores, y el borde de la losa deberá coincidir con el del ábaco; y
- las dimensiones de los ábacos deberán cumplir con los requisitos establecidos en la figura 18.2.

c) Cargas laterales en sistemas sin capiteles ni ábacos

Como se mencionó anteriormente, los momentos flexionantes se concentran más cerca de los ejes de las columnas que en el caso de cargas verticales. Debido a esto, las NTC-O4 recomiendan calcular la rigidez a flexión de vigas de la estructura equivalente usando un ancho de losa de $c_2 + 3h$ centrado respecto al eje de columnas, como se muestra en la figura 18.7*b,* y la sección completa de las columnas; el término c_2 es la dimensión de la columna o capitel en dirección perpendicular a aquella en que se calculan los momentos. Comparando con el caso de carga vertical, se observa que en la estructura equivalente para cargas laterales, las rigideces de las vigas son menores mientras que aquellas de las columnas son mayores.

La presencia de los huecos en losas aligeradas debe tomarse en cuenta al calcular los momentos de inercia y las rigideces a fle-

xión en la forma en que se explicó para el caso de cargas verticales.

Una vez obtenidas las rigideces a flexión, se efectúa el análisis de la estructura equivalente por alguno de los métodos elásticos usuales. Con esto se obtienen los momentos flexionantes en las vigas y en las columnas. Las vigas son en realidad las franjas de losa de ancho $c_2 + 3h$, y en este ancho debe colocarse el acero de refuerzo correspondiente, cuidando que el 60 por ciento del acero negativo cruce el núcleo de la columna. Desde luego que el acero de refuerzo necesario por la acción de cargas laterales debe sumarse al obtenido por cargas verticales.

d) Cargas laterales en sistemas con capiteles y ábacos

Las rigideces a flexión de las vigas equivalentes se calculan con un ancho de losa

$$B_e = \left[0.19\left(\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2}\right) - 0.12c_2\right]$$

como se muestra en la figura 18.7. Al igual que en sistemas con capiteles y ábacos sujetos a cargas verticales, puede suponerse que el momento de inercia de las vigas es infinito desde el centro de la columna hasta el borde del capitel, y que en la zona del ábaco corresponde al peralte de este elemento. También puede suponerse que el momento de inercia es infinito desde la sección inferior del capitel hasta la cara superior de la losa [18.7].

Deben cumplirse los requisitos de regularidad y tamaño de la estructura establecidos para los dos casos de cargas verticales, excepto el cuarto requisito para sistemas sin capiteles ni ábacos y los dos primeros para sistemas con capiteles y ábacos. Además deben cumplirse los dos siguientes requisitos:

- La estructura no excede de cinco niveles; y
- el espesor de la losa es aproximadamente igual a 3.5 por ciento del claro mayor del tablero.

El refuerzo calculado por sismo se colocará en un ancho de $c_2 + 3h$ y el 60 por ciento de este refuerzo como mínimo deberá cruzar el núcleo de la columna correspondiente.

e) Disposiciones complementarias sobre el refuerzo

Las NTC-04 establecen las siguientes disposiciones complementarias aplicables a la suma del refuerzo por cargas verticales y por cargas laterales.

Al menos la cuarta parte del refuerzo negativo que se tenga sobre un apoyo en una franja de columnas debe continuarse a todo lo largo de los claros adyacentes.

Al menos la mitad del refuerzo positivo máximo debe extenderse en todo el claro correspondiente.

En las franjas de columnas debe existir refuerzo positivo continuo en todo el claro en cantidad no menor que la tercera parte del refuerzo negativo máximo que se tenga en la franja de columnas en el claro considerado.

El refuerzo de lecho inferior que atraviese el núcleo de una columna no será menor que la mitad del que lo cruce en el lecho superior y debe anclarse de modo que pueda fluir en las caras de la columna.

Toda nervadura de losas aligeradas llevará, como mínimo, a todo lo largo, una barra en el lecho inferior y una en el lecho superior.

Casi todas estas disposiciones tienen como objetivo asegurar un comportamiento adecuado de las estructuras a base de losas planas bajo la acción de movimientos sísmicos intensos. Por ejemplo, la primera de ellas prevé que puedan desarrollarse momentos negativos considerables en las zonas centrales de los claros. Si se utiliza el método de las NTC-04 para el diseño de losas planas en zonas de intensidad sísmica baja o moderada, pueden omitirse algunas de estas disposiciones o hacerlas menos severas, a juicio del proyectista estructural.

En cuanto a áreas mínimas de refuerzo y separaciones máximas, las disposiciones son

las mismas que para losas apoyadas perimetralmente, a saber:

Las áreas de refuerzo deben ser por lo menos iguales al área mínima por flexión

$$(A_s)_{mín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (18.2)$$

o en sistema SI

$$(A_s)_{mín} = \frac{0.22\sqrt{f'_c}}{f_y} bd \qquad (18.2\ SI)$$

El área mínima por cambios volumétricos en una franja de 1 m de ancho debe ser

$$(A_s)_{mín} = \frac{66{,}000h}{f_y\,(h + 100)} \qquad (18.3)$$

o en sistema SI

$$(A_s)_{mín} = \frac{6470h}{f_y\,(h + 1000)} \qquad (18.3\ SI)$$

recordando que esta última puede calcularse también con una relación de refuerzo de 0.002 y que debe multiplicarse por 1.5 en las losas expuestas a la intemperie.

Las NTC-04 especifican también una separación máxima de barras de dos veces el espesor de la losa en secciones críticas, excepto en zonas aligeradas.

f) Peralte mínimo

Se había señalado que era necesario tener una estimación del peralte de la losa y que ésta podía hacerse a partir de las especificaciones sobre peralte mínimo para no calcular deflexiones, al igual que se hizo en el caso de losas en una dirección y de losas apoyadas perimetralmente. Las especificaciones que presentan al respecto las NTC-04 son las siguientes. El peralte efectivo mínimo debe ser

$$d_{mín} = k\ell\,(1 - 2c/3\ell) \qquad (18.4)$$

donde ℓ es el claro mayor y k un coeficiente que se determina como sigue

losas con ábacos, $k = 0.0006\sqrt[4]{f_s w} \geq 0.02$

losas sin ábacos, $k = 0.00075\sqrt[4]{f_s w} \geq 0.025$

En estas expresiones, f_s es el esfuerzo en el acero en condiciones de servicio, en kg/cm^2, que puede suponerse igual a 0.6 f_y; w es la carga en condiciones de servicio, en kg/m^2; y c la dimensión de la columna o capitel paralela a e. Las mismas expresiones pueden usarse en sistema SI si f_s se plantea en MPa y w en N/m^2.

Los valores obtenidos con la ecuación 18.4 deben aumentarse 20 por ciento en tableros exteriores y en losas aligeradas. En ningún caso el espesor de la losa, h, será menor de 10 cm, si existe ábaco, o menor de 13 cm, si no existe. Los valores de k y los valores mínimos de h son para concreto clase 1. Para concreto clase 2, todos los valores se deberán multiplicar por 1.5.

18.3 Ejemplo de dimensionamiento por el método de la estructura equivalente (NTC-04)

En el ejemplo 18.1 se ilustra el diseño de una placa plana por el método de la estructura equivalente, usando las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal. Se trata de una estructura con tableros de 8 × 6 m y de 8 × 7 m para la que se decidió usar una losa aligerada. No se colocaron capiteles en las columnas por facilidad de cimbrado, así que la estructura es de las que se conocen como placa plana. La altura libre en el primer piso es de 3.20 m y en los siguientes es de 3.00 m. Las columnas son de 60 × 70 cm con la primera dimensión en dirección de los claros de 8 m.

Para determinar el peralte se decidió usar casetones de 60 × 60 × 30 cm y una capa superior de concreto de 5 cm, con lo cual que-

dó fijo el espesor de la losa en 35 cm. En claros grandes, como los de este ejemplo, es conveniente usar casetones también grandes; por eso se eligieron de 60 × 60 cm en planta. Se recomienda que el espesor de la capa superior de concreto no sea inferior a 3 o a 5 cm si hay cargas concentradas. En este caso se eligió una capa de 5 cm por el tamaño de los claros y por la posibilidad de cargas concentradas.

Se comparó el peralte determinado como se indica en el párrafo anterior con el peralte mínimo para no revisar deflexiones, el cual está dado por la ecuación 18.4. El valor dado por esta ecuación se multiplicó por el factor 1.20 para obtener el peralte mínimo en los tableros de esquina. Fue necesario en esta etapa conocer el valor de la carga w. Para esto se determinó un valor aproximado con ayuda de la referencia 18.4, en la que se presentan tablas del peso propio de las losas aligeradas para diferentes tamaños de casetones y anchos de nervaduras. Estas tablas toman en cuenta la existencia de zonas macizas alrededor de las columnas. Si no se dispone de ayudas de diseño como la referencia 18.4, es necesario hacer un cálculo aproximado del peso propio de la losa para obtener el valor de w y poder aplicar la ecuación 18.4. El espesor mínimo obtenido de esta manera, resultó menor que el calculado a partir del peralte de los casetones y del espesor de la capa superior de concreto.

A continuación se trazó un croquis de la colocación de los casetones. Esto se realiza normalmente por medio de tanteos, hasta llegar a un número de casetones que permita tener anchos adecuados de las nervaduras. Se recomienda que éstas tengan un ancho mínimo de 10 cm, pero usualmente se usan anchos entre 10 y 15 cm. Las nervaduras de los ejes de columnas se dejan más anchas, ya que es necesario concentrar en ellas una mayor cantidad de acero. Las NTC-04 especifican que las nervaduras de los ejes de columnas tengan un ancho mínimo de 25 cm, y las adyacentes, de 20 cm.

En el croquis de colocación de casetones no se incluye toda la losa porque en el ejemplo sólo se muestra el diseño del eje 2 en el tramo A-B. Obsérvese que la última fila de casetones en la parte inferior del croquis no es simétrica respecto al eje central del tablero. Esto quedó así porque se cuidó que en el eje 3 de la estructura se tuviese un ancho apropiado de la viga de borde. Las zonas macizas que se dejaron alrededor de las columnas cumplen con la recomendación de que tengan una dimensión mínima de $\ell/6$ a cada lado del eje de columnas (figura 18.3).

Una vez dibujado el croquis de colocación de casetones, se revisó el peso propio de la losa. Se supuso que los casetones eran de plástico ligero, por lo que su peso propio era despreciable. La carga uniformemente distribuida resultó menor que la supuesta en la revisión del peralte, por lo que en los demás cálculos se usó la carga real. Se usaron los factores de carga de las NTC-04 de 1.4 para cargas muerta y viva, y 1.1 para la combinación de cargas muerta y viva con fuerzas sísmicas. Se usó la misma carga viva (300 kg/m^2) para ambas combinaciones de carga, aunque el Reglamento del Distrito Federal permite usar una carga menor cuando actúan simultáneamente las fuerzas sísmicas.

Para efectuar el análisis estructural, el primer paso consiste en determinar las rigideces de las vigas equivalentes y de las columnas de los marcos. Como en las NTC/04 se especifican reglas distintas para calcular estas rigideces según se trate de cargas verticales o fuerzas horizontales, es necesario plantear dos marcos diferentes, uno para cada condición de carga.

En el caso de cargas verticales, la viga equivalente tiene un ancho igual a la suma de las mitades de los claros perpendiculares adyacentes, como se muestra en la figura 18.7*a*. Las secciones transversales de la viga son diferentes en la zona del ábaco, donde es maciza, y en la zona central, donde es aligerada. Se muestran en el ejemplo ambas secciones y el cálculo de los momentos de inercia correspondientes.

Se utiliza el espesor total de la losa y no el peralte efectivo, ya que las NTC señalan que los momentos de inercia pueden tomarse como el de las secciones de concreto no agrietadas y sin considerar el refuerzo.

El paso siguiente consistió en el cálculo de las rigideces flexionantes y de los factores de transporte de vigas y columnas del marco. Para el caso de vigas, resultan de sección variable por la diferencia en los momentos de inercia de las dos secciones comentadas en el párrafo anterior. Las rigideces y factores de transporte se calcularon con las ecuaciones presentadas en el Apéndice D.2 de este texto. La longitud de las zonas macizas es diferente en los dos extremos de la viga, pero como son semejantes se usó la longitud promedio de 160 cm. Los momentos de empotramiento perfecto para vigas de este tipo difieren del valor usual de $w\ell^2/12$ que sólo se aplica a vigas de sección prismática uniforme en todo el claro. En el Apéndice D.2 también se presenta una ecuación para calcular dicho momento en vigas de sección variable, la cual se usó en el ejemplo. Puede observarse que se obtuvo un valor de $w\ell^2/10.4$ en vez de $w\ell^2/12$. Es muy importante observar que en el cálculo del momento de empotramiento perfecto se usó la carga total comprendida entre los ejes centrales de los dos tableros adyacentes al eje 2, o sea, que la carga uniformemente distribuida por unidad de área multiplicada por el ancho total del marco, resulta igual a la carga por unidad de longitud. Al analizar los marcos perpendiculares al considerado en el ejemplo, debe tomarse nuevamente la carga total.

Las columnas del ejemplo sí son de sección prismática uniforme, por lo que se usaron las ecuaciones usuales para calcular sus rigideces y factores de transporte. Si hubiesen tenido capiteles, habría sido necesario considerar un tramo con momentos de inercia infinitos, lo cual puede hacerse con las otras ayudas de diseño incluidas en el Apéndice D. De acuerdo con lo que señalan las NTC-04, la rigidez efectiva de las columnas se tomó como la mitad de la rigidez teórica.

En el ejemplo se muestra un croquis en el que se indican las rigideces y factores de transporte de todos los miembros del marco.

A continuación se calcularon las rigideces de vigas y columnas del marco correspondiente a fuerzas horizontales. La viga equivalente tiene un ancho de $c_2 + 3h$ y para la columna se toma la rigidez total y no la mitad como en el marco correspondiente a cargas verticales. Por lo demás, los cálculos son semejantes. También se muestra un croquis del marco con sus rigideces y factores de transporte. Para este marco no se calculan momentos de empotramiento perfecto, ya que sólo está sujeto a fuerzas horizontales.

En algunos programas de análisis estructural disponibles fácilmente en la actualidad, basta con indicar las propiedades geométricas de los miembros, aunque sean variables, como en este caso, y las cargas que actúan sobre la estructura, para que los programas proporcionen todos los momentos flexionantes, torsionantes, fuerzas cortantes y fuerzas normales, así como los desplazamientos. En estos programas, como el usado para este ejemplo, es necesario introducir las matrices de rigidez de los miembros del marco. Los elementos de estas matrices pueden deducirse de los valores calculados como se indica en el ejemplo. Así, el elemento K_{ii} es la rigidez a flexión calculada, y el elemento K_{ij} es igual a la rigidez a flexión en el extremo i multiplicada por el factor de transporte. De cualquier manera, el siguiente paso consiste en analizar los dos marcos planteados, el primero con carga vertical, y el segundo con fuerzas horizontales. (Las fuerzas horizontales, producidas por sismo, no se muestran en el ejemplo.)

Para el caso de carga vertical se hicieron dos análisis: uno con un factor de carga de 1.4, para tener las acciones correspondientes a carga vertical Únicamente, y otro con un factor de carga de 1.1, para tener las acciones correspondientes a carga vertical que se deben sumar a las correspondientes a fuerzas horizontales accidentales. Éstos son los facto-

res de carga que especifican las NTC para cargas muertas y vivas únicamente, y para cargas muertas y vivas combinadas con cargas accidentales, respectivamente. Para el caso de fuerzas horizontales, sólo se hizo el análisis del marco con un factor de carga de 1.1.

A continuación se muestran en el ejemplo los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes correspondientes a las dos condiciones de carga mencionadas en el párrafo anterior. Para el caso de carga vertical únicamente, los valores son los obtenidos del análisis del marco correspondiente con el factor de carga de 1.4. Para el caso de cargas verticales y horizontales, se muestran los valores obtenidos sumando los momentos y fuerzas cortantes del marco correspondiente a carga vertical, con un factor de carga de 1.1, con los momentos y fuerzas cortantes del marco correspondiente a fuerzas horizontales.

Para la segunda condición de carga, los momentos y fuerzas cortantes dependen del sentido de las fuerzas horizontales. En el croquis correspondiente se indican los valores que corresponden a fuerzas horizontales que actúan de derecha a izquierda, que son las más desfavorables para el extremo A de la viga A-B. Pero en el extremo B de esta viga, se muestran entre paréntesis los valores que corresponden al sentido de izquierda a derecha, ya que son más desfavorables para este extremo. Es necesario, como se verá más adelante, seleccionar en cada caso el valor más alto del momento flexionante y de la fuerza cortante.

Una vez efectuado el análisis estructural y trazados los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes, se procedió al diseño de la estructura que, como ya se dijo, se limitó en el ejemplo a la viga A-B del eje 2 y del nivel 1. Se inició con la revisión por fuerza cortante en la columna A-2. Esto se hizo así porque es frecuente en este tipo de estructuras que el diseño quede regido por el cortante por penetración, especialmente en columnas de borde en las que hay una fuerte transferencia de momento entre losa y columna, y en las que la sección crítica para cortante por penetración se ve reducida por el borde libre.

Se señalan en forma de croquis las acciones sobre el nudo, para las dos condiciones de carga, tomadas de los dos diagramas de momentos y fuerzas cortantes correspondientes. No es posible determinar de antemano cuál de las dos condiciones es más desfavorable, ya que en una es menor el momento pero mayor la fuerza cortante, mientras que en la otra ocurre lo contrario. Por lo tanto, es necesario revisar el cortante por penetración para las dos condiciones de carga.

Se inició la revisión determinando las propiedades geométricas de la sección crítica. Para ello se trazó un croquis de la columna con la sección crítica a una distancia de $d/2$ alrededor de su periferia, excepto en el borde libre, por lo que dicha sección tiene únicamente tres lados. Se determinó su área y la posición de su centroide. Este último dato se requiere para calcular el momento polar de inercia, J, lo cual se hizo con la ecuación que se presenta en la figura 7.17*b*.

Después se calculó el parámetro γ_v que determina la fracción de momento flexionante que se transfiere de la losa a la columna a través de momentos torsionantes, como se muestra en la figura 7.10, los cuales producen esfuerzos cortantes no uniformes equivalentes a los que produce una fuerza cortante colocada excéntricamente respecto al eje de la columna. Este parámetro γ_v se calculó con la ecuación 7.20 modificada para tomar en cuenta que la columna es de borde; por eso se sustituyó el factor $(c_1 + d)$ por $(c_1 + d/2)$.

Ya habiendo determinado el momento polar de inercia de la sección crítica y el parámetro γ_v se calculó el esfuerzo cortante máximo, que resultó de 8.4 kg/cm^2, con la ecuación 7.21. El esfuerzo cortante que resiste la losa sin refuerzo por cortante, calculado con la ecuación 7.27, fue de 9.9 kg/cm^2, de lo que se concluye que no se requiere dicho refuerzo.

Nótese que el factor de reducción usado de 0.7 es menor que el usado para vigas, tal como se especifica en las NTC-04.

En forma similar se obtuvo el esfuerzo cortante máximo bajo la segunda condición de carga. En este caso, dicho esfuerzo resultó ligeramente menor que el esfuerzo cortante resistente, 9.3 contra 9.9 kg/cm^2. Por lo tanto, tampoco se requirió refuerzo por cortante.

Si se hubiese requerido proporcionar refuerzo por cortante, el procedimiento sería el siguiente. Se calcula primero el ancho de una viga ficticia, como la de la figura 7.14. En este ejemplo dicho ancho sería

$$b = d + c_2 = 32 + 70 = 102 \text{ cm}$$

Después se calcula la contribución del concreto'con la ecuación 7.28:

$$V_{CR} = 0.4\ F_R \sqrt{f^*_c}\, bd$$

donde el término b es el ancho de la viga calculado en el paso anterior.

A continuación se calcula la fuerza cortante que actúa en la cara de la viga ficticia, que en este ejemplo sería la cara A-B de la figura 7.17b. Esta fuerza sería

$$V_u = (v_u)_{máx}\ bd$$

El valor de $(v_u)_{máx}$ en este ejemplo es de 9.3 kg/cm^2. Si V_u fuese mayor que V_{CR}, entonces la diferencia de fuerzas se tomaría con estribos,

$$V_s = V_u - V_{CR}$$

y la separación de estribos se calcularía con la ecuación 7.14:

$$s = \frac{F_R A_v f_y d}{V_s}$$

Como en el ejemplo 18.1 V_{CR} fue mayor que V_u, se debe poner la separación máxima de estribos que permiten las NTC que es de $d/3$. Este procedimiento para calcular el refuerzo para cortante en losas es equivalente al descrito en la sección 7.6.1c en relación con el Reglamento ACI.

El refuerzo por cortante debe prolongarse hasta una distancia de la tercera parte del claro a partir del eje de columnas, lo cual obliga a eliminar algunos casetones, en este ejemplo, para que quepan las barras. El primer estribo debe colocarse a la mitad de la separación restante a partir del paño de columnas, y las barras longitudinales deben anclarse adecuadamente en la columna. En el croquis se muestra únicamente el refuerzo en dirección del eje 2, pero también debe colocarse en la dirección perpendicular, a ambos lados de la columna.

El ejemplo continúa con la revisión en cortante por penetración de la columna B-2. En este caso, por tratarse de una columna interior, la sección crítica es simétrica y no es necesario calcular su centroide. El parámetro γ_v se calculó con la ecuación 7.20 sin ninguna modificación y el momento polar de inercia con la ecuación correspondiente de la figura 7.17a.

Debe observarse que la fuerza cortante V_u de la ecuación 7.21 es la suma de las fuerzas cortantes a ambos lados de la columna, ya que esta suma es la que proporciona la carga axial que transfiere la losa a la columna. El momento M_u de la misma ecuación es, por el contrario, la diferencia de los momentos flexionantes a ambos lados de la columna porque esta diferencia equivale al momento de desequilibrio que transfiere la losa a la columna; si los momentos flexionantes fuesen iguales, no habría transferencia de momentos de la losa a la columna.

En esta columna tampoco se requirió refuerzo por cortante bajo ninguna de las dos condiciones de carga. Debe colocarse únicamente el refuerzo mínimo, que es igual al anterior, pero en este caso, a ambos lados de la columna y en las dos direcciones, por lo que se forma una especie de cruz colocada sobre la columna. Este refuerzo no se muestra en el ejemplo.

Antes quedó dicho que en el ejemplo se ilustra únicamente el diseño del eje 2 en el

tramo A-B. Es posible que al diseñar los marcos perpendiculares al eje 2, se encuentre que sí se requiere refuerzo por cortante sobre las columnas A-2 y B-2. Por lo tanto, la conclusión alcanzada hasta ahora es tentativa únicamente.

Prosigue el ejemplo con el dimensionamiento por flexión. Se muestra un croquis de la zona diseñada en el que se señala la franja de ancho $c_2 + 3h$ en la que debe transferirse por flexión la parte del momento que no se transfirió por excentricidad de la fuerza por cortante y en la que debe colocarse el refuerzo por sismo; la franja de columnas cuyo ancho es la cuarta parte del ancho de los tableros adyacentes al eje; y las dos medias franjas centrales. La primera franja mencionada queda colocada simétricamente respecto al eje, pero no quedan así las otras franjas.

En primer término se hace el diseño por flexión en el extremo A, o sea, en el borde de la losa, donde se tienen momentos negativos. Las NTC-O4 especifican que el refuerzo necesario por carga vertical se coloque como si fuera refuerzo por sismo, o sea, en la franja de ancho $c_2 + 3h$. Por lo tanto, es suficiente hacer el diseño para el mayor de los momentos correspondientes a las dos condiciones de carga. En el ejemplo resulta mayor el momento bajo carga vertical y sismo, 39.4 ton-m. Este momento es en el eje de columnas, por lo que se calculó el momento en la sección crítica para flexión que está localizada en el paño de las columnas. Dicho momento resultó de 31.5 ton-m. Con este momento se calculó el área de acero necesaria por los procedimientos usuales. Se verificó que el porcentaje de acero estuviera comprendido entre el mínimo y el 75 por ciento del correspondiente a la falla balanceada. En las nervaduras que quedan fuera de la franja de ancho $c_2 + 3h$ se debe colocar el acero mínimo. Para las nervaduras de 10 cm de ancho este acero mínimo consiste en una barra del número 4.

Las NTC-O4 señalan que una fracción del momento se transmite por flexión entre la losa y la columna en un ancho $c_2 + 3h$. En el ejemplo, esta fracción resultó menor que el momento en la sección crítica. Si no hubiese sido así, el refuerzo por flexión en la franja de ancho $c_2 + 3h$ se tendría que haber calculado a partir del momento flexionante $(1 - \gamma_v) M_u$.

A continuación se hizo el diseño para momentos positivos. Debido a que la distribución del refuerzo es diferente para carga vertical y para carga horizontal, es necesario hacer el diseño para cada una de las dos condiciones de carga y ver cuál es más desfavorable. En la práctica, debido a que los momentos positivos debidos a sismo son pequeños en el centro del claro, casi siempre regirá la condición de carga vertical únicamente, tal como sucedió en este ejemplo.

Obsérvese que para el caso de cargas verticales, el momento positivo se dividió entre la franja de columnas, 60 por ciento, y la franja central, 40 por ciento. Ya obtenidos estos momentos, el diseño del refuerzo se hizo de la manera usual, tomando como ancho de las vigas la suma de los anchos de las nervaduras comprendidas en las franjas de columnas y central, respectivamente. Por sencillez y de manera conservadora, se consideró que el momento positivo se resiste exclusivamente con las nervaduras tomadas como vigas rectangulares cuando en realidad son vigas T.

Sigue el ejemplo con el diseño del extremo B del tramo A-B, en el cual se tienen momentos negativos. Aquí también es necesario calcular por separado el refuerzo necesario para carga vertical y para carga vertical combinada con fuerzas horizontales. Para el primer caso, el momento en la sección crítica se distribuye entre la franja de columnas y la franja central con los porcentajes de 75 y 25, respectivamente. De acuerdo con las NTC-04, el refuerzo que resulta para la franja de columnas debe distribuirse dentro de esta franja de tal manera que el 50 por ciento se coloque en la franja de ancho $c_2 + 3h$, y el otro 50 por ciento en el resto de la franja de columnas. El

refuerzo necesario para resistir el momento en la franja central se distribuye uniformemente entre las nervaduras comprendidas en esta franja.

Para el caso de cargas verticales y fuerzas horizontales simultáneas, es necesario considerar por separado el momento causado por las cargas verticales y el producido por las fuerzas horizontales, ya que la colocación del refuerzo es diferente. Para encontrar el momento producido por cargas verticales, se multiplicó el momento correspondiente al caso de carga vertical únicamente, 37.5 ton-m, por la relación entre los factores de carga para combinación de carga vertical y sismo, y para carga vertical, 1.1/1.4. El momento obtenido resultó de 29.5 ton-m. La diferencia entre el momento producido por ambas acciones combinadas, 42.19 ton-m, y el momento de 29.5 ton-m, es el momento causado por las fuerzas horizontales.

El momento en la franja de columnas debido a cargas verticales se obtuvo multiplicando el momento total de 29.5 ton-m por el coeficiente correspondiente a esta franja que es 0.75. De acuerdo con las NTC-04, el momento resultante se dividió en dos partes; una se asignó a la franja de ancho $c_2 + 3h$ y la otra al resto de la franja de columnas. La parte correspondiente a la franja de ancho $c_2 + 3h$ se sumó al momento debido a fuerzas horizontales, ya que la totalidad de este momento se debe asignar a la franja de ancho c_2 + 3h. El momento obtenido de esta manera resultó de 23.74 ton-m y el área de acero necesaria, de 21.6 cm^2, mayor que la calculada para el caso de carga vertical únicamente. Obsérvese que toda la franja de columnas en la sección crítica cae dentro de la zona maciza de losa.

En el eje B también se revisó la transmisión de momento entre losa y columna. Igual que en el eje A, el momento que se debe transmitir en la franja de ancho $c_2 + 3h$ resultó menor que el obtenido en la misma franja para la acción combinada de cargas verticales y fuerzas horizontales.

El momento en la franja central es el 25 por ciento restante del momento total en la sección crítica debido a cargas verticales.

En el ejemplo se incluye un resumen de las áreas de acero necesarias para las distintas franjas del eje B.

Finalmente se presentan unos croquis de armado de las nervaduras, con los que se trata de satisfacer las áreas de acero calculadas y las disposiciones complementarias para el acero de refuerzo mencionadas en la sección 18.2.2e. Para distribuir el refuerzo en las nervaduras, se consideró que el correspondiente a la franja de ancho c_2 + 3h se asignaba a la nervadura central de 40 cm de ancho, aunque el refuerzo negativo, por estar en la zona maciza de losa, puede colocarse también fuera de esta nervadura. El refuerzo para la parte restante de la franja de columnas se colocó en las dos nervaduras de 20 cm de ancho y en la primera nervadura de 10 cm de ancho debajo del eje 2. El refuerzo para la franja central se colocó en las nervaduras restantes de 10 cm de ancho.

Los cortes de barras se hicieron a una distancia mayor que la del punto de inflexión más lejano al eje de columnas. Las NTC-04 recomiendan prolongar las barras una distancia U10 más allá del punto de inflexión cuando se cortan o doblan todas las barras. En este ejemplo se prolongaron una distancia menor porque algunas barras se extendieron en todo el claro.

El refuerzo por cortante no se indica en los croquis de armado de las nervaduras. Según las NTC-04, se requiere el refuerzo mínimo por cortante en las nervaduras del eje de columnas, o sea la nervadura central, y en las adyacentes a ellas. En este ejemplo, el refuerzo correspondiente a la nervadura central es el calculado para cortante por penetración y consiste en estribos del No. 2.5 de cuatro ramas a cada 10 cm. En las nervaduras adyacentes, de 20 cm de ancho, debe colocarse el refuerzo mínimo consistente en estribos de dos ramas del No. 2 a cada $d/3$, o sea, a cada 10 cm.

Existen dos aspectos del diseño de losas planas que no se han incluido en este ejemplo. El primero se refiere a la revisión por cortante suponiendo que la losa actúa como una viga ancha en la que las grietas diagonales potenciales se extienden en todo su ancho. Esta revisión se ha ilustrado en el ejemplo 7.4 en relación a una zapata cuadrada. En forma similar se haría para la losa plana de este ejemplo, con la hipótesis adicional de que el 75 por ciento de la fuerza cortante actúa en la franja de columnas y el 25 por ciento restante, en la franja central. Al calcular el ancho de la viga deben descontarse desde luego los agujeros que dejan los casetones.

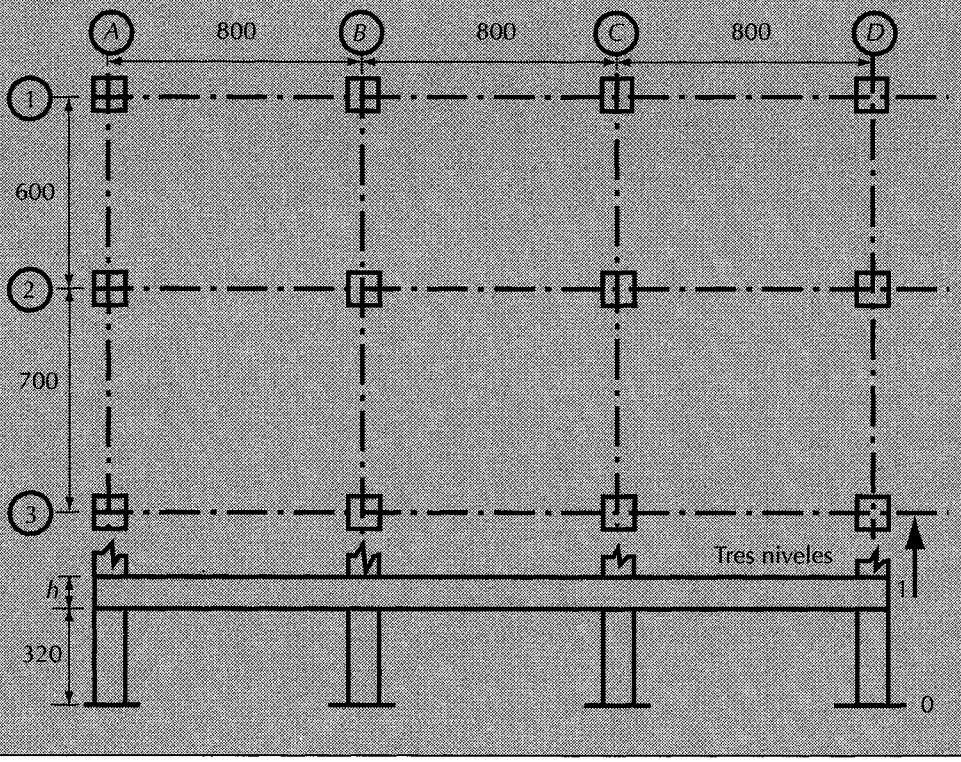
El segundo aspecto se refiere a que también debe revisarse el cortante por penetración en una sección crítica situada a *d*/2 de la periferia de la zona maciza. La magnitud de la fuerza cortante es menor en esta sección crítica que en la localizada a *d*/2 de la periferia de la columna, pero el área de la sección crítica también es menor por la presencia de los casetones.

El lector que desee ver con detalle estos dos aspectos del diseño puede consultar la referencia 18.5.

Es importante volver a recordar que en forma similar a la ilustrada debe hacerse el diseño de los marcos perpendiculares al eje 2 usando nuevamente toda la carga que actúa sobre la losa.

EJEMPLO 18.1 ***Diseño de una losa plana aligerada por el método de la estructura equivalente (NTC-04).***

DATOS



EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Columnas de 60 × 70 cm

Carga viva = 300 kg/m^2 (condiciones de servicio). Recubrimientos = 130 kg/m^2

f'_c = 250 kg/cm^2 (concreto clase 1)

f_y = 4200 kg/cm^2

DETERMINACIÓN DEL PERALTE

Se usarán casetones de 60 × 60 × 30 cm y capa de concreto de 5 cm.

El valor resultante de h es de 35 cm.

Revisión por deflexiones

$$d_{min} = k\ell\,(1 - 2\,c/3\ell) \times 1.20 \qquad \text{(ecuación 18.4)}$$

$$k = 0.00075\,\sqrt[4]{f_s\,w}$$

$$f_s = 0.6\,f_y = 2520 \text{ kg/cm}^2$$

$$w = 300 + 130 + 550^* = 980 \text{ kg/m}^2 \qquad *\text{Referencia 18.4}$$

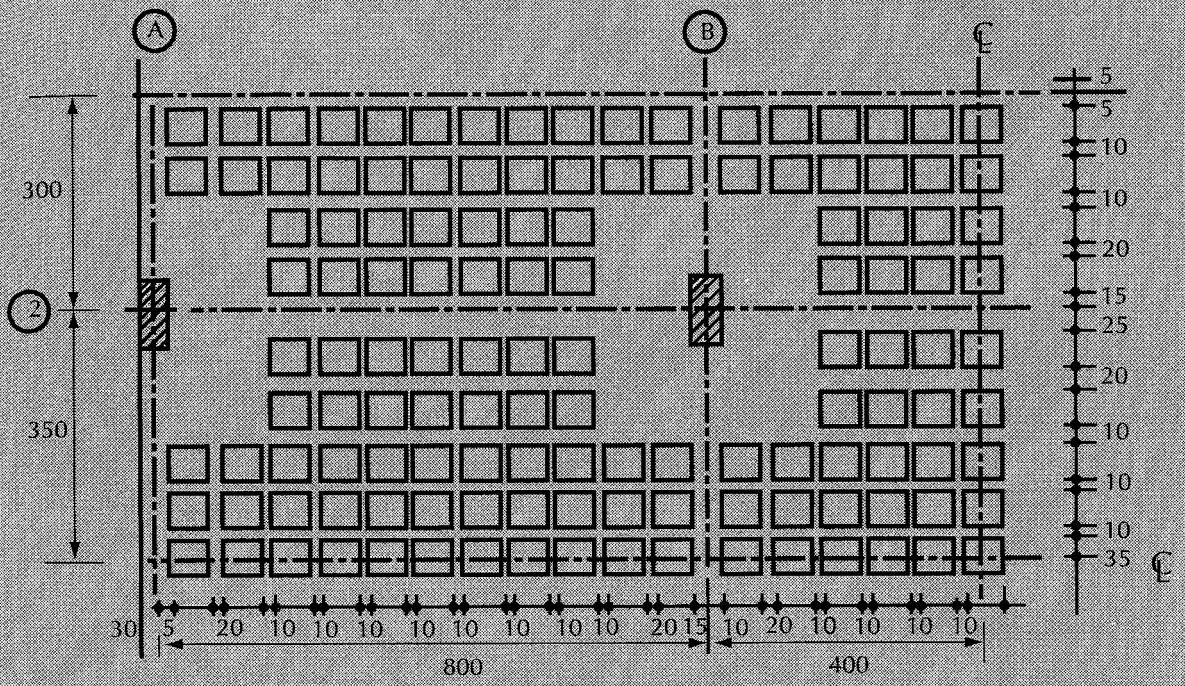
$$k = 0.00075\,\sqrt[4]{2520 \times 980} = 0.030 > 0.025$$

$$d_{min} = 0.030 \times 800\left(1 - \frac{2 \times 60}{3 \times 800}\right) \times 1.20 = 27 \text{ cm}$$

$$h_{min} = 27 + \text{recubrimiento} = 27 + 3 = 30 \text{ cm} < 35\text{cm}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

CROQUIS DE CASETONES



casetones de 60 × 60 cm

Revisión del peso propio de la losa

En el tablero de 8 × 6 m:

$Volumen = 8 \times 6 \times 0.35 - 72 \times 0.6 \times 0.6 \times 0.30 = 9\ m^3$

$$W = 9 \times 2400 = 21{,}600\ kg$$

$$w = \frac{21{,}600}{48} = 450\ kg/m^2$$

Carga definitiva

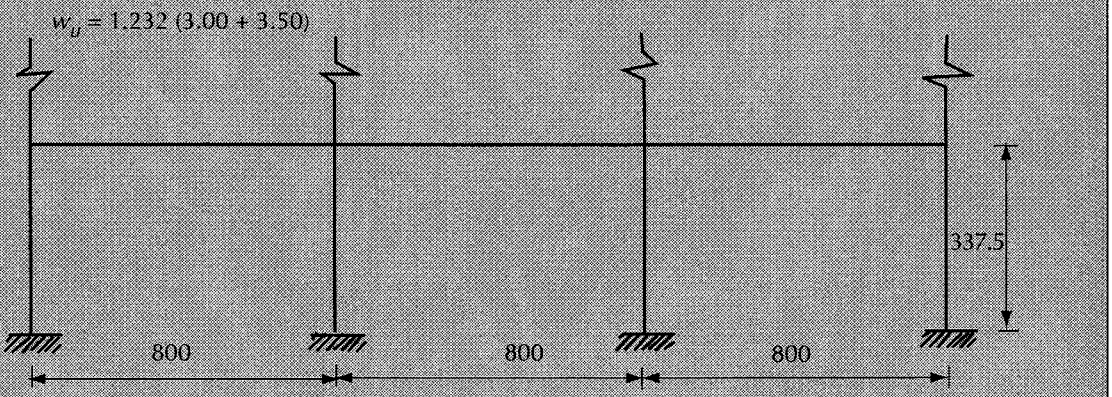
$$w = 300 + 130 + 450 = 880\ kg/m^2$$
$$w_u = 880 \times 1.4 = 1232\ kg/m^2 \text{ (cargas permanentes)}$$
$$w_u = 880 \times 1.1 = 924\ kg/m^2 \text{ (cargas accidentales)}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

ANÁLISIS ESTRUCTURAL

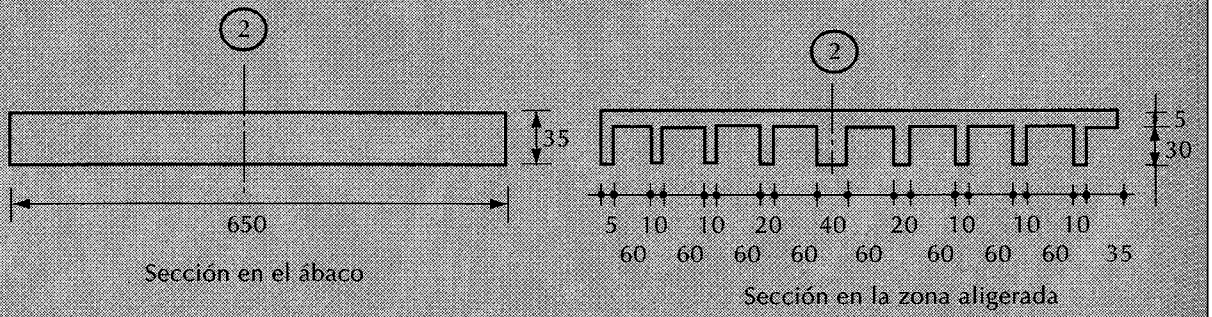
Se ilustra el eje 2.

a) Carga vertical



Ancho equivalente de la viga

b = 300 + 350 = 650 cm (figura 18.7*a*)



Para la sección en el ábaco

$$I_2 = \frac{650 \times 35^3}{12} = 232 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la sección en la zona aligerada

Centroide:

$$\bar{x} = \frac{650 \times 5 \times 32.5 + 135 \times 30 \times 15}{650 \times 5 + 135 \times 30} = 22.8 \text{ cm}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

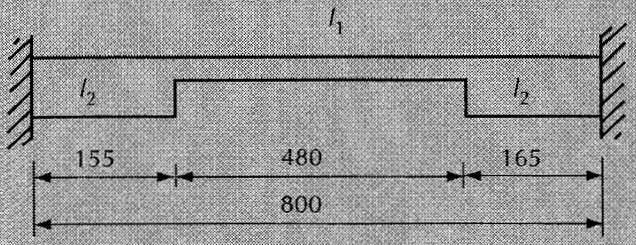
momento de inercia:

$$I_1 = \frac{650 \times 5^3}{12} + 650 \times 5\,(32.5 - 22.8)^2 + \frac{135 \times 30^3}{12} + 135 \times 30\,(22.8 - 15)^2$$

$$I_1 = 86 \times 10^4\ \text{cm}^4$$

Cálculo de la rigidez a flexión y del factor de transporte

Ver Apéndice D.2



$\ell = 8\text{m}$

$$\lambda_1 = \frac{155}{800} = 0.19$$

$$\lambda_2 = \frac{165}{800} = 0.21$$

$$\lambda_{\text{prom.}} = \frac{160}{800} = 0.2$$

Rigidez a flexión $= K = \dfrac{\theta_{AA}}{\theta^2{}_{AA} - \theta^2{}_{AB}}$

Factor de transporte $= FT = \dfrac{\theta_{AB}}{\theta_{AA}}$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1}\left(\frac{1}{3} - 0.2 + 0.2^2 - \frac{2}{3} \times 0.2^3\right) + \frac{\ell}{EI_2}\left(0.2 - 0.2^2 + \frac{2}{3} \times 0.2^3\right)$$

$$= \frac{\ell}{EI_1}(0.168) + \frac{\ell}{EI_2}(0.165)$$

$$= \frac{\ell}{10^4\,E}\left(\frac{0.168}{86} + \frac{0.165}{232}\right) = \frac{0.00266\ell}{10^4\,E}$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1}\left(\frac{1}{6} - 0.2^2 + \frac{2}{3} \times 0.2^3\right) + \frac{\ell}{EI_2}\left(0.2^2 - \frac{2}{3} \times 0.2^3\right)$$

$$= \frac{\ell}{EI_1}(0.132) + \frac{\ell}{EI_2}(0.0347)$$

$$= \frac{\ell}{10^4\,E}\left(\frac{0.132}{86} + \frac{0.0347}{232}\right) = \frac{0.00168\ell}{10^4\,E}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

$$K = \frac{10^4\,E}{\ell}\left(\frac{0.00266}{0.00266^2 - 0.00168^2}\right) = \frac{625 \times 10^4\,E}{\ell}$$

$$K = \frac{625 \times 10^4\,E}{800} = 0.781 \times 10^4\,E$$

$$FT = \frac{0.00168}{0.00266} = 0.63$$

Momento de empotramiento perfecto $= \overline{M} = \dfrac{\theta_A}{\theta_{AA} + \theta_{AB}}$

$$\theta_A = \frac{w_u \ell^3}{24EI_1}(1 - 6 \times 0.2^2 + 4 \times 0.2^3) + \frac{w_u \ell^3}{24EI_2}(6 \times 0.2^2 - 4 \times 0.2^3)$$

$$= \frac{w_u \ell^3}{24EI_1}(0.792) + \frac{w_u \ell^3}{24EI_2}(0.208)$$

$$= \frac{w_u \ell^3}{24E \times 10^4}\left(\frac{0.792}{86} + \frac{0.208}{232}\right)$$

$$= \frac{0.010\ w_u \ell^3}{24E \times 10^4}$$

$$\overline{M} = \frac{w_u \ell^2}{24}\left(\frac{0.010}{0.00266 + 0.00168}\right) = \frac{w_u \ell^2 \times 2.30}{24}$$

$$\overline{M} = \frac{w_u \ell^2}{10.4}$$

$$w_u = 1120\ (3 + 3.50) = 7280\ \text{kg/m}$$

$$\overline{M} = \frac{7280 \times 8^2}{10.4} = 44{,}492\ \text{kg-m}$$

Para la columna nivel 0-1

$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{70 \times 60^3}{12} = 126 \times 10^4$$

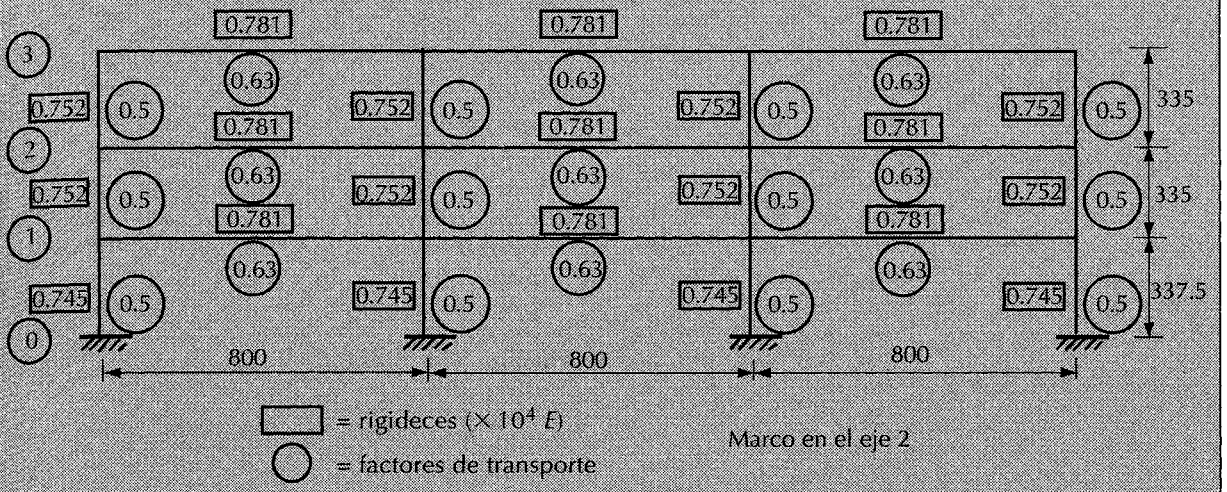
$$K = \frac{4\,EI}{\ell} = \frac{4 \times 126 \times 10^4\,E}{337.5} = 1.49 \times 10^4\,E$$

$$K_{efect} = \frac{1}{2}K = 0.745 \times 10^4\,E$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Análogamente, para la columna del nivel 1-2 se obtiene $K_{efect} = 0.752 \times 10^4\ E$.

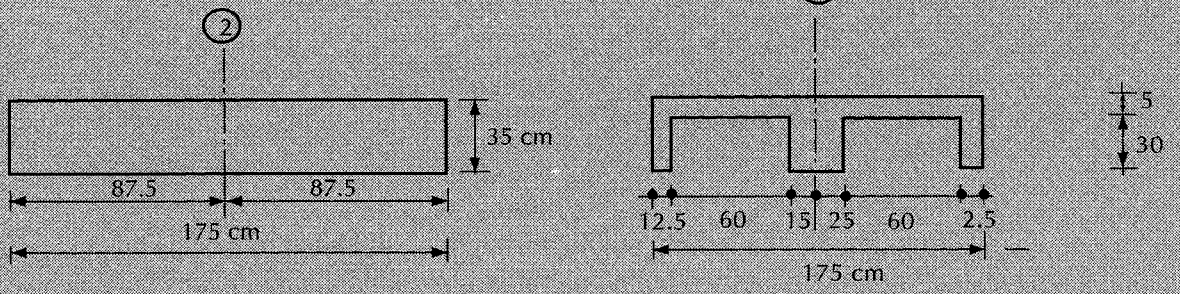
Rigideces y factores de transporte del marco a analizar:



b) Cargas laterales

Ancho equivalente de la viga

$$b = c_2 + 3h = 70 + (3 \times 35) = 175 \text{ cm}$$



Para la sección en el ábaco

$$I_2 = \frac{175 \times 35^3}{12} = 62.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la sección en la zona aligerada

Centroide:

$$\bar{x} = \frac{175 \times 5 \times 32.5 + 55 \times 30 \times 15}{175 \times 5 + 55 \times 30} = 21.1 \text{ cm}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

momento de inercia:

$$I_1 = \frac{175 \times 5^3}{12} + 175 \times 5\,(32.5 - 21.1)^2 + \frac{55 \times 30^3}{12} + 55 \times 30\,(21.1 - 15)^2$$

$$I_1 = 30.1 \times 10^4\ \text{cm}^4$$

Cálculo de la rigidez a flexión y del factor de transporte

El valor de λ_{prom} es el mismo. $\lambda_{prom} = 0.2$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1}(0.168) + \frac{\ell}{EI_2}(0.165)$$

$$= \frac{\ell}{10^4\,E}\left(\frac{0.168}{30.1} + \frac{0.165}{62.5}\right) = \frac{0.00822\ell}{10^4\,E}$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1}(0.132) + \frac{\ell}{EI_2}(0.0347)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{10^4\,E}\left(\frac{0.132}{30.1} + \frac{0.0347}{62.5}\right) = \frac{0.00494\ell}{10^4\,E}$$

$$K = \frac{10^4\,E}{\ell}\left(\frac{0.00822}{0.00822^2 - 0.00494^2}\right) = \frac{190.4 \times 10^4\,E}{\ell}$$

$$K = \frac{190.4 \times 10^4\,E}{800} = 0.238 \times 10^4\,E$$

$$FT = \frac{0.00494}{0.00822} = 0.60$$

Para la columna nivel 0-1

$$I = \frac{b\,h^3}{12} = \frac{70 \times 60^3}{12} = 126 \times 10^4$$

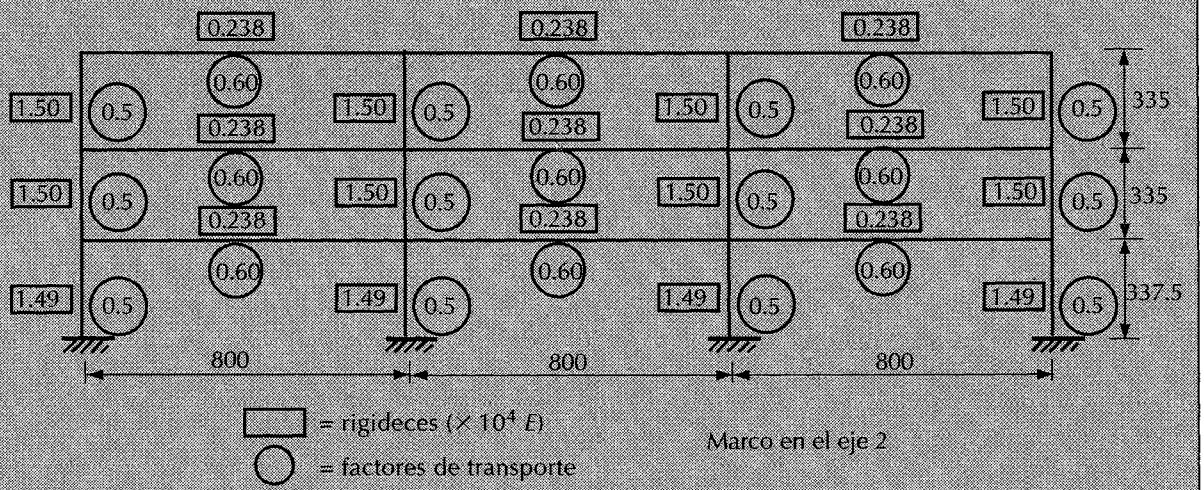
$$K = \frac{4\,EI}{\ell} = \frac{4 \times 126 \times 10^4\,E}{337.5} = 1.49 \times 10^4\,E$$

Para la columna nivel 0.2

$$K = 1.5 \times 10^4\,E$$

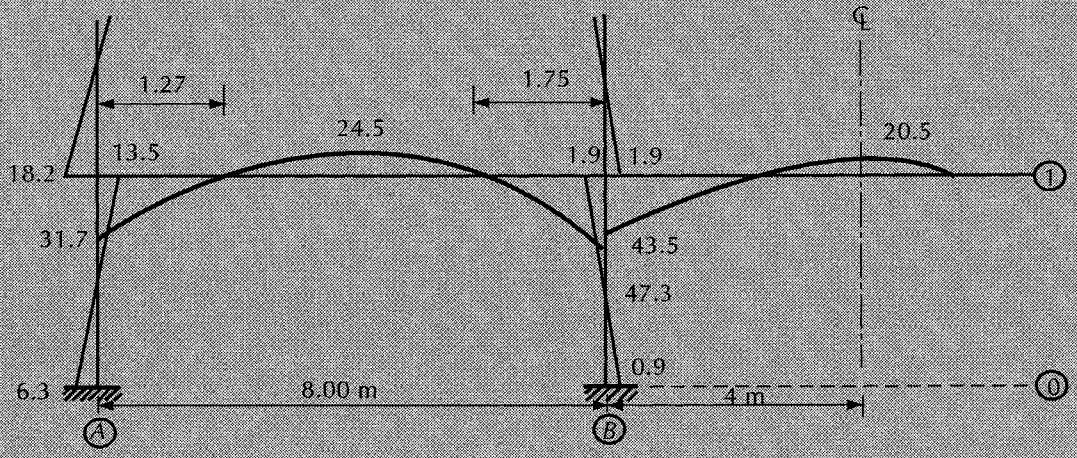
EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Rigideces y factores de transporte del marco a analizar:

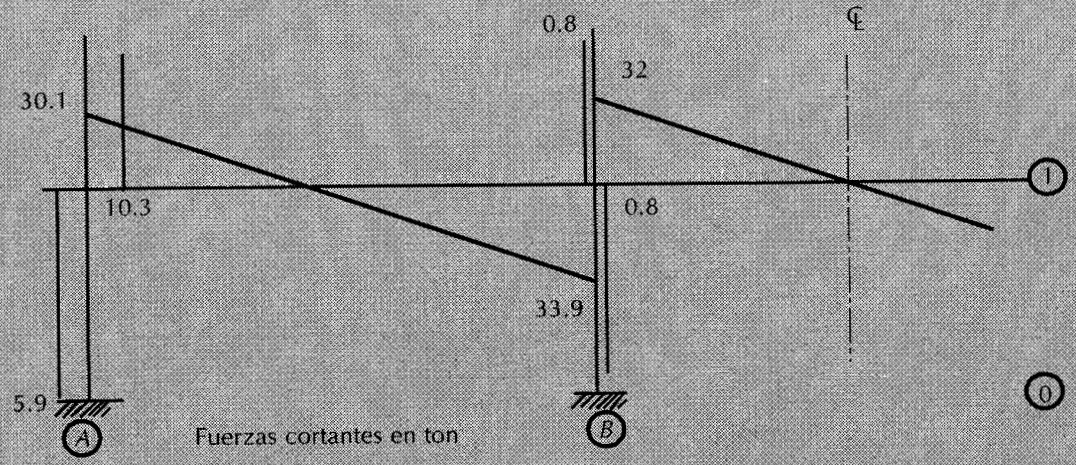


Después de analizar el marco se obtuvieron los siguientes momentos flexionantes y fuerzas cortantes.

a) Con carga muerta y carga viva.

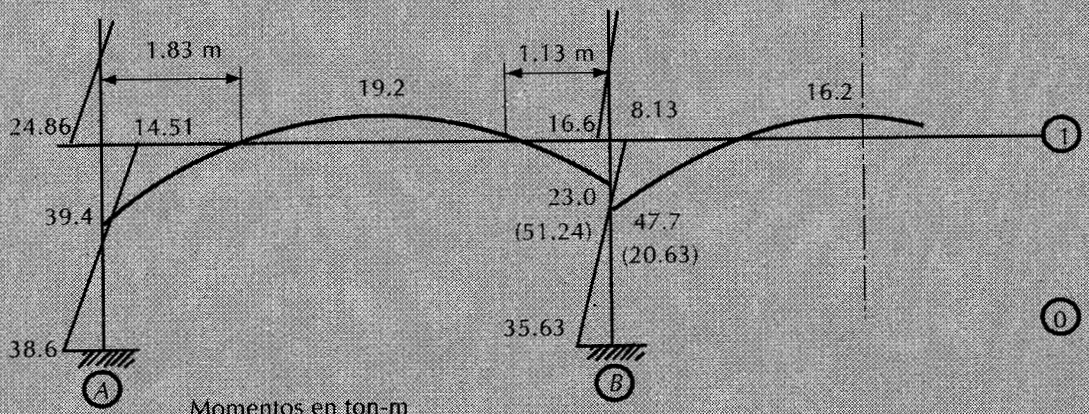


EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

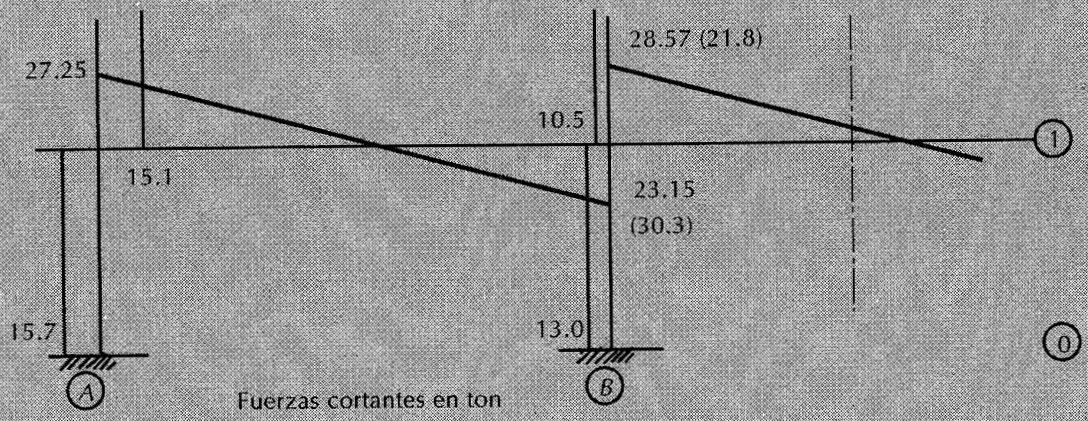


Fuerzas cortantes en ton

b) Con carga muerta, carga viva y carga accidental (fuerzas horizontales)



Momentos en ton-m

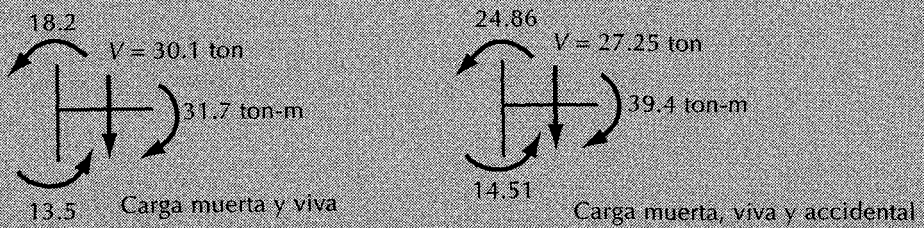


Fuerzas cortantes en ton

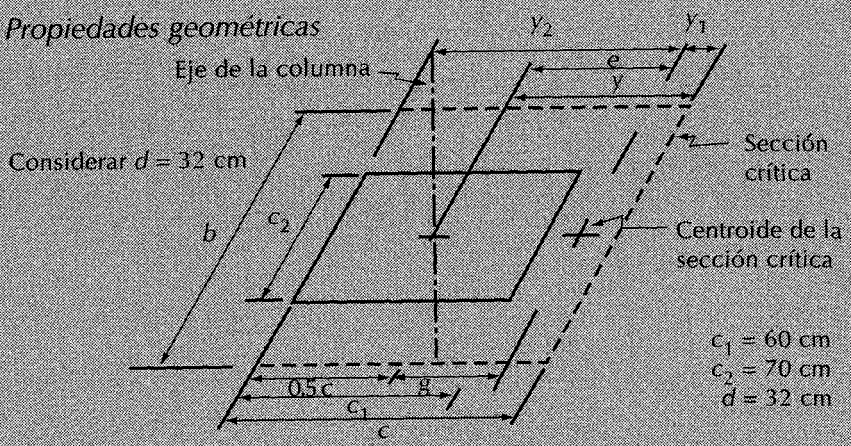
Ejemplo 18.1 (*continuación*)

REVISIÓN DEL CORTANTE POR PENETRACIÓN DE LA COLUMNA A-2

Acciones sobre la columna



Propiedades geométricas



$c = c_1 + d/2 = 60 + 16 = 76$ cm

$b = c_2 + d = 70 + 32 = 102$ cm

Área sección crítica = $A_c = (2c + b)\, d = (2 \times 76 + 102)\, 32 = 8128$ cm^2

Cálculo del centroide de la sección crítica:

$$(2c + b)\, g = b \times \frac{c}{2}$$

$$g = \frac{bc}{2\,(2c + b)} = \frac{102 \times 76}{2\,(2 \times 76 + 102)} = 15.2 \text{ cm}$$

$$y = c - \frac{c_1}{2} = 76 - \frac{60}{2} = 46 \text{ cm}$$

$$y_1 = \frac{c}{2} - g = \frac{76}{2} - 15.2 = 22.8 \text{ cm}$$

$$e = y - y_1 = 46 - 22.8 = 23.2 \text{ cm}$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Cálculo del momento polar de inercia (ver ecuación 7.21 y figura 7.17):

$$J = \frac{cd^3}{6} + \frac{dc^3}{6} + bd\,y_1^2 + 2c\,dg^2$$

$$J = \frac{76 \times 32^3}{6} + \frac{32 \times 76^3}{6} + 102 \times 32 \times 22.8^2 + 2 \times 76 \times 32 \times 15.2^2$$

$$J = 5{,}576{,}800 \text{ cm}^4$$

Cálculo de la fracción de momento flexionante que se transmite por excentricidad de la fuerza cortante:

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(c_1 + d/2)}{(c_2 + d)}}}$$ (ver ecuación 7.20 y figura 7.10)

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{76}{102}}} = 0.365$$

a) Revisión bajo carga muerta y viva

$$(v_u)_{máx} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u}{J} y_1$$ (ver ecuación 7.21 y figura 7.17)

$$(v_u)_{máx} = \frac{30{,}100}{8128} + \frac{0.365 \times 31.7 \times 10^5 \times 22.8}{55.768 \times 10^5}$$

$$(v_u)_{máx} = 3.7 + 4.7 = 8.4 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_c = F_R \sqrt{f^*_c} = 0.7 \sqrt{200} = 9.9 \text{ kg/cm}^2$$ (ecuación 7.27)

$$v_c = (0.5 + \gamma) F_R \sqrt{f^*_c} = \left(0.5 + \frac{60}{70}\right) F_R \sqrt{f^*_c} > F_R \sqrt{f^*_c}$$ (ecuación 7.26)

Como $(v_u)_{máx} < v_c$, no se requiere refuerzo por cortante.

b) Revisión bajo carga muerta, viva y accidental

$$(v_u)_{máx} = \frac{27{,}250}{8128} + \frac{0.365 \times 39.4 \times 10^5 \times 22.8}{55.768 \times 10^5}$$

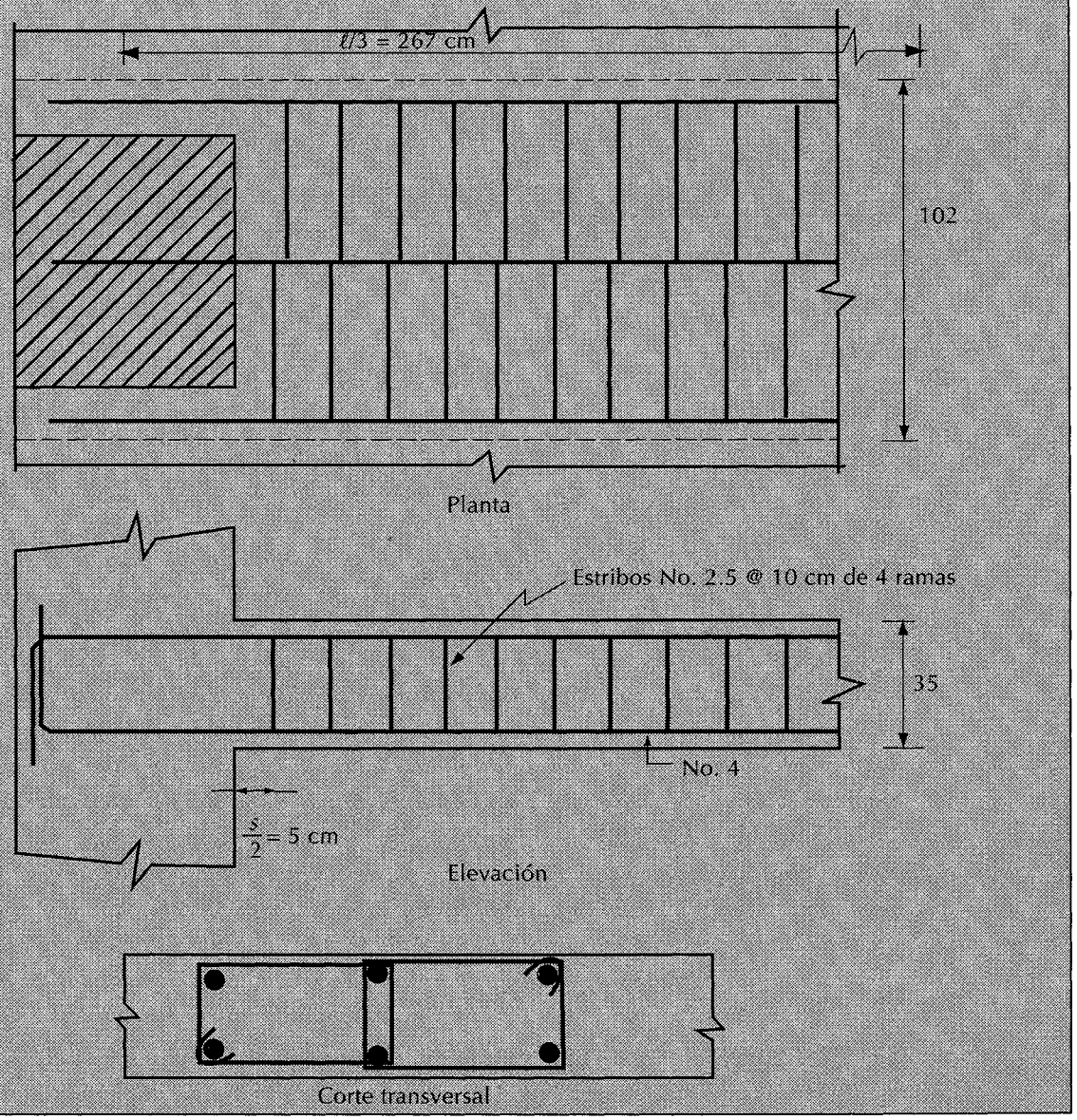
EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

$(v_u)_{máx} = 3.4 + 5.9 = 9.3$ kg/cm^2

Como $(v_u)_{máx} < v_c$, tampoco se requiere refuerzo por cortante.

Se colocan estribos No. 2.5 a cada 10 cm ($d/3$) como esfuerzo mínimo en una viga ficticia de ancho $b = 102$ cm y peralte $d = 32$ cm. También se colocan barras longitudinales en las esquinas de la viga y en los dobleces de los estribos, como se muestra en el croquis siguiente

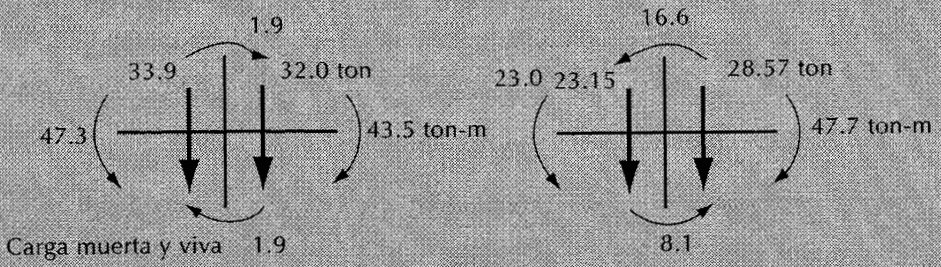
Croquis del refuerzo transversal:



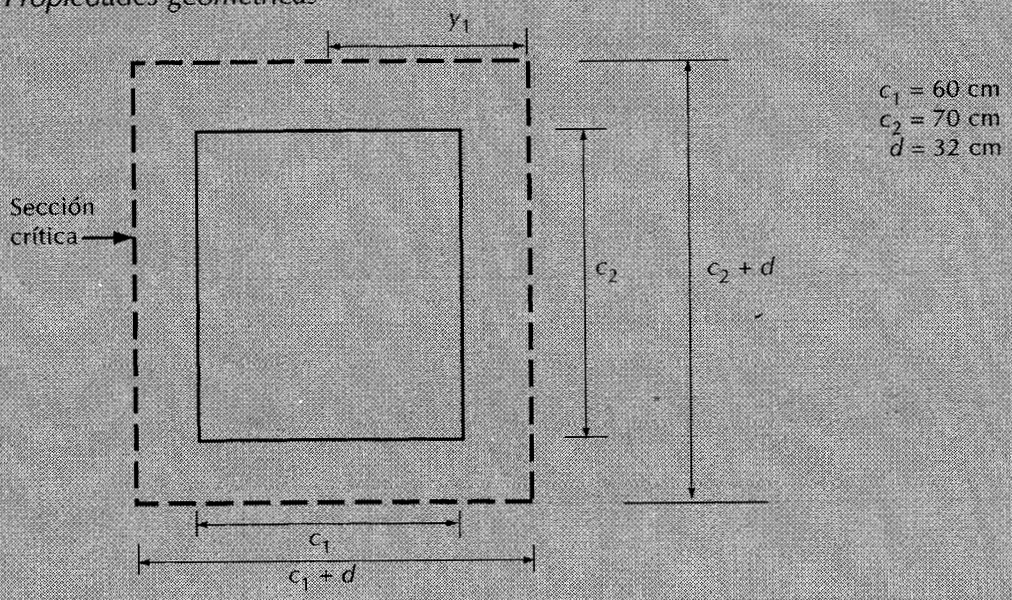
EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

REVISIÓN DEL CORTANTE POR PENETRACIÓN DE LA COLUMNA B-2

Acciones sobre la columna



Propiedades geométricas



$c_1 + d = 60 + 32 = 92$ cm

$c_2 + d = 70 + 32 = 102$ cm

$$y_1 = \frac{c_1 + d}{2} = \frac{92}{2} = 46 \text{ cm}$$

Área sección crítica = $A_c = 2d\,(c_1 + c_2 + 2d)$

$A_c = 2 \times 32\,(60 + 70 + 64) = 12{,}416$ cm^2

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Cálculo de la fracción de momento flexionante que se transmite por excentricidad de la fuerza cortante

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{(c_1 + d)}{(c_2 + d)}}} \qquad \text{(ecuación 7.20)}$$

$$\gamma_v = 1 - \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{92}{102}}} = 0.39$$

Cálculo del momento polar de inercia

$$J = \frac{d\,(c_1 + d)^3}{6} + \frac{(c_1 + d)\,d^3}{6} + \frac{d\,(c_2 + d)\,(c_1 + d)^2}{2} \qquad \text{(figura 7.17)}$$

$$J = \frac{32 \times 92^3}{6} + \frac{92 \times 32^3}{6} + \frac{32 \times 10^2 \times 92^2}{2}$$

$$J = 184.69 \times 10^5 \text{ cm}^4$$

a) Revisión bajo carga muerta y viva

$$(v_u)_{máx} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u}{J}\, y_1 \qquad \text{(ecuación 7.21)}$$

$$(v_u)_{máx} = \frac{(33.9 + 32.0) \times 10^3}{12{,}416} + \frac{0.39\,(47.3 - 43.5) \times 10^5 \times 46}{184.69 \times 10^5}$$

$$(v_u)_{máx} = 5.3 + 0.4 = 5.7 \text{ kg/cm}^2$$

$$v_c = F_R \sqrt{f^*_c} = 0.7 \sqrt{200} = 9.9 \text{ kg/cm}^2$$

$(v_u)_{máx} < v_c$, no se requiere refuerzo por cortante

b) Revisión bajo carga muerta, viva y accidental

$$(v_u)_{máx} = \frac{V_u}{A_c} + \frac{\gamma_v M_u}{J}\, y_1 \qquad \text{(ecuación 7.19)}$$

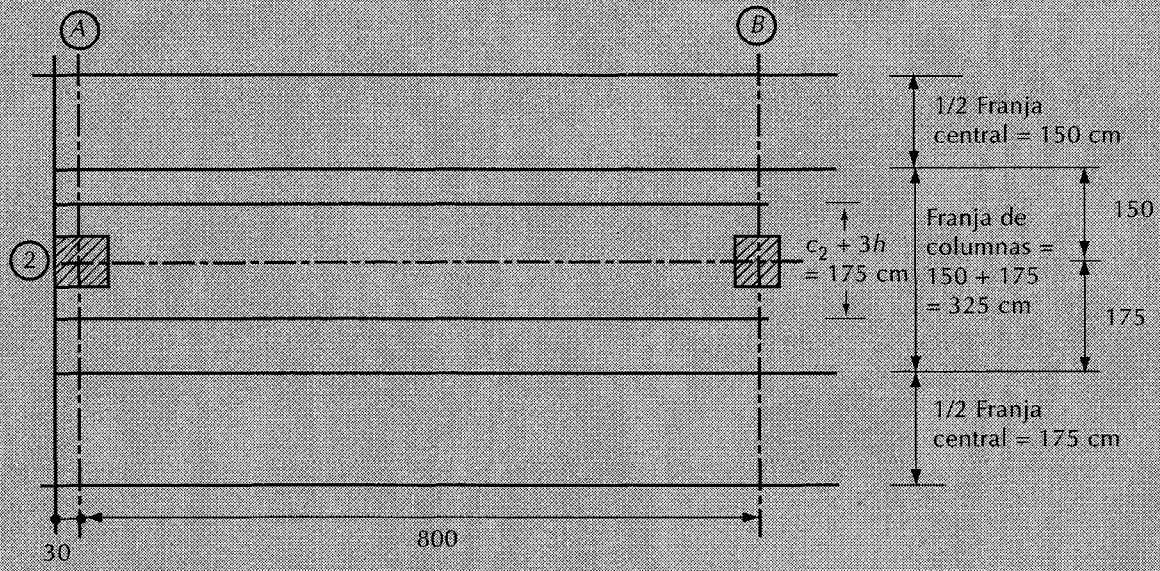
$$(v_u)_{máx} = \frac{(23.15 + 28.57) \times 10^3}{12{,}416} + \frac{0.39\,(47.7 - 23.0) \times 10^5 \times 46}{184.69 \times 10^5}$$

$$(v_u)_{máx} = 4.2 + 2.4 = 6.6 \text{ kg/cm}^2 < v_c$$

No se requiere refuerzo por cortante.
Croquis de refuerzo mínimo similar al de la columna *A*-2.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

DIMENSIONAMIENTO POR FLEXIÓN



Eje 2, claro A-B, extremo A (momentos negativos)

El momento máximo ocurre bajo carga muerta, carga viva y carga accidental simultáneamente:

$$M_u = 39.4 \text{ ton-m}$$

El momento en la sección crítica localizada en el paño de columnas es:

$$M_{crit} = M_{eje} - V\frac{c_1}{2} + w\left(\frac{c_1}{2}\right)\left(\frac{c_1}{4}\right)$$

$$M_{crit} = 39.4 - 27.25 \times 0.30 + 0.924 \times 6.50 \times 0.30 \times 0.15$$

$$M_{crit} = 31.5 \text{ ton-m}$$

Por ser un borde, todo el refuerzo necesario se debe colocar en un ancho $c_2 + 3h = 175$ cm

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{31.5 \times 10^5}{0.9 \times 175 \times 32^2 \times 170} = 0.115$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

De la gráfica del Apéndice A:

$$q = 0.125$$

$$\rho = \frac{qf''_c}{f_y} = \frac{0.125 \times 170}{4200} = 0.0051$$

$$\rho_{mín} = \frac{0.7\sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.7\sqrt{250}}{4200} = 0.0026$$

$$\rho_{bal} = \frac{f''_c}{f_y}\frac{4800}{f_y + 6000} = \frac{170 \times 4800}{4200\,(4200 + 6000)} = 0.019$$

$$0.75\,\rho_{bal} = 0.75 \times 0.019 = 0.014$$

$$\rho_{mín} < \rho < 0.75\,\rho_{bal}$$

$$A_s = 0.0051 \times 175 \times 32 = 28.56\ \text{cm}^2$$

Usar 10 barras del No. 6 repartidas en la franja de 175 cm. Al menos el 60 por ciento (6 barras) deben pasar por el núcleo de la columna.

Fuera de la franja de 175 cm de ancho quedan las siguientes nervaduras:

1 fracción de nervadura de ancho $b = 7.5$ cm
1 fracción de nervadura de ancho $b = 17.5$ cm
5 nervaduras de ancho $b = 10$ cm
1/2 nervadura de ancho $b = 5$ cm

En estas nervaduras se debe colocar el acero mínimo, tomando $b = 10$ cm, el área necesaria sería:

$$A_s = \rho_{mín}\, bd = 0.0024 \times 10 \times 32 = 0.768\ \text{cm}^2$$

Se puede colocar una barra del No. 4 en cada nervadura

Transmisión de momento por flexión entre losa y columna:

Una fracción igual a $(1 - \gamma_v)\, M_u$ debe transferirse por flexión en una franja de ancho $c_2 + 3h$:

$$(1 - \gamma_v)\, M_u = (1 - 0.365)\, 39.4 = 25.0\ \text{ton-m} < (M_{crít} = 31.5)$$

No hay problema de transmisión de momento.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Eje 2, claro A-B, momentos positivos

a) Por cargas verticales
a-1) Momento en la franja de columnas:

$M(+) = 24.5$ ton-m

Momento franja de columnas $= 0.6 \times 24.5 = 14.7$ ton-m

Ancho de todas las nervaduras en la franja de columnas:

1. Una nervadura de 40 cm
2. Dos nervaduras de 20 cm
3. Una nervadura de 10 cm

$b = 40 + 20 + 10 = 70$ cm

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{14.7 \times 10^5}{0.9 \times 70 \times 32^2 \times 170} = 0.134$$

De la gráfica del Apéndice A:

$q = 0.15$

$$\rho = \frac{0.15 \times 170}{4200} = 0.0061$$

$\rho_{mín} < \rho < 0.75\, \rho_{bal}$

Áreas de acero:

1. En la nervadura de 40 cm $= 0.0061 \times 40 \times 32 = 7.8$ cm^2, usar tres barras del No. 6
2. En cada nervadura de 20 cm $= 0.0061 \times 20 \times 32 = 3.9$ cm^2, usar tres barras del No. 4.
3. En la nervadura de 10 cm $= 0.0061 \times 10 \times 32 = 1.95$ cm^2, usar dos barras de No. 4.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

a-2) Momento en la franja central:

$M(+) = 24.5$ ton-m

Momento franja central $= 0.4 \times 24.5 = 9.8$ ton-m

Ancho de todas las nervaduras en la franja central:

1. Cuatro nervaduras de 10 cm
2. Una media nervadura de 5 cm

$b = 4 \times 10 + 5 = 45$ cm

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{9.8 \times 10^5}{0.9 \times 45 \times 32^2 \times 170} = 0.14$$

De la gráfica del Apéndice A:

$q = 0.15$

$$\rho = \frac{0.15 \times 170}{4200} = 0.0061$$

$\rho_{mín} < \rho < 0.75\, \rho_{bal}$

Áreas de acero:

1. En cada nervadura de 10 cm $= 0.0061 \times 10 \times 32 = 1.95$ cm^2, usar dos barras del No. 4.

2. En la media nervadura de 5 cm $= 0.0061 \times 5 \times 32 = 0.98$ cm^2, usar una barra del No. 4 que se sumará al área de acero que se obtenga al analizar el eje 1.

b) Por cargas verticales y horizontales simultáneas

$$M(+)_{c.v.} = \frac{1.1}{1.4} \times 24.5 = 19.25 \text{ ton-m}$$

$M(+)_{sismo} = 19.2 - 19.25 = -0.05$ ton-m $\simeq 0$

Es más desfavorable el caso de cargas verticales únicamente.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Eje 2, claro A-B, extremo B (momentos negativos)

a) Por cargas verticales
a-1) Momento en la franja de columnas:

$M(-) = 47.3$ ton-m

Momento en la sección crítica:

$$M_{\text{crít.}} = M_{\text{eje}} - V\frac{c_1}{2} + w\left(\frac{c_1}{2}\right)\left(\frac{c_1}{4}\right)$$

$$M_{\text{crít.}} = 47.3 - 33.9 \times 0.30 + 1.232 \times 6.50 \times 0.30 \times 0.15$$

$$M_{\text{crít.}} = 37.5 \text{ ton-m}$$

Momento en la franja de columnas:

$$M_{\text{f. col.}} = 0.75 \times 37.5 = 28.1 \text{ ton-m}$$

Toda la franja de columnas queda dentro de la zona maciza de losa, por lo tanto $b = 150 + 175 = 325$ cm

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{28.1 \times 10^5}{0.9 \times 325 \times 32^2 \times 170} = 0.055$$

De la gráfica del Apéndice A:

$$q = 0.060$$

$$\rho = \frac{0.060 \times 170}{4200} = 0.0024$$

$$\rho = \rho_{\text{mín}}$$

$$A_s = 0.0024 \times 325 \times 32 = 25.0 \text{ cm}^2$$

En una franja de ancho $c_2 + 3h$ se deben colocar 12.5 cm^2 y en el resto de la franja de columnas los otros 12.5 cm^2. Las barras se propondrán después de diseñar por cargas verticales y horizontales simultáneas para determinar qué caso es más desfavorable.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

a-2) Momento en la franja central:

$M_{crít.} = 37.5$ ton-m

Momento franja central:

$M_{f.\ central} = 0.25 \times 37.5 = 9.4$ ton-m

En la franja central quedan las siguientes nervaduras

1. Cuatro nervaduras de 10 cm
2. Una media nervadura de 5 cm

Por lo tanto, $b = 4 \times 10 + 5 = 45$ cm

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{9.4 \times 10^5}{0.9 \times 45 \times 32^2 \times 170} = 0.133$$

De la gráfica del Apéndice A:

$q = 0.145$

$$\rho = \frac{0.145 \times 170}{4200} = 0.0059$$

$\rho_{mín} < \rho < 0.75\ \rho_{bal}$

Área de acero en cada nervadura de 10 cm:

$(A_s)_{nerv.} = 0.0059 \times 10 \times 32 = 1.89\ cm^2 = 2$ barras del No. 4

b) Por cargas verticales y horizontales simultáneas
b-1) Franja de columnas

$M_{eje} = 51.24$ ton-m

En la sección crítica

$$M_{crít.} = M_{eje} - V\frac{c_1}{2} + w\left(\frac{c_1}{2}\right)\left(\frac{c_1}{4}\right)$$

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

$$M_{\text{crít.}} = 51.24 - 30.3 \times 0.30 + 0.924 \times 0.30 \times 0.15$$

$$M_{\text{crít.}} = 42.19 \text{ ton-m}$$

La parte de este momento producida por cargas verticales es:

$$M_{\text{c.v.}} = \frac{1.1}{1.4} \times 37.5 = 29.5 \text{ ton-m}$$

(1.1 es el factor de carga para acciones combinadas, 1.4 es el factor de carga para carga vertical únicamente y 37.5 es el momento en la sección crítica para carga vertical únicamente)

La parte del momento debida a cargas horizontales es:

$$M_{\text{c.h.}} = 42.19 - 29.5 = 12.69 \text{ ton-m}$$

Momento por carga vertical en franja de columnas:

$$M_{\text{f.col.}} = 0.75 \times 29.5 = 22.1 \text{ ton-m}$$

La mitad de este momento se asigna a la franja de ancho $c_2 + 3h$ y se suma al momento por cargas horizontales. La otra mitad se asigna al resto de la franja de columnas.

Momento en la franja de ancho $c_2 + 3h = 175$ cm:

$$M = \frac{22.1}{2} + 12.69 = 23.74 \text{ ton-m}$$

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{23.74 \times 10^5}{0.9 \times 175 \times 32^2 \times 170} = 0.087$$

De la gráfica del Apéndice A:

$$q = 0.095$$

$$\rho = \frac{0.095 \times 170}{4200} = 0.00385$$

$$\rho_{\text{mín}} < \rho < 0.75\, \rho_{\text{bal}}$$

$$A_s = 0.00385 \times 175 \times 32 = 21.6 \text{ cm}^2$$

Esta área de acero resulta mayor que la obtenida para el caso de carga vertical únicamente que resultó de 12.5 cm^2

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

Momento en el resto de la franja de columnas:

$$M = \frac{22.1}{2} = 11.05 \text{ ton-m}$$

$$b = 325 - 175 = 150 \text{ cm}$$

$$\frac{M_R}{F_R\, bd^2\, f''_c} = \frac{11.05 \times 10^5}{0.9 \times 150 \times 32^2 \times 170} = 0.0047$$

De la gráfica del Apéndice A:

$$q = 0.050$$

$$\rho = \frac{0.050 \times 170}{4200} = 0.002 < (\rho_{mín} = 0.0024)$$

Para el resto de la franja de columnas es más desfavorable el caso de cargas verticales únicamente. Por lo tanto, se debe colocar un área de acero de 12.5 cm^2.

Revisión de la transmisión de momento entre losa y columna

Momento que debe transferirse por flexión en una franja de ancho $c_2 + 3h$:

$$M = (1 - \gamma_v)\, M_u = (1 - 0.39)\,(47.7 - 23.0) = 15.07 \text{ ton-m}$$

Este momento es menor que el momento de 23.74 ton-m con el que ya se diseñó el acero de la franja de ancho $c_2 + 3h$.

b-2) Franja central

Momento por cargas verticales en franja central:

$$M_{f.\,central} = 0.25 \times 29.5 = 7.38 \text{ ton-m}$$

Momento por cargas horizontales en franja central igual a cero porque todo se asignó a la franja de ancho $c_2 + 3h$.

M total en franja central = 7.38 < (9.4 para carga vertical)

El acero en la franja central es el que se calculó para cargas verticales únicamente.

EJEMPLO 18.1 (*continuación*)

c) Barras de acero necesarias

En la franja de ancho $c_2 + 3h$

$$A_s = 21.6 \text{ cm}^2 = 8 \text{ barras del No. 6}$$

El 60 por ciento del área correspondiente a cargas horizontales debe cruzar el núcleo de la columna. Esta área es:

$$(A_s)_{\text{núcleo}} = 0.6 \times \frac{12.69}{23.74} \times 21.6 = 6.95 \text{ cm}^2 = 3 \text{ barras No. 6}$$

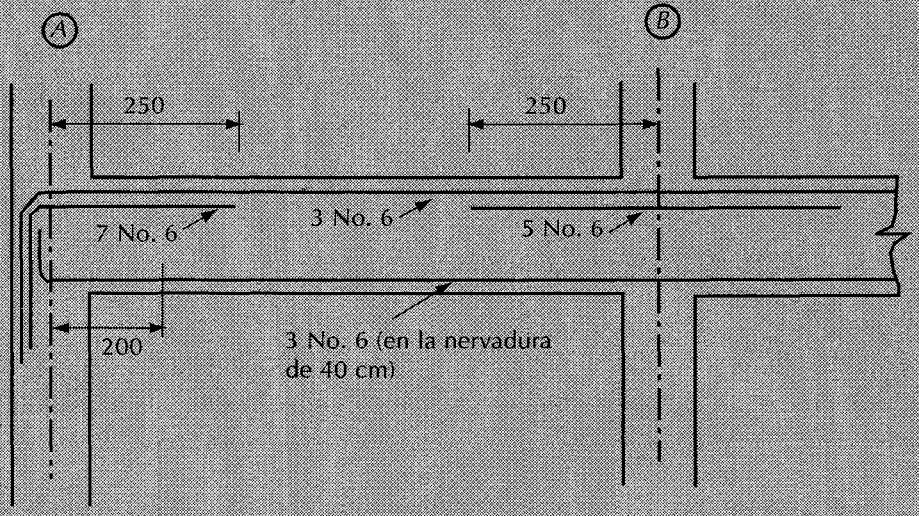
En el resto de la franja de columnas:

$$A_s = 12.5 \text{ cm}^2 = 10 \text{ barras del No. 4.}$$

En la franja central:

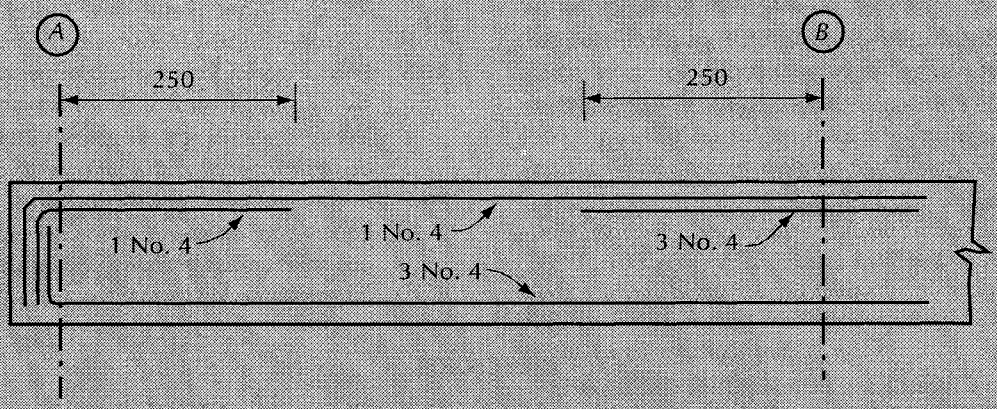
$$(A_s)_{\text{nervadura}} = 1.98 = 2 \text{ barras del No. 4 en cada nervadura de 10 cm de ancho.}$$

CROQUIS DE ARMADO

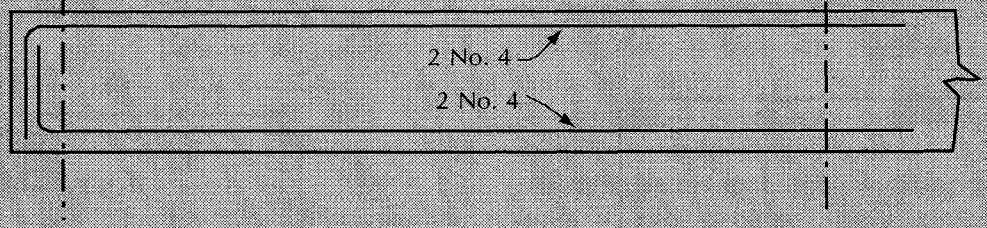


Franja de 175 cm de ancho

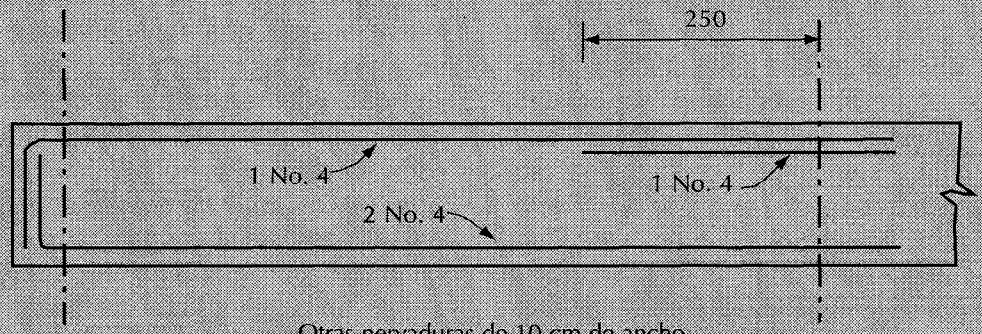
EJEMPLO 18.1 (*continuación*)



Nervaduras de 20 cm de ancho



Primera nervadura de 10 cm de ancho abajo del eje 2



Otras nervaduras de 10 cm de ancho

Referencias

18.1 Jiménez Montoya, P., A. García Meseguer, y F. Morán Cabre, Hormigón Armado, 10ª edición, Editorial Gustavo Gili, S. A., España, 1982.

18.2 Loera, Santiago, "Revisión de los criterios de análisis del Reglamento DDF para edificios con losas planas", trabajo inédito.

18.3 Meli, Roberto, y M. Rodríguez, "Diseño sísmico de edificios con losas reticulares", Memorias del V Congreso Nacional de *Ingeniería Sísmica*, Guadalajara, oct. 31-nov. 3, 1979.

18.4 "Ayudas para diseño de estructuras", Sociedad Mexicana de *Ingeniería* Estructural, México, D. F., 1983.

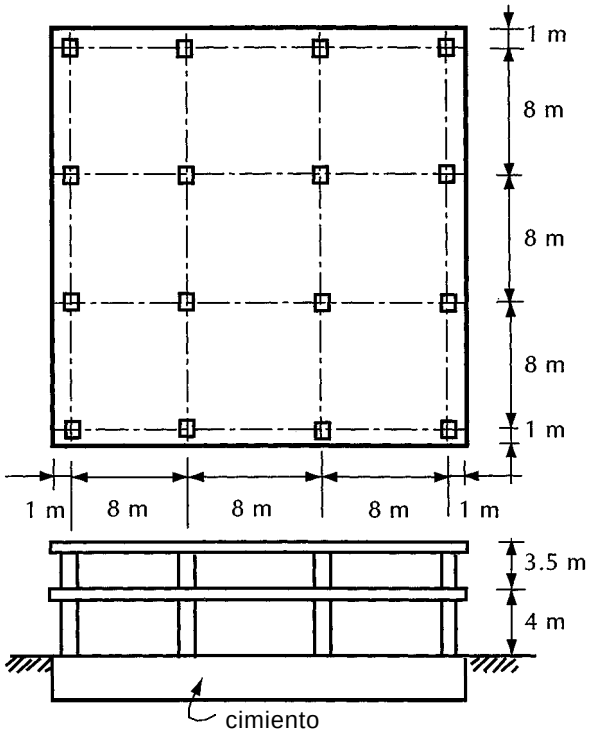
18.5 Loera, S., C. J. Mendoza, M. Rodríguez y R. Meli. "Comentarios, ayudas de diseño y ejemplos de las Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto, DDF." Series del Instituto de Ingeniería, UNAM, No. ES-2. México, noviembre de 1991.

18.6 Loera Pizarro, S., y Ávila Rodríguez, J. A. "Análisis bajo carga vertical de losas planas con capiteles y ábacos". Series del Instituto de Ingeniería de la UNAM, No. 620, julio 2000.

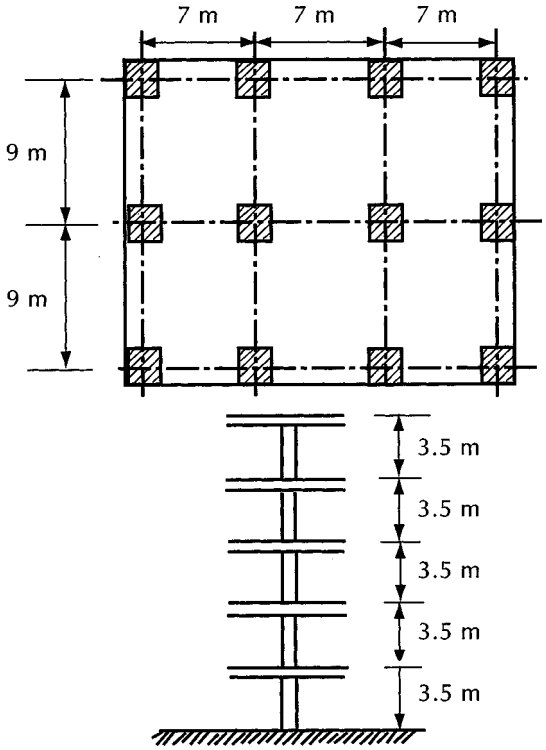
18.7 Loera Pizarro, S., y Ávila Rodríguez, J. A. "Ancho equivalente de losas planas con capiteles y ábacos ante fuerzas laterales". Series del Instituto de Ingeniería de la UNAM, No. 622, abril 2001.

Ejercicios

18.1 Dimensionar el primer nivel de la estructura de placas planas representada en el croquis, de acuerdo con las NTC-04. Dimensionar las columnas de ambos niveles. Considerar una carga viva de servicio de 500 kg/m^2 y una carga muerta (sin incluir el peso propio) de 200 kg/m^2. Considerar igual carga en ambos niveles. Suponer F_c = 1.4, f'_c = 200 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. Hacer croquis de armados.



18.2 Utilizando la NTC-04 dimensionar la placa plana del primer nivel de la estructura del croquis y las columnas encima y debajo de este nivel. Suponer que se trata de un edificio de oficinas, que se consideran acciones sísmicas de acuerdo con el Reglamento del Distrito Federal y que se utiliza un factor de ductilidad Q = 2. Considerar que la carga muerta, incluyendo el peso propio, es igual a 600 kg/m^2 en todos los niveles. Hacer croquis de armados.



CAPÍTULO 19

Método generalizado para el diseño de losas apoyadas perimetralmente y de losas planas

19.1 Introducción. /19.2 Comportamiento de sistemas de piso. Variables principales. /19.3 Método directo. /19.4 Ejemplo de diseño con el método directo. /19.5 Método de la estructura equivalente. /19.6 Ejemplo de diseño con el método de la estructura equivalente. /19.7 Comentarios sobre el método de la estructura equivalente.

19.1 Introducción

En el capítulo 17 se estudió el diseño de losas apoyadas en su perímetro sobre elementos cuya rigidez a flexión era mucho mayor que la rigidez de la propia losa. Estos elementos podían ser vigas con peralte varias veces superior al de la losa, o muros que podían considerarse como elementos con rigidez a flexión infinita. Las losas transmitían las cargas verticales a los elementos de apoyo, los cuales, en el caso de vigas, los transmitían a las columnas y éstas a la cimentación; en el caso de muros, éstos las transmitían directamente a la cimentación. El método de diseño estudiado en ese capítulo permitía dimensionar la losa con independencia casi total de los elementos de apoyo perimetrales (excepto por la diferencia entre caso I y caso II de la tabla 17.1), y sin importar las características de las columnas en que se apoyaban las vigas.

Por otra parte, en el capítulo 18 se estudiaron losas apoyadas directamente sobre columnas, es decir, estructuras en que no existían vigas o muros en que se apoyasen las losas. Los métodos de diseño planteados fueron totalmente diferentes, ya que para este caso, especialmente en el método de la estructura equivalente, las características de las columnas influían notablemente en el diseño de la losa, ya que se analizaba la estructura en su conjunto.

Tradicionalmente se ha considerado que las losas apoyadas perimetralmente y las losas planas son distintos tipos de estructura y se han diseñado por métodos también distintos, que son precisamente los presentados en los capítulos 17 y 18, respectivamente. La mayoría de los reglamentos de construcción así lo siguen considerando hasta la fecha. Inclusive existen razones históricas para esta diferenciación: las losas planas se empezaron a construir sobre una base empírica antes de que se conocieran métodos de análisis para determinar los momentos flexionantes y fuerzas cortantes, mientras que las losas apoyadas perimetralmente se empezaron a construir cuando ya se disponía de métodos matemáticos de análisis.

Sin embargo, un programa de investigación experimental y analítica de losas y estructuras de concreto [19.1 a 19.61 realizado en la década de 1960 ha llevado a la conclusión de que ambos tipos de estructuras (las losas apoyadas sobre vigas y las losas planas) se comportan de manera similar y pueden diseñarse sobre las mismas bases. El enfoque derivado de estas investigaciones permite considerar el trabajo en conjunto de las losas, de las vigas en que se apoyan y de las columnas. Las vigas pueden tener una rigidez a flexión cualquiera, y entonces las losas apoyadas perimetralmente son un caso particular

en que las vigas tienen rigidez a flexión infinita en comparación con la rigidez de la losa, mientras que las losas planas son el caso particular del otro extremo, ya que se puede considerar que están apoyadas sobre vigas de rigidez a flexión nula.

El Reglamento del American Concrete Institute incorporó este enfoque por primera vez en un reglamento de construcciones en su edición del año de 1971 con el nombre de *Sistemas de losas en dos direcciones.* Aquí se presenta con el nombre de *Método generalizado para el diseño de losas apoyadas perimetralmente y de losas planas,* ya que se puede usar para el dimensionamiento de los tipos de losas estudiados en forma separada en los capítulos 17 y 18, así como para sistemas de piso con vigas de poco peralte cuya rigidez a flexión no sea mucho mayor que la de la losa.

En las secciones siguientes se exponen en forma resumida las principales conclusiones del programa de investigación que se mencionó al principio de esta sección, y después se presentan los dos métodos que incluye el Reglamento ACI 318-02 para fines de diseño. Éstos son el llamado *método directo* y el *método de la estructura equivalente.* Las NTC-04 del Reglamento del Distrito Federal no presentan métodos de diseño basados en este enfoque, por lo que no se hace referencia a ellas en este capítulo.

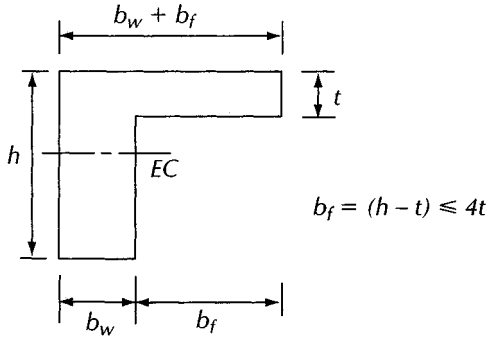


Figura 19.1 Planta típica de las estructuras ensayadas en la Universidad de Illinois.

19.2 Comportamiento de sistemas de piso. Variables principales

El estudio de sistemas de piso en el programa de investigación consistió en el ensaye en los laboratorios de la Universidad de Illinois de cinco especímenes como los mostrados en la figura 19.1, los cuales se describen en las referencias 19.1 a 19.5; un ensaye similar de una placa plana en los laboratorios de la Portland Cement Association [19.6]; otros ensayes en especímenes más pequeños, y numerosos estudios analíticos mediante métodos numéricos. Tanto en los ensayes como en los estudios analíticos se determinaron los momentos flexionantes en distintas secciones de las losas, vigas y columnas; se estudiaron los mecanismos de falla por flexión, por cortante y por torsión, en el

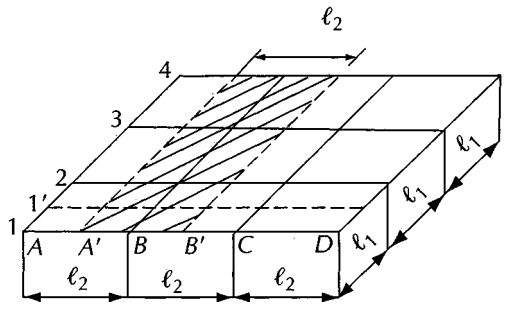


Figura 19.2 Franja de una losa en la cual se determinan los momentos flexionantes.

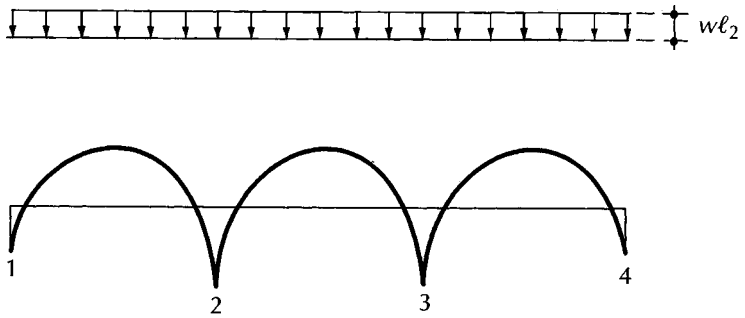


Figura 19.3 Diagrama de momentos en la franja de losa de la figura 19.2.

caso de vigas de borde; y, en los ensayes, se analizaron las deflexiones y el agrietamiento para distintos niveles de carga.

La distribución de momentos flexionantes en la estructura y la influencia de las principales variables sobre esta distribución, pueden visualizarse utilizando los conceptos de momento estático total y de estructura equivalente planteados en el capítulo 18. Considérese, para este efecto, que en la estructura de la figura 19.1 se aísla una viga de ancho ℓ_2 (figura 19.2), la cual, con las columnas del eje *B,* forma un marco como el de la estructura equivalente de la sección 18.2.2. La viga de este marco tendrá una carga por unidad de longitud de $w\ell_2$, donde w es la carga por unidad de área de la losa, y una distribución de momentos como la mostrada cualitativamente en la figura 19.3. Por el principio del momento estático total descrito en la sección 18.2.1, en cada uno de los claros de la viga se debe cumplir la siguiente ecuación de equilibrio

$$M_o = \frac{(w\ell_2)\,\ell_1^2}{8} \qquad (19.1)$$

donde:

M_o = momento estático total = momento positivo en el centro del claro, más el promedio de los momentos negativos en los extremos
$w\ell_2$ = carga por unidad de longitud
ℓ_1 = longitud del claro considerado

Por ejemplo, en el claro 2-3

$$M_o = \frac{M_{neg\,2} + M_{neg\,3}}{2} + M_{pos} \qquad (19.2)$$

donde M_{neg} es momento negativo y M_{pos} momento positivo.

En realidad, los momentos flexionantes no son uniformes a lo ancho de la franja considerada en la figura 19.2. A lo largo del eje de columnas, B, los momentos son mayores que a lo largo de los ejes A' y B'. Esto se debe a que el sistema es más rígido a lo largo del eje B, por la presencia de vigas y porque el efecto de restricción de las columnas es máximo en estos ejes y va disminuyendo hacia los extremos de la franja.

La distribución cuantitativa de momentos a lo largo y a lo ancho de las franjas de losa depende de las características de los elementos que forman la estructura (columnas, vigas y losas) y del tipo de carga aplicada. En las siguientes secciones se describe la influencia de estas variables.

19.2.1 Influencia de las columnas

Las columnas influyen sobre la distribución de momentos en la losa, por la restricción que ejercen sobre las vigas y la losa, o sea, por el empotramiento parcial que proporcionan a estos elementos estructurales.

Considérese nuevamente la distribución de momentos a lo largo de la franja *A'-B'*

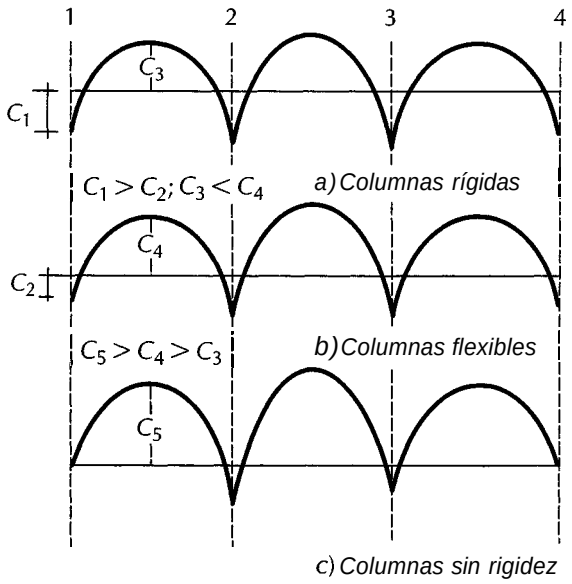


Figura 19.4 Efecto de la rigidez flexionante de las columnas.

mostrada en la figura 19.2. Si la rigidez flexionante de las columnas es grande en comparación con la rigidez flexionante de vigas y losas, entonces la restricción de las columnas en los extremos de la viga continua es grande, lo que es causa de que los momentos flexionantes en estos extremos sean relativamente grandes.* En cambio, si la rigidez flexionante de las columnas es pequeña en comparación con la de las vigas y losa, la restricción y los momentos flexionantes en los extremos también son pequeños. En la figura 19.4 se comparan cualitativamente estos casos: la figura 19.4*a* corresponde al primer caso mencionado, y la figura 19.46, al segundo caso. Teóricamente, si la rigidez flexionante de las columnas es nula, los momentos en los extremos de la viga continua son nulos. Este caso, que se muestra en la figura 19.4*c,* puede presentarse cuando las columnas no son monolíticas ni están unidas rígidamente a las vigas y a la losa.

La rigidez flexionante de las columnas influye también sobre el valor de los momentos flexionantes en otras secciones de la viga continua de la figura 19.3. Los momentos positivos en los claros extremos (1-2 y 3-4) son tanto mayores cuanto menores sean los momentos en los extremos de la viga continua. Por lo tanto, son mayores mientras menor sea la rigidez flexionante de las columnas. Esto se debe a que la ecuación 19.2 debe cumplirse por condiciones de equilibrio, y al disminuir uno de los momentos negativos, necesariamente debe aumentar el momento positivo, ya que el momento estático total permanece constante. La influencia de la rigidez flexionante de las columnas sobre los momentos negativos y positivos en los claros interiores, como el claro 2-3 de la figura 19.3, es menor que sobre los momentos de los claros extremos, siempre que la carga de la losa esté uniformemente distribuida en todos los claros. Cuando la carga no está uniformemente distribuida en todos los claros, la influencia de la rigidez flexionante de las columnas es también importante

* Se supone en este capítulo que el lector está familiarizado con el análisis elemental de estructuras hiperestáticas.

sobre los momentos en claros interiores. Este caso se analiza en la sección 19.2.4, que trata del efecto del tipo de carga.

19.2.2 Efecto de la rigidez flexionante de las vigas

La rigidez flexionante de las vigas, comparada con la rigidez flexionante de la losa, influye en la distribución de momentos a lo ancho de la franja. Si las vigas son de peralte grande en comparación son el peralte de la losa, un gran porcentaje del momento total en una sección transversal dada es resistido por las vigas y un porcentaje pequeño por la losa. En losas planas, en las que no existen vigas, todo el momento es resistido por la losa. Dentro de estos dos casos, el peralte de la viga puede ser de cualquier valor y el momento total se distribuye entre la viga y la losa, de acuerdo con sus rigideces flexionantes.

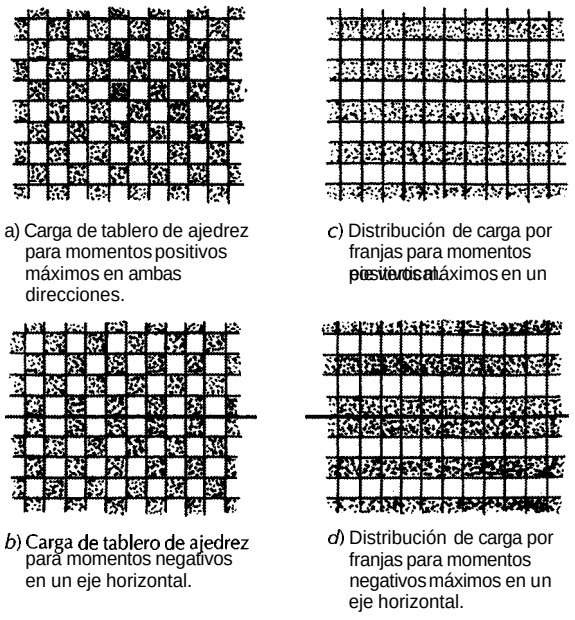
19.2.3 Efecto de la rigidez torsionante de las vigas

La rigidez torsionante de las vigas proporciona un empotramiento parcial a las losas. Su efecto es especialmente importante en los bordes del sistema de piso y en tableros interiores, cuando un tablero se encuentra cargado y el tablero adyacente descargado. En el primer caso, cuanto mayor sea la rigidez torsionante, mayores serán los momentos negativos. El segundo caso se analiza al estudiar el efecto del tipo de carga (sección 19.2.4).

Para que en un sistema de piso exista el efecto de la rigidez torsionante de las vigas, es necesario que éstas sean monolíticas con la losa y con las columnas. Si no se cumple la primera condición, las vigas no pueden restringir o empotrar a la losa, y no pueden desarrollarse momentos flexionantes en la losa en los bordes del sistema de piso. Si la viga no es monolítica con las columnas, no pueden desarrollarse en ella momentos torsionantes, pues giraría libremente en sus extremos.

19.2.4 Influencia del tipo de carga

En un sistema de piso, no siempre se encuentran cargados todos los tableros. Es frecuente, por ejemplo en el caso de bodegas, que algunos tableros soporten carga viva y otros no. Así como en vigas continuas existen combinaciones de carga con las cuales los momentos en ciertas secciones son mayores que los correspondientes a carga uniforme en todos los claros, también en sistemas de piso existen combinaciones desfavorables de carga. Evidentemente, la carga muerta, que siempre es considerable en sistemas de piso, actúa uniformemente en todos los tableros. El incremento de momentos, respecto a los producidos por carga uniforme en todos los tableros, depende de la relación de carga viga a carga muerta. Mientras mayor sea esta relación, mayor es el incremento. En la figura 19.5 se presentan com-



a) Carga de tablero de ajedrez para momentos positivos máximos en ambas direcciones.

c) Distribución de carga por franjas para momentos positivos máximos en un eje horizontal.

b) Carga de tablero de ajedrez para momentos negativos en un eje horizontal.

d) Distribución de carga por franjas para momentos negativos máximos en un eje horizontal.

Figura 19.5 Cargas desfavorables en sistemas de piso.

binaciones de carga con las cuales se obtienen momentos positivos y negativos máximos.

El efecto de combinaciones desfavorables de carga está relacionado en forma importante con la rigidez flexionante de las columnas y con la rigidez torsionante de las vigas. Un incremento de estas rigideces aumenta el empotramiento de un tablero de losa dado y, por consiguiente, este tablero es menos sensible a las condiciones de carga de tableros vecinos.

19.2.5 Comentarios sobre los efectos de las variables

En los párrafos anteriores se han señalado las principales variables que influyen en el comportamiento de sistemas de piso, sin incluir los efectos de las propiedades de los materiales, como resistencia del concreto, porcentaje de refuerzo y límite de fluencia del acero, ni el efecto de la forma de las losas. Se ve que el número de variables es considerable y que el efecto de algunas está relacionado con el efecto de otras; por ejemplo, el efecto del tipo de carga está relacionado con el efecto de las rigideces de columnas y trabes. Esto hace que el tratamiento riguroso de los sistemas de piso sea un problema muy complejo, por lo que es necesario recurrir a procedimientos simplificados que tomen en cuenta de manera aproximada el efecto de las variables principales.

También se deduce del estudio de las variables que no es suficiente considerar a la losa como un elemento aislado, sino que debe tomarse en cuenta su interacción con los otros elementos estructurales, para estudiar adecuadamente su comportamiento. Los métodos modernos de análisis y diseño están basados en estas consideraciones.

En el Reglamento ACI 318-71, se presentaron por primera vez, como ya se dijo, dos métodos de diseño que tratan de tomar en cuenta las variables mencionadas anteriormente. Se basan estos métodos tanto en los ensayes experimentales, como en los estudios analíticos, ya que en su desarrollo se buscó hacer compatibles los resultados de ambos tipos de estudio, así como simplificar, hasta donde era posible, para fines prácticos, los métodos analíticos. En las secciones siguientes se presentan estos métodos de diseño que se han conservado, con pocos cambios, en el Reglamento ACI 318-02.

19.3 Método directo

19.3.1 Limitaciones

El método directo es más sencillo de aplicar que el método de la estructura equivalente, ya que, como se verá posteriormente, no requiere efectuar el análisis de la estructura, sino que proporciona directamente los momentos flexionantes. Sin embargo, sólo puede aplicarse en estructuras que cumplan con las siguientes limitaciones:

a) Debe haber un mínimo de tres claros continuos en cada dirección.

b) Los tableros deben ser rectangulares con una relación de claro largo a claro corto no mayor de dos.

c) Los claros sucesivos en cada dirección no deben diferir en más de la tercera parte del mayor de ellos.

d) Las columnas pueden estar fuera del eje que une las columnas anterior y posterior, pero la distancia del centro de una columna al eje de columnas no debe ser mayor del 10 por ciento del claro en dirección del desplazamiento de la columna.

e) La estructura debe estar sujeta únicamente a carga vertical distribuida uniformemente en cada tablero. La carga viva no debe ser mayor de tres veces la carga muerta.

f) Cuando existan vigas en los cuatro bordes de un tablero, su rigidez relativa en dos direcciones perpendiculares definida por la ecuación

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} \qquad (19.3)$$

no debe ser menor de 0.2 ni mayor de 5.0. En esta ecuación, ℓ_1 es el claro en la dirección en que se determinan los momentos, medido centro a centro de apoyos, ℓ_2 es el claro en dirección perpendicular, también medido centro a centro de apoyos, y los términos a son iguales a la relación entre la rigidez a flexión de la viga y la rigidez a flexión de la franja de losa comprendida entre los ejes centrales de los tableros situados a cada lado de la viga, o sea, con referencia a la figura 19.2, es la relación entre la rigidez de la viga localizada sobre el eje *B*, y la rigidez de la franja de losa comprendida entre los ejes A' y *B'*; a, es el valor de a en dirección del claro ℓ_1 y α_2 en dirección del claro ℓ_2. Ya que el cálculo de a requiere algunas consideraciones adicionales, se presenta en la sección 19.3.9 una explicación más detallada sobre el particular.

Las cuatro primeras limitaciones tienen por objetivo garantizar que la estructura sea suficientemente regular en su geometría, principalmente para que no se desarrollen desplazamientos laterales de la estructura por condiciones de asimetría, que modificarían el momento estático total. No son limitaciones muy severas, ya que en la mayoría de los casos prácticos se cumplen estas condiciones.

La limitación del inciso e sí impide la aplicación del método a un buen número de estructuras encontradas en la práctica, ya que es frecuente tener fuerzas horizontales producidas por viento o sismo. Esto limita el uso de este método a estructuras bajas situadas en zonas en que los efectos de fuerzas horizontales sean despreciables, o bien, a estructuras que tengan muros de cortante o contravientos para resistir las fuerzas horizontales.

Con la limitación f se trata de evitar la aplicación del método a estructuras que tengan vigas de muy distinta rigidez en las dos direcciones. Desde luego que esta limitación no se aplica en el caso de losas planas e inclusive no evita que el método pueda usarse en losas planas con vigas de borde, caso muy frecuente en la práctica.

19.3.2 Resumen del método

El método consiste en los siguientes pasos:

a) Determinación del momento estático total con una ecuación similar a la ecuación 19.1 en los claros de una viga ancha limitada por los ejes centrales de dos tableros contiguos, como la mostrada en la figura 19.2.

b) Distribución del momento estático total en momentos negativo y positivo. Por ejemplo, con referencia a la figura 19.3 y al claro 2-3 de esta figura, se determinan en este paso los valores de M_{neg2}, M_{neg3} y M_{pos} de la ecuación 19.2.

c) Distribución de los momentos negativo y positivo determinados en la etapa anterior a lo ancho de la franja de losa, entre la franja de columnas y la franja central, ya que, como se ha explicado anteriormente, esta distribución no es uniforme, sino que los momentos son mayores en el eje de columnas y menores en los ejes centrales de los tableros. (Véase también la figura 18.5*d* en la sección 18.2.1)

d) En el caso de que la estructura tenga vigas, distribución del momento en la franja de columnas entre la losa y la viga.

e) Diseño por flexión y revisión por cortante.

19.3.3 Determinación del momento estático total

Para la determinación del momento estático total, se consideran franjas de losa como las mostradas en la figura 19.6. Si es una franja interior, como la del eje 2 de esta figura, se considera que está limitada por los ejes centrales de los tableros adyacentes al eje, por lo que el ancho de la franja es el promedio de los claros transversales de dichos tableros. Así, para la franja del eje 2 se tiene un ancho de

$$\ell_2 = \frac{\ell_b + \ell_c}{2} \qquad (19.4)$$

Si es una franja de borde, como la del eje 1, está limitada de un lado por el borde, y del otro por el eje central del tablero. En el caso de esta franja, su ancho será por consiguiente

$$\ell_2 = \ell_a + \frac{\ell_b}{2} \qquad (19.5)$$

Se ha dicho que el momento estático total puede calcularse con una ecuación similar a la 19.1. En esta ecuación y en la figura 19.3 se ha supuesto que los apoyos son puntuales, lo que no sucede en estructuras reales. Para tomar en cuenta esta diferencia, en el reglamento ACI 318-02 se considera que el claro, ℓ_n, debe medirse entre las caras interiores de las columnas, capiteles o muros en que se apoye la losa, como se muestra en la figura 19.6, pero que en ningún caso debe ser menor de 0.65 ℓ_1. Cuando la estructura tenga columnas circulares o en forma de polígono regular, pueden transformarse en columnas cuadradas de área igual para estos fines. (En el caso usual de una columna circular, el lado del cuadrado de igual área es 0.89 por el diámetro del círculo.)

Con estas consideraciones sobre el ancho ℓ_2 y el claro ℓ_n de las franjas de losa, el momento estático total se calcula con la ecuación:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} \qquad (19.6)$$

para cada claro y para todas las franjas en las dos direcciones.

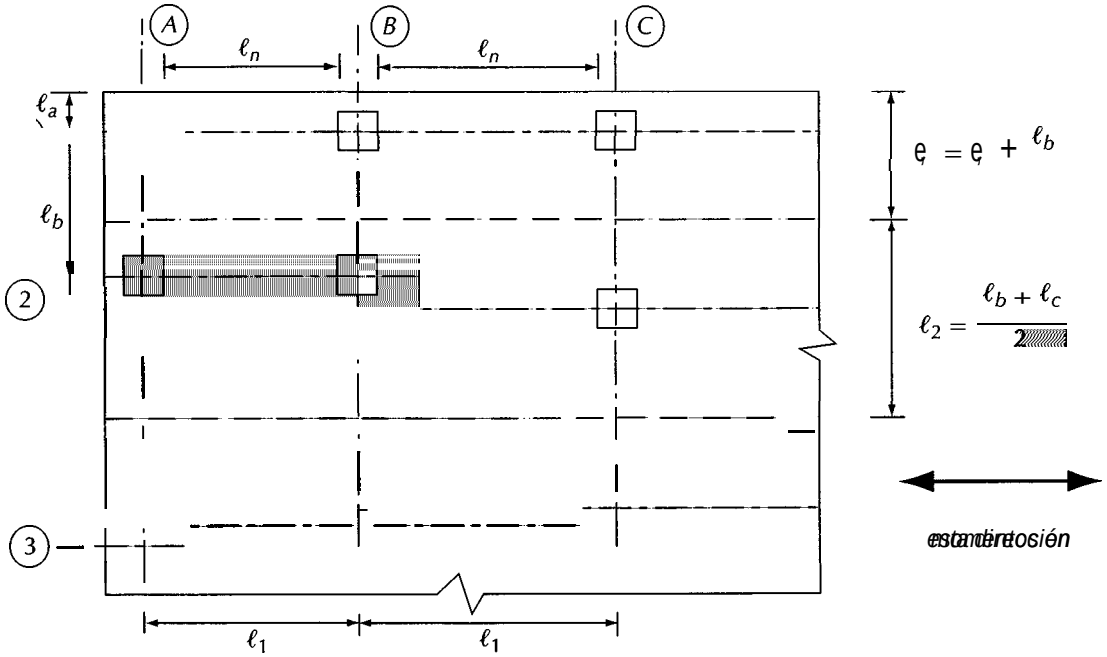


Figura 19.6 Valores de ℓ_2 y ℓ_n en la determinación del momento estático total.

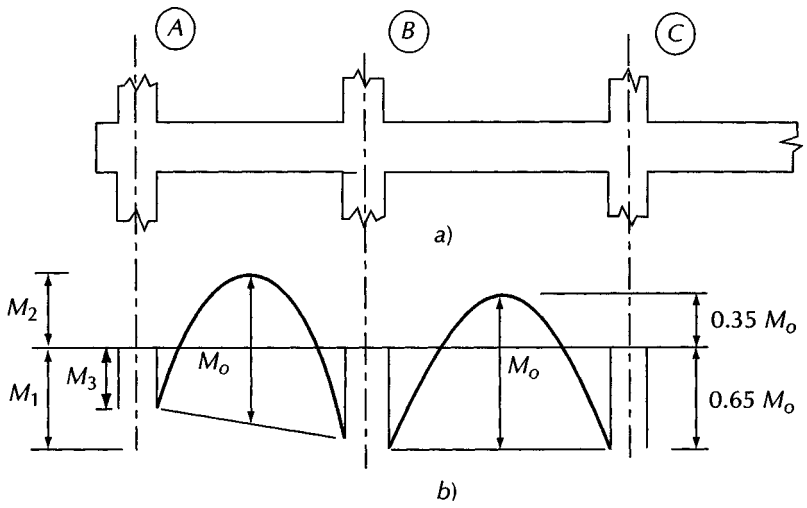


Figura 19.7 Distribución del momento estático total en momentos negativos y positivos.

19.3.4 Distribución del momento estático total en momentos negativo y positivo (momentos *longitudinales)*

Para hacer esta distribución debe distinguirse entre claros interiores y claros extremos. Por ejemplo, con referencia a la franja del eje 2 de la figura 19.6, el claro comprendido entre los ejes B y C es un claro interior, mientras que el comprendido entre los ejes A y B es un claro extremo.

En claros interiores el momento estático total se distribuye de la siguiente manera:

Momentos negativos = 0.65 M_o

Momentos positivos = 0.35 M_o

En la figura 19.7 se ilustra esta distribución. La figura 19.7*a* representa la misma estructura de la figura 19.6 en elevación. En el claro interior B-C los momentos negativos en ambos extremos tienen un valor de 0.65 M_o mientras que el momento positivo al centro del claro tiene un valor de 0.35 M_o. Obsérvese que el valor de los momentos negativos está marcado en el paño de las columnas, y no en el eje, ya que la sección crítica por flexión está en dicho paño.

En claros extremos, como el A-B de la figura 19.7, la distribución de momentos depende del grado de restricción o de empotramiento que proporcionen las columnas al sistema de piso, grado de restricción que depende a su vez de las caracteristicas del sistema, especialmente de si existen o no vigas de apoyo. En la tabla 19.1 se presentan los coeficientes por los que debe multiplicarse el momento estático total, M_o, para obtener los momentos M_1, M_2 y M_3 de la figura 19.7, según el reglamento ACI 318-02. La columna 1 se aplica si la losa está libremente apoyada en un muro de mampostería o en un muro de concreto no construido monoliticamente con la losa. La columna 2, a sistemas con vigas entre los apoyos, como el caso de losas apoyadas perimetralmente o en vigas de poca rigidez a flexión. Las columnas 3 y 4 son para el caso de losas planas que tengan viga de borde o que no la tengan, respectivamente. Y la columna 5, para el caso de losas construidas monolíticamente con muros que tengan una rigidez a flexión tan grande, en

comparación con la de la losa, que ocurra muy poca rotación entre la losa y el muro.

Los coeficientes de la tabla 19.1 son tales que el promedio de los que corresponden a momentos negativos sumado al que corresponde a momento positivo es siempre igual a uno, para que se conserve el momento estático total. Se obtuvieron resolviendo distintas estructuras, que cumplían con las limitaciones del método directo, por medio del método de la estructura equivalente, que permite tomar en cuenta explícitamente la rigideces de las columnas y del sistema de piso. Los resultados obtenidos se ajustaron de tal manera que los coeficientes para momento positivo y negativo interior se aumentaron ligeramente, y el coeficiente de momento negativo exterior se disminuyó ligeramente. Esto se hizo así porque en este último momento rige con frecuencia la disposición del Reglamento sobre refuerzo mínimo.

Los momentos calculados con la tabla *19.1* son también los que actúan en los paños de columna, como se ve en la figura 19.7*b*. Cuando los momentos en las dos caras de una columna no son iguales, como suele suceder en la primera columna interior, se debe diseñar con el momento mayor, o bien, distribuir el momento de desequilibrio entre los miembros que concurren al nudo de acuerdo con su rigidez.

Cuando existen vigas de borde perpendiculares a la dirección en que se hace el análisis, los momentos negativos exteriores en la losa se transfieren como momentos torsionantes a dichas vigas, lo cual debe ser considerado en su diseño. Cuando no existen dichas vigas, se debe considerar que una

Tabla 19.1 Coeficientes del momento estático total, M, en claros extremos.

	(1)	(2)	(3)	(4)	(5)
			Losas sin vigas entre los apoyos internos		
	Apoyo exterior libre	Losa con vigas entre todos los apoyos	Sin vigas de borde	Con vigas de borde	Apoyo exterior totalmente restringido
Momento negativo interior (M_1 en la figura 19.7*b*)	0.75	0.70	0.70	0.70	0.65
Momento positivo (M_2 en la figura 19.76)	0.63	0.57	0.52	0.50	0.35
Momento negativo exterior (M_3 en la figura 19.7*b*)	0	0.16	0.26	0.30	0.65

franja de losa que actúa como viga de borde resiste el momento torsionante correspondiente. Las características de esta viga ficticia de borde se indican en la sección 19.3.9*b*.

Se comentó en el capítulo 18 que en las columnas de borde hay una fuerte transferencia de momento flexionante entre losa y columna. El Reglamento ACI 318-02 especifica que el momento que se transfiere en este caso, debe ser igual al momento resistente de la franja de columnas, como se muestra en la figura 19.8.

Una fracción de este momento dada por la ecuación

$$\gamma_f = \frac{1}{1 + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{c_1 + d}{c_2 + d}}} \qquad (19.7)$$

debe transferirse por flexión entre la losa y la columna, considerando para estos efectos un ancho de losa igual al ancho de la columna en dirección perpendicular a la del momento, c_2, más una vez y media el espesor de la losa, 1.5 h, a cada lado del paño de columna. La fracción restante del momento debe transferirse por excentricidad de la fuerza cortante. Este detalle de transferencia de momento, que es muy importante, se ha ilustrado en el ejemplo 18.1, ya que las NTC-04 contienen disposiciones muy similares.

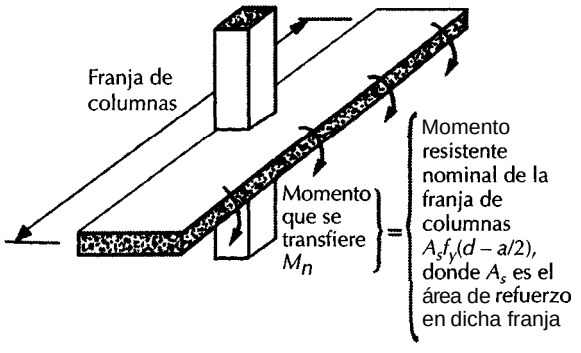


Figura 19.8 Momento que se transfiere de la losa a la columna.

19.3.5 Distribución de los momentos a lo ancho de la franja

Los momentos calculados hasta ahora son los que actúan en todo el ancho de la franja, ℓ_2 (figura 19.6). Es necesario distribuirlos en este paso, ya que como se ha dicho, su distribución no es uniforme. Para ello, las franjas de losa se dividen en una franja de columnas y una franja central, como se muestra en la figura 19.9. Esta división es similar a la del método de la estructura equivalente de las NTC-04 (véase, por ejemplo, la figura 18.8), pero ahora la franja de columnas puede incluir a una viga en el caso más general. El ancho de la franja de columnas se limita al menor de los valores de $\ell_1/4$ o $\ell_2/4$ a cada lado del eje de columnas, para que en el caso de tableros alargados en dirección de ℓ_2, la franja de columnas no sea demasiado ancha. Las dos medias franjas centrales abarcan desde el borde de cada franja de columnas hasta el eje central del tablero correspondiente. La distribución se hace de tal manera que el momento total en la franja completa se divide primero entre la franja de columnas y la franja central, y después se divide el momento de la franja de columnas entre la losa y la viga. A continuación se presentan los porcentajes de distribución:

a) Franja de columnas. Los porcentajes de momento en la franja completa que corresponden a la franja de columnas se presentan en la tabla 19.2.
b) Franjas centrales. La diferencia entre 100 por ciento y el porcentaje asignado a las franjas de columnas.
c) Distribución entre viga y losa en la franja de columnas. A las vigas se les asignará el 85 por ciento del momento en la franja de columnas si $(\alpha_1\ \ell_2/\ell_1)$ es igual o mayor que 1.0. Si este parámetro está comprendido entre 1.0 y cero, el porcentaje de mo-

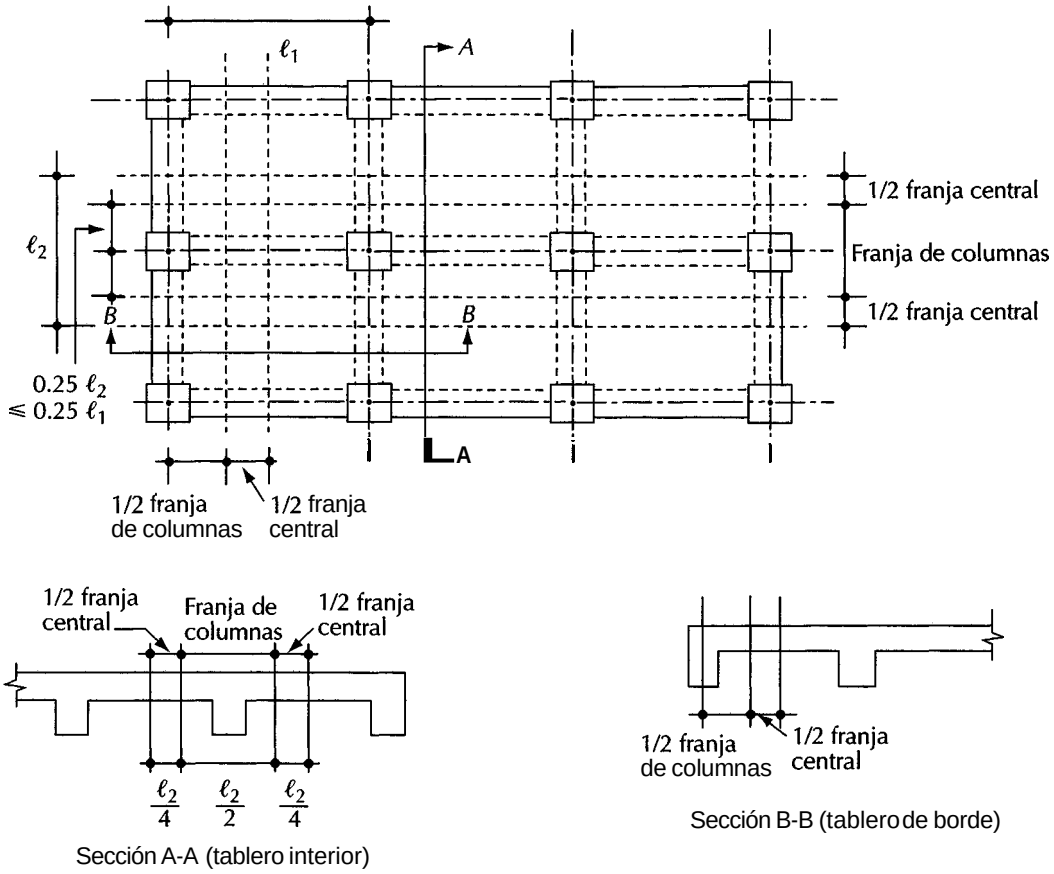


Figura 19.9 Franjas de columnas y central para la distribución de los momentos a lo ancho de la franja.

Tabla 19.2 Porcentaje de los momentos totales que se asignan a las franjas de columnas.

Relación de rigideces			Valores de ℓ_2/ℓ_1 0.5	1.0	2.0
Momentos negativos en apoyos interiores	$(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) = 0$ $(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) \geq 1.0$		75 90	75 75	75 45
Momentos negativos en apoyos exteriores	$(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) = 0$	$\beta_t = 0$ $\beta_t \geq 2.5$	100 75	100 75	100 75
	$(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) \geq 1.0$	$\beta_t = 0$ $\beta_t \geq 2.5$	100 90	100 75	100 45
Momentos positivos	$(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) = 0$ $(\alpha_1 \ell_2/\ell_1) \geq 1.0$		60 90	60 75	60 45

Puede usarse interpolación lineal entre los valores mostrados.

mento asignado a las vigas se calculará por interpolación lineal entre 85 y cero por ciento.

d) Interpolaciones entre los valores de la tabla. En todos los casos se pueden hacer interpolaciones lineales entre los valores mostrados si los calculados no coinciden con ellos. Si las vigas tienen cargas aplicadas directamente, los momentos producidos por estas cargas se sumarán a los anteriores.

e) Modificaciones en los momentos. Los momentos calculados con los porcentajes anteriores pueden modificarse hasta 10 por ciento, siempre que se conserve el valor del momento estático total.

Se puede ver que la distribución de los momentos a lo ancho de la franja de losa está en función de la relación de claros, ℓ_2/ℓ_1, del parámetro α_1 cuyo significado se planteó en la sección 19.3.1 (ecuación 19.3), y cuya explicación más detallada se presenta en la sección 19.3.9, y en el caso de los momentos negativos exteriores, del parámetro β_t, que es un medida de la relación entre la rigidez a torsión de la viga de borde y la rigidez a flexión de una franja de losa perpendicular a la viga de borde. La explicación completa de este parámetro y la forma de calcularlo, se presentan también en la sección 19.3.9.

19.3.6 Determinación de la fuerza cortante en vigas y losas

En la sección anterior se explicó la manera de obtener los momentos flexionantes en las vigas de la estructura, pero el método directo no permite obtener las fuerzas cortantes. Para esto, el Reglamento ACI 318-02 considera la distribución por áreas tributarias definidas por líneas trazadas a 45° desde los vértices de los tableros, como se muestra en la figura 19.10, siempre que el parámetro $(\alpha_1\ \ell_2/\ell_1)$ sea igual o mayor que la unidad. Esto es, cuando las vigas son suficientemente rígidas, se considera que la carga distribuida que actúa en la losa se transmite a las vigas de la manera indicada, y a partir de la carga que actúa sobre las vigas, puede calcularse la fuerza cortante en las mismas para fines de diseño o revisión.

Si las vigas son flexibles ($\alpha_1\ \ell_2/\ell_1 < 1.0$), la fuerza cortante se puede obtener por interpolación entre el caso anterior y el caso en que las vigas no soportan ninguna carga que corresponde a $\alpha_1 = 0$.

También es necesario determinar la fuerza cortante en las losas. Para esto se distinguen tres casos. Si las vigas son rígidas ($\alpha_1\ \ell_2/\ell_1 \geq 1.0$), la carga se transmite de las losas a las vigas como se muestra en la figura 19.10. Puede considerarse que la losa se divide en franjas de ancho unitario, como las franjas C y L de la figura 19.10, y revisar cada franja como si fuese una viga. La fuerza cortante en el extremo de una franja, C, que es la más desfavorable, sería $w_u\ \ell_1/2$.

En el caso de que no existan vigas, o sea, el de losas planas, debe revisarse la losa por penetración, como se ha estudiado en la sección 7.6.1*c*.

El tercer caso es el de vigas flexibles en las que la revisión debe hacerse teniendo en cuenta que las vigas transmiten a las columnas únicamente una parte de la carga total, y que la diferencia de carga produce esfuerzos de cortante por penetración alrededor de la columna como si se tratase de losa plana.

19.3.7 Determinación de los momentos en columnas

Hasta aquí se ha estudiado la determinación de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes en la losa y en las vigas de la estructura. En esta sección se estudia la determinación de los momentos flexionantes en las columnas, para lo cual se distinguirá entre columnas exteriores o de borde y columnas interiores.

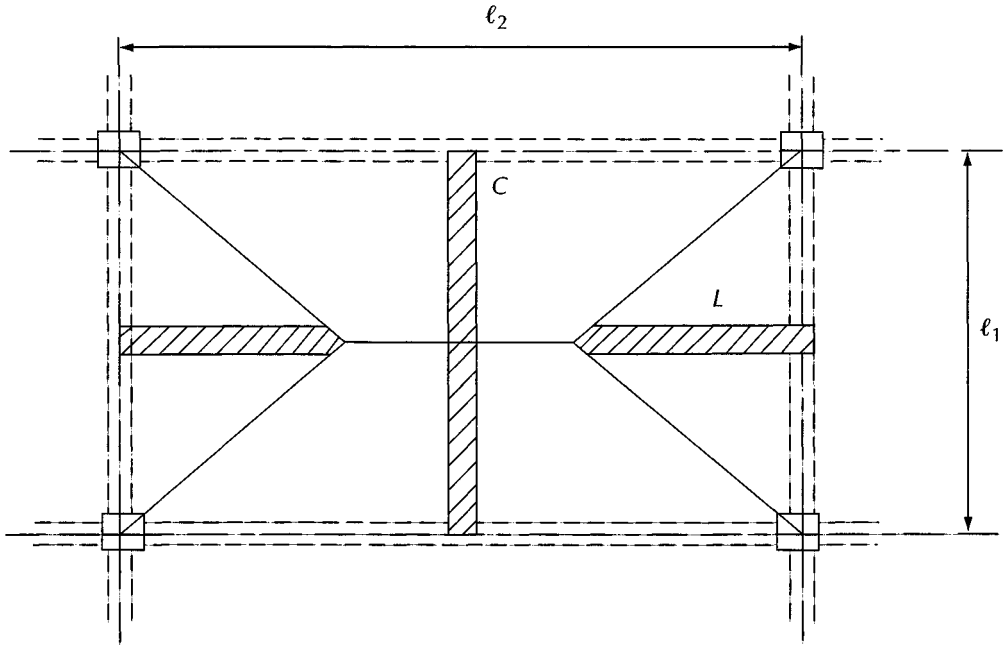


Figura 19.10 Áreas tributarias para determinar la fuerza cortante en vigas.

Si se considera la franja del eje 2 de la figura 19.6, la columna localizada en el eje A es una columna exterior. En el nudo formado por la intersección de la losa con esta columna (figura 19.7*a*), existe un momento de desequilibrio que es el momento M_3 de la figura 19.7*b*, o sea, el momento negativo exterior en la losa. Este momento de desequilibrio debe distribuirse entre la columna superior y la columna inferior que concurren al nudo en proporción a sus rigideces.

En columnas interiores, como las del eje B en las figuras 19.6 y 19.7, también pueden presentarse momentos de desequilibrio cuando los claros adyacentes son de diferente longitud o cuando la carga viva está actuando en uno solo de los dos claros. Cuando ocurre cualquiera de estas dos situaciones, los momentos negativos interiores son diferentes. El Reglamento ACI 318-02 especifica calcular el momento de desequilibrio que debe distribuirse entre las columnas superior e inferior, con la siguiente ecuación

$$M = 0.07\ [(w_d + 0.5\ w_\ell)\ell_2\ell_n^2 - w'_d\ell'_2(\ell'_n)^2] \tag{19.8}$$

donde w_d y w_ℓ son las cargas muerta y viva, respectivamente, y w'_d, ℓ'_2 y ℓ'_n se refieren al claro más corto de los dos adyacentes.

La ecuación 19.8 expresa la diferencia entre los momentos de empotramiento perfecto de los dos claros adyacentes, suponiendo que el más largo está cargado con la carga muerta y el 50 por ciento de la carga viva, y que el más corto está cargado únicamente con carga muerta. El término 0.07 es una aproximación del coeficiente 1/12, que corresponde a momentos de empotramiento perfecto, reducido para tomar en cuenta que el empotramiento es imperfecto.

19.3.8 Efectos de cargas desfavorables

Se mencionó en la sección *19.2.4* que existen combinaciones de carga en los tableros de una estructura que producen momentos flexionantes mayores que los que se tendrían con todos los tableros cargados, y que este efecto es mayor mientras menor es la rigidez flexionante de las columnas. Para tomar en cuenta este efecto, el Reglamento ACI 318-02 especifica que cuando la relación entre la carga muerta y la carga viva, p_a, es menor que 2, se debe cumplir una de las siguientes condiciones:

a) La suma de las rigideces a flexión de las columnas situadas arriba y abajo de la losa, debe ser tal que a no sea menor que los valores de $\alpha_{mín}$ especificados en la tabla 19.3. El factor a es la relación entre la suma de las rigideces de las columnas situadas arriba y abajo de la losa, ΣK_c, y la suma de las rigideces de las losas y de las vigas que concurren en el nudo en consideración, tomadas en la dirección en que se determinan los momentos, $\Sigma(K_s + K_b)$. Por lo tanto

$$\alpha_c = \frac{\Sigma K_c}{\Sigma(K_s + K_b)} \qquad (19.9)$$

En la sección *19.3.9* se explica con detalle el cálculo de a.

b) Si no se cumple la condición anterior, los momentos positivos en los tableros apoyados en las columnas correspondientes deben incrementarse multiplicándolos por el factor

$$\delta_s = 1 + \frac{2 - \beta_a}{4 + \beta_a}\left(1 - \frac{\alpha_c}{\alpha_{mín}}\right) \qquad (19.10)$$

La relación β_a, entre carga muerta y carga viga, debe calcularse antes de multiplicar las cargas en condiciones de servicio por los factores de carga.

Tabla 19.3 Valores de $\alpha_{mín}$.

	Relación de claros	*Rigidez relativa de la viga, a*				
β_a	ℓ_2/ℓ_1	*0*	***0.5***	*1.0*	*2.0*	***4.0***
2.0	0.5 – 2.0	0	0	0	0	0
1.0	0.5	0.6	0	0	0	0
	0.8	0.7	0	0	0	0
	1.0	0.7	0.1	0	0	0
	1.25	0.8	0.4	0	0	0
	2.0	1.2	0.5	0.2	0	0
0.5	0.5	1.3	0.3	0	0	0
	0.8	1.5	0.5	0.2	0	0
	1.0	1.6	0.6	0.2	0	0
	1.25	1.9	1.0	0.5	0	0
	2.0	4.9	1.6	0.8	0.3	0
0.33	0.5	1.8	0.5	0.1	0	0
	0.8	2.0	0.9	0.3	0	0
	1.0	2.3	0.9	0.4	0	0
	1.25	2.8	1.5	0.8	0.2	0
	2.0	13.0	2.6	1.2	0.5	0.3

Con la condición *a* se trata de lograr que las columnas sean lo suficientemente rígidas para que los momentos flexionantes no se incrementen en más de 33 por ciento por efecto de condiciones desfavorables de carga. Si no se cumple esta condición, es necesario incrementar los momentos positivos que son los más afectados por condiciones desfavorables de carga.

El incremento de momentos positivos se obtiene aplicando la ecuación 19.10. Debe observarse que el valor mínimo que puede tener β_a es de 1/3 por la limitación *e* de la sección *19.3.1,* que señala que el método directo sólo puede usarse si la carga viva no excede de tres veces la carga muerta. Si la rigidez de las columnas es cero, el valor de δ_s resulta de 1.38, que es entonces el máximo valor posible. Este valor es en realidad hipotético, ya que las columnas no pueden tener rigidez nula. El valor de δ_s resulta igual a uno, o sea que no se incrementan los momentos positivos, cuando β_a vale 2, o cuando a es igual a $\alpha_{mín}$.

Estas disposiciones del Reglamento ACI-318-02 están basadas en estudios analíticos y experimentales que se resumen en la referencia 19.7.

19.3.9 Cálculo de parámetros relacionados con las rigideces de los elementos

En los distintos pasos del método directo, expuestos en las secciones anteriores, intervienen algunos parámetros relacionados con las rigideces de los elementos cuya explicación detallada se había pospuesto para esta sección con el fin de no interrumpir la descripción secuencial del método. Así, en la sección 19.3.1 apareció el parámetro a en la limitación f referente a la rigidez relativa del sistema de piso en dos direcciones perpendiculares. El mismo parámetro apareció en la tabla 19.2 que indica los porcentajes de los momentos longitudinales que corresponden a la franja de columnas. En esta tabla apareció también el parámetro β_t que está relacionado con la rigidez a torsión de una viga de borde y con la rigidez a flexión de la losa. Por último, en la sección *19.3.8* apareció el parámetro α_c, relacionado con la rigidez a flexión de las columnas, losas y trabes. A continuación se presenta la manera de calcular estos parámetros.

a) Cálculo del parámetro a

Este parámetro se define como la relación entre la rigidez a flexión de una viga situada en el eje de columnas y la rigidez a flexión de la franja de losa limitada por los ejes centrales de los tableros adyacentes. Se expresa, pues, con la ecuación

$$\alpha = \frac{E_{cb}\, I_b}{E_{cs}\, I_s} \qquad (19.11)$$

donde E_{cb} y E_{cs} son los módulos de elasticidad del concreto de la viga y de la losa, respectivamente; I_b es el momento de inercia de la viga, de acuerdo con la definición que se da más adelante, e I_s es el momento de inercia de la franja de la losa.

Cuando la construcción es monolítica, la viga incluye un tramo de losa a cada lado de las caras laterales de la viga, igual a su proyección por abajo o por arriba de la losa, la que sea mayor, pero no mayor que cuatro veces el espesor de la losa. Por lo tanto, el momento de inercia I_b es el de la sección *L* o el de la sección T mostradas en la figura 19.11, según se trate de vigas de borde o vigas interiores, respectivamente. Dada la frecuencia con que se presenta la necesidad de calcular momentos de inercia de secciones de esta forma, se incluye en el Apéndice D.4 una ayuda de diseño para tal fin.

El momento de inercia de la losa es el de una franja de ancho ℓ_2 (figura 19.6), y de peralte *h.* Obsérvese que, con estas definiciones, un tramo de losa resulta común a la viga y a la losa.

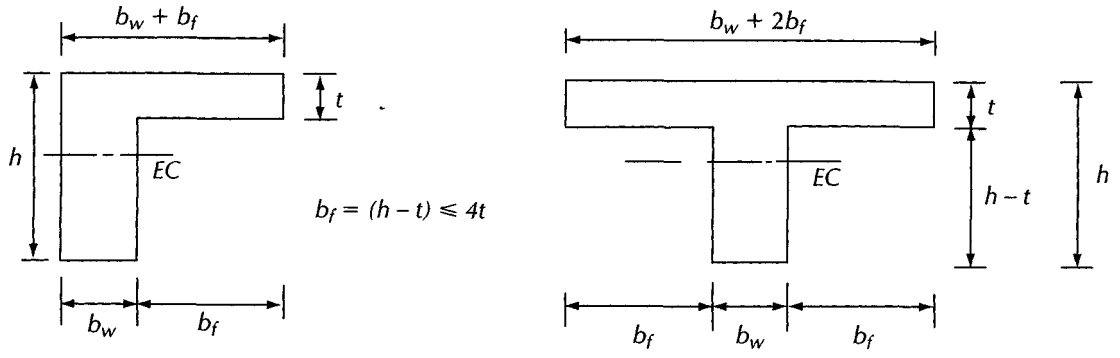


Figura 19.11 Definición de viga.

En el método directo aparecen los parámetros α_1 y α_2 que corresponden a los valores de α en dirección de los claros ℓ_1 y ℓ_2, respectivamente, siendo ℓ_1 el claro en la dirección en que se calculan los momentos y ℓ_2 el claro en la dirección perpendicular (figura 19.6).

b) Cálculo del parámetro β_t

Este parámetro se define como la relación entre la rigidez a torsión de una viga de borde y la rigidez a flexión de una franja de losa cuyo ancho es igual al claro de la viga de borde medido centro a centro de los apoyos. Se expresa por medio de la ecuación:

$$\beta_t = \frac{E_{cb}\, C}{2\, E_{cs}\, I_s} \qquad (19.12)$$

donde E_{cb} y E_{cs} son los módulos de elasticidad del concreto de la viga y de la losa, respectivamente; I_s es el momento de inercia de la franja de losa mencionada, y C es una constante que define la rigidez a torsión de la viga de borde, en forma semejante a como el momento de inercia define la rigidez a flexión. El cálculo de esta constante C requiere algunas consideraciones que se presentan a continuación.

La primera se refiere a la definición de la viga de borde. Cuando existe una viga, se aplica la de la figura 19.11, o sea, se considera que un ancho de patín igual a la proyección de la viga por debajo o por encima de la losa, pero sin exceder de $4t$, forma parte integral de la viga. Cuando no existe viga de borde, como en el caso de losas planas,

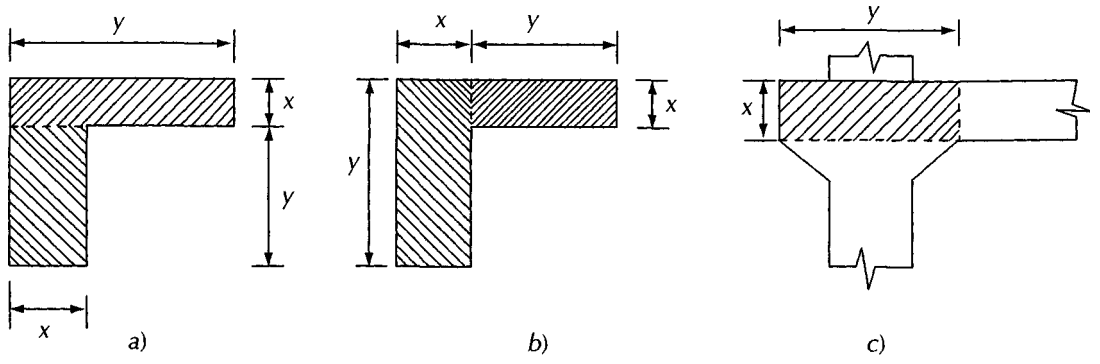


Figura 19.12 Secciones transversales para calcular la constante C.

se asume que la viga queda definida por una franja de losa cuyo ancho es igual al de la columna o capitel, en dirección perpendicular a la viga (figuras 19.12 y 19.18).

Una vez definida la viga, se divide en rectángulos y en cada uno de ellos se llama x al lado menor y y al lado mayor (figura 19.12). Una vez hecho esto, se calcula C con la ecuación

$$C = \Sigma \left(1 - 0.63 \frac{x}{y}\right) \frac{x^3 y}{3} \qquad (19.13)$$

donde la sumatoria se refiere a todos los rectángulos en que se haya dividido la viga.

En el caso de vigas de borde es posible hacer la división en rectángulos de distintas maneras, como se ilustra en las figuras 19.12*a* y b. Debe calcularse entonces el valor de C para cada una y tomar el valor mayor.

Una vez obtenido el valor de C, se sustituye en la ecuación 19.12, con lo que se tiene ya el valor del parámetro β_t.

c) Cálculo del parámetro α_c

El parámetro α_c se define como la relación entre la suma de las rigideces de las columnas situadas encima y debajo de la losa, y la suma de las rigideces de las vigas y de las losas que concurren a un nudo. Estas últimas rigideces se calculan en la dirección en que se analizan los momentos (figura 19.6). Por lo tanto, el valor de α_c se calcula con la ecuación:

$$\alpha_c = \frac{\Sigma K_c}{\Sigma (K_s + K_b)} \qquad (19.14)$$

donde K_c es la rigidez de cada columna; K_s es la rigidez de la franja de losa de ancho ℓ_2 y peralte h, y K_b es la rigidez de la viga definida en el inciso a de esta sección y en la figura 19.11. Los valores de las rigideces K se calculan con la ecuación usual

$$K = \frac{\Psi EI}{\ell} \qquad (19.15)$$

donde Ψ es un factor que depende de las condiciones de apoyo en los extremos del miembro, y ℓ es su longitud.

19.3.10 *Peraltes* mínimos

El Reglamento ACI 318-02 especifica que las losas sin vigas interiores deben tener los peraltes totales mínimos señalados en la tabla 19.4, pero estos peraltes no serán menores de 12.5 cm para losas sin ábacos o de 10 cm para losas con ábacos. En forma alternativa, los peraltes totales mínimos serán por lo menos iguales a los valores calculados con las ecuaciones 19.16 y 19.17, el que resulte mayor, aunque no necesitan ser mayores que el calculado con la ecuación 19.18. Los peraltes totales mínimos de losas con vigas deben calcularse con las ecuaciones 19.16, 19.17 y 19.18 en la forma explicada.

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{14{,}000}\right)}{36 + 5\beta \left[\alpha_m - 0.12\left(1 + \frac{1}{\beta}\right)\right]} \qquad (19.16)$$

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{14{,}000}\right)}{36 + 9\beta} \qquad (19.17)$$

$$h = \frac{\ell_n \left(0.8 + \frac{f_y}{14{,}000}\right)}{36} \qquad (19.18)$$

En estas ecuaciones, α_m es el valor promedio del parámetro α en las vigas que limitan el tablero de losa en consideración; y β es la relación entre el claro libre mayor y el claro libre menor.

Por inspección de las ecuaciones 19.16, 19.17 y 19.18, puede deducirse que el espe-

sor requerido es mayor mientras mayor sea el claro libre, ℓ_n; mientras menor sea la rigidez de las vigas, obteniéndose el valor máximo para el caso de losas planas; mientras la forma de la losa se aproxime más a un cuadrado, y mientras mayor sea el límite de fluencia del acero.

Los valores calculados con las ecuaciones 19.16, 19.17 y 19.18, pueden reducirse en 10 por ciento en losas planas que tengan ábacos cuyas dimensiones en planta sean iguales por lo menos a un sexto del claro a partir del eje de columnas, en cada dirección y a ambos lados de la columna, y cuyo peralte por debajo de la losa sea por lo menos igual a la cuarta parte del espesor de la losa en la parte localizada fuera del ábaco.

Puede verse que la ecuación 19.18 es más fácil de aplicar y podría usarse para un valor aproximado del peralte; sin embargo, da valores mucho mayores que las ecuaciones 19.16 y 19.17. La ecuación 19.17 da valores mayores de h que la ecuación 19.16 desde valores de α_m iguales a 2, aproximadamente. Estos valores se obtienen para vigas de rigidez sensiblemente mayor que la rigidez de la losa. Por lo tanto, en losas apoyadas sobre vigas rígidas conviene revisar el peralte con la ecuación 19.17 antes de calcular los valores de a, aprovechando que en dicha ecuación no interviene este parámetro. De otra manera, se corre el riesgo de encontrar que el peralte es insuficiente después de hacer todos los cálculos de a, que son laboriosos, y tener que repetirlos con el peralte modificado.

Se permite usar valores menores que los mencionados si se calculan las deflexiones y los resultados obtenidos no son mayores que los especificados en una tabla incluida en el Reglamento. El cálculo de deflexiones en losas es complicado y cae fuera del alcance de este texto. El lector interesado puede consultar las referencias 19.8 y 19.13.

19.3.11 Disposiciones sobre *el* refuerzo

El refuerzo mínimo en losas debe ser el que se especifica en la tabla 16.1 como refuerzo de contracción y temperatura. Además, la se-

Tabla 19.4 Espesores mínimos de losas sin vigas interiores.

Esfuerzo de fluencia, f_y, *kg/cm²*	*Sin ábacos*			*Con ábacos*		
	Tableros exteriores		*Tableros interiores*	*Tableros exteriores*		*Tableros interiores*
	Sin vigas de borde	*Con vigas de borde*		*Sin vigas de borde*	*Con vigas de borde*	
2800	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{40}$	$\frac{\ell_n}{40}$
4200	$\frac{\ell_n}{30}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{33}$	$\frac{\ell_n}{36}$	$\frac{\ell_n}{36}$

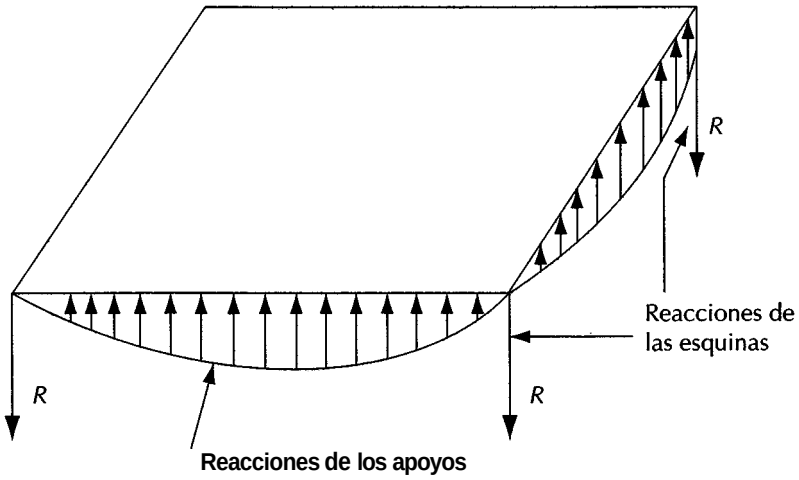


Figura 19.13 Reacciones en una losa libremente apoyada.

paración de barras no debe exceder de dos veces el espesor de la losa, excepto en zonas aligeradas. En el caso de losas aligeradas, debe colocarse refuerzo por contracción y temperatura en la capa superior de concreto.

El refuerzo para momento positivo perpendicular a un borde discontinuo, debe prolongarse hasta el borde de la losa y anclarse por lo menos 15 cm en la viga de borde, columna o muro, mediante un gancho o un doblez. El refuerzo para momento negativo que esté en este caso, debe anclarse una longitud suficiente para desarrollar el esfuerzo de fluencia en la sección crítica. Si en el borde libre no existe viga de borde o muro, el anclaje del refuerzo puede hacerse dentro de la losa.

Para losas con vigas rígidas en las que a sea mayor que la unidad, se presenta un problema en las esquinas exteriores que se ilustra en la figura 19.13. Se sabe, por Teoría de la Elasticidad, que en una losa simplemente apoyada en sus cuatro bordes, con carga vertical, las reacciones sobre los apoyos tienen la distribución mostrada en esta figura, en la que se ve que se desarrollan fuerzas hacia abajo en las esquinas. La losa tiende a levantarse en ellas y las fuerzas R son las que la restringen para que no se levante.

Para evitar que la losa se agriete por este efecto, el Reglamento ACI 318-02 especifica colocar un refuerzo especial de esquina en la parte superior y en la parte inferior de la losa, de tal magnitud que la resistencia a flexión sea igual al momento positivo máximo por unidad de ancho. El refuerzo se debe colocar en dirección de la diagonal en la parte superior, y perpendicular a la diagonal en la parte inferior, como se muestra en la figura 19.14, y debe prolongarse hasta una distancia de un quinto del claro en cada dirección desde la esquina de la losa. El refuerzo diagonal puede sustituirse por barras paralelas a los bordes, colocando barras en las dos direcciones en la parte superior y en la parte inferior de la losa.

Este refuerzo especial sólo es necesario en esquinas exteriores, como la señalada en la intersección de los ejes 1 y A en el ejemplo 17.1. Algunos proyectistas lo omiten cuando el agrietamiento de la losa no es un factor importante en el diseño.

Para losas planas, el Reglamento señala que los cortes y dobleces de varillas deben

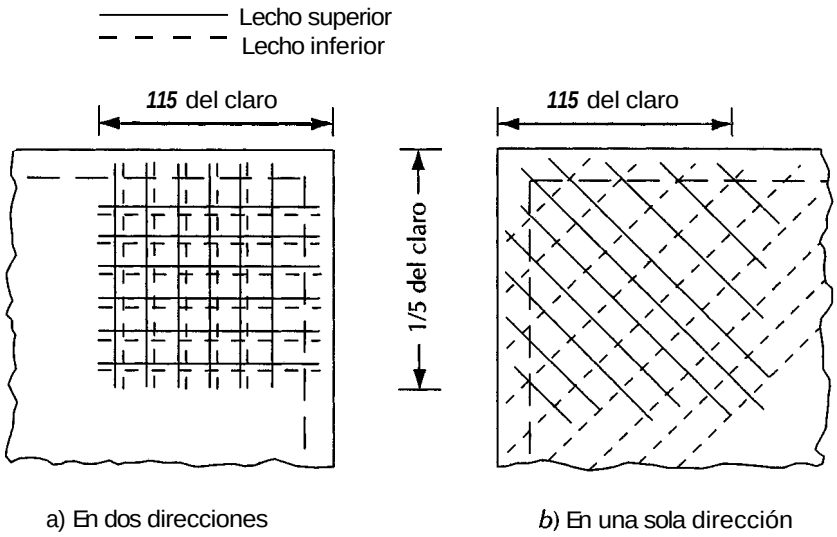


Figura 19.14 Refuerzo de esquinas exteriores de losas.

hacerse de tal manera que se satisfagan las longitudes mínimas indicadas en la figura 19.15. Cuando los claros contiguos sean desiguales, debe usarse la longitud del claro mayor para calcular la prolongación del refuerzo negativo más allá de la cara del apoyo.

19.4 Ejemplo de diseño con el método directo

En el ejemplo 19.1 se ilustra el método directo con el diseño de un sistema de piso con losa y vigas, de cuatro claros en una dirección y tres claros en la otra. Este sistema de piso forma parte de un edificio de dos niveles y en el ejemplo sólo se diseña parte del primer nivel. Se han indicado en la sección de datos las dimensiones de todos los elementos, obtenidas de análisis preliminares, la carga viva, que en este ejemplo es elevada, y las resistencias del concreto y del acero.

En primer término se revisa si se cumplen todas las limitaciones que establece el Reglamento para poder aplicar el método directo. La primera se cumple porque la estructura tiene por lo menos tres claros en cada dirección. La segunda también, porque en los tableros más alargados, que son el II y el IV, la relación entre claro largo y claro corto es de 1.5, valor menor que el máximo de 2 que establece el Reglamento. La tercera limitación se cumple también, ya que la diferencia máxima entre claros sucesivos es de 1 m contra la tercera parte del valor de los claros considerados, que en este caso resulta de 1.70 m. Como no hay columnas localizadas fuera de los ejes, también se cumple la cuarta limitación. La quinta, que se refiere a que la carga viva no debe exceder de tres veces la carga muerta, se cumple igualmente, aunque en este ejemplo la carga viva tiene un valor mucho mayor que el usual en edificios de oficinas o viviendas. Para revisar la sexta y última limitación, fue necesario calcular los parámetros α que miden la relación entre la rigidez a flexión de las vigas y de las losas. A continuación se explica con más detalle este cálculo.

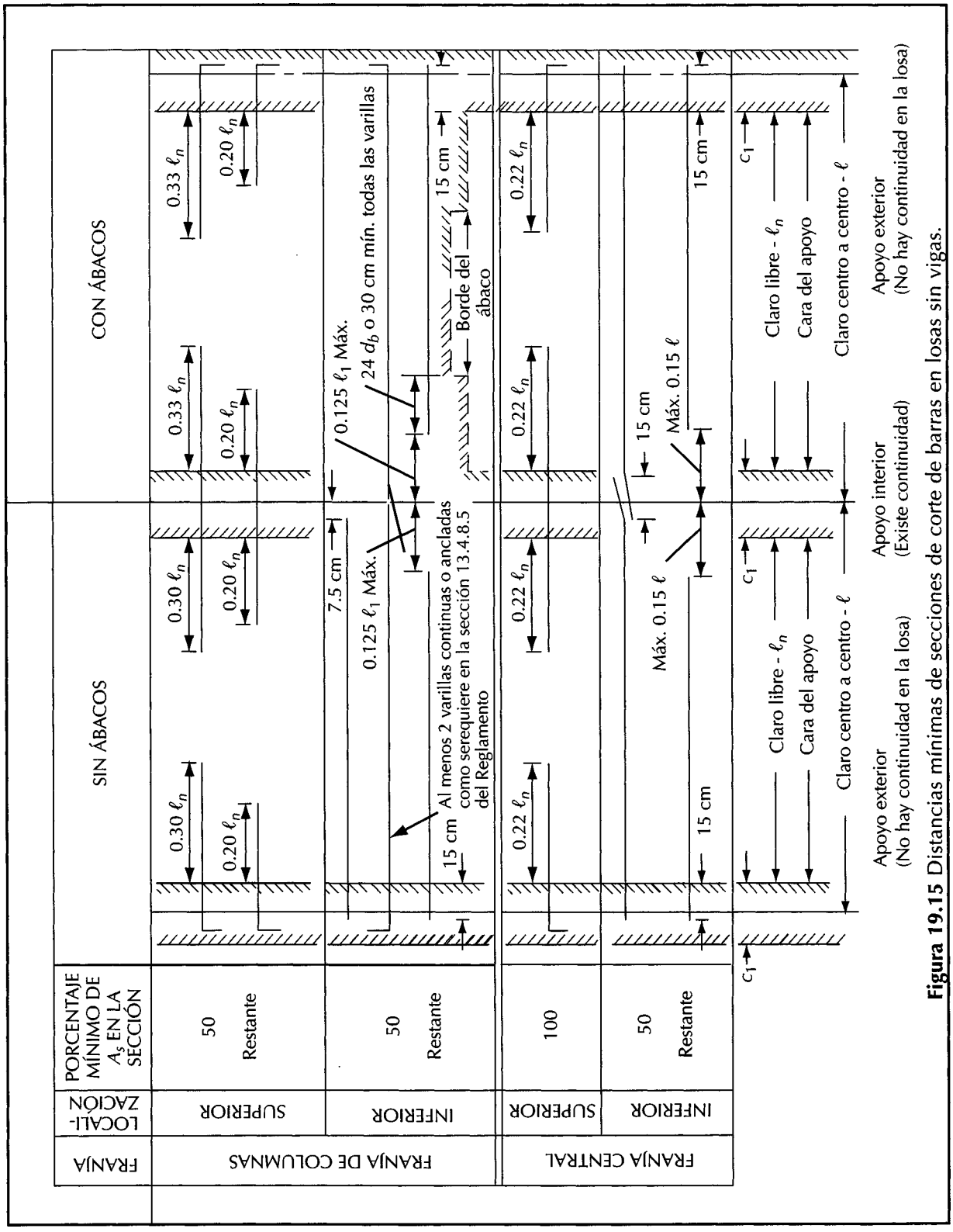
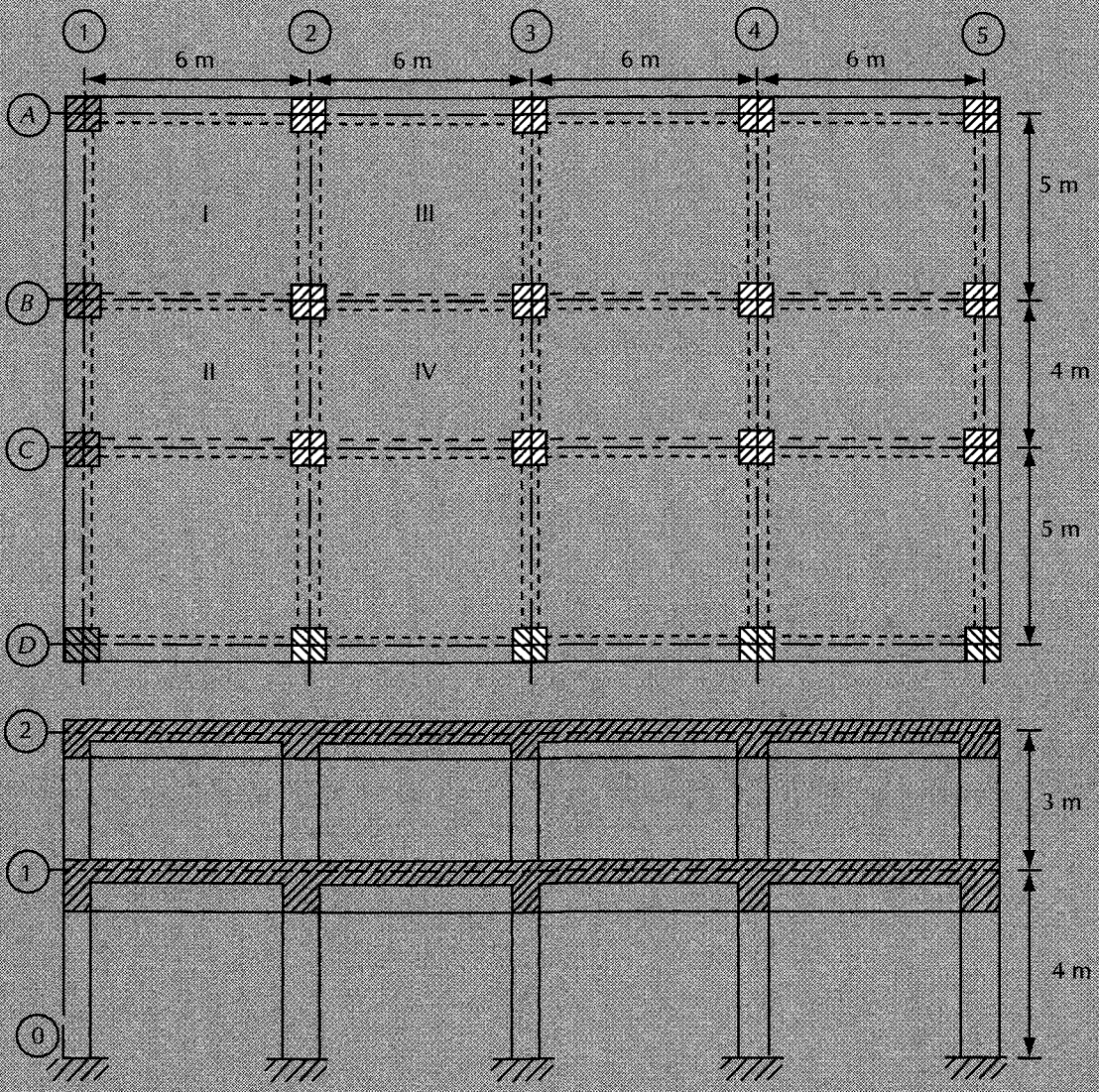


Figura 19.15 Distancias mínimas de secciones de corte de barras en losas sin vigas.

EJEMPLO 19.1 ***Diseño de un sistema de piso por el método directo del Reglamento ACI 318-02.***

DATOS



Columnas de 40 × 40 cm

Vigas de 25 × 60 cm en dirección horizontal y de 25 × 50 cm en dirección vertical

Losa de espesor igual a 14 cm

Carga viva = 900 kg/m^2 (nivel 1, condiciones de servicio)

Peso recubrimientos = 115 kg/m^2

f'_c = 200 kg/cm^2, f_y = 4200 kg/cm^2

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

REVISIÓN DE LAS LIMITACIONES (Secciones 19.3.1 y 19.3.9)

a) Se cumple porque hay tres claros en una dirección y cuatro en la otra.
b) Relación máxima entre claro largo y claro corto:

$$\frac{6}{4} = 1.5 < 2.0$$

c) Diferencia máxima entre claros sucesivos:

$5 - 4 = 1\text{ m} < (5\text{ m}/3 = 1.7\text{ m})$

d) No hay columnas fuera de los ejes
e) Carga muerta:

$w_{(\text{losa})} = 1 \times 0.14 \times 2400 = 336\text{ kg/m}^2$

$w_{(\text{recubrimientos})} = 115\text{ kg/m}^2$

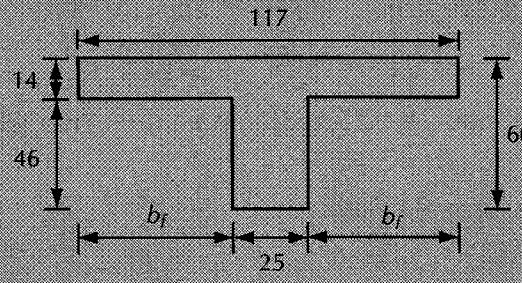
$w_{(\text{carga muerta})} = 451\text{ kg/m}^2$

Carga viva:

$w_{(\text{carga viva})} = 900\text{ kg/m}^2$

$$\frac{w_{(\text{carga viva})}}{w_{(\text{carga muerta})}} = \frac{900}{451} = 2.00 < 3$$

f) Para las vigas interiores de 6 m de largo:



$b_f = (60 - 14 = 46) < (4 \times 14 = 56)$

Usar 46 cm

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

$$I_b = k\,\frac{b_w h^3}{12} \qquad \text{(ver apéndice D.4)}$$

$$\frac{b_e}{b_w} = \frac{117}{25} = 4.7$$

$$\frac{t}{h} = \frac{14}{60} = 0.23$$

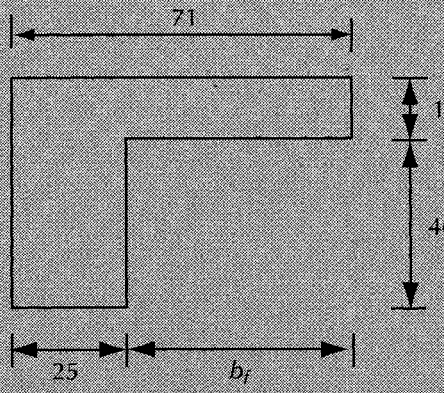
$$k = 1.8 \qquad \text{(apéndice D.4)}$$

$$I_b = \frac{1.8 \times 25 \times 60^3}{12} = 81.0 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{bh^3}{12} = \frac{450 \times 14^3}{12} = 10.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{I_b}{I_s} = \frac{81.0}{10.3} = 7.9 \qquad \text{(ecuación 19.11)}$$

Para las vigas de borde de 6 m de largo:



$$b_f = 60 - 14 = 46 < (4 \times 14 = 56)$$

$$\frac{b_e}{b_w} = \frac{71}{25} = 2.8, \quad \frac{t}{h} = \frac{14}{60} = 0.23$$

$$k = 1.55 \qquad \text{(apéndice D.4)}$$

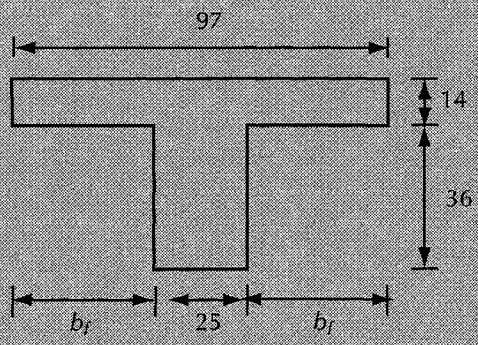
EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

$$I_b = \frac{1.55 \times 25 \times 60^3}{12} = 69.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{262.5 \times 14^3}{12} = 6.0 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{I_b}{I_s} = \frac{69.7}{6} = 11.6 \qquad \text{(ecuación 19.11)}$$

Para las vigas interiores de 5 m y de 4 m:



$b_f = (50 - 14 = 36) < (4 \times 14 = 56)$

$$\frac{b_e}{b_w} = \frac{97}{25} = 3.9, \quad \frac{t}{h} = \frac{14}{50} = 0.28$$

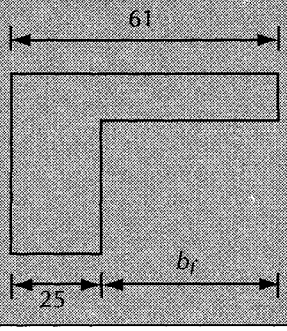
$k = 1.75$ (apéndice D.4)

$$I_b = \frac{1.75 \times 25 \times 50^3}{12} = 45.6 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{600 \times 14^3}{12} = 13.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{45.6}{13.7} = 3.3 \qquad \text{(ecuación 19.11)}$$

Para las vigas de borde de 5 m y de 4 m:



$b_f = 36 \text{ cm} < (4 \times 14 = 56)$

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

$$\frac{b_e}{b_w} = \frac{61}{25} = 2.4, \quad \frac{t}{h} = \frac{14}{50} = 0.28$$

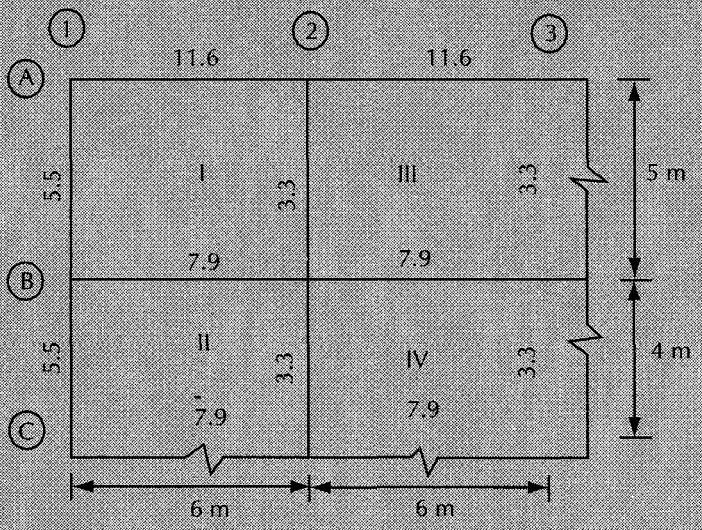
$k = 1.5$ (apéndice D.4)

$$I_b = \frac{1.5 \times 25 \times 50^3}{12} = 39 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{312.5 \times 14^3}{12} = 7.1 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{39}{7.1} = 5.5 \quad \text{(ecuación 19.11)}$$

Resumen de valores de α:



Para el tablero I

En dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(11.6 + 7.9) \times 5^2}{(5.5 + 3.3) \times 6^2} = 1.54; \quad 0.2 < 1.54 < 5.0$$

En dirección vertical:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(5.5 + 3.3) \times 6^2}{(11.6 + 7.9) \times 5^2} = 0.65; \quad 0.2 < 0.65 < 5.0$$

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Para el tablero II

En dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(7.9 + 7.9) \times 4^2}{(5.5 + 3.3) \times 6^2} = 0.80; \quad 0.2 < 0.80 < 5.0$$

En dirección vertical:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(5.5 + 3.3) \times 6^2}{(7.9 + 7.9) \times 4^2} = 1.25; \quad 0.2 < 1.25 < 5.0$$

Para el tablero III

En dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(11.6 + 7.9) \times 5^2}{(3.3 + 3.3) \times 6^2} = 2.05; \quad 0.2 < 2.05 < 5.0$$

En dirección vertical:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(3.3 + 3.3) \times 6^2}{(11.6 + 7.9) \times 5^2} = 0.49; \quad 0.2 < 0.49 < 5.0$$

Para el tablero IV

En dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(7.9 + 7.9) \times 4^2}{(3.3 + 3.3) \times 6^2} = 1.06; \quad 0.2 < 1.06 < 5.0$$

En dirección vertical:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(3.3 + 3.3) \times 6^2}{(7.9 + 7.9) \times 4^2} = 0.94; \quad 0.2 < 0.94 < 5.0$$

$\therefore$ En todos los casos se cumple la limitación (*f*).

REVISIÓN DEL PERALTE MÍNIMO (sección 19.3.10)

Se revisa en el tablero I que es el más desfavorable

$\ell_n = (600 - 40) = 560$ cm $>$ $(0.65 \times 600 = 390$ cm)

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

$$\beta = \frac{560}{460} = 1.22$$

$$\alpha_m = \frac{11.6 + 7.9 + 5.5 + 3.3}{4} = 7.1$$

Con la ecuación 19.16:

$$h = \frac{560\left(0.8 + \frac{4200}{14{,}000}\right)}{36 + 5 \times 1.22\left[7.1 - 0.12\left(1 + \frac{1}{1.22}\right)\right]}$$

$h = 7.9$ cm

Con la ecuación 19.17:

$$h = \frac{560\left(0.8 + \frac{4200}{14{,}000}\right)}{36 + 9 \times 1.22}$$

$h = 13.1$ cm

Con la ecuación 19.18:

$$h = \frac{560\left(0.8 + \frac{4200}{14{,}000}\right)}{36}$$

$h = 17.1$ cm

Se toma el mayor valor de las ecuaciones 19.16 y 19.17 y por lo tanto el valor supuesto de 14 cm es adecuado.

CÁLCULO DEL MOMENTO ESTÁTICO TOTAL (sección 19.3.3)

Cálculo de w_u

$w_{(\text{carga muerta})} = 451$ kg/m^2

$w_{(\text{carga viva})} = 900$ kg/m^2

$w_u = 1.2 \times 451 + 1.6 \times 900 = 1981$ kg/m$^2 \cong 1.98$ ton/m^2

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Eje *A*, todos los claros:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 2.625 \times 5.60^2}{8} = 20.37 \text{ ton-m} \qquad \text{(ecuación 19.6)}$$

Eje *B*, todos los claros:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 4.50 \times 5.60^2}{8} = 34.93 \text{ ton-m}$$

Eje 1, claro *A*-*B*:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 3.125 \times 4.60^2}{8} = 16.37 \text{ ton-m}$$

Eje 1, claro *B*-*C*:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 3.125 \times 3.60^2}{8} = 10.02 \text{ ton-m}$$

Eje 2, claro *A*-*B*:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 6 \times 4.60^2}{8} = 31.42 \text{ ton-m}$$

Eje 2, claro *B*-*C*:

$$M_o = \frac{w_u \ell_2 \ell_n^2}{8} = \frac{1.98 \times 6 \times 3.60^2}{8} = 19.25 \text{ ton-m}$$

MOMENTOS LONGITUDINALES (sección 19.3.4 y figura 19.7)

Ejes *A* y *D*:

$M_{1-2}(-) = 0.16\, M_o = 0.16 \times 20.37 = 3.26$ ton-m

$M_{1-2}(+) = 0.57\, M_o = 0.57 \times 20.37 = 11.61$ ton-m

$M_{2-1}(-) = 0.70\, M_o = 0.70 \times 20.37 = 14.26$ ton-m

$M_{2-3}(-) = 0.65\, M_o = 0.65 \times 20.37 = 13.24$ ton-m

$M_{2-3}(+) = 0.35\, M_o = 0.35 \times 20.37 = 7.13$ ton-m

$M_{3-2}(-) = 0.65\, M_o = 0.65 \times 20.37 = 13.24$ ton-m

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Ejes B y C:

$M_{1-2}(-) = 0.16\ M_o = 0.16 \times 34.93 = 5.59$ ton-m

$M_{1-2}(+) = 0.57\ M_o = 0.57 \times 34.93 = 19.91$ ton-m

$M_{2-1}(-) = 0.70\ M_o = 0.70 \times 34.93 = 24.45$ ton-m

$M_{2-3}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 34.93 = 22.70$ ton-m

$M_{2-3}(+) = 0.35\ M_o = 0.35 \times 34.93 = 12.23$ ton-m

$M_{3-2}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 34.93 = 22.70$ ton-m

Ejes 1 y 5:

$M_{A-B}(-) = 0.16\ M_o = 0.16 \times 16.37 = 2.62$ ton-m

$M_{A-B}(+) = 0.57\ M_o = 0.57 \times 16.37 = 9.33$ ton-m

$M_{B-A}(-) = 0.70\ M_o = 0.70 \times 16.37 = 11.46$ ton-m

$M_{B-C}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 10.02 = 6.51$ ton-m

$M_{B-C}(+) = 0.35\ M_o = 0.35 \times 10.02 = 3.51$ ton-m

$M_{C-B}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 10.02 = 6.51$ ton-m

Ejes 2, 3 y 4:

$M_{A-B}(-) = 0.16\ M_o = 0.16 \times 31.42 = 5.03$ ton-m

$M_{A-B}(+) = 0.57\ M_o = 0.57 \times 31.42 = 17.91$ ton-m

$M_{B-A}(-) = 0.70\ M_o = 0.70 \times 31.42 = 21.99$ ton-m

$M_{B-C}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 19.25 = 12.51$ ton-m

$M_{B-C}(+) = 0.35\ M_o = 0.35 \times 19.25 = 6.73$ ton-m

$M_{C-B}(-) = 0.65\ M_o = 0.65 \times 19.25 = 12.51$ ton-m

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

***REVISIÓN DE EFECTOS DE CARGAS DESFAVORABLES* (sección 19.3.8)**

$\beta_a = \dfrac{451}{900} = 0.50 < 2$, luego sí hay efecto.

Condición a de la sección 19.3.8

$$I_{col} = \frac{40^4}{12} = 21.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$K_{col.\ sup.} = \frac{I}{\ell} = \frac{21.3 \times 10^4}{300} = 0.071 \times 10^4$$

$$K_{col.\ inf.} = \frac{I}{\ell} = \frac{21.3 \times 10^4}{400} = 0.053 \times 10^4$$

En el eje A, columna 1:

$$\alpha_c = \frac{0.071 + 0.053}{\dfrac{6.0 + 69.7}{600}} = 0.98 \qquad \text{(ecuación 19.9)}$$

α_{min} (para $\beta_a = 0.50$, $\ell_2/\ell_1 = 0.44$, $\alpha = 11.6$) $= 0$ (tabla 19.3)

$\alpha_c > \alpha_{min}$, luego no es necesario aumentar los momentos positivos.

Esto sucede en todos los casos para los valores de α y de ℓ_2/ℓ_1 del ejemplo.

En el eje 2, columna B:

$$\alpha_c = \frac{0.071 + 0.053}{\dfrac{45.6 + 13.7}{500} + \dfrac{45.6 + 13.7}{400}} = 0.46$$

α_{min} (para $\beta_a = 0.50$, $\ell_2/\ell_1 = 1.33$, $\alpha = 3.3$) $= 0.032$

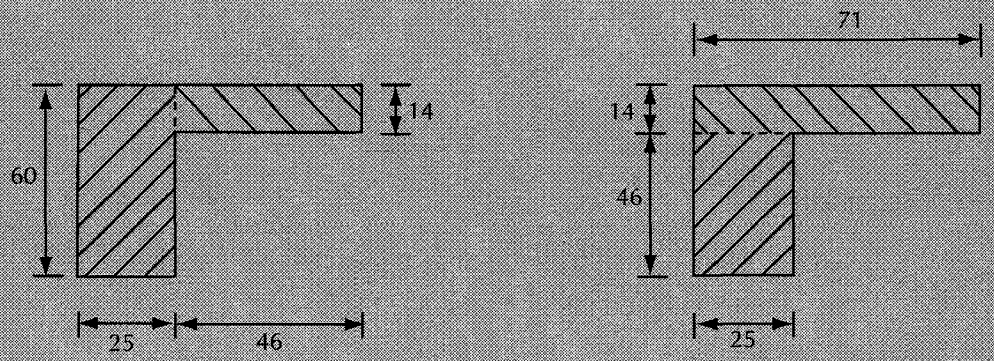
$\alpha_c > \alpha_{min}$.

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS LONGITUDINALES A LO ANCHO DE LAS FRANJAS (sección 19.3.5)

Cálculo del parámetro β_t (sección *19.3.9b*)

Constante de torsión C para las vigas de borde del eje *A*:



Para la condición *a*:

$$C = \left(1 - \frac{0.63 \times 25}{60}\right)\frac{25^3 \times 60}{3} + \left(1 - \frac{0.63 \times 14}{46}\right)\frac{14^3 \times 46}{3} \quad \text{(ecuación 19.13)}$$

$$C = 26.4 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la condición *b*:

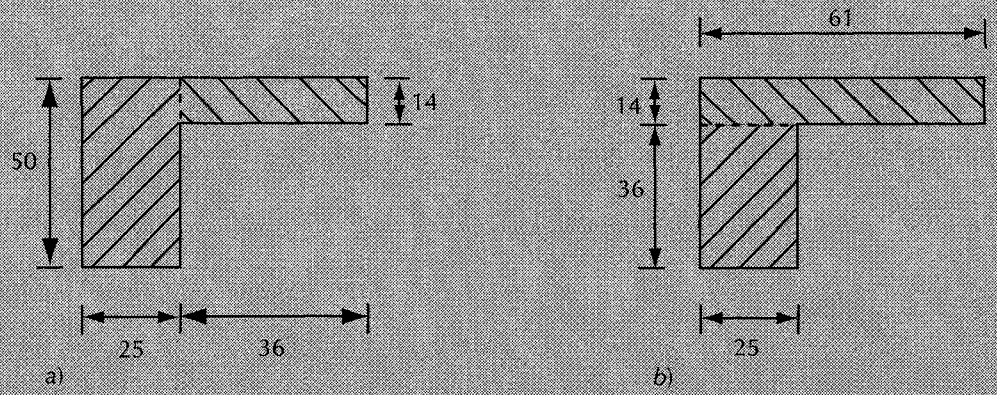
$$C = \left(1 - \frac{0.63 \times 25}{46}\right)\frac{25^3 \times 46}{3} + \left(1 - \frac{0.63 \times 14}{71}\right)\frac{14^3 \times 71}{3}$$

$$C = 21.4 \times 10^4 \text{ cm}^4 < 26.4 \times 10^4$$

Usar $C = 26.4 \times 10^4$ cm^4

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Constante de torsión C para las vigas de borde del eje 1:



Para la condición *a*:

$$C = \left(1 - \frac{0.63 \times 25}{50}\right)\frac{25^3 \times 50}{3} + \left(1 - \frac{0.63 \times 14}{36}\right)\frac{14^3 \times 36}{3}$$

$$C = 20.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Para la condición *b*:

$$C = \left(1 - \frac{0.63 \times 25}{36}\right)\frac{25^3 \times 36}{3} + \left(1 - \frac{0.63 \times 14}{61}\right)\frac{14^3 \times 61}{3}$$

$$C = 15.3 \times 10^4 < 20.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

Usar $C = 20.3 \times 10^4$ cm^4

Para las franjas A y D:

$$\beta_t = \frac{C}{2I_s} \qquad \text{(ecuación 19.12)}$$

$$I_s = \frac{500 \times 14^3}{12} = 11.4 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\beta_t = \frac{20.3}{2 \times 11.4} = 0.89$$

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Para las franjas B y C:

$$I_s = \frac{450 \times 14^3}{12} = 10.3 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\beta_t = \frac{20.3}{2 \times 10.3} = 0.98$$

Para las franjas 1, 2, 3, 4 y 5

$$I_s = \frac{600 \times 14^3}{12} = 13.7 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\beta_t = \frac{26.4}{2 \times 13.7} = 0.96$$

Cálculo de momentos en la franja de columnas, franja central y viga.

Franjas de los ejes *A* y *D*:

Sección	*M total (ton-m)*	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	$\frac{\alpha_1 \ell_2}{\ell_1}$	β_t	*Porcentaje tabla 19.2*	*M franja col.*	*M viga*	*M losa en fr. col.*	*M franja central*
$M_{1-2}(-)$	3.26	0.83	9.63	0.89	92.9	3.03	2.58	0.45	0.23
$M_{1-2}(+)$	11.61	0.83	9.63		80.1	9.30	7.91	1.39	2.31
$M_{2-1}(-)$	14.26	0.83	9.63		80.1	11.42	9.71	1.71	2.84
$M_{2-3}(-)$	13.24	0.83	9.63		80.1	10.61	9.02	1.59	2.63
$M_{2-3}(+)$	7.13	0.83	9.63		80.1	5.71	4.85	0.86	1.42
$M_{3-2}(-)$	13.24	0.83	9.63		80.1	10.61	9.02	1.59	2.63

Franjas de los ejes *B* y *C*:

Sección	*M total (ton-m)*	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	$\frac{\alpha_1 \ell_2}{\ell_1}$	β_t	*Porcentaje tabla 19.2*	*M franja col.*	*M viga*	*M losa en fr. col.*	*M franja central*
$M_{1-2}(-)$	5.59	0.75	5.92	0.98	93.1	5.20	4.42	0.78	0.39
$M_{1-2}(+)$	19.91	0.75	5.92		82.5	16.43	13.97	2.46	3.48
$M_{2-1}(-)$	24.45	0.75	5.92		82.5	20.17	17.14	3.03	4.28
$M_{2-3}(-)$	22.70	0.75	5.92		82.5	18.73	15.92	2.81	3.97
$M_{2-3}(+)$	12.23	0.75	5.92		82.5	10.09	8.58	1.51	2.14
$M_{3-2}(-)$	22.70	0.75	5.92		82.5	18.73	15.92	2.81	3.97

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Franjas de los ejes 1 y 5:

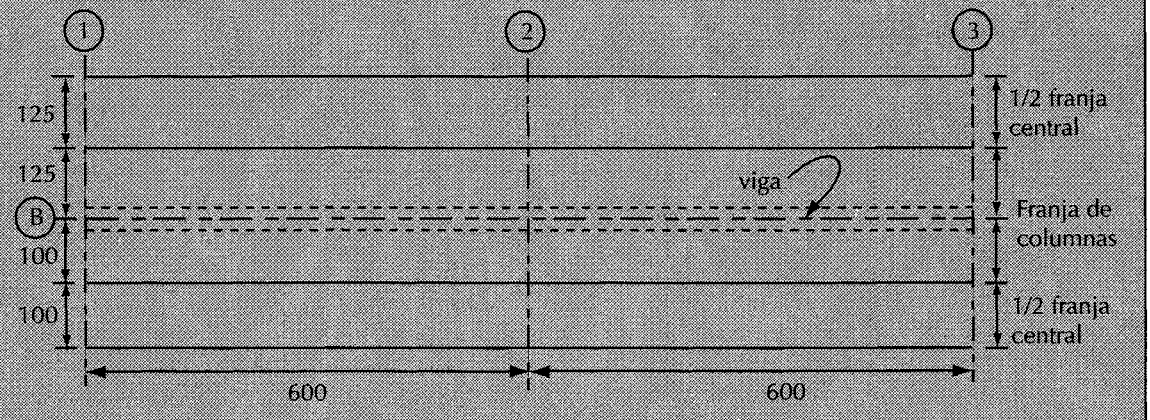
Sección	*M total* (ton-m)	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	$\frac{\alpha_1 \ell_2}{\ell_1}$	β_t	*Porcentaje tabla 19.2*	*M franja col.*	*M viga*	*M losa en fr. col.*	*M franja central*
$M_{A-B}(-)$	2.62	1.2	6.60	0.96	88.1	2.31	1.96	0.35	0.31
$M_{A-B}(+)$	9.33	1.2	6.60		69.0	6.44	5.47	0.97	2.89
$M_{B-A}(-)$	11.46	1.2	6.60		69.0	7.91	6.72	1.19	3.55
$M_{B-C}(-)$	6.51	1.5	8.25		60.0	3.91	3.32	0.59	2.60
$M_{B-C}(+)$	3.51	1.5	8.25		60.0	2.11	1.79	0.32	1.40
$M_{C-B}(-)$	6.51	1.5	8.25		60.0	3.91	3.32	0.59	2.60

Franjas de los ejes 2, 3 y 4:

Sección	*M total* (ton-m)	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	$\frac{\alpha_1 \ell_2}{\ell_1}$	β_t	*Porcentaje tabla 19.2*	*M franja col.*	*M viga*	*M losa en fr. col.*	*M franja central*
$M_{A-B}(-)$	5.03	1.20	3.96	0.96	88.1	4.47	3.80	0.67	0.56
$M_{A-B}(+)$	17.91	1.20	3.96		69.0	12.36	10.51	1.85	5.55
$M_{B-A}(-)$	21.99	1.20	3.96		69.0	15.17	12.89	2.28	6.82
$M_{B-C}(-)$	12.51	1.50	4.95		60.0	7.51	6.38	1.13	5.00
$M_{B-C}(+)$	6.73	1.50	4.95		60.0	4.04	3.43	0.61	2.69
$M_{C-B}(-)$	12.51	1.50	4.95		60.0	7.51	6.38	1.13	5.00

CÁLCULO DE ÁREAS DE ACERO POR FLEXIÓN

a) Franja del eje B, losa en franja de columnas



EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

Sección	M (ton-m)	R (ton-m)	M/R	ω	ρ	A_s	s (barras No. 3)
$M_{1-2}(-)$	0.78	53.6	0.015	0.015	0.0007	4.66	28
$M_{1-2}(+)$	2.46	53.6	0.046	0.050	0.0024	6.21	26
$M_{2-1}(-)$	3.03	53.6	0.057	0.060	0.0029	7.50	21
$M_{2-3}(-)$	2.81	53.6	0.052	0.055	0.0026	6.99	23
$M_{2-3}(+)$	1.51	53.6	0.028	0.028	0.0013	4.66	28
$M_{3-2}(-)$	2.81	53.6	0.052	0.055	0.0026	6.99	23

$$R = \phi b d^2 f'_c = 0.9 \times 225 \times 11.5^2 \times 200 = 53.6 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\rho_{mín} = 0.0018; \; A_{s\,mín} = 0.0018 \times 225 \times 11.5 = 4.66 \text{ cm}^2 \qquad \text{(tabla 16.1)}$$

$$s = \frac{225 \times 0.71}{4.66} = 34 \text{ cm}$$

$$\rho_{máx} = 0.75\,\rho_b = \frac{0.75 \times 0.85^2 \times 200}{4200} \times \frac{6000}{6000 + 4200} = 0.015 \qquad \text{(figura 5.12)}$$

$$s_{máx} = 2h = 2 \times 14 = 28 \text{ cm}$$

b) Franja del eje B, franja central:

Sección	M (ton-m)	R (ton-m)	M/R	ω	ρ	A_s	s (barras No. 3)
$M_{1-2}(-)$	0.39	53.6	0.0073	0.0073	0.0003	4.66	28
$M_{1-2}(+)$	3.48	53.6	0.065	0.070	0.0033	8.54	19
$M_{2-1}(-)$	4.28	53.6	0.080	0.090	0.0043	11.13	14
$M_{2-3}(-)$	3.97	53.6	0.074	0.080	0.0038	9.83	16
$M_{2-3}(+)$	2.14	53.6	0.040	0.042	0.0020	5.17	31 > 28
$M_{3-2}(-)$	3.97	53.6	0.074	0.080	0.0038	9.83	16

$$R = \phi b d^2 f'_c = 0.90 \times 225 \times 11.5^2 \times 200 = 53.6 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

c) Franja del eje B, viga:

Sección	M (ton-m)	R (ton-m)	M/R	ω	p	A_s	Número de barras del No. 6
$M_{1-2}(-)$	4.42	146.2	0.030	0.030	0.0014	4.70	2
$M_{1-2}(+)$	13.97	146.2	0.096	0.105	0.0050	7.12	3
$M_{2-1}(-)$	17.14	146.2	0.117	0.125	0.0060	8.55	3
$M_{2-3}(-)$	15.92	146.2	0.109	0.120	0.0057	8.12	3
$M_{2-3}(+)$	8.58	146.2	0.059	0.065	0.0031	4.70	2
$M_{3-2}(-)$	15.92	146.2	0.109	0.120	0.0057	8.12	3

$$R = \phi b d^2 f'_c = 0.9 \times 25 \times 57^2 \times 200 = 146.2 \times 10^5 \text{ kg-cm}$$

$$\rho_{min} = \frac{14}{f_y} = \frac{14}{4200} = 0.0033$$

$$A_{s\,min} = 0.0033 \times 25 \times 57 = 4.7 \text{ cm}^2$$

REVISIÓN POR FUERZA CORTANTE

a) Losa:

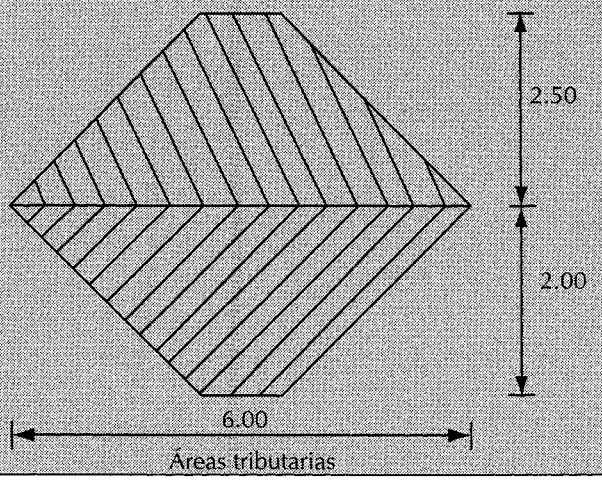
El caso más desfavorable es el del tablero I en dirección del claro corto:

$$V_u = 1.15 \frac{w_u \ell}{2} = \frac{1.15 \times 1980 \times 4.60}{2} = 5237 \text{ kg}$$

$$V_c = \phi v_c\, bd = 0.75 \times 0.5 \times \sqrt{200} \times 100 \times 11.5 = 6099 \text{ kg}$$

$$V_c > V_u$$

b) Viga del eje B:



EJEMPLO 19.1 (*continuación*)

$$W_u = 1980\left[\frac{6.00 + 1.00}{2} \times 2.50 + \frac{6.00 + 2.00}{2} \times 2.00\right]$$

$$W_u = 33{,}165 \text{ kg}$$

$$V_u = \frac{33{,}165}{2} = 16{,}582 \text{ kg}$$

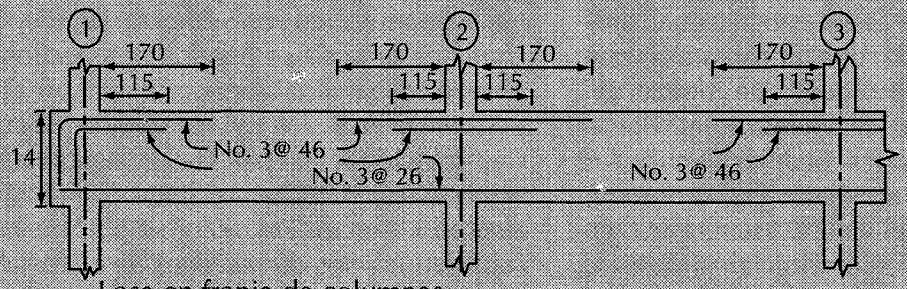
$$V_c = 0.75 \times 0.5 \times \sqrt{200} \times 25 \times 57 = 7557 \text{ kg}$$

$$V_s = V_u - V_c = 9025 \text{ kg}$$

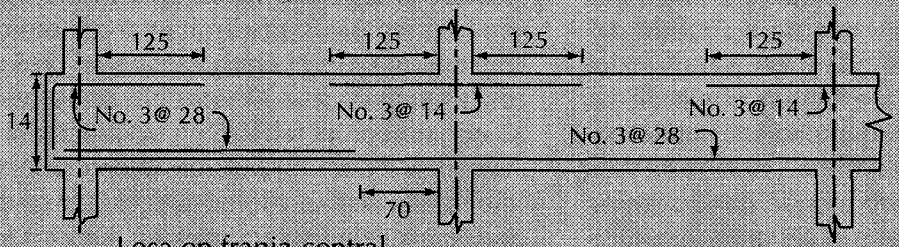
$$s = \frac{0.75 \times 2 \times 0.71 \times 4200 \times 57}{8017} = 32 \text{ cm} > (d/2)$$

Usar estribos No. 3 @ 28 cm

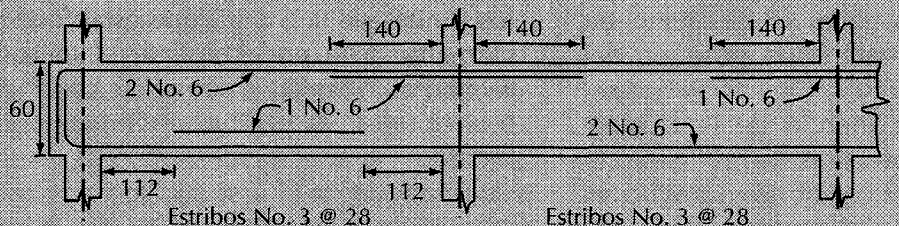
CROQUIS DE ARMADO



Losa en franja de columnas



Losa en franja central



Estribos No. 3 @ 28 Estribos No. 3 @ 28

Viga

Se empieza por calcular la rigidez de las vigas interiores de 6 m de largo, o sea, las localizadas en los ejes B y C. Se define la sección transversal de las vigas, según el Reglamento, como una sección T cuyo patín tiene un ancho, a cada lado del alma de la viga, igual al peralte de la viga por debajo de la losa o a cuatro veces el espesor de la losa, el que sea menor. Resulta menor en este caso el peralte por debajo de la losa que es de 46 cm. El ancho total del patín es, por lo tanto, de dos veces 46 cm, más el ancho del alma, que es de 25 cm.

Una vez definida la sección transversal, se calcula su momento de inercia. Esto puede hacerse por el procedimiento usual de localizar el eje centroidal y obtener los momentos de inercia respecto a dicho eje, o bien, puede usarse la gráfica que se presenta en el Apéndice D.4 de este texto, la cual proporciona el valor de una constante k que multiplicada por el momento de inercia del alma da el momento de inercia total. Por la frecuencia con que es necesario calcular momentos de inercia en el método directo, resulta conveniente el uso de esta gráfica. En el caso de esta viga, se entra al eje de las abscisas con un valor de t/h de 0.23, se traza una vertical hasta una curva interpolada visualmente para un valor de b_e/b_w de 4.7 entre las que corresponden a 4 y 6, y se localiza un valor de k de 1.8 en el eje de las ordenadas. Este valor se multiplica por el momento de inercia del alma, $b_w h^3/12$, y se obtiene el momento de inercia de la sección T. Obsérvese que la gráfica es aplicable también a secciones que no tengan el alma centrada con respecto al patín, como secciones L invertida, ya que el momento de inercia es independiente de la posición del alma.

El momento de inercia de la losa se calcula de la manera usual, ya que se trata de una sección rectangular cuyo ancho es la distancia entre los ejes centrales de los tableros adyacentes a la viga y cuyo peralte es el espesor de la losa. Al calcular el valor de a con la ecuación 19.11, se eliminaron los módulos de elasticidad de la viga, E_{cb}, y de la losa, E_{cs}, ya que se supuso que ambas se construyen con el mismo concreto y por lo tanto los módulos de elasticidad son iguales.

De la misma manera se calcularon los valores de a para los otros tres tipos de viga y losa que se tienen en el ejemplo: las vigas de borde de 6 m de largo de los ejes A y D; las vigas interiores de 5 y de 4 m de largo de los ejes 2, 3 y 4; y las vigas de borde de los ejes 1 y 5. Obsérvese que el claro de vigas y losas no influye en el valor de a, ya que se relacionan únicamente las propiedades de las secciones transversales. Después del cálculo de todos los valores de a, se incluye en el ejemplo un croquis con estos valores. Sólo se muestran los tableros I, II, III y IV, ya que por simetría se pueden obtener los valores en los otros tableros.

A partir de los valores de a se calcularon las relaciones $\alpha_1 \ell_2^2/\alpha_2 \ell_1^2$, en función de las cuales se establece la sexta limitación del método directo. Para ello, se plantea la relación en las dos direcciones de cada tablero. Por ejemplo, en la dirección horizontal del tablero I, α_1 es la suma de los valores de a en los ejes A y B que limitan al tablero en esa dirección; ℓ_2 es el claro transversal de 5 m; α_2 es la suma de los valores de a en los ejes 1 y 2 que limitan al tablero en la dirección transversal; y ℓ_1 es el claro en la dirección considerada, o sea, 6 m. De esta manera se calcularon las relaciones en las dos direcciones de cada tablero, obteniéndose en todos los casos valores comprendidos entre los límites de 0.2 y 5.0 que establece el Reglamento para poder aplicar el método directo. Por lo tanto, al cumplirse con todas las limitaciones, es posible continuar con este método.

Aunque en el ejemplo se calcularon las relaciones $\alpha_1 \ell_2^2/\alpha_2 \ell_1^2$ en las dos direcciones, en la práctica basta con calcularlas en

una sola dirección, ya que si se cumple en ella, forzosamente se cumple en la otra. En efecto, como 5.0 es el recíproco de 0.2, cualquier valor de $\alpha_1 \ell_2^2/\alpha_2 \ell_1^2$ mayor que 0.2 tiene un recíproco menor que 5.0 y cualquier valor menor de 5.0 tiene un recíproco mayor que 0.2. Por lo tanto, si $\alpha_1 \ell_2^2/\alpha_2 \ell_1^2$ está comprendido entre 0.2 y 5.0, su recíproco, que es $\alpha_2 \ell_1^2/\alpha_1 \ell_2^2$, también está comprendido entre estos valores.

Prosigue el ejemplo con la revisión del peralte de la losa. La revisión se hace únicamente en el tablero I en dirección del claro largo, ya que es el más desfavorable de la estructura. Se calculan primero los parámetros β, que es la relación entre los claros libres, o sea, de paño a paño de columnas, sin que sean menores de 0.65 ℓ; y α_m que es el promedio de los valores de α en los cuatro ejes que limitan al tablero.

El Reglamento señala que el peralte de la losa no debe ser menor que el calculado con las ecuaciones 19.16 y 19.17, y que no necesita ser mayor que el calculado con la ecuación 19.18. Por lo tanto, en este ejemplo rige el peralte calculado con la ecuación 19.17 que resulta de 13.1 cm y es correcto por consiguiente el peralte que se había supuesto de 14 cm. En la práctica es conveniente, en el caso de estructuras con vigas rígidas, revisar el peralte desde un principio con la ecuación 19.17, ya que siempre da valores mayores que la ecuación 19.16 para estos casos y no requiere el cálculo previo de los valores de α que, como se ha visto, es laborioso.

Después se calcularon los momentos estáticos totales en cada uno de los ejes de la estructura, y en cada claro, cuando no son constantes a lo largo de un eje. La carga última por unidad de área se obtuvo multiplicando la carga muerta por un factor de carga de 1.2 y la carga viva por un factor de carga de 1.6, valores que especifica el Reglamento ACI 318-02. Los claros ℓ_n son los claros libres, como ya se explicó, y los claros transversales ℓ_2 son los claros entre los ejes centrales de los tableros adyacentes a un eje o bien, la distancia del borde de la estructura al eje central del tablero en el caso de tableros de borde. En éstos, se consideró que la distancia del eje al borde era de 12.5 cm, que es la mitad del ancho de las vigas; así, en el caso del eje A, el claro ℓ_2 es la suma de 250 cm, que es la mitad del claro transversal del tablero, y de 12.5 cm, que es la mitad del ancho de la viga de borde. Esto implica que la losa remata en la cara lateral de las vigas.

Los momentos estáticos totales se distribuyeron después en momentos negativos y positivos para obtener los momentos longitudinales. En los claros extremos, la distribución se hizo con los coeficientes de la tabla 19.1, para losas con vigas entre todos los apoyos (columna 2). Por ejemplo, el momento $M_{1-2}(-)$, que es el momento en el extremo 1 del claro 1-2, se calculó con el coeficiente de 0.16, que corresponde en la tabla a momento negativo exterior. El momento positivo en este mismo claro se calculó con el coeficiente de 0.57, que corresponde a momento positivo en claros extremos. Y el momento $M_{2-1}(-)$, que es el momento negativo en el primer apoyo interior, con el coeficiente de 0.70. En claros interiores se aplicaron los coeficientes de 0.65 y 0.35 para momentos negativos y positivos, respectivamente, que se señalan al principio de la sección 19.3.4. Nótese que hay que usar el valor de M_o que corresponde al claro en cuestión. Por ejemplo, en los ejes 1 y 5 se usa un valor de 16.37 ton-m en el claro A-B y de 10.02 en el claro B-C, que son los valores correspondientes calculados en la sección de "Cálculo del momento estático total".

En esta etapa es conveniente revisar los efectos de patrones desfavorables de colocación de la carga viva, ya que si los hubiere, se pueden corregir los momentos positivos

antes de proseguir con los demás cálculos. En el ejemplo, la relación entre carga muerta y carga viva es menor que 2, por lo que es necesario revisar estos efectos. Nótese que la relación β_a se calculó con las cargas a nivel de servicio, o sea, antes de multiplicarlas por los factores de carga. La revisión debe hacerse en cada eje, y dentro de cada uno, en todos los apoyos. Sin embargo, al hacerla en el primer apoyo del eje A, se encontró que los valores de $\alpha_{mín}$ de la tabla 19.3, son iguales a cero o muy pequeños para todas las combinaciones de β_a, ℓ_2/ℓ_1 y α que se presentan en el ejemplo, por lo que no se continuó con la revisión. De hecho, en la mayoría de estructuras con vigas rígidas no es necesario hacer modificaciones por efectos de cargas desfavorables, mientras que sí lo es en el caso de losas planas. Al final de esta sección se ilustra el cálculo para la columna B del eje 2, que es una columna interior. Al calcular el denominador de la ecuación que da el valor de α_c, se incluyeron los valores de K_b y K_s a ambos lados de la columna; por eso una suma está dividida entre 500, que es el claro entre los ejes A y B, y la otra, entre 400, que es el claro entre los ejes B y C. Al calcular la relación ℓ_2/ℓ_1 se tomó como ℓ_2 el claro transversal de 6 m, y como ℓ_1 el promedio de los claros longitudinales a ambos lados de la columna que son de 5 m y de 4 m. El valor de $\alpha_{mín}$ se obtuvo interpolando en la tabla 19.3, para $\beta_a = 0.5$, entre los valores de ℓ_2/ℓ_1 de 1.25 y 2.0, y entre los valores de a de 2.0 y 4.0. Se observa que el valor obtenido de $\alpha_{mín}$ es muy pequeño aun en esta columna que es la más desfavorable del ejemplo.

La distribución de los momentos longitudinales a lo ancho de las franjas se inició con el cálculo del parámetro, β_t, el cual, a su vez, requiere conocer el valor de la constante de torsión C. Para este último cálculo se trazaron los croquis de las vigas de borde que se definieron en el cálculo de los parámetros α y se dividieron en rectángulos componentes de las dos formas posibles que se muestran en el ejemplo. Para cada una se calculó el valor de C con la ecuación 19.13 y se tomó el mayor como señala el Reglamento.

Ya conocidos los valores de C, se calcula β_t con la ecuación 19.12, eliminando los módulos de elasticidad de la viga y de la losa por ser iguales. Para el cálculo del término I_s en las franjas de borde, se usó como ancho de losa el claro centro a centro de los tableros de borde. En cambio, para las franjas de ejes interiores se usó el ancho promedio de los dos tableros adyacentes al eje, lo que equivale a usar el valor promedio de I_s en los dos tableros.

A continuación se distribuyen los momentos longitudinales entre la franja de columnas y la franja central, y en la primera, entre la losa de esta franja y la viga. Esta distribución se muestra en el ejemplo en forma de tablas, una para cada tipo de franja. Dentro de cada tabla, los renglones corresponden a las secciones en que se distribuyen los momentos; por ejemplo, la sección $M_{1-2}(-)$, corresponde al apoyo 1 del claro 1–2, en la cual hay momento negativo.

La columna M_{total} muestra el valor del momento en toda la franja; así, el valor de 3.26 del primer renglón de la primera tabla, es el momento obtenido en esa sección al distribuir el momento estático total en momentos negativos y positivos. Estos valores se tomaron de la sección de "Momentos longitudinales" del ejemplo.

Los valores de ℓ_2/ℓ_1 se obtuvieron dividiendo los claros transversales entre los longitudinales. En las franjas A, B, C y D son constantes en los dos claros, mientras que cambian en las franjas 1, 2, 3, 4 y 5 al ser diferentes los claros A-B y B-C.

Los valores de la columna $\alpha_1\ell_2/\alpha_2\ell_1$ se obtuvieron multiplicando los de la columna anterior por los valores de α mostrados en el croquis de la sección "Revisión de las limi-

taciones (f)". Por ejemplo, el valor de 9.63 de la primera tabla, es el resultado de multiplicar 0.83 por 11.6, valor este último que corresponde a los ejes A y D en el croquis mencionado.

En la columna β_t se anotan los valores calculados anteriormente. Sólo se hace esto para el primer renglón de cada tabla, ya que este parámetro interviene únicamente en la distribución de los momentos negativos exteriores, o sea, en las secciones de borde.

La siguiente columna muestra los porcentajes del momento total que determinan los momentos en las franjas de columnas, mismos que están tomados de la tabla 19.2. Para obtener las cifras mostradas fue necesario interpolar entre los valores de la tabla, como se ilustra a continuación para algunos casos. El valor de 93.1 del renglón $M_{1-2}(-)$ de las franjas B y C se obtuvo tomando, en la primera columna de la tabla 19.2, la sección de "Momento negativo exterior"; dentro de esta sección se tomó la parte que corresponde a $(\alpha_1 \ell_2/\ell_1 \geq 1.0)$, ya que se tiene un valor de 5.92. Después se interpoló entre los valores de ℓ_2/ℓ_1 que corresponden a 0.5 y 1.0, ya que en el ejemplo se tiene 0.75. Esta interpolación se hizo para los dos renglones de valores de β_t, pero en el primero se conserva el valor 100, mientras que en el segundo se obtiene un valor de $(90 + 75)/2 = 82.5$. Seguidamente se interpoló entre los renglones de $\beta_t = 0$ y $\beta_t \geq 2.5$, para un valor de β_t de 0.98. La interpolación es la siguiente

$$\frac{(100 - 82.5)}{2.5} \times 0.98 = 6.86$$

$$100 - 6.86 = 93.14$$

Siguiendo los mismos pasos, se ilustra a continuación la obtención del valor de 88.1 que corresponde al renglón $M_{A-B}(-)$ en la franja de los ejes 2, 3 y 4:

Interpolación en las columnas de $\ell_2/\ell_1 = 1.0$ y $\ell_2/\ell_1 = 2.0$ para $\beta_t = 0.96$:

$$\frac{(100 - 75)}{2.5} \times 0.96 = 9.6; \quad 100 - 9.6 = 90.4$$

(para $\ell_2/\ell_1 = 1.0$)

$$\frac{(100 - 45)}{2.5} \times 0.96 = 21.12; \quad 100 - 21.12 = 78.88$$

(para $\ell_2/\ell_1 = 2.0$)

Interpolación entre los valores de 90.4 y 78.88 para $\ell_2/\ell_1 = 1.20$:

$$\frac{(90.4 - 78.88)}{(2.0 - 1.0)} \times 0.2 = 2.30; \quad 90.4 - 2.30 = 88.1$$

La interpolación resulta más sencilla en momentos positivos y momentos negativos interiores, ya que en éstos no interviene β_t. Por ejemplo, el momento $M_{2-3}(+)$ en las franjas B y C se obtuvo interpolando en el renglón que corresponde a $\alpha_1 \ell_2/\ell_1 \geq 1.0$ entre los valores de ℓ_2/ℓ_1 de 0.5 y 1.0. Se tiene $(90 + 75)/2 = 82.5$.

Ya calculados los porcentajes de la tabla 19.2 como se ha indicado, se calculan los momentos en las franjas de columnas, multiplicando los momentos totales por los porcentajes correspondientes. Por ejemplo, en el primer renglón de la primera tabla, el momento de 3.03 se obtuvo multiplicando el momento total de 3.26 por el porcentaje de 92.9.

En las dos columnas siguientes se muestra la distribución del momento en la franja de columnas entre la viga y la losa. De acuerdo con lo señalado en la sección 19.3.5*c*, a la viga corresponde el 85 por ciento del momento cuando $\alpha_1 \ell_2/\ell_1$ es mayor o igual a 1.0, lo cual se tiene en todos los casos de este ejemplo. Entonces, en el primer renglón de la primera tabla, a la viga

se le asigna el 85 por ciento del momento de 3.03 ton-m, que resulta de 2.58, y a la losa, la diferencia entre 3.03 y 2.58, que resulta de 0.45 ton-m.

En la última columna de las tablas se presenta el momento en la franja central, que se obtuvo por diferencia entre el momento total y el momento en la franja de columnas. Por ejemplo, en el primer renglón de la primera tabla, la diferencia entre 3.26 y 3.03 proporciona el momento de 0.23 ton-m en la franja central.

Continúa el ejemplo con el cálculo de las áreas de acero que se requieren por flexión. Sólo se ilustra este cálculo en la franja del eje B, pero debe hacerse de la misma manera en todos los ejes y en ambas direcciones. El cálculo se hace en forma de tabla, siguiendo el procedimiento usual ya presentado en varios ejemplos anteriores, con la ayuda de la gráfica del Apéndice A o de las tablas del Apéndice B. Se revisó que la relación ρ estuviera comprendida entre $\rho_{mín}$, que es la que corresponde al acero por contracción y temperatura (sección 19.3.11), y el 75 por ciento de la relación balanceada, ρ_b. Cuando no se cumplió la primera condición, se usó el área mínima de refuerzo y la separación máxima entre barras. La segunda condición siempre se cumplió, como generalmente sucede en losas.

El cálculo de áreas de acero se efectuó para la losa que queda comprendida en la franja de columnas, para la losa de la franja central y para la viga. En el caso de las losas, las áreas de acero son áreas para todo el ancho de las franjas correspondientes. Por ejemplo, el área de 7.50 cm^2 en el renglón $M_{2-1}(-)$, de la tabla del inciso a, indica la totalidad de acero que debe colocarse en la losa de la franja de columnas, que tiene un ancho de 2.25 m. Para obtener la separación de la barras a partir de esta área, se usó la ecuación $s = b\, A_b/A_s$, donde b es el ancho de la franja, A_b es el área de cada barra y A_s es el área total. En el ejemplo mencionado, la separación sería $s = 225 \times 0.71/7.50 = 21$ cm, ya que se usaron barras del No. 3 que tienen un área de 0.71 cm^2. La ecuación mencionada se usa en vez de la ecuación usual $s = 100\, A_b/A_s$, que es válida para franjas de losa de 100 cm de ancho.

Después se revisaron por cortante tanto la losa como la viga. Para la primera, se tomó el caso más desfavorable, que es el que se presenta en el tablero I. En la dirección del claro corto de este tablero se tiene una fuerza cortante de $w_u\ell/2$, que se incrementó en 15 por ciento para tomar en cuenta que es un claro extremo (ver tabla 14.1). La fuerza cortante que resiste el concreto, V_c, resultó mayor que la fuerza cortante V, por lo que la losa pasa satisfactoriamente la revisión por cortante.

Ya que en las vigas se tienen valores de α mayores que 1.0, la fuerza cortante en ellas se obtiene por el procedimiento de áreas tributarias (sección 19.3.6). Fue necesario diseñar refuerzo por cortante porque la resistencia del concreto V_c resultó menor que V.

Finalmente se muestran los croquis de armado de la losa y de la viga del eje B, que se hicieron de acuerdo con las recomendaciones de la figura 16.4. Se recuerda que en la forma ilustrada, deben diseñarse las losas y las vigas de los otros ejes, en la dirección perpendicular a la considerada en el ejemplo.

19.5 Método de la estructura equivalente

Se mencionó que el Reglamento ACI 318-02 incluye dos métodos para el diseño de sistemas de piso: el método directo, estudiado en la sección anterior, y el método de la estructura equivalente, que se presenta en esta sección. Este método es similar al estudiado en el capítulo 18 para el diseño de losas planas con las NTC-04 de Reglamento del Distrito Federal, pero se aplica tanto a losas

planas como a las losas con vigas e incluye un número mayor de variables. El método de la estructura equivalente es más laborioso que el método directo, pero no tiene las restricciones de este último.

Consiste el método en los pasos que se mencionan a continuación en forma resumida y que se describen con detalle más adelante.

a) Idealización de la estructura tridimensional en marcos bidimensionales constituidos por columnas y vigas.
b) Determinación de las rigideces de los elementos que forman los marcos.
c) Análisis estructural de los marcos.
d) Distribución de los momentos flexionantes y fuerzas cortantes obtenidos en el análisis, entre los elementos que forman la estructura tridimensional.
e) Dimensionamiento de los elementos de la estructura.

19.5.1. Idealización de la estructura

En el método de la estructura equivalente, se hace una simplificación que consiste en idealizar la estructura por una serie de marcos en

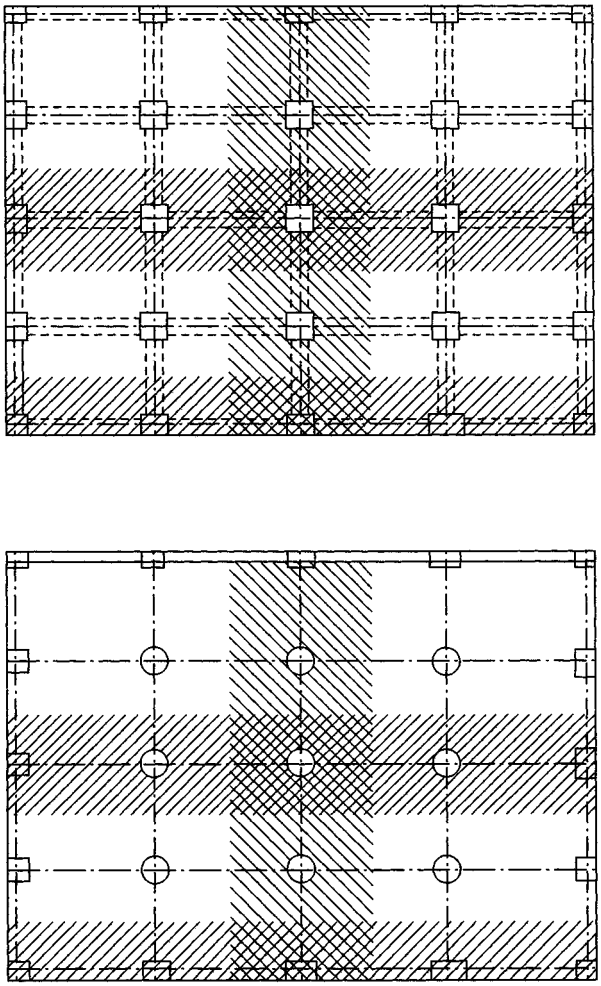


Figura 19.16 Idealización de la estructura.

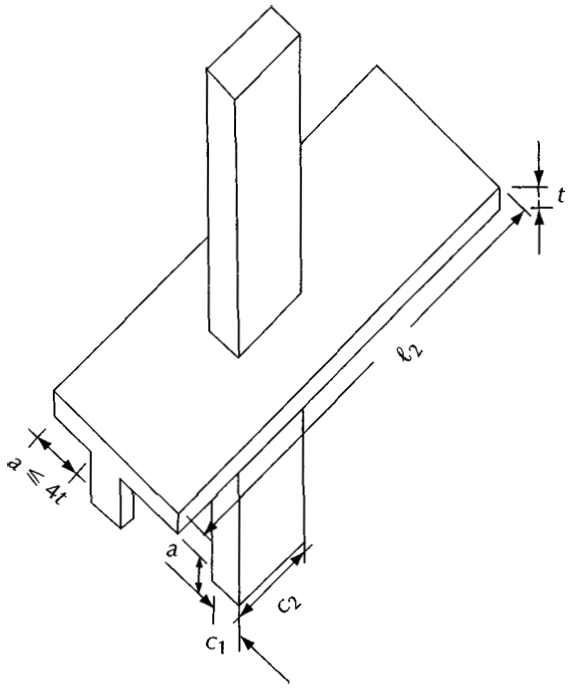


Figura 19.17 Columna modificada equivalente.

dos direcciones, como los que se muestran en las áreas rayadas de la figura 19.16.

Las columnas de los marcos equivalentes son iguales a las columnas de la estructura, modificadas de tal manera que, además de la columna propiamente dicha, incluyen la viga perpendicular a la dirección del marco equivalente, como se muestra en la figura 19.17. Esta modificación se hace para tomar en cuenta el efecto de restricción por torsión que ejercen las vigas sobre la losa (sección 19.2.3). En sistemas de piso sin vigas se supone que existe una viga cuyo peralte es igual al de la losa y cuyo ancho es igual al de la columna o capitel en la dirección del marco equivalente. En sistemas de piso con vigas se supone que las vigas transversales son vigas T o *L*, cuyo ancho de patín es igual a la proyección de la viga encima o debajo de la losa, rigiendo la mayor, pero sin exceder cuatro veces el espesor de la losa. En la figura 19.18 se ilustra la aplicación de estas

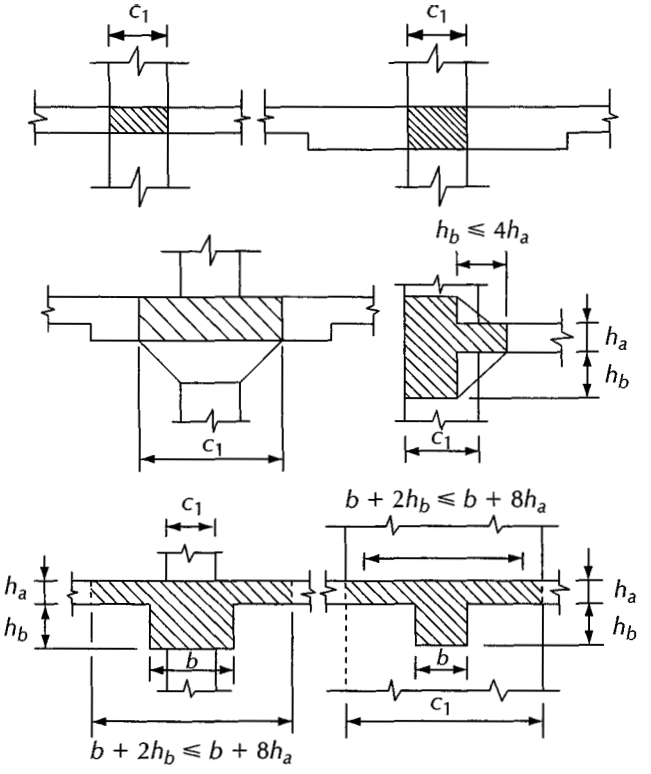


Figura 19.18 Definición de la viga transversal que trabaja a torsión.

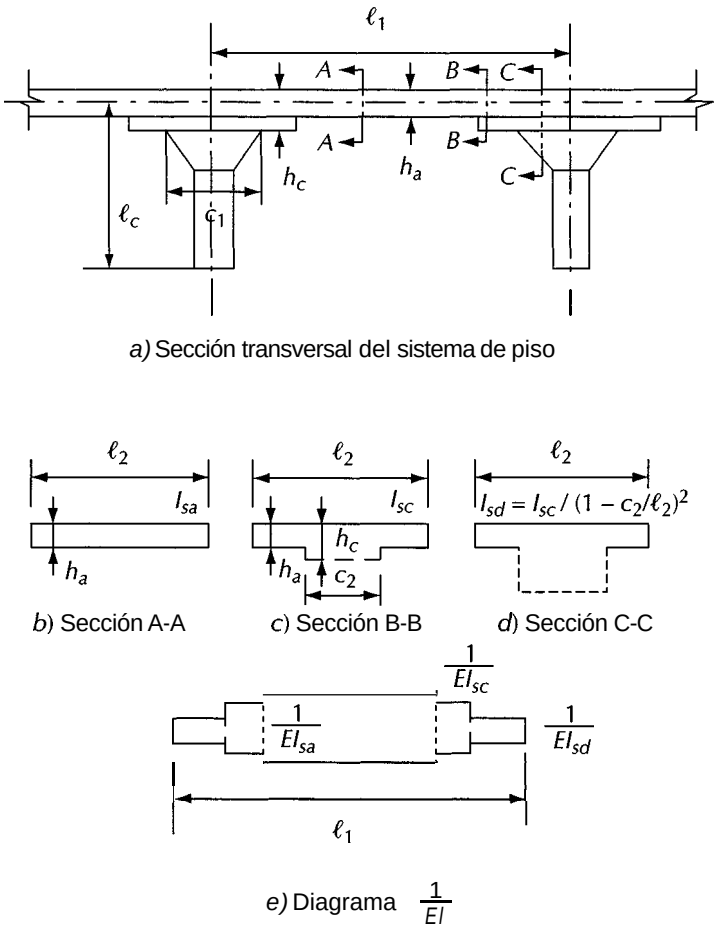


Figura 19.19 Cálculo de rigideces de vigas equivalentes en sistemas de piso sin vigas.

reglas para distintos casos, que, como se ve, son iguales a las del método directo.

En losas apoyadas sobre vigas, las vigas de los marcos equivalentes están formadas por las vigas de la estructura y los tramos de losa comprendidos entre los ejes centrales de los tableros. Las vigas y la losa en conjunto constituyen una viga equivalente cuyas características se definen como se indica en la sección *19.5.2.* En losas apoyadas sobre columnas, las vigas de los marcos están formadas por los tramos de losa comprendidos entre los ejes centrales de los tableros. La manera de transformar los tramos de losa en vigas equivalentes se indica también en la sección *19.5.2.*

19.5.2 Determinación de las rigideces de los elementos

Para calcular las rigideces se consideran únicamente secciones gruesas de concreto sin agrietar y sin tomar en cuenta el acero de refuerzo. A continuación se presentan por separado los métodos de cálculo de rigideces de vigas y columnas, en sistemas de piso sin vigas y con vigas. Se presenta únicamente la forma de calcular los valores de $1/EI$, ya que a partir de estos valores pueden calcularse las rigideces tomando en cuenta las longitudes de los claros y las condiciones de restricción en los extremos de columnas y

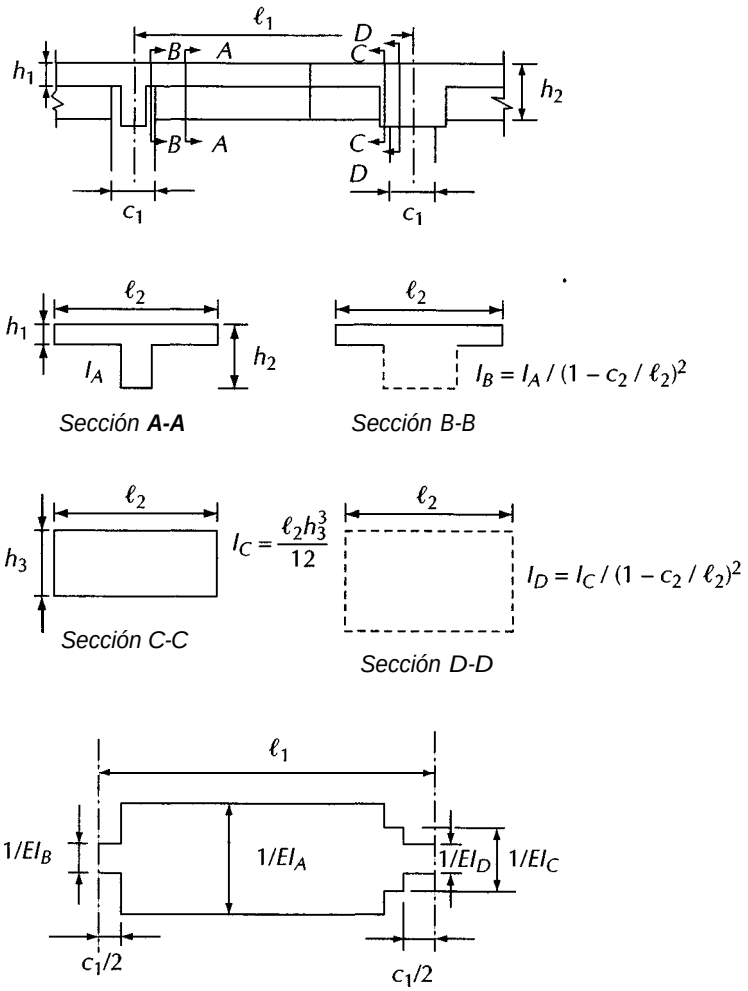


Figura 19.20 Cálculo de la rigidez de la viga equivalente en sistemas de piso con vigas.

vigas. En todos los casos, el valor de E es el del módulo de elasticidad del concreto, E_c.

a) Vigas del marco equivalente en sistemas de piso sin vigas. El caso más general de estos sistemas se muestra en la figura 19.19*a*, la cual representa un sistema que incluye losas, ábaco y capitel.

El momento de inercia de la sección A-A es el de una sección rectangular (figura 19.19*b*).

El de la sección B-B, que corresponde al ábaco, se calcula como el de la sección T mostrada en la figura 19.19*c*.

La sección C-C mostrada en la figura 19.19*d* es de peralte variable; sin embargo, por simplicidad se supone que el momento de inercia, del eje de la columna al extremo del capitel, o a la cara de la columna si no hay capitel, es constante e igual al momento de inercia en la sección del ábaco, dividido entre el factor $(1 - c_2/\ell_2)^2$, donde c_2 y ℓ_2 son las dimensiones del capitel o de la columna y del claro, respectivamente, en dirección transversal a la del marco equivalente considerado. El factor de reducción es el mismo para capiteles redondos o cuadrados. La distribución de valores $1/EI$ a lo largo del claro se muestra en la figura 19.19*e*. En el apéndice D se presentan factores para calcular la rigidez y los factores de

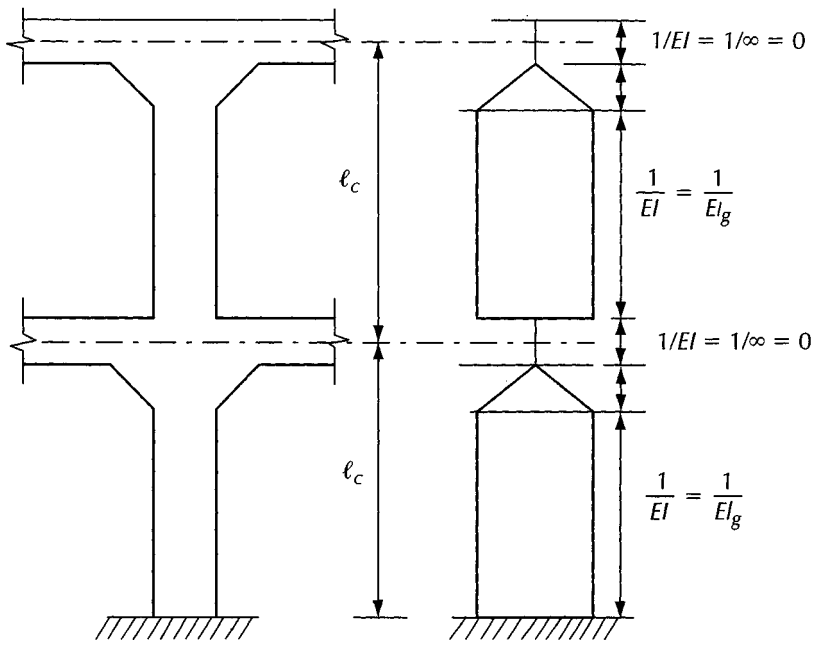


Figura 19.21 Cálculo de la rigidez a flexión de las columnas equivalentes en sistemas sin vigas.

transporte con los criterios anteriores para varios casos.

b) Vigas del marco equivalente en sistemas de piso con vigas. En la figura 19.20 se ilustra la forma de calcular el valor de *I* en distintas secciones. En la zona interior del claro, sección A-A, el momento de inercia es el de una sección T con ancho de patín igual al claro transversal, ℓ_2. Entre los ejes de columnas y los paños de columnas o capiteles, sección *B-B,* se usa el valor del momento de inercia en la sección A-A, dividido entre el factor $(1 - c_2/\ell_2)^2$. Las secciones C-C y D-D de la figura 19.20, ilustran la manera de tratar el caso en que la viga transversal es más ancha que la columna.

c) Columnas de marco equivalente. Se mencionó antes que la columna equivalente está formada por la columna y una viga que trabaja a torsión, restringiendo a la losa, figura 19.17. Para calcular la rigidez de este elemento compuesto, se parte de la hipótesis de que su flexibilidad, o sea, el recíproco de su rigidez, es igual a la suma de las flexibilidades a flexión de los tramos de columna encima y debajo del nivel de piso y de la flexibilidad a torsión de la viga. Esta consideración, basada en los ensayes mencionados anteriormente, puede expresarse mediante la siguiente ecuación

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{K_t} \qquad (19.19)$$

donde:

K_{ec} = rigidez de la columna equivalente en momento por unidad de rotación

ΣK_c = suma de las rigideces a flexión de los tramos de columna, comprendidos entre el nivel de piso considerado y los niveles superior e inferior

K_t = rigidez a torsión de la viga

Para calcular la rigidez K_c de cada columna, en sistemas sin vigas, se supone que el valor de I es constante e igual al de la sección gruesa de cada columna entre la cara superior de la losa y la base del capitel del nivel superior, que I es infinito en el espesor de la losa, y que varía linealmente entre los dos valores anteriores en el peralte del capitel. En la figua 19.21 se presenta la variación en los valores de $1/EI$ de una columna, de acuerdo con los criterios anteriores. En sistemas con vigas, el tramo de rigidez infinita se toma como el comprendido entre el lecho superior de la losa y el lecho inferior de la viga de mayor peralte (figura 19.22). Para calcular las rigideces se considera que la altura de las columnas se mide centro a centro de las losas, como se muestra en las figuras 19.21 y 19.22.

La rigidez torsionante, K_t, de la trabe unida a la columna (figura 19.17), puede calcularse con la siguiente ecuación [19.9]

$$K_t = \frac{9\,E_{cs}\,C}{\ell_2\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^3} \qquad (19.20)$$

donde:

E_{cs} = módulo de elasticidad del concreto de la losa

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\,\frac{x}{y}\right)\frac{x^3 y}{3} \qquad (19.21)$$

x = dimensión total menor de una sección transversal rectangular

y = dimensión total mayor de una sección transversal rectangular.

La suma que aparece en la ecuación 19.21 se refiere a los rectángulos en que puede descomponerse la sección T o L de la viga de la figura 19.17. La manera de hacer esta descomposición en rectángulos se muestra en la figura 19.23; debe usarse el mayor valor de C que se pueda obtener. A partir de los valores de K_c y K_t se calcula la rigidez de la columna equivalente, K_{ec}, con la ecuación 19.19.

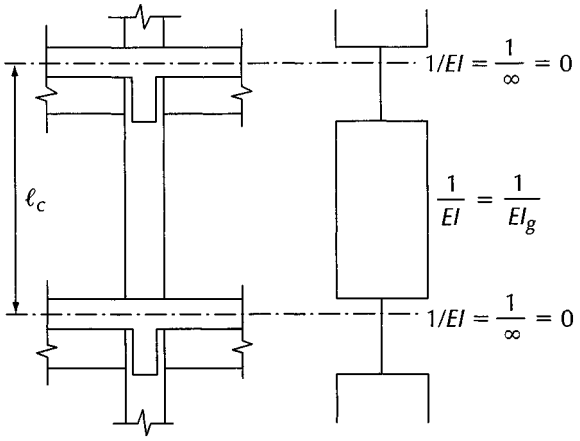
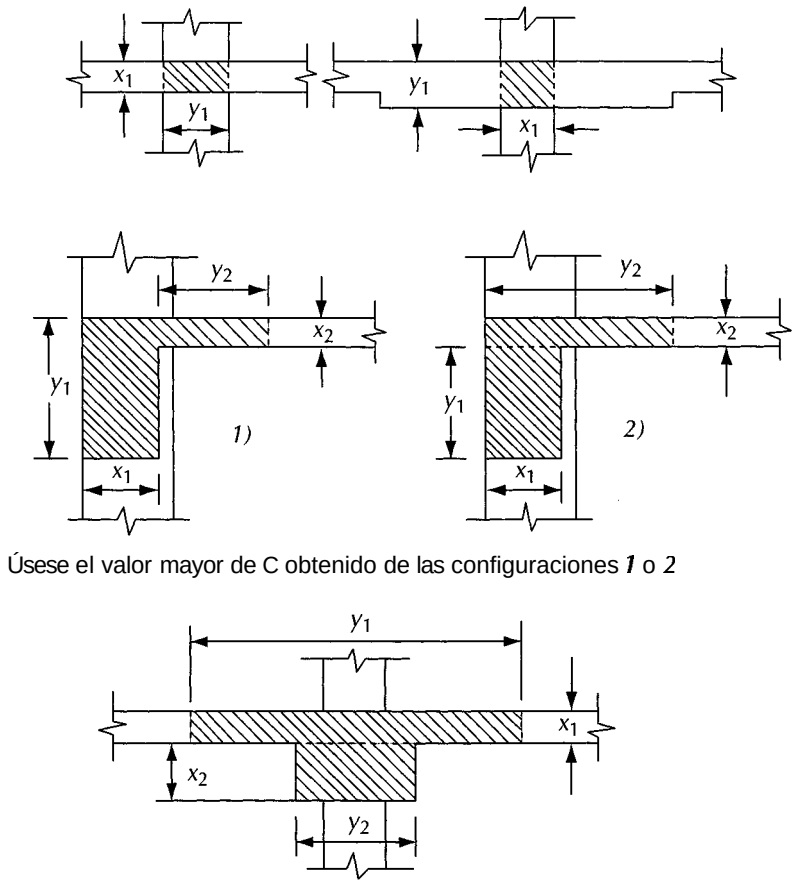


Figura 19.22 Cálculo de la rigidez a flexión de las columnas equivalentes en sistemas con vigas.

El cálculo de K_t con la ecuación 19.20 se basa en suponer una distribución triangular de momentos torsionantes en la viga perpendicular al marco que se considera. Cuando el tablero tiene una viga paralela a la dirección en que actúa el momento flexionante, la hipótesis ya no es válida. Se recomienda en este caso [19.9] multiplicar el valor de K_t, calculado con la ecuación 19.20, por el factor I_A/I_s, donde I_s es el momento de inercia de un ancho de losa igual al ancho del tablero, ℓ_2, excluyendo la parte del alma de la viga que se proyecta arriba y debajo de la losa, e I_A es el momento de inercia de la misma losa, incluyendo la parte de la viga que se proyecta arriba y abajo de la losa. Por lo tanto, I_s es el momento de inercia de un rectángulo con base ℓ_2 y altura igual al espesor de la losa, e I_A es el momento de inercia de una sección T, o L si es tablero de borde. La rigidez torsionante modificada por la presencia de la viga paralela es

$$K_{ta} = K_t\,\frac{I_A}{I_s} \qquad (19.22)$$



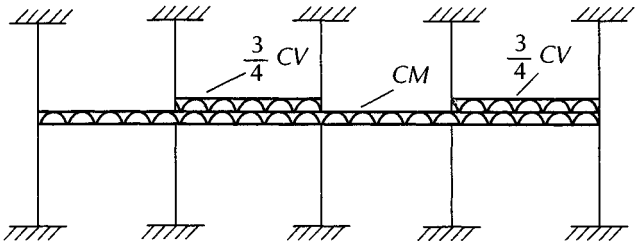
Úsese el valor mayor de C obtenido de las configuraciones *1* o *2*

Figura 19.23 Secciones transversales para determinar el parámetro C de la viga sujeta a torsión.

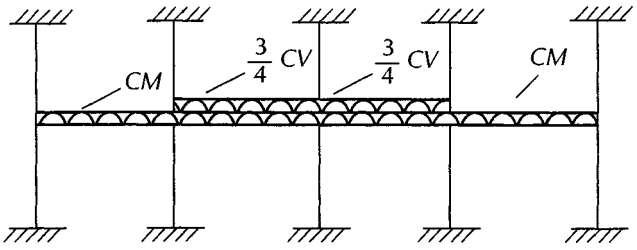
19.5.3 Análisis estructural *de* los marcos

Una vez calculadas las rigideces de las vigas y columnas de la estructura equivalente, se efectúa el análisis estructural por los procedimientos usuales para marcos bidimensionales. El análisis por carga vertical puede llevarse a cabo aislando cada uno de los pisos y suponiendo que las columnas superior e inferior están empotradas en sus extremos opuestos. En el análisis por carga horizontal (viento o sismo) deben analizarse los marcos completos.

Cuando se conoce la distribución de la carga viva, el análisis se hace para tal distribución. Si no se conoce la distribución y la carga viva no excede de las tres cuartas partes de la carga muerta, o no hay posibilidad de que la carga viva varíe significativamente de uno a otro tablero, el análisis estructural se efectúa suponiendo que todos los claros del marco están cargados. Cuando no se cumplen estas condiciones, el momento positivo máximo en un claro dado se calcula suponiendo que el claro está cargado con las tres cuartas partes de la carga viva y con la carga muerta total, y que los claros adyacentes están cargados únicamente con la carga muerta. El momento negativo máximo en un nudo dado, se calcula suponiendo que los dos claros adyacentes al nudo están cargados con las tres cuartas partes de la carga viva total, y los claros siguientes están descargados. En la figura 19.24 se ilustran las condiciones desfavorables de carga descritas anteriormente y la simplifica-



a) Condición de carga desfavorable para momento positivo



b) Condición de carga desfavorable para momento negativo

Figura 19.24 Condiciones desfavorables de carga.

ción de la estructura que puede hacerse para efectos de cálculo por carga vertical. En ningún caso debe diseñarse para momentos flexionantes menores que los obtenidos con carga viva total en todos los claros.

En nudos interiores, la sección crítica por momento negativo está localizada en las caras de las columnas, pero a una distancia no mayor de 0.175 ℓ_1 del centro de la columna. En apoyos exteriores con capiteles, la sección crítica por momento negativo está localizada a la mitad de la distancia entre la cara de la columna y el extremo del capitel.

19.5.4 Distribución de momentos flexionantes y fuerzas cortantes

Los momentos flexionantes y fuerzas cortantes obtenidos mediante el análisis descrito en la sección anterior, corresponden a las vigas y columnas del marco equivalente. Es necesario distribuir estos momentos y fuerzas cortantes entre los elementos del sistema de piso.

Puesto que las trabes del marco equivalente representan a las franjas del sistema de piso mostradas en la figura 19.16, los momentos y fuerzas cortantes deben distribuirse entre los elementos comprendidos en dichas franjas. Para hacer esta distribución, la franja de piso se divide en una franja de columna y una o dos medias franjas centrales, al igual que en el método directo (figura 19.9). La franja de columnas incluye las vigas, en caso de que existan.

Una vez hecha la división en franjas señalada anteriormente, se distribuyen los momentos entre la franja central, la franja de columnas y las vigas, de la misma manera que en el método directo (sección *19.3.5*), siempre que se satisfaga la condición de la sección 19.3.1 f, o sea, siempre que el valor de $\alpha_1\ell_2^2/\alpha_2\ell_1^2$ esté comprendido entre 0.2 y 5.0. El Reglamento ACI 318-02 no contiene ninguna disposición para distribuir los momentos flexionantes cuando no se cumple esta condición.

El diseño de los elementos por flexión, la revisión por fuerza cortante de la losa y de las vigas, así como las disposiciones sobre peralte mínimo de la losa y detalles del

refuerzo, son iguales a los vistos anteriormente para el método directo. También debe cuidarse el detalle de transferencia de momento de la losa a la columna, al que se hizo referencia al final de la sección 19.3.4.

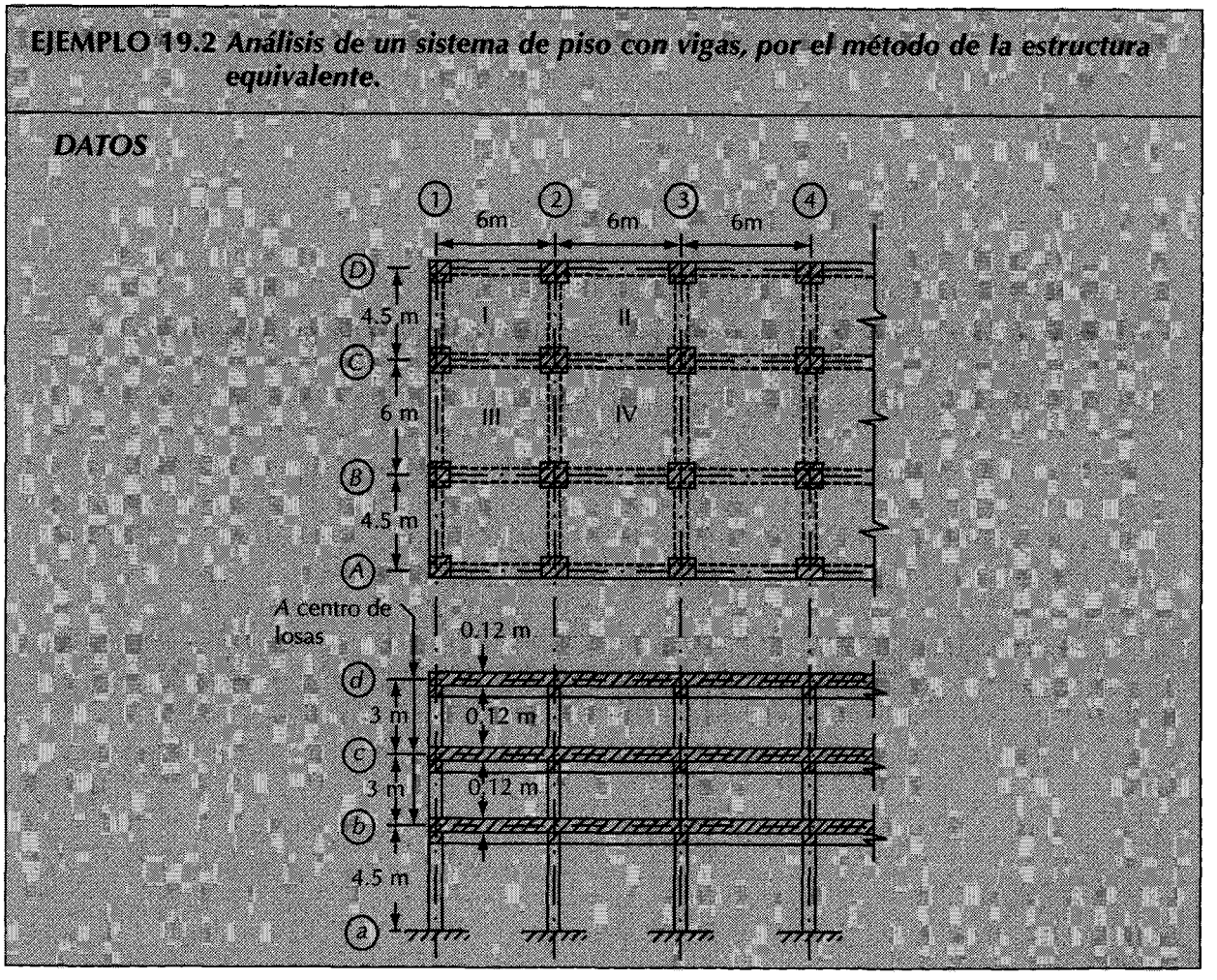
19.6 Ejemplo de diseño con el método de la estructura equivalente

En el ejemplo 19.2 se ilustra la aplicación del método de la estructura equivalente a una estructura con vigas cuyas características se indican en los datos del ejemplo. Se trata de una estructura de tres niveles, sometida a la acción de carga vertical únicamente. En el ejemplo sólo se analiza el marco correspondiente al eje 2 en el primer nivel. Para resolver la estructura completa debe repetirse el procedimiento indicado en todos los ejes y en ambas direcciones.

La relación de carga viva a carga muerta, a nivel de servicio, es menor que 0.75. Esto permite analizar la estructura únicamente con carga uniforme en todos los claros, sin necesidad de revisar los efectos desfavorables de la variación de cargas vivas mostrados en la figura 19.24. Para obtener la carga de diseño o carga última, se usó un factor de carga de 1.2 para la carga muerta y de 1.6 para la carga viva.

EJEMPLO 19.2 ***Análisis de un sistema de piso con vigas, por el método de la estructura equivalente.***

DATOS



EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Dimensiones:

Vigas interiores: 30×50 cm
Vigas exteriores: 25×50 cm
Columnas:
tramo *ab*: 35×35 cm
tramo *bc*: 30×30 cm

Cargas

A nivel de servicio:

Carga viva: $w_v = 250$ kg/m^2
Carga muerta: $w_m = 500$ kg/m^2

$$\frac{250}{500} < \frac{3}{4}$$

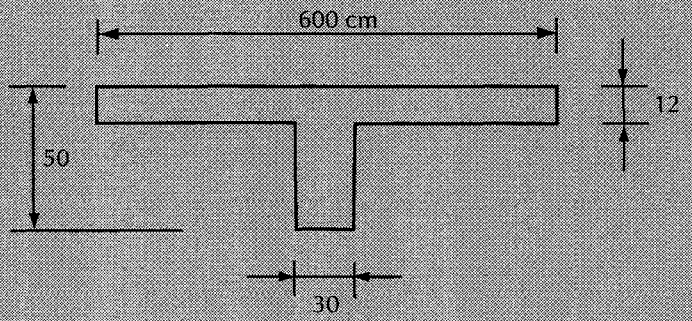
Carga última:

$$w_u = 1.2 \times 500 + 1.6 \times 250 = 1 \text{ ton/m}^2$$

RIGIDECES, FACTORES DE TRANSPORTE, MOMENTOS DE EMPOTRAMIENTO

VIGAS MARCO EQUIVALENTE, EJE 2, TRAMO *CB*

Momentos de inercia zona central



EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Usando la gráfica del Apéndice D.4:

$$\left.\begin{aligned} \frac{t}{h} &= \frac{12}{50} = 0.24 \\ \frac{b_e}{b_w} &= \frac{600}{30} = 20 \end{aligned}\right\} \quad k = 2.7$$

$$I_A = k\, b_w \frac{h^3}{12} = 2.7 \times 30 \times \frac{50^3}{12}$$

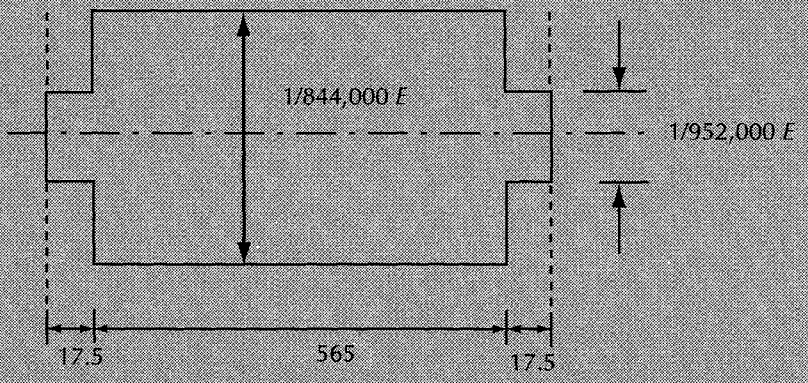
$$I_A = 844{,}000 \text{ cm}^4$$

Momento de inercia del eje al paño de la columna

$$I_B = \frac{I_A}{\left(1 - \frac{c_2}{\ell_2}\right)^2} = \frac{844{,}000}{\left(1 - \frac{35}{600}\right)^2}$$

$$I_B = 952{,}000 \text{ cm}^4$$

Diagrama de variación de 1/EI



Rigidez

Aplicando las ecuaciones del Apéndice D.2:

$$K_{BC} = K_{CB} = \frac{3.45\, E \times 10^6}{\ell_1} = \frac{3.45 \times 10^6\, E}{600}$$

$$K_{BC} = K_{CB} = 0.575 \times 10^4\, E$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Factor de transporte

Del Apéndice D.2:

$FT_{BC} = FT_{CB} = 0.51$

Momento de empotramiento

Del Apéndice D.2:

$$M_{BC} = M_{CB} = 0.084\, w\ell_1^2$$
$$= 0.084 \times 1 \times 6 \times 6^2$$
$$M_{BC} = M_{CB} = 18.12 \text{ ton-m}$$

VIGAS MARCO EQUIVALENTE, EJE 2, TRAMOS *AB* Y *CD*

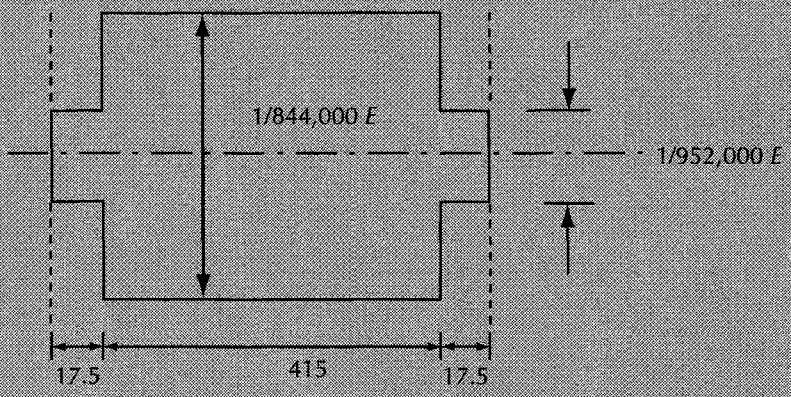
Momento de inercia zona central

$I_A = 844{,}000 \text{ cm}^4$ (ver tramo *CB*)

Momento de inercia del eje al paño de la columna

$I_B = 952{,}000 \text{ cm}^4$ (ver tramo *CB*)

Diagrama de variación de 1/EI



Rigidez

Del Apéndice D.2:

$$K_{AB} = K_{BA} = K_{CD} = K_{DC} = \frac{3.45\, E \times 10^6}{\ell_1} = \frac{3.45 \times 10^6\, E}{450} = 0.765 \times 10^4 \times E$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Factor de transporte

Del Apéndice D.2:

$$FT_{AB} = FT_{BA} = FT_{CD} = FT_{DC} = 0.51$$

Momento de empotramiento

Del Apéndice D.2:

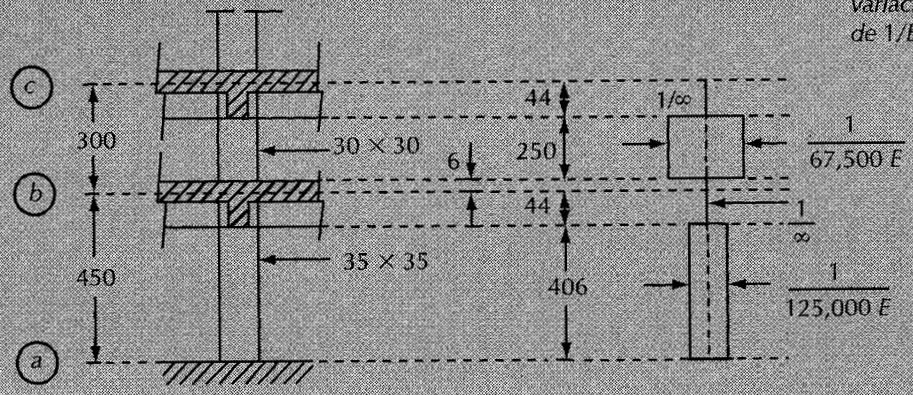
$$M_{AB} = M_{BA} = M_{CD} = M_{DC} = 0.084 \times 1 \times 6 \times 4.5^2$$

$$M_{AB} = M_{BA} = M_{CD} = M_{DC} = 10.22 \text{ ton-m}$$

COLUMNAS EQUIVALENTES *A2* Y *D2*

Cálculo de ΣK_c

Diagrama de variación de 1/EI



Momentos de inercia

Tramo *ab*: $\frac{1}{12}(35)^4 = 125{,}000 \text{ cm}^4$

Tramo *bc*: $\frac{1}{12}(30)^4 = 67{,}500 \text{ cm}^4$

Rigidez tramo ab

Del Apéndice D.1: $\lambda = \frac{44}{450} = 0.098$

$$K_{ci(ba)} = \frac{6.2\ EI}{\ell_c} = \frac{6.2 \times 125{,}000 \times E}{450}$$

$$K_{ci(ba)} = 0.172 \times 10^4\ E$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Rigidez tramo bc

Del Apéndice D.1: $\lambda = \frac{44}{300} = 0.147$

$$K_{cs(bc)} = \frac{4.6\,EI}{\ell_c} = \frac{4.6 \times 67{,}500 \times E}{300}$$

$$K_{cs(bc)} = 0.104 \times 10^4\,E$$

Cálculo de K_t

$$K_t \frac{9\,E_{cs}\,C}{\ell_2\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^3} \qquad \text{(ecuación 19.20)}$$

Considerando el caso 1 de la figura 19.23:

$x_1 = 25$
$y_1 = 50$
$x_2 = 12$
$y_2 = 50 - 12 = 38 < 4x_2 = 48$ cm (figura 19.18)

Considerando el caso 2 de la figura 19.23:

$x_1 = 25$
$y_1 = 38$
$x_2 = 12$
$y_2 = 38 + 25 = 63$ cm (figura 19.18)

$$C = \Sigma\left(1 - 0.63\,\frac{x}{y}\right)\frac{x^3 y}{3} \qquad \text{(ecuación 19.21)}$$

Para el caso 1:

$$C_1 = \left(1 - 0.63\,\frac{25}{50}\right)\frac{25^3 \times 50}{3} + \left(1 - 0.63\,\frac{12}{18}\right)\frac{12^3 \times 38}{3}$$

$$C_1 = 195{,}900$$

Para el caso 2:

$$C_1 = \left(1 - 0.63\,\frac{25}{38}\right)\frac{25^3 \times 38}{3} + \left(1 - 0.63\,\frac{12}{63}\right)\frac{12^3 \times 63}{3}$$

$$C_2 = 147{,}800$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

$$C_1 > C_2 \therefore C = C_1 = 195{,}900$$

$$K_t = \frac{9\,EC}{\ell_2\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^3} = \frac{9 \times E \times 195{,}900}{600\left(1-\frac{35}{600}\right)^3}$$

$$K_t = 0.352 \times 10^4\,E$$

Valor modificado de $K_t = K_{ta}$

$$K_{ta} = K_t\,\frac{I_A}{I_s} \qquad \text{(ecuación 19.22)}$$

$$I_A = 844{,}000\ \text{cm}^4$$

$$I_s = \frac{\ell_2 h^3}{12} = \frac{600 \times 12^3}{12} = 86{,}400\ \text{cm}^4$$

$$K_{ta} = 0.352 \times 10^4 \times E \times \frac{844{,}000}{86{,}400}$$

$$K_{ta} = 3.44 \times 10^4\,E$$

Rigidez columna equivalente

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma\,K_c} + \frac{1}{K_{ta}} \qquad \text{(ecuación 19.19)}$$

$$= \frac{1}{0.276 \times 10^4\,E} + \frac{1}{3.44 \times 10^4\,E}$$

$$K_{ec} = 0.25 \times 10^4\,E$$

COLUMNAS EQUIVALENTES *B*2 Y *C*2

Rigideces tramos ab y bc

$$K_{c\mathit{i}(ba)} = 0.172 \times 10^4\,E$$

$$K_{cs(bc)} = 0.104 \times 10^4\,E$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Cálculo de K_t

$$K_t = \frac{9\,EC}{\ell_2\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^3}$$

Considerando el caso 1 de la figura 19.23:

$x_1 = 30$
$y_1 = 50$
$x_2 = 12$
$y_2 = (50 - 12) = 38 < 4x_2 = 48$

Considerando el caso 2 de la figura 19.23:

$x_1 = 30$
$y_1 = 38$
$x_2 = 12$
$y_2 = 2 \times 38 + 30 = 106$

$$C = \Sigma\,(1 - 0.63\,\frac{x}{y})\,\frac{x^3 y}{3}$$

Para el caso 1:

$$C_1 = \left(1 - 0.63\,\frac{30}{50}\right)\frac{30^3 \times 50}{3} + 2\left(1 - 0.63\,\frac{12}{48}\right)\frac{12^3 \times 48}{3}$$

$$C_1 = 326{,}500$$

Para el caso 2:

$$C_2 = \left(1 - 0.63\,\frac{30}{38}\right)\frac{30^3 \times 38}{3} + \left(1 - 0.63\,\frac{12}{106}\right)\frac{12^3 \times 106}{3}$$

$$C_2 = 228{,}600$$

$C_1 > C_2 \therefore C = C_1 = 326{,}500$

$$K_t = \frac{9\,EC}{\ell_2\left(1-\frac{c_2}{\ell_2}\right)^3} = \frac{9 \times E \times 326{,}500}{600\left(1-\frac{35}{600}\right)^3}$$

$$K_t = 0.587 \times 10^4\,E$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Valor modificado de $K_t = K_{ta}$

$$K_{ta} = K_t \frac{I_A}{I_s} \qquad \text{(ecuación 19.22)}$$

$$K_{ta} = 0.587 \times 10^4 \times 3 \frac{844{,}000}{86{,}400}$$

$$K_{ta} = 5.73 \times 10^4 E$$

Rigidez columna equivalente

$$\frac{1}{K_{ec}} = \frac{1}{\Sigma K_c} + \frac{1}{K_{ta}}$$

$$= \frac{1}{0.276 \times 10^4 E} + \frac{1}{5.73 \times 10^4 E}$$

$$K_{ec} = 0.263 \times 10^4 E$$

FACTORES DE DISTRIBUCIÓN

Nudos 2A y 2D

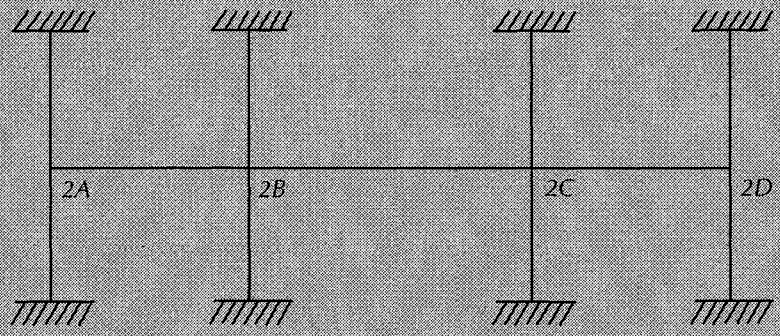
	$\frac{K}{10^4 E}$	*FD*
K_{ec}	0.250	0.25
K_{AB}	0.765	0.75
	1.015	1.00

Nudos 2B y 2C

	$\frac{K}{10^4 E}$	*FD*
K_{ec}	0.263	0.16
K_{BA}	0.765	0.48
K_{BC}	0.575	0.36
	1.603	1.00

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

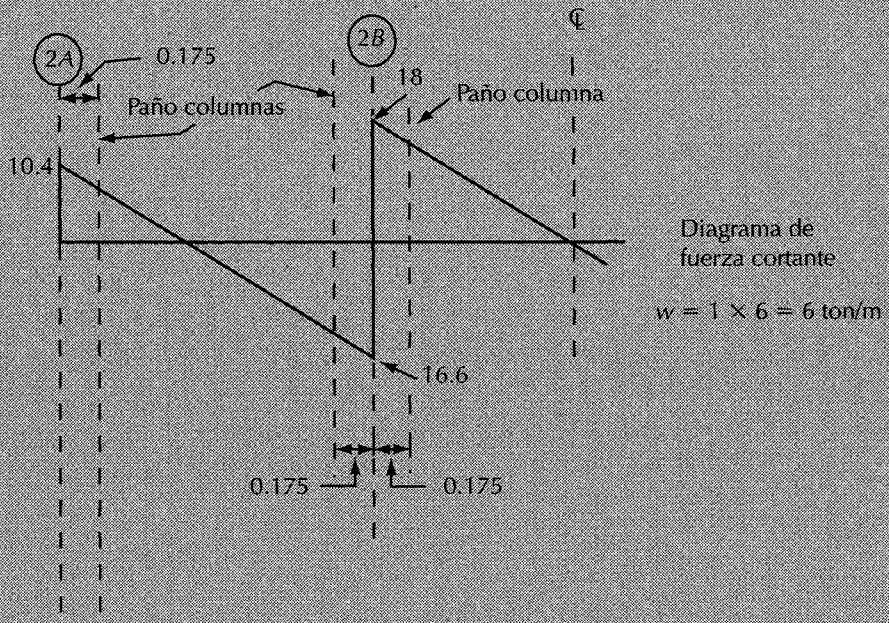
DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS EN LA ESTRUCTURA EQUIVALENTE



Nudo	*2A*	*2B*		*2C*		*2D*
Miembro	*2A-2B*	*2B-2A*	*2B-2C*	*2C-2B*	*2C-2D*	*2D-2C*
Factor de distribución	0.75	0.48	0.36	0.36	0.48	0.75
Factor de transporte	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51	0.51
Momento empotr.	− 10.2	+ 10.2	− 18.1	+ 18.1	− 10.2	+ 10.2
1ª *D*	+ 7.7	+ 3.8	+ 2.9	− 2.9	− 3.8	− 7.7
	+ 1.9	+ 3.8	− 1.5	+ 1.5	− 3.8	− 1.9
2ª *D*	− 1.4	− 1.1	− 0.8	+ 0.8	+ 1.1	+ 1.4
	− 0.6	− 0.7	+ 0.4	− 0.4	+ 0.7	+ 0.6
3ª *D*	+ 0.5	+ 0.1	+ 0.1	− 0.1	− 0.1	− 0.5
MF	− 2.1	+ 16.1	− 17.0	+ 17.0	− 16.1	+ 2.1
RL	13.5	13.5	18	18	13.5	13.5
Δ*V*	− 3.1	+ 3.1	0	0	+ 3.1	− 3.1
V	10.4	+ 16.6	18	18	16.6	10.4
x	← 1.73		← 3.00		1.73 →	
Momento positivo	+ 6.9		+ 10.0		+ 6.9	

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

MOMENTOS NEGATIVOS EN LOS PAÑOS DE LAS COLUMNAS



Miembro AB, Col. 2A

$$M_{\text{paño}} = 10.4 \times 0.175 - 2.1 - \frac{6 \times 0.175^2}{2} = -0.4$$

$$M_{\text{paño}} = -0.4$$

Miembro BA, Col. 2B

$$M_{\text{paño}} = 16.6 \times 0.175 - 16.1 - \frac{6 \times 0.175^2}{2}$$

$$M_{\text{paño}} = -13.3 \text{ ton-m}$$

Miembro BC, Col. 2B

$$M_{\text{paño}} = 18 \times 0.175 - 17.0 - \frac{6 \times 0.175^2}{2}$$

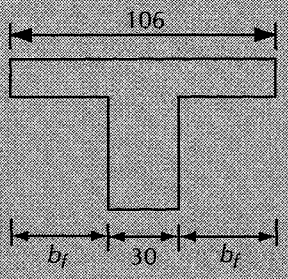
$$M_{\text{paño}} = -13.9 \text{ ton-m}$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

DISTRIBUCIÓN DE MOMENTOS LONGITUDINALES A LO ANCHO DE LAS FRANJAS

a) Verificación de que se cumple la condición $0.2 \leq \dfrac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} \leq 5.0$

Para las vigas interiores de los ejes 2 y 3:



$b_f = 38 < (4 \times 12 = 48 \text{ cm})$

$$I_b = k\,\frac{b_w h^3}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{b_e}{b_w} &= \frac{106}{30} = 3.5 \\ \frac{t}{h} &= \frac{12}{50} = 0.24 \end{aligned}\right\} \quad k = 1.68$$

$$I_b = \frac{1.68 \times 30 \times 50^3}{12} = 52.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{bh^3}{12} = \frac{600 \times 12^3}{12} = 8.6 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{I_b}{I_s} = \frac{52.5}{8.6} = 6.1$$

Para las vigas interiores de los ejes *B* y *C*:

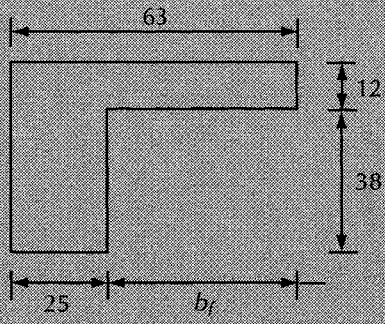
$$I_b = 52.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

$$I_s = \frac{bh^3}{12} = \frac{525 \times 12^3}{12} = 7.6 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{I_b}{I_s} = \frac{52.5}{7.6} = 6.9$$

Para las vigas de borde de los ejes 1 y 4



$b_f = 38 < 12 \times 4 = 48$ cm

$$I_b = k\,\frac{b_w h^3}{12}$$

$$\left.\begin{aligned} \frac{b_e}{b_w} &= \frac{63}{25} = 2.52 \\ \frac{t}{h} &= \frac{12}{50} = 0.24 \end{aligned}\right\} \; k = 1.48$$

$$I_b = \frac{1.48 \times 25 \times 50^3}{12} = 38.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{312.5 \times 12^3}{12} = 4.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{38.5}{4.5} = 8.6$$

Para las vigas interiores de los ejes *A* y *D*:

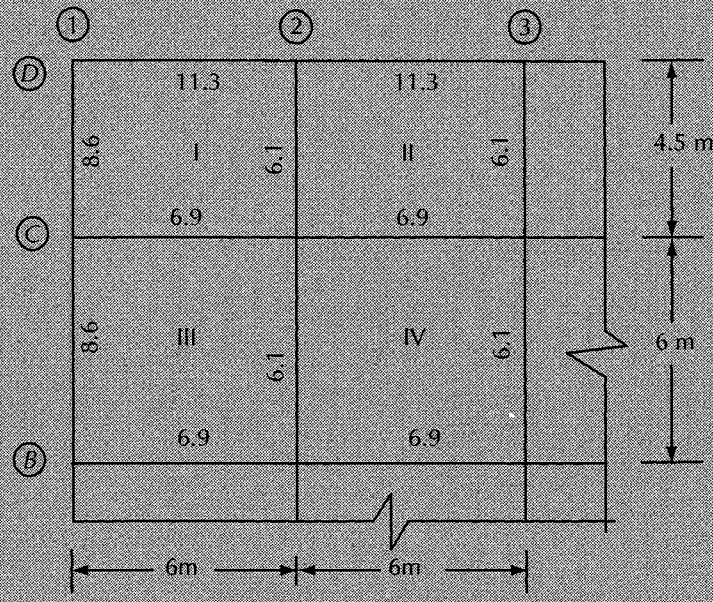
$$I_b = 38.5 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$I_s = \frac{237.5 \times 12^3}{12} = 3.4 \times 10^4 \text{ cm}^4$$

$$\alpha = \frac{38.5}{3.4} = 11.3$$

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

Resumen de valores de α:



Para el tablero I en dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(11.3 + 6.9) \times 4.5^2}{(8.6 + 6.1) \times 6^2} = 0.70; \qquad 0.20 < 0.70 < 5.0$$

Para el tablero II en dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(11.3 + 6.9) \times 4.5^2}{(6.1 + 6.1) \times 6^2} = 0.84; \qquad 0.20 < 0.84 < 5.0$$

Para el tablero III en dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(6.9 + 6.9) \times 6^2}{(8.6 + 6.1) \times 6^2} = 0.94; \qquad 0.20 < 0.94 < 5.0$$

Para el tablero IV en dirección horizontal:

$$\frac{\alpha_1 \ell_2^2}{\alpha_2 \ell_1^2} = \frac{(6.9 + 6.9) \times 6^2}{(6.1 + 6.1) \times 6^2} = 1.13; \qquad 0.20 < 1.13 < 5.0$$

En todos los casos se cumple la condición.

EJEMPLO 19.2 (*continuación*)

b) Cálculo del parámetro β_t para el eje 2

$$\beta_t = \frac{C}{2\,I_s}$$

$$\beta_t = \frac{19.59}{2 \times 8.64} = 1.13$$

c) Cálculo de momentos en la franja de columnas, franja central y vigas (eje 2)

Sección	*M total (ton-m)*	$\frac{\ell_2}{\ell_1}$	$\frac{\alpha_1 \ell^2}{\ell_1}$	β_t	*Porcentaje tabla 19.2*	*M franja col.*	*M viga*	*M losa en fr. col.*	*M franja central*
$M_{D-C}(-)$	0.4	1.33	8.1	1.13	84	0.34	0.29	0.05	0.06
$M_{D-C}(+)$	6.9	1.33	8.1		65	4.49	3.82	0.67	2.41
$M_{C-D}(-)$	13.3	1.33	8.1		65	8.65	7.35	1.30	4.61
$M_{C-B}(-)$	13.9	1.00	6.1		75	10.43	8.86	1.57	3.47
$M_{C-B}(+)$	10.0	1.00	6.1		75	7.50	6.37	1.13	2.50
$M_{B-C}(-)$	13.9	1.00	6.1		75	10.43	8.86	1.57	3.47

En la misma forma se efectúa el análisis para los tres ejes, en las dos direcciones.

El cálculo de áreas de acero se realiza igual que en el ejemplo 19.1.

La determinación de rigideces, factores de transporte y momentos de empotramiento, se hizo de acuerdo con los criterios expuestos en la sección 19.5.2, según los cuales, los momentos de inercia de las vigas de los marcos equivalentes se calculan a partir de las secciones transversales mostradas en los cortes A-A y B-B de la figura 19.20. El momento de inercia de las secciones T se obtuvo con la ayuda de la gráfica del Apéndice D.4. Una vez determinada la variación de $1/EI$ a lo largo de las vigas, se calcularon las rigideces, factores de transporte y momentos de empotramiento con ayuda de las ecuaciones presentadas en el Apéndice D para el caso de miembros con momentos de inercia diferentes en el tramo central y en los claros extremos. Estas ecuaciones se pueden obtener a partir de los principios de Mecánica de Materiales. En las vigas del ejemplo, los valores determinados son parecidos a los correspondientes a miembros con valores constantes de EI, debido a que los claros extremos con valores mayores de EI son muy cortos en relación con los claros totales. La carga utilizada para obtener los momentos de empotramiento fue 6 ton/m, que es la que corresponde al ancho de 6 m del marco equivalente y a la carga última de 1 ton/m^2.

Para las columnas equivalentes se determinaron únicamente las rigideces, ya que

los factores de transporte no intervienen en los cálculos, por suponerse empotrados los extremos opuestos de las columnas (figura 19.24), y ya que los momentos de empotramiento son nulos debido a que las columnas no tienen cargas aplicadas directamente. De acuerdo con lo expuesto en la sección *19.5.2c* se calcularon por separado las rigideces de las columnas K_c y las rigideces a torsión de las vigas perpendiculares al marco considerado K_{ta}.

Para el cálculo de las rigideces K_c se determinó la variación de $1/EI$ indicada en la figura 19.22, o sea, se calculó el valor de I de la sección gruesa de la columna y se supuso un momento de inercia infinito desde el lecho inferior de las vigas hasta el lecho superior de la losa. La longitud de las columnas se consideró como la distancia centro a centro de losas [19.10]. Esta hipótesis permite considerar columnas de igual altura en toda la estructura, aun en el caso de vigas de diferente peralte. Para determinar las rigideces de miembros con la variación de $1/EI$ indicada en los esquemas de las columnas, se utilizó la gráfica D.l del Apéndice D. Esta gráfica no es aplicable en forma rigurosa, ya que se obtuvo para miembros con momento de inercia infinito en un solo extremo, mientras que las columnas tienen momentos de inercia infinitos en ambos extremos. Sin embargo, como el extremo inferior tiene una longitud muy corta, igual a la mitad del peralte de la losa, el error que se comete en este caso es pequeño. Obsérvese que para la columna superior debe usarse la rigidez del extremo de momento de inercia finito al extremo de momento de inercia infinito, mientras que para la columna inferior debe emplearse la rigidez del extremo de momento de inercia infinito al extremo de momento de inercia finito.

Para calcular las rigideces a torsión de las vigas perpendiculares al marco, se determinó primero el valor del parámetro C con la ecuación 19.21. En las columnas A-2 y *D*-2, las vigas perpendiculares son de sección L invertida por tratarse de vigas de borde. Se determinó el valor de C para los dos casos mostrados en la figura 19.23 para vigas L. El ancho del patín se tomó igual a la proyección de la viga debajo de la losa (38 cm), que en este caso resultó menor que cuatro veces el espesor de la losa (48 cm). En las columnas B-2 y C-2, las vigas perpendiculares son de sección T y el ancho del patín, a cada lado del alma, es igual a la proyección de la viga debajo de la losa. A partir de los valores de C, se calcularon los valores K_t, usando la ecuación 19.20. El valor de ℓ_2 es el ancho del marco equivalente, o sea, 6 m en este ejemplo. En marcos de borde, como los marcos 1 y 4, el ancho ℓ_2 es la distancia del borde de la estructura al eje central del tablero.

Debido a que el marco equivalente tiene vigas en dirección paralela, o sea, a lo largo del eje de columnas, se obtuvo el valor modificado de la rigidez a torsión, K_{ta}, multiplicando el valor de K_t por la relación I_A/I_s (sección *19.5.2c*). Obsérvese que los valores de K_{ta} resultan mucho mayores que los de K_t, en este ejemplo.

Una vez calculados los valores de K_c y K_{ta} se obtuvo la rigidez de las columnas equivalentes por medio de la ecuación 19.19, en la cual se sustituyó K_{ta} por K_t. Debido a que la flexibilidad a torsión de la viga perpendicular, $1/K_{ta}$, es mucho menor que la flexibilidad de las columnas, $1/K_c$, las rigideces de las columnas equivalentes, K_{ec}, son en este ejemplo muy similares a las rigideces de las columnas solas; o sea que la influencia de las vigas perpendiculares al marco resultó muy pequeña.

A continuación se obtuvieron los factores de distribución y se realizó el análisis del marco por medio del método de Cross. Las columnas se supusieron perfectamente empotradas en los pisos superior e inferior al considerado. A partir de los momentos negativos calculados en los nudos de la estructura se determinaron los momentos

positivos máximos, localizando las secciones de fuerza cortante nula situadas a una distancia x de los apoyos. (Estos cálculos no se muestran en el ejemplo.) También se obtuvieron los momentos negativos de diseño, que son los valores en los paños de las columnas (sección *19.5.3*). En el ejemplo, la distancia del eje al paño de columnas no excede de 0.175 ℓ_1. Desde luego que también puede usarse algún método de análisis matricial de estructuras. Los valores de las rigideces y factores de transporte, obtenidos como ya se explicó, servirían para determinar los elementos de la matriz de rigideces.

Los momentos calculados hasta aquí son momentos en todo el ancho del marco equivalente. A continuación se distribuyeron estos momentos totales entre las franjas de columnas y las franjas centrales, usando los coeficientes de la tabla 19.2. Estos coeficientes están en función de los parámetros α_1 y β_t que se definen en las secciones 19.3.1 y 19.3.9. Se revisó que se cumpliese el requisito establecido en la sección 19.5.4 referente a la relación de rigideces en las dos direcciones de cada tablero [$0.2 < (\alpha_1 \ell_2^2/\alpha_2 \ell_1^2) < 5.01$ pero se aprovechó la circunstancia de que si se cumple en una dirección, también se cumple en la otra. Los momentos de las franjas de columnas se distribuyeron después entre la viga y la losa, asignándole a la primera el 85 por ciento. De esta manera se obtuvieron los momentos de diseño de las distintas secciones del eje 2 de la estructura únicamente. El procedimiento es el mismo descrito para el método directo. Por ejemplo, con referencia al tablero interior, deben usarse los siguientes momentos de diseño:

Para la viga, un momento positivo de 6.37 ton-m y uno negativo de 8.86 ton-m.

Para las franjas de losa adyacentes a cada lado de la viga, un momento positivo de 1.13 ton-m y uno negativo de 1.57 ton-m; el ancho de esta franja es igual al ancho de la franja de columnas, 3 m, menos el ancho de la viga, 30 cm.

Para las franjas centrales de losa, un momento positivo de 2.50 ton-m y uno negativo de 3.47 ton-m; el ancho de estas franjas es de 3 m distribuidos en 1.50 m a cada lado de la franja central.

Con estos momentos se puede proceder al dimensionamiento de vigas y losas, como se ilustró en el ejemplo del método directo. Obsérvese en el tablero de borde, que en el paño de columna resultó un momento prácticamente nulo. En estas zonas debe colocarse el refuerzo mínimo.

19.7 Comentarios sobre el método de la estructura equivalente

Se comentan en esta sección algunas hipótesis y procedimientos del método de la estructura equivalente, que en opinión de los autores ameritan ser investigados más a fondo o son susceptibles de simplificaciones para casos comunes.

19.7.1 *Idealización de la estructura*

En estructuras sin vigas, la hipótesis de considerar la altura de columnas centro a centro de losas parece aceptable, ya que el eje de deformaciones del sistema de piso tiene que localizarse cerca del eje de la losa. Sin embargo, en estructuras con vigas, el eje de deformaciones del sistema de piso puede estar alejado del eje de la losa, ya que teóricamente debe coincidir con el eje neutro de las vigas. En el análisis convencional de marcos hiperestáticos, ha sido costumbre idealizar las vigas por su eje geométrico. Esta hipótesis, que parece más realista, tiene el inconveniente de que pueden resultar columnas de distinta altura, especialmente en los bordes de la estructura, donde puede haber vigas de menor peralte que en el interior.

La idealización de la columna equivalente se comenta con la determinación de rigideces en la siguiente sección.

19.7.2 Determinación de rigideces

El considerar la variación del momento de inercia a lo largo de los miembros, complica notablemente la labor numérica. En estructuras con columnas de sección pequeña comparada con los claros, las rigideces, factores de transporte y momentos de empotramiento perfecto que se obtienen de esta manera, son prácticamente iguales a los correspondientes a miembros de sección uniforme en todo el claro, como en el ejemplo 19.2. La influencia en las rigideces relativas y en los momentos finales es todavía menor. Quizás el método podría simplificarse para estos casos, lo cual requeriría establecer reglas sencillas para determinar desde qué valores de la relación entre las dimensiones de las columnas y los claros, es significativa la variación del momento de inercia a lo largo del claro. Esta simplificación sería conveniente especialmente cuando no se utilizan programas de computadora en los cálculos.

Para determinar la rigidez de las vigas se supone que éstas son de sección T y que el ancho del patín es el claro transversal, ℓ_2. Es difícil determinar en forma precisa el ancho del patín que influye en la rigidez, siendo la influencia de este parámetro más importante en muchos casos que la de la variación de I a lo largo del claro. El momento de inercia de la viga se calcula a partir de la sección gruesa, lo cual no es congruente con las recomendaciones del Reglamento **ACI** para cálculos de deflexiones, según las cuales debe usarse un momento de inercia efectivo que depende tanto del momento de inercia de la sección gruesa como del de la sección agrietada y transformada (sección *11.2.2*).

La rigidez de la columna equivalente depende de la rigidez de la columna sola y de la rigidez a torsión de la viga transversal (ecuación 19.19). Para determinar el momento de inercia de la columna sola se usa también la sección gruesa, lo cual no es congruente con el cálculo del momento de inercia para efectos de esbeltez (ecuaciones 13.9 y 13.10). En muchos casos, la influencia de la rigidez a torsión de la viga transversal es pequeña y el método se podría simplificar. El valor de K_t se altera notablemente cuando existen vigas paralelas al marco considerado y se multiplica por el factor I_A/I_s (ecuación 19.22). Esta alteración es tan grande que convendría justificar en forma amplia la ecuación 19.22. El Reglamento **ACI** 318-02, no establece la forma de modificar K_t, cuando además de la viga paralela localizada en el eje de columnas, existen vigas paralelas en el interior del tablero. Este tipo de estructuración se usa frecuentemente cuando se tienen claros grandes. El Reglamento **ACI** 318-02 tampoco establece la forma de calcular el factor de transporte de las columnas equivalentes. En el ejemplo 19.2 no se requirió este dato, debido a que el análisis se hizo por carga vertical únicamente, pero cuando se analiza el efecto de cargas horizontales es necesario considerar el marco completo y entonces sí se requiere el factor de transporte de las columnas equivalentes.

19.7.3 Análisis estructural de los marcos

Este análisis se hace por los procedimientos usuales. La limitación referente a que la sección crítica por momento negativo esté a una distancia no mayor de 0.175 ℓ_1 del eje de columnas, parece adecuada para tomar en cuenta la posibilidad de que existan columnas muy grandes.

19.7.4 Distribución de momentos *flexionantes* y fuerzas cortantes

El factor α_1, del cual dependen los porcentajes de distribución, se calcula usando un mo-

mento de inercia de las vigas, determinado a partir de secciones T con un ancho de patín distinto del ancho de patín usado para calcular las rigideces. Debido a que los dos anchos de patín son similares, sería conveniente unificar el criterio.

19.7.5 Estructuras sujetas a fuerzas laterales

El Reglamento ACI 318-02 presenta el método directo y el método de la estructura equivalente para el diseño de estructuras sujetas a cargas verticales únicamente. Para estructuras sujetas a fuerzas horizontales, sólo señala que deben tomarse en cuenta los efectos del agrietamiento del concreto y del acero de refuerzo en la rigidez de los miembros. Estos efectos son particularmente importantes en estructuras no contraventeadas sujetas a fuerzas laterales por la amplificación de momentos flexionantes que resulta del desplazamiento lateral de la estructura (efecto P-A, capítulo 13). Si no se estima correctamente la rigidez de los miembros, puede cometerse un error importante en el cálculo de los desplazamientos laterales y, por lo tanto, en el cálculo de momentos flexionantes amplificados.

Los métodos para considerar la reducción en la rigidez flexionante de las vigas y las losas, para el caso de fuerzas laterales, pueden reunirse en tres grupos [19.11]: el modelo de la viga de ancho equivalente, el modelo del miembro transversal que trabaja a torsión y el modelo de las vigas cortas.

El primero consiste en usar un ancho de losa menor que el ancho total de la franja para calcular el momento de inercia del sistema viga-losa como se hace en el método de la estructura equivalente de las NTC-04 para el diseño de losas planas sujetas a fuerzas horizontales. Se han realizado distintas investigaciones para determinar el ancho equivalente de una viga que tenga la misma rigidez que otra viga cuyo ancho sea el ancho de toda la franja, cuando ésta se encuentra agrietada, y se han obtenido valores comprendidos entre 0.30 y 0.70 ℓ_2 para valores de c/ℓ_1 comprendidos entre 0.05 y 0.10.

El segundo modelo es el usado en el método generalizado del Reglamento ACI 318-02. Se recomienda, para el caso de fuerzas laterales, reducir el momento de inercia del sistema viga-losa, multiplicando el que corresponde a la sección gruesa por un factor $\beta = 1/3$ [19.11], o bien, usar el momento de inercia de la sección agrietada y transformada calculado con la ecuación 11.4. El factor $\beta = 1/3$ da resultados algo conservadores, pero no en exceso.

El tercer modelo es más preciso y toma en cuenta mayor número de variables, pero se encuentra todavía en etapa de desarrollo.

19.7.6 Simplificaciones al método de la estructura equivalente

El método ha sido criticado en el sentido de que la complejidad de los cálculos no se justifica si se toman en cuenta las incertidumbres que prevalecen en el comportamiento de estructuras reales. Muchos investigadores o ingenieros dedicados al diseño estructural opinan que es conveniente expresar los resultados de investigaciones en términos de reglas sencillas que no eleven innecesariamente los costos del diseño. En este sentido se han propuesto algunas simplificaciones al método de la estructura equivalente, como la de la referencia 19.12, que propone procedimientos más sencillos que los del Reglamento ACI 318-02 para calcular los momentos de inercia de las vigas y los momentos de empotramiento, y para distribuir los momentos que resultan del análisis entre la franja central, la losa de la franja de columnas y la viga. Sin embargo, ninguna de estas simplificaciones ha sido incorporada al Reglamento.

Referencias

19.1 Hatcher, D. S., M. A. Sozen y C. P. Siess. "Test of a Reinforced Concrete Flat Plate". Proceedings, ASCE, V. 91, ST5, octubre 1965.

19.2 Hatcher, D. S., M. A. Sozen y C. P. Seiss. "Test of a Reinforced Concrete Flat Slab". Proceedings, ASCE, V. 95, ST6, junio 1969.

19.3 Jirsa, J. O., M. A. Sozen y C. P. Seiss. "Test of a Flat Slab Reinforced with Welded Wire Fabric". *Proceedings,* ASCE, V. 92, ST3, junio 1966.

19.4 Camble, W. L., M. A. Sozen y C. P. Seiss. "Test of a Two-way Reinforced Floor Slab". Proceedings, ASCE, V. 95, ST6, junio 1969.

19.5 Vanderbilt, M. D., M. A. Sozen y C. P. Seiss. "Test of a Modified Reinforced Concrete Two-way Slab". Proceedings, ASCE. V, 95, ST6, junio 1969.

19.6 Guralnick, S. A., y R. W. Fraugh. "Laboratory Study of a Forty-Five-Foot Square Flat Plate Structure". *Journal* of the American Concrete *Institute,* septiembre 1963.

19.7 Jirsa, J. O., M. A. Sozen y C. P. Seiss. "Pattern Loadings on Reinforced Concrete Floor Slabs". *Proceedings,* ASCE, ST6, junio 1969.

19.8 Vanderbilt, M. D., M. A. Sozen y C. P. Seiss, "Deflections of Multiple-Panel Reinforced Concrete Floor Slabs". *Proceedings,* ASCE, V. 91, ST4, agosto 1965.

19.9 Corley, W. G., y J.O. Jirsa. "Equivalent Frame Analysis for Slab Design". *Journal* of the *American* Concrete Institute, noviembre 1970.

19.10 Crossett, C. W. et al. Notes on ACI 318-71 Building Code Requirements with Design *Applications.* Skokie, Portland Cement Association, 1972,

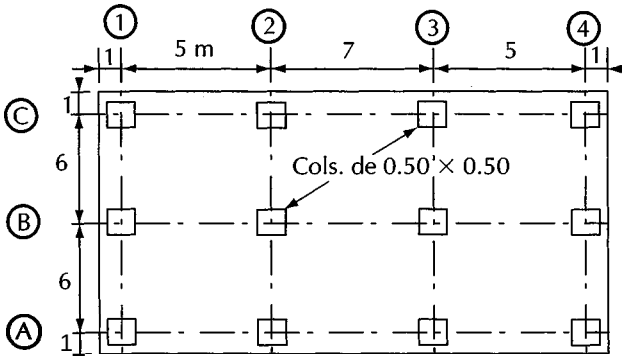
19.11 Vanderbilt, M. D., y W. C. Corley. "Frame Analysis of Concrete Buildings". Concrete *International,* Design and Construction, diciembre 1983.

19.12 Fraser, D. J., "The Equivalent Frame Method Simplified for Beam and Slab Construction". Concrete International, Design and *Construction,* abril 1982.

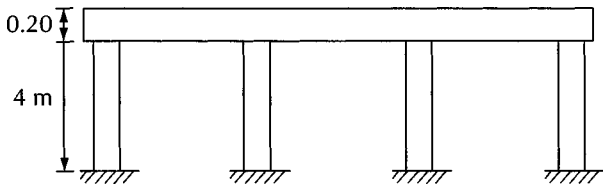
19.13 Park, R., y W. L. Gamble. Reinforced Concrete Slabs. Nueva York, Wiley, 1980.

Ejercicios

19.1 Determinar los momentos de diseño en el siguiente sistema de piso sin vigas, usando el método de la estructura equivalente. Analícense los ejes 1 y B únicamente. Aplicar las especificaciones del Reglamento ACI 318-02.

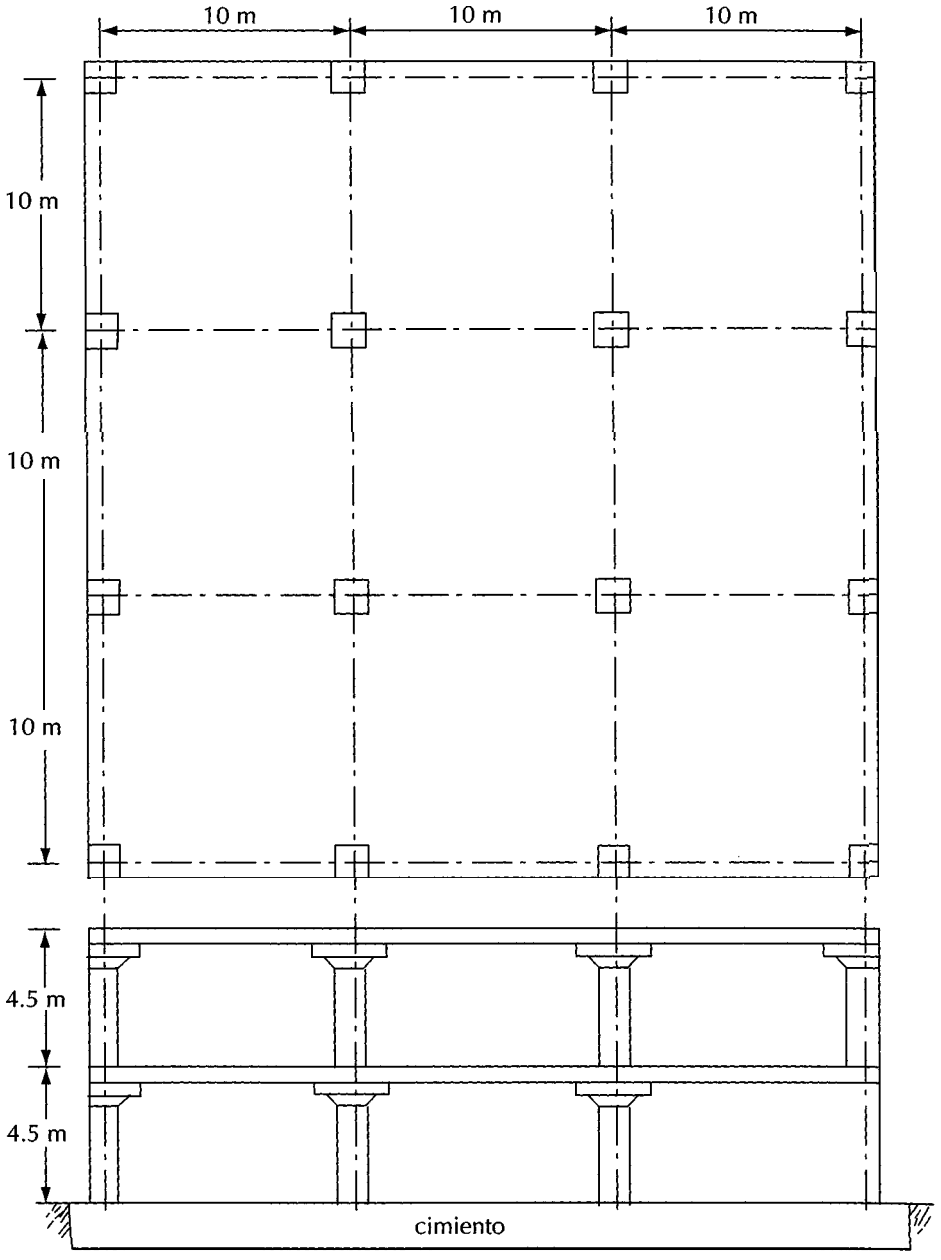


Carga muerta de servicio = 600 kg/m²
Carga viva de servicio = 200 kg/m²
f'_c = 250 kg/cm²
f_y = 4200 kg/cm²



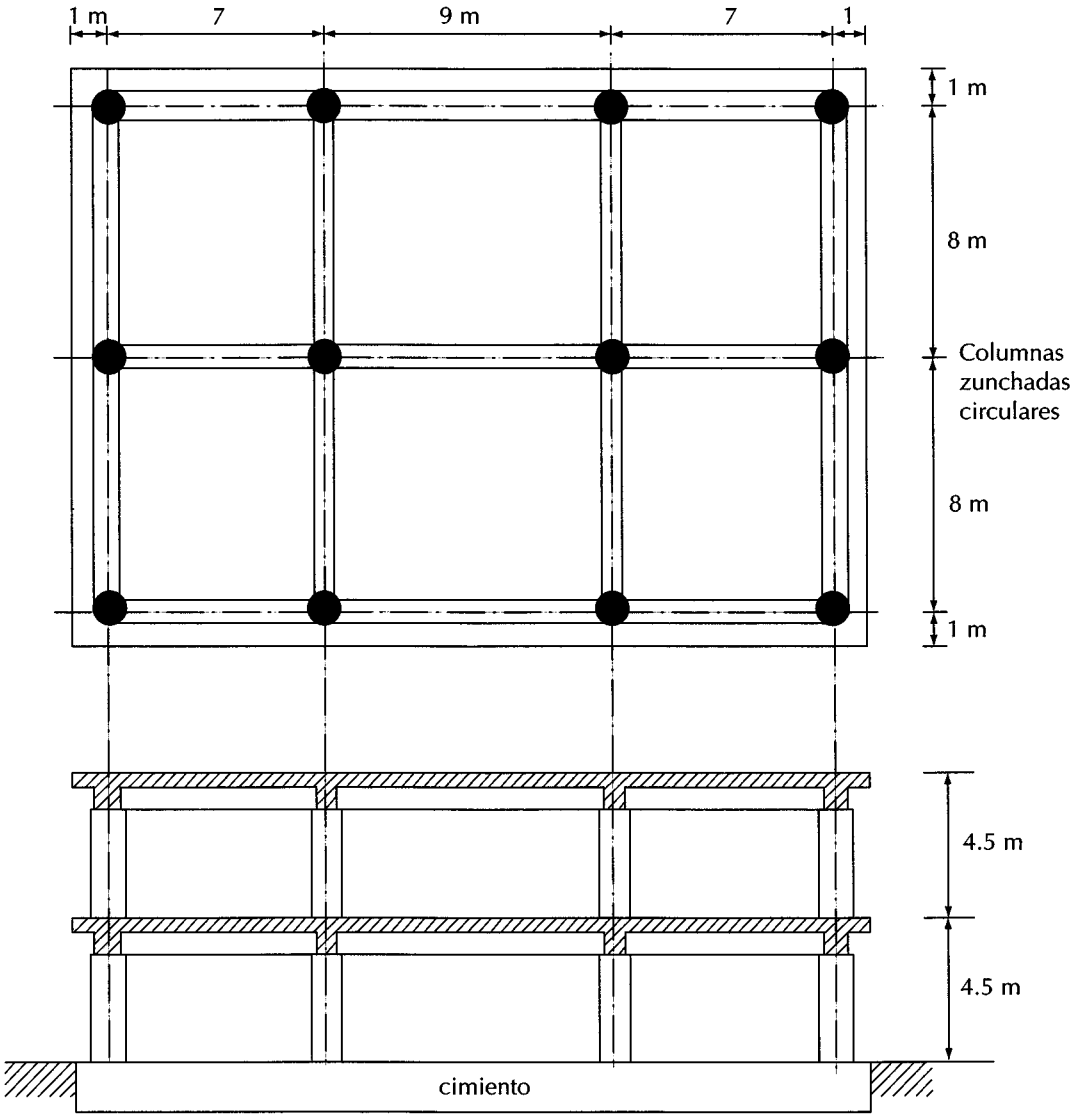
19.2 Determinar los momentos de diseño en la estructura del problema anterior, suponiendo que las columnas son circulares de 40 cm de diámetro, que existen capiteles de 1.30 m de diámetro y caras inclinadas a 45°, y que el peralte de la losa se reduce a 15 cm. Úsense las mismas cargas que en el ejercicio anterior y analícense los mismos ejes.

19.3 Dimensionar el primer nivel de la estructura de losas planas, representada en el croquis, usando el método directo y las especificaciones del Reglamento ACI 318-02. Usar ábacos o capiteles, o una combinación de ambos. Considerar una carga viva de servicio igual a 100 kg/m^2 y una carga muerta, incluyendo el peso propio de la losa, igual a 600 kg/m^2 (igual carga en ambos niveles). Suponer los factores de carga que recomienda el ACI y considerar $f'_c = 200$ kg/cm^2 y $f_y = 4200$ kg/cm^2. Dimensionar las columnas y hacer croquis de armado.



19.4 Utilizando los mismos datos generales del ejercicio 19.3, diseñar una estructura a base de vigas y losas. Emplear el método directo del Reglamento ACI 318-02.

19.5 Diseñar el primer nivel de la estructura mostrada en el croquis, utilizando el método de la estructura equivalente de acuerdo con las especificaciones del Reglamento ACI 318-02. Usar un sistema de piso a base de vigas y losas. Considerar una carga viva de servicio de 500 kg/m^2 y una carga muerta de servicio de 300 kg/m^2 (sin incluir el peso propio). (Igual carga en ambos niveles.) Suponer f'_c = 250 kg/cm^2 y f_y = 4200 kg/cm^2. Dimensionar las columnas. Hacer croquis de armado.



CAPÍTULO 20

Aspectos particulares del detallado del refuerzo

20.1 Introducción. /20.2 Cambios de dirección de las fuerzas internas. /20.3 Detalles de esquina. /20.4 Detalles especiales de estructuras expuestas a acciones sísmicas. /20.5 Ejemplos.

20.1 Introducción

El buen comportamiento de una estructura de concreto depende no sólo de que la estructuración escogida sea apropiada y de que el análisis del efecto de las fuerzas que actúan sobre la estructura sea correcto, sino también, en buena parte, de un eficaz detallado del refuerzo que responda a las características particulares del concreto reforzado.

El detallado del refuerzo consiste en la determinación de la disposición de las barras utilizadas para el armado, de manera que se logre un comportamiento satisfactorio en condiciones de servicio y un adecuado nivel de ductilidad bajo las cargas o deformaciones últimas. Comprende también la elaboración de los dibujos y planos que garanticen que el refuerzo se coloque en la obra de acuerdo con los requerimientos del proyectista.

En las siguientes secciones se reseñan brevemente algunos de los aspectos más importantes del detallado, con énfasis especial en las precauciones particulares que deben observarse en el caso de estructuras expuestas a acciones sísmicas. La aplicación de recomendaciones típicas para el detallado de una viga de un marco bajo estas acciones se ilustra en el ejemplo 20.1. En el ejemplo 20.2 se muestra el detallado del refuerzo de una columna.

Para un tratamiento más amplio del detallado del refuerzo, véase el capítulo 13 de la obra de Park y Paulay [20.1], que recoge experiencias tanto europeas como americanas. De gran utilidad práctica son las referencias 20.2 a 20.5

20.2 Cambios de dirección de las fuerzas internas

Cuando un miembro de concreto no es recto, se generan fuerzas internas, que pueden tener efectos perjudiciales. Véase por ejemplo el detalle de la figura 20.1*a*. Las fuerzas de tensión en la barra, al no ser colineales, producen una tercera fuerza, T_3, que tiende

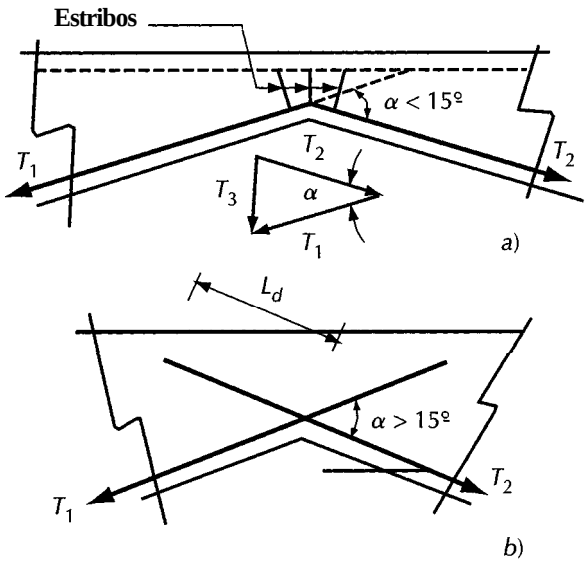


Figura 20.1 Detalles recomendables cuando las fuerzas de tensión en las barras no son colineales (según referencia 20.4).

a provocar agrietamiento a lo largo de la barra, si se excede la resistencia a tensión del concreto, ocasionando el desprendimiento de una porción del miembro en cuestión. Si el ángulo entre las direcciones de las barras es inferior a unos 15°, la tendencia de las barras a enderezarse provocando agrietamiento puede evitarse disponiendo estribos en la forma mostrada en la figura 20.1*a*, que transfieren a la zona de compresión la fuerza debida al doblez.

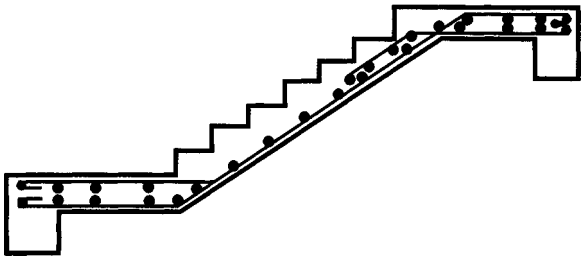


Figura 20.2 Detalles de refuerzo en escaleras.

Según la referencia 20.4, los estribos deben dimensionarse de manera que resistan una fuerza aproximadamente igual a 1.5 F_3. Para ángulos mayores es preferible prolongar el refuerzo una longitud igual a la longitud de desarrollo en la forma indicada en la figura 20.1*b*, de manera que no se genere una fuerza transversal. En caso de que no se disponga de suficiente espacio para alojar la longitud de desarrollo requerida, puede recurrirse al uso de ganchos estándar para proporcionar un anclaje adecuado. En la figura 20.2 se muestra un detalle típico del refuerzo de una escalera mediante el cual se evita la aparición de componentes transversales inconvenientes.

También se generan fuerzas transversales desfavorables cuando la fuerza de compresión interna cambia de dirección, como en la viga prefabricada de peralte variable de la figura 20.3. Para evitar el desprendimiento del patín es necesario prever estribos, así como un refuerzo transversal adecuado en el patín en la forma indicada en la figura.

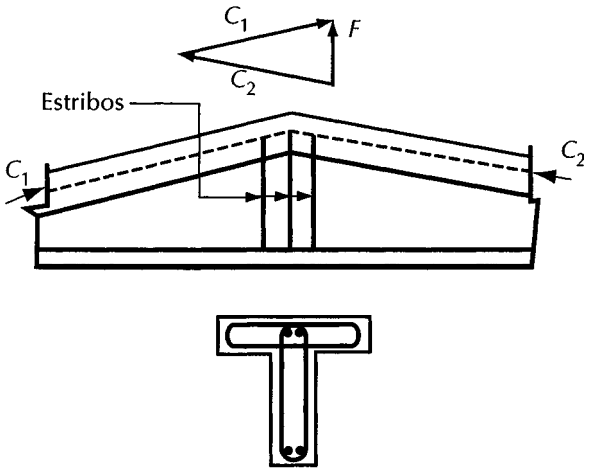


Figura 20.3 Miembro con cambio de dirección de la fuerza de compresión.

20.3 Detalles de esquina

Las esquinas de sistemas estructurales son zonas débiles debido a que en ellas se desarrollan concentraciones de esfuerzos y se presentan problemas de anclaje de barras. Conviene, por lo tanto, detallarlas cuidadosamente, para evitar que fallen a cargas menores que las de diseño o que se desarrollen en ellas grietas importantes bajo cargas de trabajo.

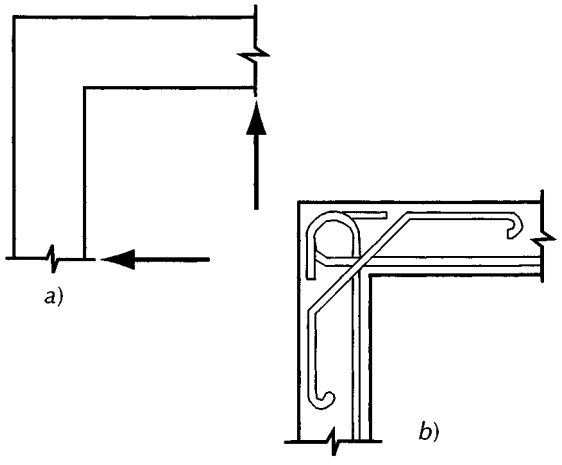


Figura 20.4 Detalles de esquina en marcos de concreto reforzado. *(Continúa)*

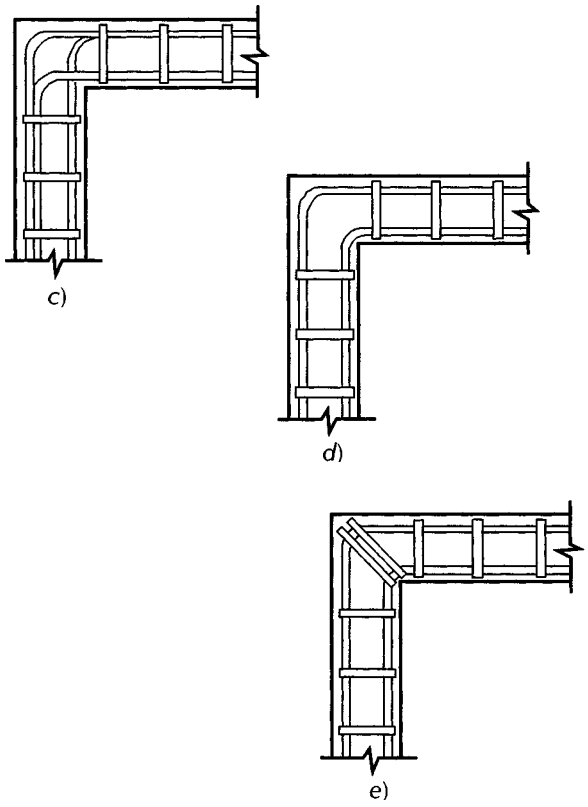


Figura 20.4 *(Continuación).* Detalles de esquina en marcos de concreto reforzado.

Cuando las esquinas de marcos estructurales tienden a abrirse (figura 20.4*a*), conviene colocar el refuerzo como se muestra en la figura 20.46. El refuerzo diagonal de este detalle mejora notablemente las condiciones de trabajo de la unión. El área de este refuerzo debe ser por lo menos igual al 50 por ciento del área de refuerzo del elemento más reforzado de los que concurren en la esquina [20.6]. Se ha demostrado que algunos detalles usuales, como los ilustrados en las figuras 20.4*c* y 20.4*d*, son inadecuados [20.6, 20.7, 20.81. El empleo de estribos diagonales (figura 20.4*e*) mejora un poco las condiciones de las uniones, pero no evita que fallen antes de que se alcance la resistencia de los elementos. Cuando la esquina tiende a cerrarse, no es necesario tomar precauciones especiales [20.7]. En estructuras sujetas a sismos fuertes debe considerarse siempre la posibilidad de que la unión tienda a abrirse.

En tanques, y en otros casos similares, se presentan problemas semejantes a los de esquinas de marcos. En la figura 20.5 se muestran detalles recomendados de colocación del refuerzo en tanques.

20.4 Detalles especiales en estructuras expuestas a acciones sísmicas

Es importante que las estructuras de concreto reforzado construidas en zonas sísmicas sean de comportamiento dúctil, o sea, que la gráfica carga-deflexión tenga una rama amplia de comportamiento no lineal, como la que se muestra en la figura 20.6. Esto se debe a que las estructuras deben tener un

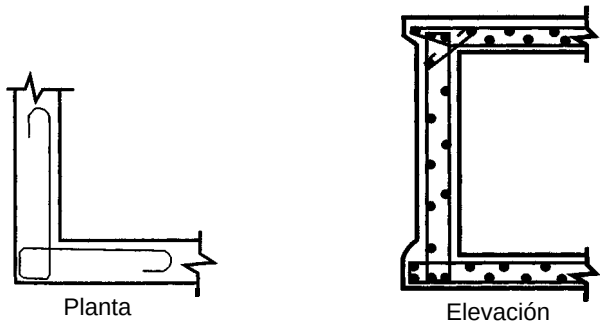


Figura 20.5 Detalles de refuerzo en tanques.

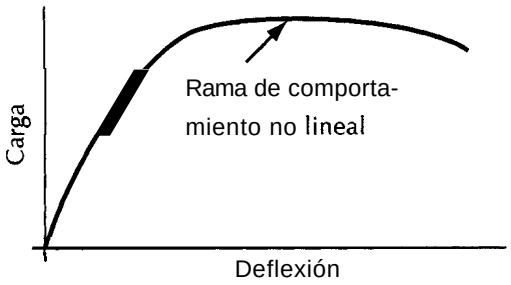


Figura 20.6 Gráfica carga-deflexión de un elemento de comportamiento dúctil.

amplio margen de capacidad para absorber la energía que les transmite un sismo. Mientras mayor ductilidad tengan, mayor será su capacidad de absorción de energía, ya que esta capacidad es igual al área comprendida bajo el diagrama carga-deflexión. Bajo la acción de sismos moderados y fuertes, las estructuras trabajan generalmente en la zona de comportamiento no lineal y están sujetas a inversiones en el signo de las acciones. Resultaría antieconómico diseñar estructuras que pudiesen resistir sismos de esta naturaleza trabajando exclusivamente en la zona de comportamiento lineal.

Los detalles del refuerzo tienen gran influencia sobre el tipo de comportamiento, dúctil o frágil, de las estructuras. Las fallas de tipo frágil, como las que se originan por fuerza cortante, falta de anclajes adecuados o empalmes incorrectos, son especialmente peligrosas. La ductilidad se logra, por una parte, evitando este tipo de fallas y, por otra, confinando adecuadamente el concreto para aumentar su capacidad de deformación. Se reseñan en los incisos siguientes algunas de las disposiciones más importantes referentes al detallado de estructuras sujetas a acciones sísmicas que establecen el Reglamento ACI 318-02 [20.9, 20.101 y las NTC del Reglamento del Distrito Federal [20.12]. (Por sencillez, en lo sucesivo el primer reglamento se designará simplemente por las siglas ACI y el segundo por las siglas NTC.)

El criterio con que están formuladas las disposiciones de los documentos citados difiere en algunos aspectos. El ACI, por ejemplo, da recomendaciones de rigor variable según el riesgo sísmico "alto" o "moderado". En cambio las NTC permiten varias opciones según el grado de ductilidad deseado, expresado por un factor de ductilidad, Q, que varía de 1 a 4.

Cuanto mayor sea el factor de ductilidad, mayores serán los requisitos a satisfacer; en cambio las fuerzas sísmicas a considerar serán menores, ya que éstas, de acuerdo con el Reglamento del Distrito Federal, son inversamente proporcionales a los valores de Q, como puede apreciarse en la expresión que da este Reglamento para la fuerza cortante en la base

$$V = \frac{c}{Q} W \qquad (20.1)$$

donde c es el coeficiente sísmico y W es el peso total del edificio. Al elegir el valor de Q el proyectista deberá considerar si el reducir las fuerzas sísmicas utilizando un valor alto de Q compensa el costo de los detalles adicionales que esto implica. Para poder usar el máximo valor de Q, hay que cumplir requisitos especiales que se establecen en un capítulo de Marcos Dúctiles.

Como se indicó anteriormente, la reseña de las disposiciones de los documentos mencionados no es exhaustiva; se trata únicamente de resaltar algunos de los aspectos más importantes. En general se pone énfasis en los principales requisitos del Reglamento ACI para edificios en zonas de alto riesgo sísmico y los que exigen las NTC para poder usar un factor Q = 4. En muchos casos las indicaciones de ambas normas son semejantes.

20.4.1 Calidades del acero y del concreto

Con el fin de garantizar el empleo de aceros de refuerzo cuya gráfica esfuerzo-deformación tenga una rama amplia de comportamiento no lineal, se especifica en ambos reglamentos no usar aceros con límites de fluencia superiores a 4200 kg/cm^2 y que el esfuerzo real no exceda al especificado en más de 1300 kg/cm^2. También se especifica que la resistencia máxima del acero sea por lo menos igual a 1.25 veces el límite de fluencia. Esta última disposición se deriva de la observación de que si la diferencia entre el esfuerzo máximo resistente y el esfuerzo de fluencia es grande, el acero admite deformaciones unitarias también grandes antes de romperse, o sea, que su comportamiento es dúctil.

En cuanto a la resistencia del concreto, los valores mínimos admitidos son 210 kg/cm^2, según el ACI, y 250 kg/cm^2, según las NTC.

20.4.2 Requisitos para vigas

a) Refuerzo longitudinal: las vigas deben ser francamente subreforzadas para que su comportamiento sea dúctil. El ACI limita la cuantía del acero longitudinal a 0.025 y las NTC al 75 por ciento de la correspondiente a la condición balanceada, tal como se definió en el inciso 5.4 (ecuación 5.3).

Obsérvese que el valor de 0.025 dado en el ACI es superior a la cuantía balanceada. Se considera en este Reglamento que la ductilidad queda asegurada por el acero de compresión que debe preverse en todas las secciones. El tope de 0.025 tiene por principal objeto evitar un congestionamiento excesivo del refuerzo. Respecto a la cantidad mínima del refuerzo, según el ACI éste debe ser por lo menos igual a 0.8 $\sqrt{f'_c}\, bd/f_y$ o a $14\, bd/f_y$, siendo b el ancho de la nervadura, en el caso de vigas T. Las NTC fijan la cuantía mínima en 0.7 $\sqrt{f'_c}/f_y$. Ambos reglamentos coinciden en que el refuerzo mínimo, que debe consistir por lo menos en dos barras, debe mantenerse en la longitud total de las vigas, en sus dos caras. Todo el refuerzo longitudinal debe estar constituido por barras rectas; el doblado de barras no es aconsejable. Se especifica también que en todas las secciones de las vigas se proporcione una resistencia a momento positivo y negativo no menor que la cuarta parte de la disponible en los paños de los apoyos. Debido a que existe la posibilidad de inversión de los signos de momento flexionante, se recomienda que la capacidad por momento positivo en los paños de los apoyos sea del orden de 50 por ciento de la capacidad por momento negativo. Estas medidas obedecen a las incertidumbres que existen en la determinación de las acciones sísmicas y a las grandes variaciones que pueden sufrir los puntos de inflexión durante un temblor.

No son aconsejables los traslapes en zonas de esfuerzos máximos o de inversión de esfuerzos. Cuando no sea posible evitarlos, los traslapes deben confinarse con refuerzo especial, de acuerdo con las recomendaciones de los reglamentos. La soldadura afecta las propiedades físicas y químicas del acero y reduce su ductilidad. Por lo tanto no es recomendable hacer traslapes soldados en las zonas de momentos máximos.

b) Refuerzo transversal: según el ACI, el refuerzo transversal puede consistir en estribos cerrados de una sola pieza, con ganchos de 135" y una prolongación de 6 diámetros pero no menor de 7.5 cm, o bien, de estribos de dos piezas, una abierta en forma de U y una grapa con un gancho de 90° y otro de 135°. En la figura 20.7 se muestran ejemplos del uso de estos estribos. Las NTC sólo permiten usar estribos cerrados con ganchos de 135° seguidos de tramos rectos de no menos de 10 diámetros.

Estos estribos deben colocarse en las siguientes porciones de las vigas:

i) Un tramo de longitud igual al doble del peralte del miembro a partir de los paños de los apoyos.
ii) Un tramo de longitud igual al doble del peralte del miembro a ambos lados de cualquier sección donde se prevea que el acero pueda fluir si se presentan desplazamientos laterales inelásticos del marco del que forma parte la viga.

El primer estribo debe colocarse a una distancia máxima de 5 centímetros a partir del paño del apoyo. El espaciamiento máximo de los estribos en estos tramos no debe exceder del menor de los siguientes valores: *a)* la cuarta parte del peralte efectivo; *b*) ocho veces el diámetro de la barra longitudinal más pequeña; *c*) 24 veces el diámetro del estribo, y *d*) 30 cm. Esta restricción de la separación del re-

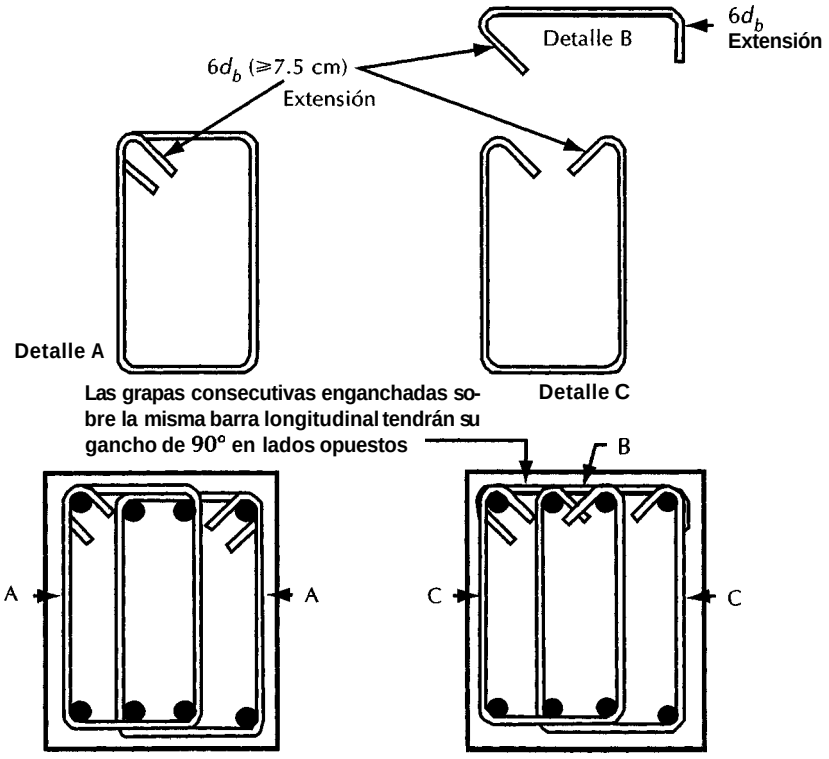


Figura 20.7 Estribos para estructuras en zonas sísmicas según el Reglamento ACI 318-02.

fuerzo transversal propicia un comportamiento dúctil al proporcionar confinamiento, y evita el pandeo del refuerzo longitudinal. En las porciones restantes de las vigas, deben colocarse estribos a una separación máxima igual a la mitad del peralte efectivo, aun cuando el cálculo indique que teóricamente no se requiere refuerzo transversal. Todos los estribos deben ser perpendiculares; el refuerzo transversal inclinado no es eficiente si ocurre inversión en el signo de la fuerza cortante.

De acuerdo con el ACI, la fuerza cortante de diseño, V_e, a considerar en el dimensionamiento debe ser congruente con la máxima que pueda desarrollarse durante un sismo. Esto implica que debe proporcionarse una resistencia a fuerza cortante suficiente para que en los paños de los apoyos de las vigas puedan desarrollarse los momentos máximos resistentes de las vigas (negativo en un paño y positivo en el otro). Dado que bajo acciones sísmicas se presenta un comportamiento inelástico, y pudiendo el acero alcanzar esfuerzos superiores al de fluencia, las fuerzas cortantes correspondientes a los momentos que pueden desarrollarse en estas condiciones pueden ser considerablemente mayores que las que se deducen del análisis sísmico de la estructura en cuestión. Para lograr una resistencia a cortante adecuada, el ACI especifica que las cortantes de diseño, V_e, se determinen a partir del equilibrio estático de la porción de viga entre los paños de los apoyos bajo la acción de las cargas gravitacionales afectadas de los factores de cargas apropiados y de los momentos que pueden desarrollarse en los extremos considerando que el esfuerzo en el acero alcanza un valor igual a 1.25 f_y y suponiendo que el factor de resistencia ϕ es igual a la unidad en lugar de 0.90, como en situaciones ordinarias.

El significado de estas recomendaciones puede apreciarse gráficamente en la figura 20.8.

Al determinar la separación del refuerzo transversal de miembros en que la fuerza cortante debida a sismo, calculada en la forma arriba indicada, es superior a la mitad de la fuerza cortante total, la contribución del concreto debe despreciarse.

Las recomendaciones de las **NTC** son semejantes en general a las del ACI. Se comentan con detalle en el manual de la referencia 20.11, que además contiene ejemplos ilustrativos.

20.4.3 Requisitos para columnas

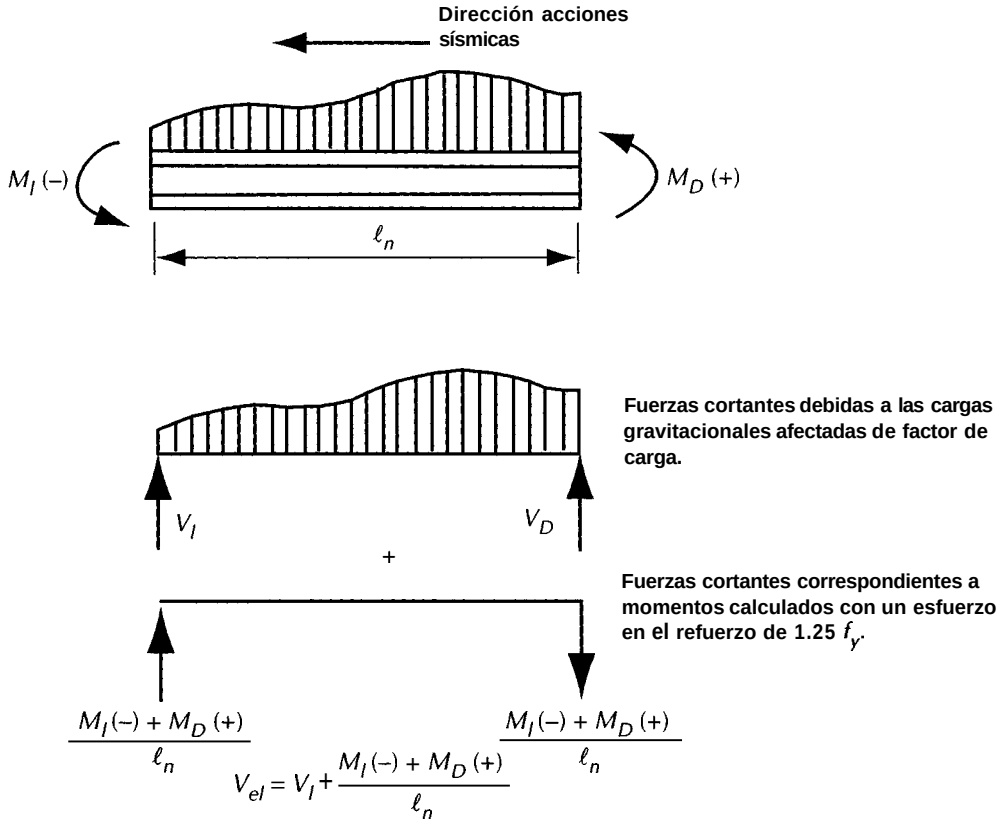
a) Resistencia a flexión mínima: tanto el **ACI** como las **NTC** dan reglas para evitar que el refuerzo longitudinal de las columnas llegue a fluir. En otras palabras, se busca que al formarse los mecanismos de falla las articulaciones plásticas aparezcan en las vigas y no en las columnas.

Según el ACI, la resistencia a flexión de columnas debe satisfacer la siguiente condición

$$\Sigma M_e \geq \frac{6}{5} \Sigma M_g \qquad (20.2)$$

donde:

ΣM_e = suma de los momentos en el centro de la junta entre vigas y columnas, correspondientes a las resistencias de diseño de las columnas que quedan encima y debajo de la junta.



Para obtener la fuerza cortante máxima en el apoyo derecho se procede de manera semejante.

Figura 20.8 Determinación de la fuerza cortante de diseño, V_e, de acuerdo con el Reglamento ACI 318-02.

ΣM_g = suma de los momentos en el centro de la junta de las resistencias a flexión de diseño de las vigas que concurran en la junta.

Las recomendaciones de las NTC difieren en detalle de este criterio pero persiguen el mismo propósito. Véase al respecto la referencia 20.11.

b) Resistencia a cortante: según el ACI, la fuerza cortante de diseño, V_e, a considerar en el dimensionamiento de columnas debe estimarse a partir de las resistencias a flexión nominales (es decir, suponiendo $+ = 1$) en los paños de las juntas correspondientes a la carga axial de compresión que produzca los momentos máximos. Las indicaciones de las NTC son semejantes. Lo que se busca es que las columnas no fallen por cortante antes de que se formen articulaciones plásticas en las vigas.

c) Refuerzo *longitudinal:* el ACI especifica una cuantía mínima para el refuerzo longitudinal igual a 0.01. Limita el valor máximo de la cuantía a 0.06, menor que el valor de 0.08 permitido en columnas no expuestas a acciones sísmicas. Los empalmes a base de traslapes sólo se permiten en la mitad central del miembro y deben detallarse como empalmes de tensión. Pueden utilizarse empalmes soldados en cualquier sección del miembro siempre que se hagan empalmes únicamente en barras alternadas.

d) Refuerzo transversal: según el ACI, en el caso de columnas con refuerzo helicoidal, la cuantía volumétrica, p, determinada como se indica en la sección 4.2.3, garantiza un comportamiento dúctil adecuado, siempre que su valor sea superior a $0.12\ f'_c/f_y$.

En columnas de estribos, el área de la sección total del refuerzo transversal debe ser por lo menos igual al menor de los valores dados por las ecuaciones

$$A_{sh} = 0.3\ (sh_c f'_c/f_y)\ [(A_g/A_{ch}) - 1] \qquad (20.3)$$

$$A_{sh} = 0.09\ sh_c\ f'_c/f_y \qquad (20.4)$$

donde:

s = espaciamiento de los estribos.
h_c = dimensión mayor del núcleo de la columna medida de centro a centro del refuerzo confinante.
A_{ch} = área del núcleo definida por la periferia exterior del refuerzo transversal.

La separación, *s*, de los estribos no debe ser superior a la cuarta parte de la dimensión menor de la sección, seis veces el diámetro del refuerzo longitudinal, o el valor s_x definido por la siguiente ecuación:

$$s_x = 10 + \left[\frac{35 - h_x}{3}\right]$$

donde h_x es la máxima separación horizontal de las ramas de estribos en todas las caras de la columna. Este refuerzo, que proporciona un confinamiento equivalente al que se logra con refuerzo helicoidal, puede consistir en combinaciones diversas de estribos cerrados y grapas como los mostrados en la figura 15.3*b*. Estos estribos deben ajustarse también a los requisitos generales descritos en la sección 15.2. Deben mantenerse en una longitud ℓ_o a partir de los paños de la junta entre vigas y columnas, o de cualquier sección donde pueda fluir el acero de refuerzo. La longitud ℓ_o debe ser por lo menos igual al mayor de los siguientes valores: a) la mayor dimensión de la columna, b) la sexta parte de la altura libre de la columna, y *c*) 45 cm. En la porción restante de la columna son aplicables las recomendaciones de la sección 15.2, siempre que éstas den espaciamientos iguales o inferiores a la mitad del peralte efectivo.

Además de satisfacer los requisitos anteriores, es necesario revisar que el refuerzo transversal tenga suficiente capacidad para resistir las fuerzas cortantes arriba mencionadas.

Para las recomendaciones equivalentes según las NTC, consúltese la referencia 20.11.

20.4.4 Intersecciones de vigas y columnas

En ensayes de intersecciones de vigas y columnas sujetas a cargas alternantes que simulan un sismo [20.1, 20.13], se ha encontrado que es necesario colocar refuerzo especial en dichas intersecciones para que pueda presentarse un comportamiento no lineal sin disminución de resistencia. Dicho refuerzo consiste en estribos o hélices que confinan el concreto de la zona de intersección y que resisten las fuerzas cortantes que se desarrollan en ella. Se ha observado que las intersecciones de vigas con columnas de esquina son las que requieren mayor cantidad de refuerzo de confinamiento. En las intersecciones interiores, las vigas perpendiculares a la viga contenida en el plano considerado proporcionan cierto grado de confinamiento al concreto, por lo que su comportamiento es más favorable.

En la referencia 20.9 se dan recomendaciones para el dimensionamiento del refuerzo transversal de juntas, que están basadas principalmente en las referencias 20.14 y 20.15. En el capítulo 13 de la referencia 20.1 se trata ampliamente el comportamiento de las intersecciones de vigas y columnas y se presentan recomendaciones detalladas sobre su dimensionamiento. Véase también el manual de la referencia 20.11 que proporciona recomendaciones acordes con las NTC. Recientemente, este tema ha sido estudiado en un programa internacional de investigación cuyos resultados se presentan en la referencia 20.16

20.4.5 Anclaje

El refuerzo negativo y el positivo deben ser continuos a través de las juntas entre vigas y columnas. Cuando esto no es posible, como en las columnas perimetrales o de borde, las barras deben prolongarse hasta la cara exterior de la columna o del miembro perimetral, de manera que resulte un anclaje adecuado. Según el ACI, esto puede lograrse utilizando un gancho estándar de 90° con una longitud de desarrollo L_{dh} dada por la siguiente expresión

$$L_{dh} = \frac{0.06\, f_y\, d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad (20.5)$$

donde L_{dh} está en centímetros, d_b es el diámetro de la barra en centímetros, y los esfuerzos f_y y f'_c están en kg/cm^2. El significado de la

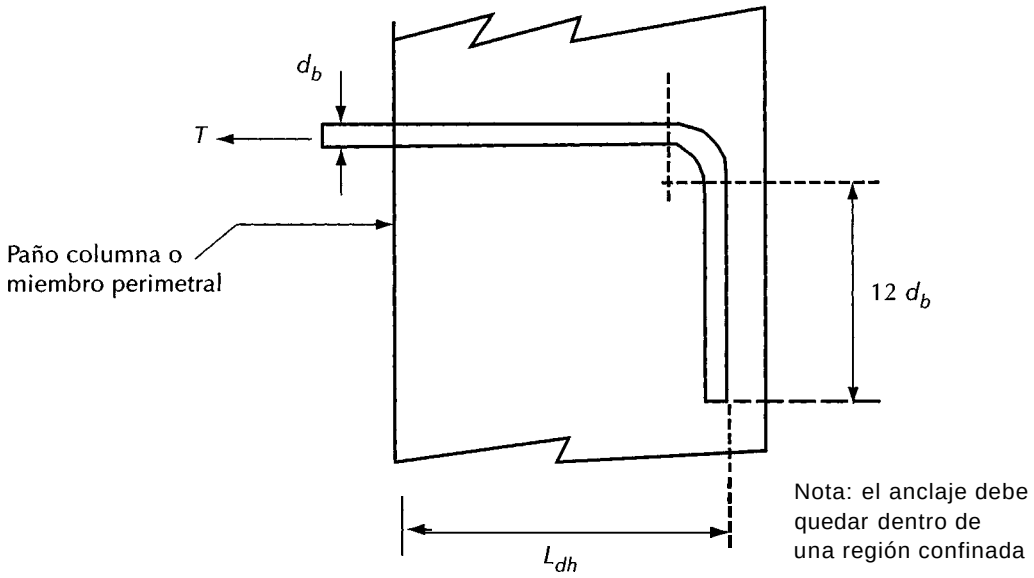


Figura 20.9 Anclaje en columna externa o miembro perimetral.

longitud L_{dh}, que debe ser por lo menos igual a $8d_b$, o a 15 cm, puede apreciarse en la figura 20.9. Se especifica que el gancho debe quedar alojado en una región confinada. La ecuación 20.5 no es aplicable a barras superiores al No. 11, por carecerse de información sobre el anclaje que requieren.

Para lograr un anclaje por medio de un tramo recto de barra, debe preverse una longitud de desarrollo L_d igual a 2.5 veces la especificada para ganchos, si el concreto bajo la barra tiene una profundidad inferior a 30 cm, e igual a 3.5 veces la especificada para ganchos, en caso contrario. Como en el caso de los ganchos, esta recomendación no es aplicable a barras superiores al No. 11. Puede comprobarse que estos requisitos son más conservadores que los descritos en las secciones *9.6.1* y 9.7 para el anclaje de barras cuando no se consideran acciones sísmicas. Según el ACI debe revisarse también la capacidad de anclaje en compresión, de acuerdo con las indicaciones del inciso *9.6.1*. Este aspecto puede resultar crítico debido al deterioro de la adherencia por la alternancia de cargas.

Los requisitos de anclaje que establece el manual de la referencia 20.11 son semejantes, aunque algo más conservadores.

20.4.6 Otros requisitos

En los incisos anteriores se han reseñado algunos de los requisitos más importantes que deben satisfacer las estructuras expuestas a acciones sísmicas. Los reglamentos incluyen requisitos adicionales referentes a la geometría de los miembros, el dimensionamiento de muros estructurales y diafragmas, y otros aspectos que quedan fuera del alcance del presente texto.

20.5 Ejemplos

Ejemplo 20.1 Dimensionamiento de una viga de un marco sujeto a acciones sísmicas.

Se ilustra en este ejemplo el dimensionamiento de una viga que forma parte de un marco de concreto sujeto a la acción de cargas verticales y sismo. Se han seguido, en general, las recomendaciones del Reglamento ACI 318-02 para estructuras en zonas de riesgo sísmico alto. El análisis estructural del marco no se incluye en el ejemplo; sólo se muestran los diagramas de momentos flexionantes y fuerzas cortantes que resultaron del análisis.

Los diagramas, que aparecen en la hoja de cálculo 2, son los debidos a los efectos de las cargas de servicio multiplicados por los factores de carga apropiados. Las líneas punteadas indican los diagramas correspondientes a la carga vertical únicamente; las líneas de punto y raya, los correspondientes a la acción sísmica; y las líneas llenas, las envolventes de momentos y fuerzas cortantes, o sea, los diagramas que se obtienen cuando actúan simultáneamente las cargas verticales y el sismo. Estos últimos se determinan sumando los dos primeros, en las condiciones que produzcan valores máximos de las acciones internas. Por ejemplo, el momento negativo de 50 ton-m, que actúa en el extremo izquierdo de la viga, es la suma del momento de 15 ton-m, debido a carga vertical, y el de 35 ton-m, debido a sismo de izquierda a derecha.

En los reglamentos de construcción suelen especificarse factores de carga diferentes para carga vertical únicamente y para acción simultánea de carga vertical y sismo. En estos casos, debe investigarse con cuál de las dos condiciones se obtienen las máximas acciones internas y hacerse el dimensionamiento de los elementos estructurales para dicha condición. En el ejemplo se supuso que las acciones internas máximas se obtienen para condición de carga vertical y sismo.

Generalmente los valores de las fuerzas cortantes y momentos negativos que se obtienen del análisis de la estructura son los correspondientes a los ejes de columnas o centros de los apoyos. Los reglamentos suelen permitir que el dimensionamiento por flexión se

base en los momentos en los paños de los apoyos.

Estos momentos pueden determinarse gráficamente o pueden estimarse con bastante precisión restando la cantidad $Va/2$ al momento en el centro del apoyo, siendo V la fuerza cortante en dicho centro y a el ancho del apoyo o columna.

Para determinar las dimensiones de la viga se supuso una cuantía $\rho = 0.01$, que es aproximadamente igual a la mitad de la correspondiente a la condición balanceada y muy inferior al valor máximo de 0.025 permitido por el ACI.

Con esto se asegura un comportamiento dúctil y se evita un congestionamiento excesivo del refuerzo. El momento crítico fue el del paño del apoyo derecho, donde la sección debe tratarse como rectangular, con el refuerzo en el lecho superior. Se ensayaron tres anchos, de los cuales se escogió el de 30 cm, al que correspondió un peralte efectivo de 71 cm. Suponiendo un recubrimiento de 6 cm, esto habría dado un peralte total de 77 cm. Finalmente, para redondear el peralte a un valor que fuera múltiplo de cinco centímetros y lograr una relación razonable entre el peralte y el ancho, se escogió una sección de 30 × 70 cm, con un peralte efectivo de 64 cm. La reducción del peralte respecto al determinado inicialmente implicó, evidentemente, un ligero aumento en la cuantía de acero requerida. Antes de determinar el refuerzo longitudinal, se calculó la contribución a cortante del concreto de la sección escogida, que se estimó adecuada al comparar con las fuerzas cortantes teóricas del diagrama de la hoja de cálculo 2.

Una vez definidas las dimensiones de la sección, se determinó el refuerzo negativo requerido en ambos apoyos. Para la sección del apoyo derecho se escogió una combinación de dos barras del No. 8 más dos barras del No. 10; para el apoyo izquierdo fueron suficientes cuatro barras del No. 8. Dos de las barras del No. 8 se mantuvieron en toda la longitud de la viga, satisfaciendo así uno de los requisitos del ACI para estructuras en zonas de alto riesgo sísmico. Para facilitar la determinación de los puntos de corte de barras, se calculó el momento resistente m, de dos barras del No. 8 y se trazó una línea correspondiente a esta resistencia en el diagrama de momentos.

En las regiones de momento positivo, la losa del sistema de piso actúa como patín de compresión del elemento y la sección es T. Una estimación preliminar permitió comprobar que la profundidad del bloque de compresión necesaria es inferior al peralte del patín. Por lo tanto el refuerzo se calculó como para una viga rectangular con un ancho igual al ancho efectivo de la viga *T,* que en el ejemplo resultó igual a 185 cm. Se obtuvo así un refuerzo consistente en tres barras del No. 8, que dan un área superior a la mínima admisible. Como en el caso del refuerzo negativo, se determinó el momento resistente, m, de dos barras del No. 8. La resistencia obtenida fue mayor que la de las barras para refuerzo negativo debido a que el brazo del par interno disponible en vigas T es mayor que en vigas rectangulares.

Para detallar el refuerzo de manera que cumpla con los requisitos de anclaje, se determinaron las longitudes de desarrollo de las barras del No. 8 y del No. 10. En este cálculo se consideró que se iban a cumplir las condiciones de recubrimientos, separaciones entre barras y confinamiento de estribos para poder usar las ecuaciones de la parte superior en la tabla 9.1. Adicionalmente, las barras altas se multiplicaron por el factor 1.3. Se determinaron también las distancias a las que se debe prolongar el refuerzo más allá de donde teóricamente deja de ser necesario. El armado propuesto cumple con los requisitos de desarrollo del refuerzo. Las dos barras del refuerzo negativo interrumpidas del apoyo izquierdo se prolongaron una distancia más allá del punto de inflexión aproximadamente igual a un peralte efectivo, con lo cual se evitan los problemas del corte de barras en zonas de

tensión y se satisface la longitud de desarrollo para las barras del No. *8.* Las barras No. *10* interrumpidas del apoyo derecho, también se prolongaron un peralte más allá del punto de inflexión. Es claro que se cumple también la especificación de que por lo menos la tercera parte del refuerzo negativo debe prolongarse una cierta distancia desde el punto de inflexión, como se indicó en la sección *9.10,* ya que se conservaron dos barras del No. *8* en toda la longitud de la viga. Debido a la configuración del diagrama de momentos, no se consideró conveniente hacer cortes en las barras de refuerzo positivo, de manera que éste se mantuvo constante. Por último se comprobó también que el refuerzo positivo en los apoyos proporciona una resistencia superior a la mitad de la correspondiente al refuerzo negativo, como se señaló en la sección *20.4.2a,* y que la resistencia a momento tanto negativo como positivo, en todas las secciones de la viga, es por lo menos igual a la cuarta parte de la mayor resistencia a momento negativo en los paños de los apoyos.

Los detalles de anclaje en la columna exterior requieren especial cuidado. El anclaje necesario en tensión se logró sin dificultad con ganchos estándar de 90°. El anclaje en compresión es quizás algo escaso, ya que según el **ACI** no debe considerarse la contribución de la parte doblada del gancho. Sin embargo, el hecho de que el anclaje se efectúa dentro de una zona confinada, ayuda a aliviar la situación.

Para ilustrar el detallado del refuerzo transversal, por sencillez, se consideró únicamente el lado derecho de la viga, suponiendo que el sismo actúa de izquierda a derecha. Esta condición es la que produce las fuerzas cortantes mayores en la viga. Se aprecia que la fuerza cortante determinada de acuerdo con lo que establece el **ACI** (sección *20.4.2b* y figura *20.8)* es bastante mayor que la dada por el análisis estructural (diagrama de la hoja de cálculo *2).* El procedimiento utilizado para determinar las separaciones de los estribos fue semejante al aplicado en el ejemplo *14.8* que implica el trazo del diagrama de las contribuciones nominales del acero, V_s. Se tuvo en cuenta el espaciamiento máximo del refuerzo en la zona de confinamiento, cuya extensión a partir del paño del apoyo es igual a *140* cm; en el ejemplo el espaciamiento máximo resultó de *16* cm.

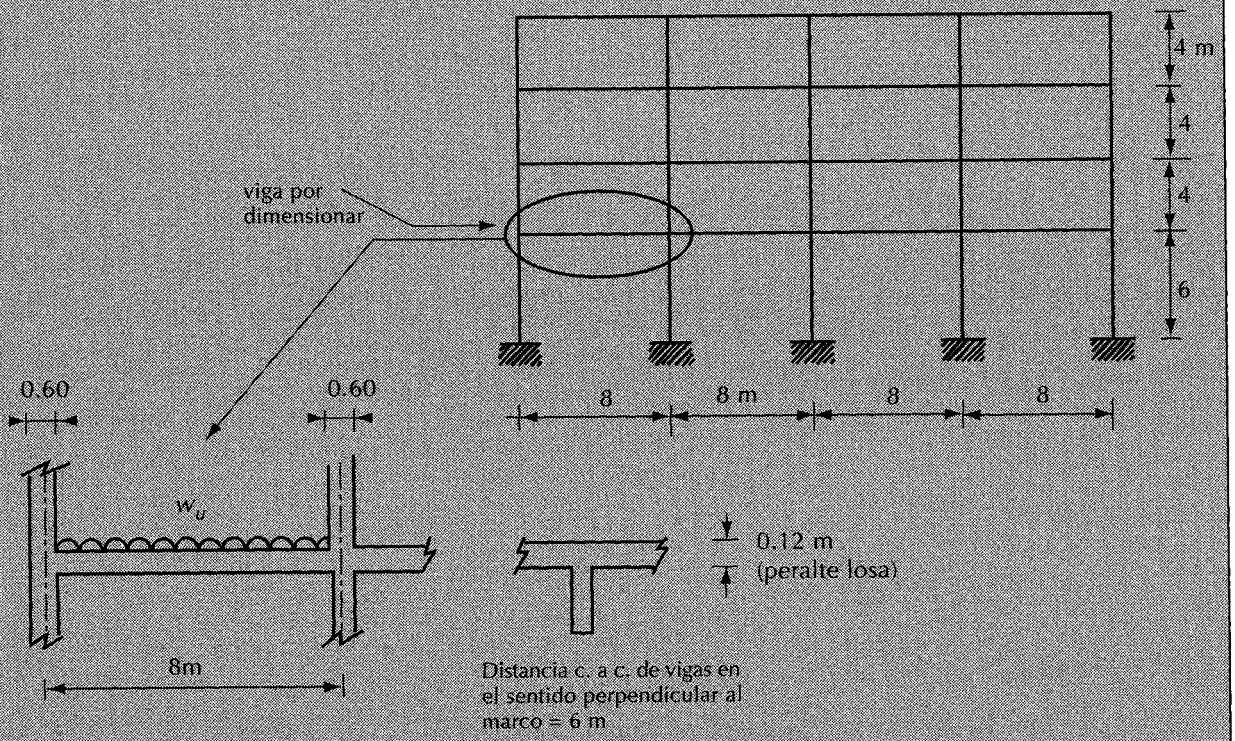
Para definir el refuerzo transversal se formuló una tabla, con distancias a partir del paño del apoyo y los espaciamientos correspondientes. De esta tabla, que aparece en la hoja de cálculo *12,* se pueden deducir las siguientes conclusiones. La separación de 12 cm necesaria en la sección crítica, que se encuentra a *64* cm del paño del apoyo, resultó menor que el espaciamiento máximo de *16* cm especificado en el tramo de *140* cm para contar con un confinamiento adecuado, por lo que rige la separación calculada por cortante. La separación por cortante admisible al terminar el tramo donde debe existir confinamiento fue 14 cm. Puesto que este valor difiere poco del necesario en la sección crítica, de *12* cm, se optó por conservar esta separación hasta una sección donde el refuerzo transversal pudiera utilizarse con una separación de *20* cm. Esta separación quedó teóricamente a *229* cm del paño. El siguiente cambio de espaciamiento adoptado fue el de *30* cm, que podría realizarse a *309* cm del paño del apoyo. Este espaciamiento es aproximadamente igual al máximo admisible de $d/2$. No se juzgó necesario considerar un tramo con espaciamientos a *25* cm, ya que esto sólo habría afectado a un número muy reducido de estribos. En el cálculo de las separaciones de estribos no fue necesario despreciar la contribución del concreto, ya que el cortante debido a sismo en el paño del apoyo fue menor que la mitad del cortante de diseño total, como se comprueba en la hoja de cálculo *9.*

Para completar el diseño debe revisarse el agrietamiento y la deflexión de acuerdo con lo indicado en las secciones 10.8.1 y *11.4.1.*

EJEMPLO 20.1 ***Dimensionamiento de una viga de un marco sujeto a acciones sísmicas.*** **1**

DATOS

Geometría



Materiales

Concreto: f'_c = 200 kg/cm^2 (se ha redondeado el mínimo de 210 kg/cm^2 que marca el Reglamento ACI)

Acero: f_y = 4200 kg/cm^2

Cargas: w_u = 6 ton/m

Reglamento: ACI 318-02 (suponer riesgo sísmico alto)

Se pide: dimensionar la viga indicada en el croquis sujeta a las acciones internas de los diagramas de fuerza cortante y momento de la hoja de cálculo 2.

EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **2**

CONSTANTES

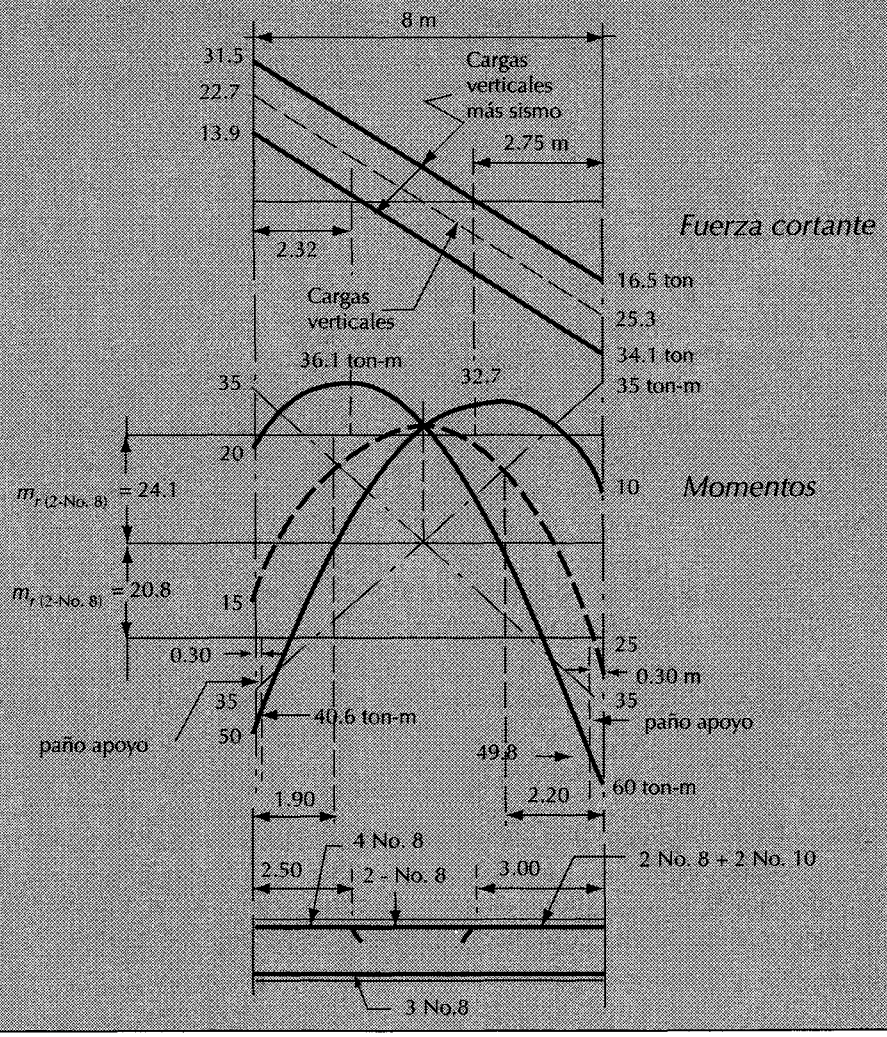
Refuerzo mínimo: $\rho_{mín} = \dfrac{14}{f_y} = \dfrac{14}{4200} = 0.0033$

$$\rho_{mín} = \frac{0.8\sqrt{f'_c}}{f_y} = \frac{0.8\sqrt{200}}{4200} = 0.0027 < 0.0033$$

Refuerzo máximo: $\rho_{máx} = 0.025$

$v_c = 0.5\sqrt{f'_c} = 0.5\sqrt{200} = 7.1$ kg/cm^2

DIAGRAMAS (debidos a cargas multiplicadas por factores de carga)



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **3**

DETERMINACIÓN DIMENSIONES VIGA

$M_u = 49.8$ ton-m

Considerar $\rho \simeq 0.01$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b' d^2} = \omega (1 - 0.59\ \omega)$$

$$\omega = \rho \frac{f_y}{f'_c} = 0.01 \frac{4200}{200} = 0.21$$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b' d^2} = \omega (1 - 0.59\ \omega) = 0.21 (1 - 0.59 \times 0.21) = 0.184$$

$$d = \sqrt{\frac{M_u}{0.184 \times \phi f'_c b'}} = \sqrt{\frac{49.8 \times 10^5}{0.184 \times 0.9 \times 200 \times b'}}$$

$$d = \sqrt{\frac{1.504 \times 10^5}{b'}}$$

b' (cm)	d (cm)
25	78
30	71
35	66

Suponer sección de $\boxed{b' = 30 \text{ cm}, h = 70 \text{ cm}, d = 64 \text{ cm}}$

Contribución concreto a cortante:

$$V_c = \phi v_c b' d = 0.75 \times 7.1 \times 30 \times 64 = 10{,}220 \text{ kg}$$

CÁLCULO DEL REFUERZO LONGITUDINAL

Refuerzo negativo apoyo derecho

$M_u = 49.8$ ton-m

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b' d^2} = \omega (1 - 0.59\ \omega)$$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b' d^2} = \frac{49.8 \times 10^5}{0.9 \times 200 \times 30 \times 64^2} = 0.2252;\ \omega = 0.267$$

EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **4**

$$\rho = \omega \frac{f'_c}{f_y} = 0.267 \frac{200}{4200} = 0.0127$$

$$A_s = \rho\, b' d = 0.0127 \times 30 \times 64 = 24.4 \text{ cm}^2$$

Usar 2 No. 8 + 2 No. 10 = 26.0 cm^2 > 24.4

$$m_{r\,(2\,-\,\text{No. 8})} = 49.8 \frac{10.1}{24.4} = 20.8 \text{ ton-m}$$

Refuerzo negativo apoyo izquierdo

$$M_u = 40.6 \text{ ton-m}$$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b' d^2} = \frac{40.6 \times 10^5}{0.9 \times 200 \times 30 \times 64^2} = 0.1836;\ \omega = 0.21$$

$$\rho = 0.21 \frac{200}{4200} = 0.01$$

$$A_s = 0.01 \times 30 \times 64 = 19.2 \text{ cm}^2$$

Usar 4 No. 8 = 20.3 cm^2 > 19.2

Refuerzo positivo

$$M_u = 36.1 \text{ ton-m}$$

Ancho efectivo:

$$\left.\begin{aligned} &16\,t + b' = 16 \times 12 + 30 = 222 \text{ cm} \\ &\ell_n/4 = \frac{800 - 60}{4} = 185 \text{ cm} \\ &\text{c.a.c.} = 600 \end{aligned}\right\} \therefore b = 185 \text{ cm}$$

$$\frac{M_u}{\phi f'_c b d^2} = \frac{36.1 \times 10^5}{0.9 \times 200 \times 185 \times 64^2} = 0.0265;\ \omega = 0.0269$$

$$\rho = 0.0269 \frac{200}{4200} = 0.0013$$

$$A_s = 0.0013 \times 185 \times 64 = 15.4 \text{ cm}^2$$

Usar 3 No. 8 = 15.2 cm^2

$$A_{smin} = 0.0033 \times 30 \times 64 = 6.3 \text{ cm}^2 < 15.2$$

$$m_{r\,(2\,-\,\text{No.8})} = \frac{2}{3} \times 36.1 = 24.1 \text{ ton-m}$$

EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **5**

DATOS PARA DETERMINACIÓN DE CORTE DE BARRAS Y REVISIÓN DE REQUISITOS DE ANCLAJE

Longitudes de desarrollo (sección 9.6.1):

$$L_d = \frac{f_y}{5.3\sqrt{f'_c}}\, d_b \qquad \text{(para barras No. 7 y mayores)}$$

Barras del No. 8 de lecho inferior:

$$L_d = \frac{4200 \times 2.54}{5.3\sqrt{200}} = 142 \text{ cm}$$

Barras del No. 8 de lecho superior:

$$L_d = 1.3 \times 142 = 185 \text{ cm}$$

Barras del No. 10 de lecho inferior:

$$L_d = \frac{4200 \times 3.18}{5.3\sqrt{200}} = 178 \text{ cm}$$

Barras del No. 10 de lecho superior:

$$L_d = 1.3 \times 178 = 231 \text{ cm}$$

Distancia mínima que debe prolongarse el refuerzo más allá de donde teóricamente deja de ser necesario

Barras No. 8 $\left\{ \begin{array}{l} d = 64 \text{ cm} \\ 12d_b = 12 \times 2.54 = 30 \text{ cm} \end{array} \right\}$ rige: 64 cm

Barras No. 10 $\left\{ \begin{array}{l} d = 64 \text{ cm} \\ 12d_b = 12 \times 3.18 = 38 \text{ cm} \end{array} \right\}$ rige: 64 cm

EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **6**

ANCLAJE EN LA COLUMNA EXTERIOR

En tensión

Longitud gancho estándar:

$$L_{dh} = \frac{0.06\, f_y d_b}{\sqrt{f'_c}} \qquad \text{(ecuación 20.5)}$$

$$L_{dh} = \frac{0.06 \times 4200 \times 2.54}{\sqrt{200}} = 45 \text{ cm} > (8d_b = 20 \text{ cm})$$

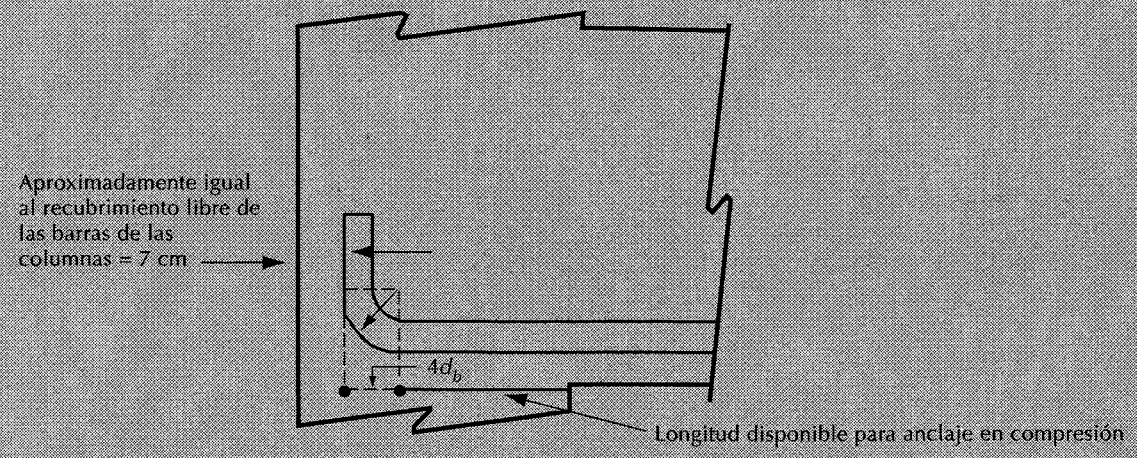
Longitud disponible = 60 − 5 = 55 cm > 45 cm

En compresión (ver sección *9.6.1*)

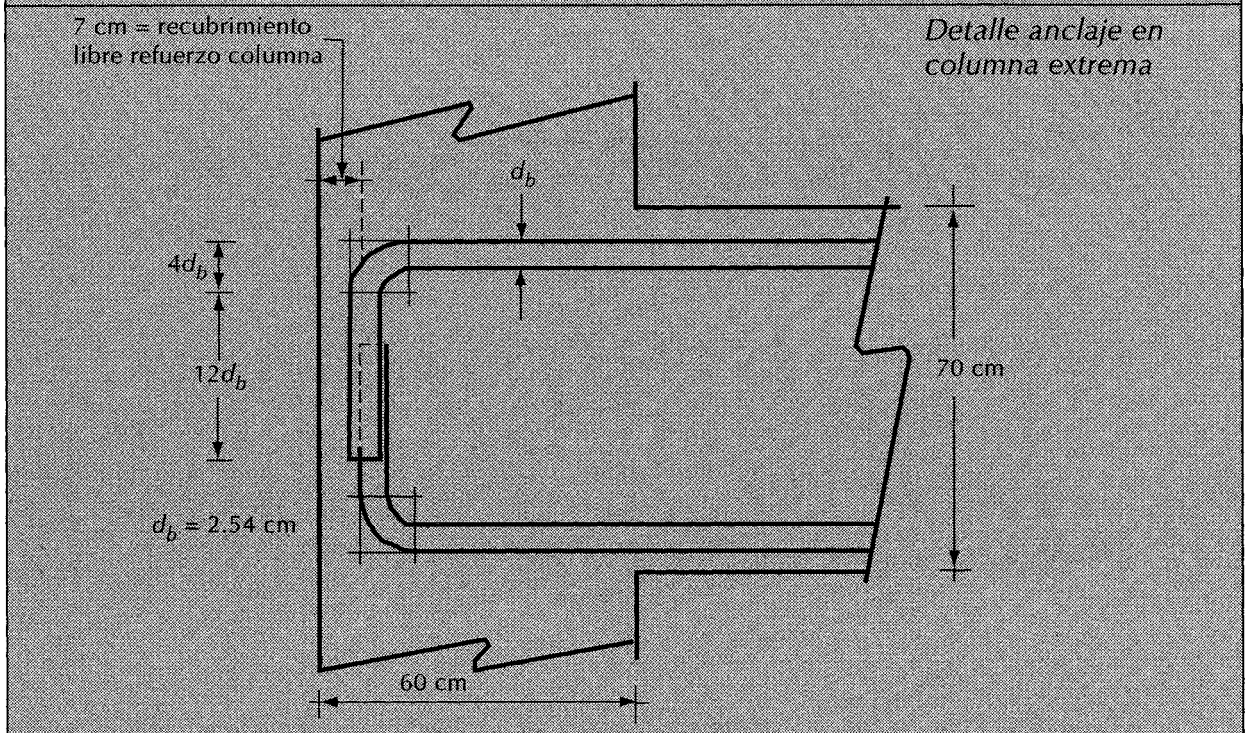
Longitud básica:

$$\left.\begin{aligned} L_{db} &= \frac{0.075\, d_b f_y}{\sqrt{f'_c}} = 56.6 \text{ cm} \\ L_{db} &= 0.0043\, d_b\, f_y = 45.8 \text{ cm} \end{aligned}\right\} L_d = 57 \text{ cm}$$

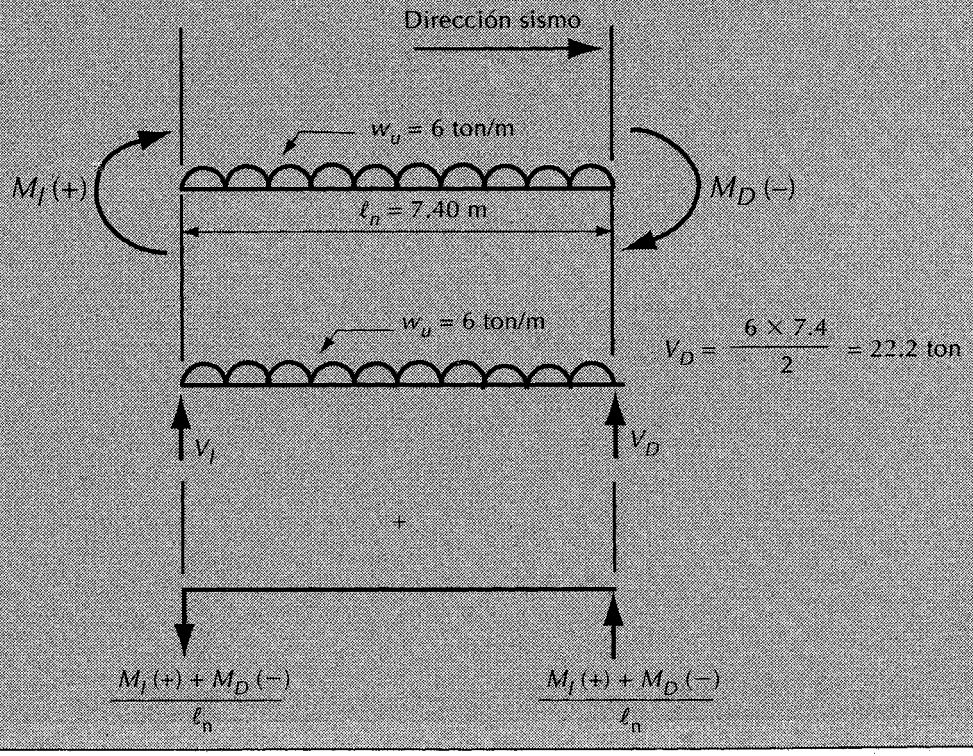
Longitud recta disponible = 60 − 7 − $4d_b$ = 53 − 10 = 43 cm



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) 7

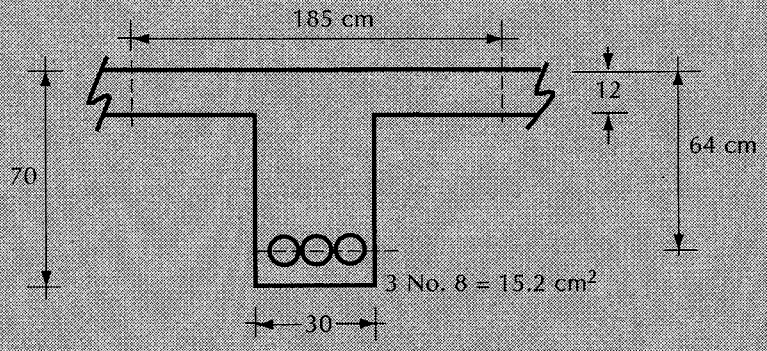


REFUERZO TRANSVERSAL LADO DERECHO



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **8**

Cálculo de M_l (+)



$$\frac{M_u}{\phi\, bd^2 f'_c} = \omega\,(1 - 0.59\,\omega)$$

$$M_u = M_l\,(+);\ \phi = 1;\ \rho = \frac{15.2}{185 \times 64} = 0.0013$$

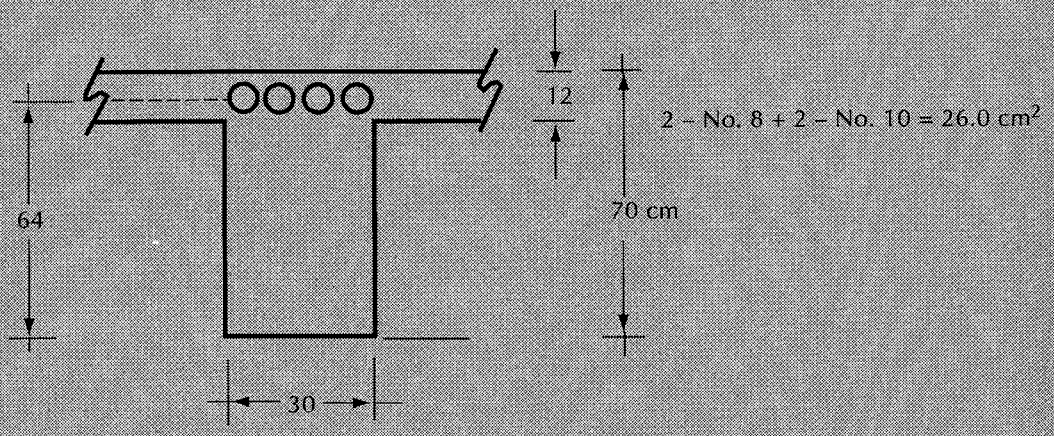
$$\omega = \frac{1.25\, f_y\, \rho}{f'_c} = \frac{1.25 \times 4200 \times 0.0013}{200} = 0.0341$$

$$M_l\,(+) = bd^2\, f'_c\, \omega\,(1 - 0.59\,\omega)$$

$$= 185 \times 64^2 \times 200 \times 0.0341\,(1 - 0.59 \times 0.0341)$$

$$= 50.6 \times 10^5 \text{ kg-cm} = 50.6 \text{ ton-m}$$

Cálculo de M_D (−)



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **9**

$$M_u = M_D\,(-);\quad \phi = 1;\quad \rho = \frac{26.0}{30 \times 64} = 0.0135$$

$$\omega = \frac{1.25\, f_y\, \rho}{f'_c} = \frac{1.25 \times 4200 \times 0.0135}{200} = 0.354$$

$$M_D\,(-) = 30 \times 64^2 \times 200 \times 0.354\,(1 - 0.59 \times 0.354)$$

$$= 68.8 \times 10^5 \text{ kg-cm} = 68.8 \text{ ton-m}$$

Fuerza cortante de diseño en el paño del apoyo derecho

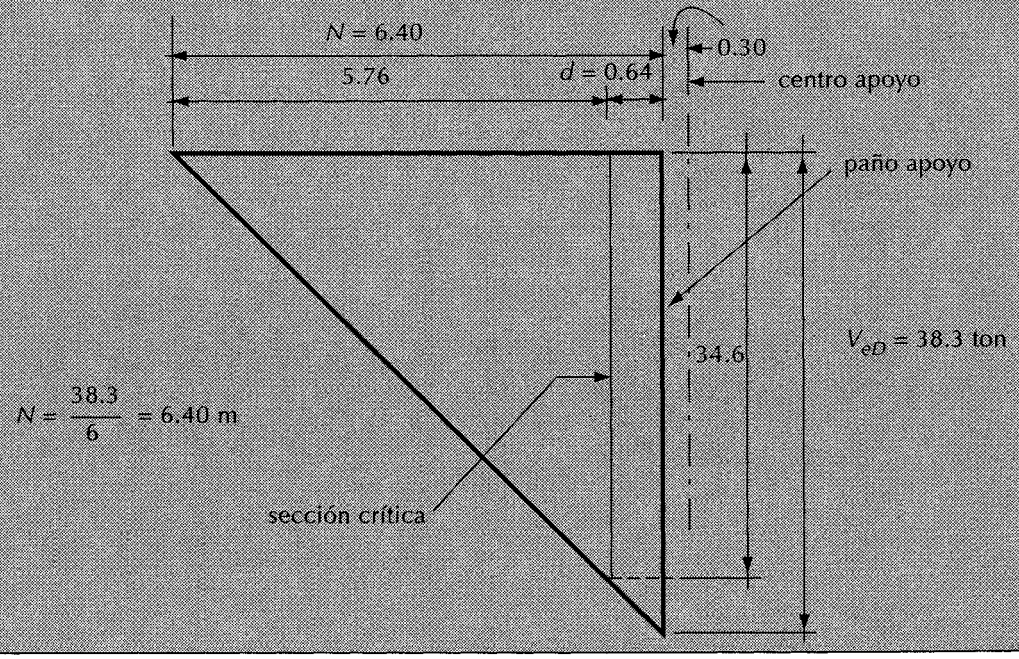
$$V_{eD} = \frac{V_D + M_l\,(+) + M_D\,(-)}{\ell_n}$$

$$= 22.2 + \frac{50.6 + 68.8}{7.4} = 38.3 \text{ ton}$$

$$\frac{M_l\,(+) + M_D\,(-)}{\ell_n} = 16.1 \text{ ton} < \frac{V_{eD}}{2} = 19.1 \text{ ton}$$

$\therefore$ puede considerarse la contribución del concreto a la resistencia a fuerza cortante.

Diagrama de fuerza cortante



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **10**

Determinación del diagrama de V_s (ver ejemplo 14.8)

$$\left.\begin{aligned} V_m &= V_c + V_s \\ V_m &= V_u/\phi \end{aligned}\right\} \quad \frac{V_u}{\phi} = V_c + V_s$$

$$V_s = \frac{V_u}{\phi} - V_c$$

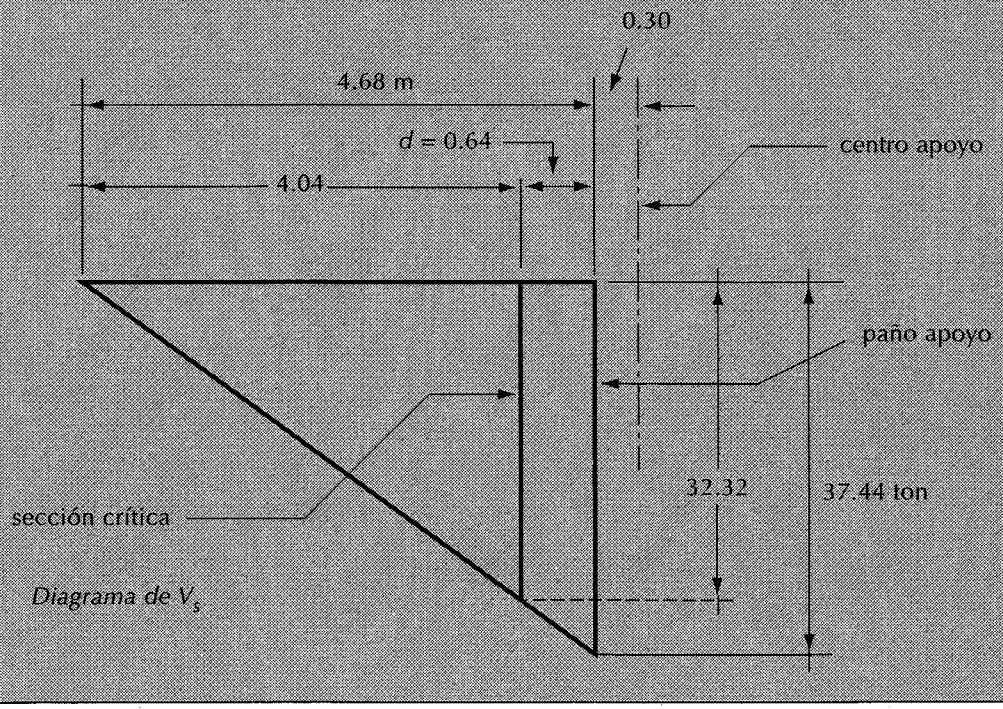
$$V_c = v_c\, b'd = 7.1 \times 30 \times 64 = 13{,}630 \text{ kg}$$

$$V_{s\ \text{paño apoyo}} = \frac{38{,}300}{0.75} - 13{,}630 = 37{,}440 \text{ kg}$$

Pendiente del diagrama de V_s:

$$m = \frac{w_u}{\phi} = \frac{6}{0.75} = 8\ \frac{\text{ton}}{\text{m}} = 80\ \frac{\text{kg}}{\text{cm}}$$

$$V_s = 0 \text{ para } x = \frac{37.44}{8} = 4.68 \text{ m}$$



EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **11**

Espaciamiento máximo del refuerzo de confinamiento

$$\left.\begin{aligned} &\frac{d}{4} = \frac{64}{4} = 16 \text{ cm} \\ &8d_b = 8 \times 2.54 = 20 \text{ cm} \\ &30 \text{ cm} \end{aligned}\right\} \quad \therefore s = 16 \text{ cm}$$

Distancia a partir del paño del apoyo en la que es necesario mantener el refuerzo de confinamiento con s = 16 cm

$$2h = 2 \times 70 = 140 \text{ cm}$$

Cálculo de espaciamientos requeridos a distintas distancias del paño del apoyo

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_s}$$

$$V_s = V_{s \text{ paño apoyo}} - mx$$

x = distancia desde el paño del apoyo, cm

$m = 80$ kg/cm

$$s = \frac{A_v f_y d}{V_{s \text{ paño apoyo}} - mx}$$

Para estribos del No. 3:

$$s = \frac{1.42 \times 4200 \times 64}{V_{s \text{ paño apoyo}} - mx}$$

$$s = \frac{381{,}700}{37{,}440 - 80x}$$

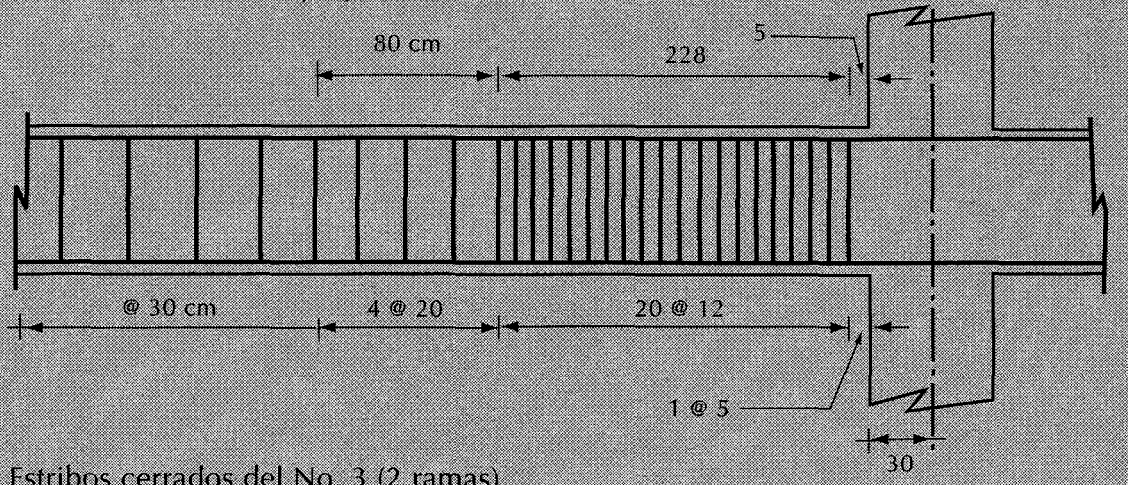
$$s_{max} = \frac{d}{2} \approx 30 \text{ cm}$$

EJEMPLO 20.1 (*continuación*) **12**

Tabla de distancias a partir de las cuales se pueden utilizar los espaciamientos indicados

x (distancia desde el paño del apoyo, cm)	*s (espaciamiento cm)*
64 (sección crítica)	12 (< 16 cm)
140 (= 2*h*)	14
229	20
277	25
309	30

Distribución de estribos propuesta



Estribos cerrados del No. 3 (2 ramas)

Ejemplo 20.2 Detallado del refuerzo de una columna de estribos en una estructura en zona de alto riesgo sísmico según el Reglamento **ACI** 318-02.

Se ilustra en este ejemplo la manera de determinar el refuerzo transversal mínimo con que debe contar una columna de una estructura en una zona de alto riesgo sísmico, de acuerdo con las indicaciones del Reglamento **ACI** 318-02.

La cuantía del refuerzo longitudinal de la columna es 0.0173, valor comprendido entre el mínimo de 0.01 y el máximo de 0.06 especificados por el **ACI.**

El refuerzo transversal propuesto consiste en estribos cerrados combinados con una grapa colocados con un espaciamiento máximo de 9 cm. Estos elementos deben reunir las características mostradas en la figura 15.3*b*. La sección total de estribos requerida fue 2.4 cm^2, valor dado por la ecuación 20.3. Para proporcionar esta sección se utilizaron estribos del No. 4, cuyas dos ramas tienen una sección de 2.5 cm^2, valor mayor que el calculado. Este refuerzo debe abarcar un tramo a partir de los paños de las juntas con una longitud mínima, ℓ_o = 58 cm. El primer estribo se colocó a 4 cm del paño y a continuación se dispusieron siete estribos, con lo que se re-

fuerza un tramo de 67 cm, longitud superior a la longitud mínima de 58 cm.

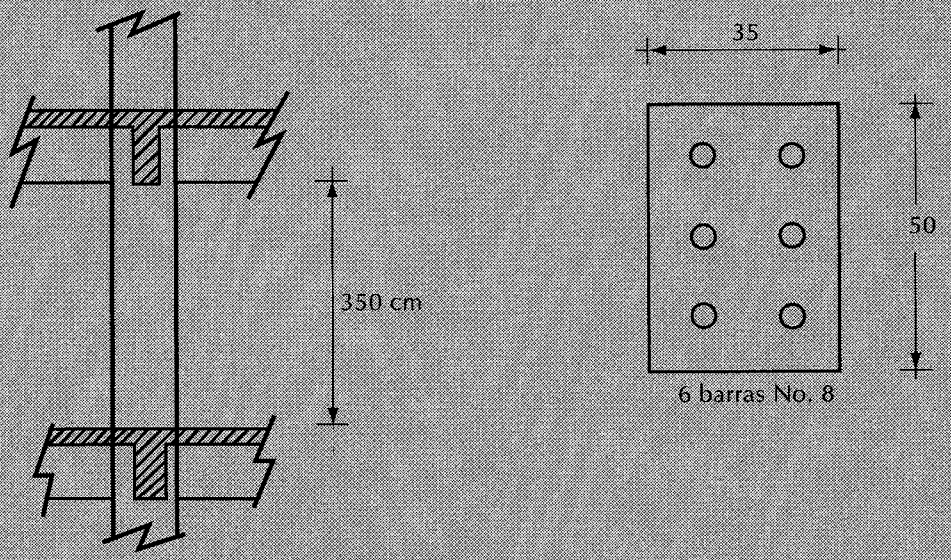
La separación de los estribos en la porción central de la columna puede aumentarse a 15 cm. Rigió aquí el medio peralte efectivo correspondiente a la dimensión más desfavorable de la columna, ya que los requisitos usuales dan todos separaciones mayores. El refuerzo indicado es el mínimo necesario. Debe revisarse si es suficiente para resistir la fuerza cortante que pudiera actuar. En caso necesario deberá modificarse el refuerzo transversal convenientemente.

El armado transversal propuesto para el extremo superior de la columna se muestra esquemáticamente en el croquis al final del ejemplo. El armado en el extremo inferior debe ser semejante.

EJEMPLO 20.2 ***Detallado del refuerzo de una columna de estribos en zona de alto riesgo sísmico (ACI 318-02).***

DATOS

Geometría



Materiales: Concreto: $f'_c = 200$ kg/cm^2
Acero: $f_y = 4200$ kg/cm^2

Reglamento: ACI 318-02

Se pide: detallar el refuerzo transversal.

EJEMPLO 20.2 (*continuación*)

REVISIÓN CUANTÍA REFUERZO LONGITUDINAL

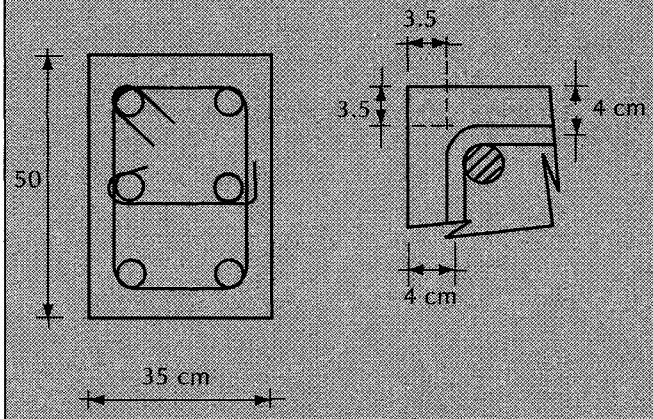
$$\rho = \frac{A_s}{bh} \qquad A_s = 6 - \text{No. } 8 = 30.2 \text{ cm}^2$$

$$\rho = \frac{30.2}{35 \times 50} = 0.0173$$

$$\therefore 0.01 < \rho < 0.06$$

REFUERZO EN ZONAS CONFINADAS PRÓXIMAS A LOS PAÑOS DE LAS JUNTAS

Suponer recubrimiento libre = 3.5 cm



$$h_c = 50 - 2 \times 4 = 42 \text{ cm}$$

$$A_{ch} = (50 - 2 \times 3.5)(35 - 2 \times 3.5) = 1204 \text{ cm}^2$$

$$A_g = 35 \times 50 = 1750 \text{ cm}^2$$

Separación máxima:

$$\frac{1}{4} b = \frac{1}{4} 35 \approx 9 \text{ cm}$$

$$6d = 6 \times 2.54 = 15.2 \text{ cm}$$

$$s_x = 10 + \frac{35 - h_x}{3}$$

$$h_x = 35 - 2 \times 4 = 27$$

$$s_x = 10 + \frac{35 - 27}{3} = 12.7 \text{ cm}$$

Según el Reglamento ACI, s_x no debe exceder de 15 cm ni necesita tomarse como menor a 10 cm.

Se considera el menor valor de la separación máxima, por lo que

$$s_{máx} = 9 \text{ cm}$$

EJEMPLO 20.2 (*continuación*)

Sección total del refuerzo transversal requerida:

$$A_{sh} = 0.3\,(sh_c f'_c/f_y)\,[(A_g/A_{ch}) - 1] \qquad \text{(ecuación 20.3)}$$

$$= 0.3\,(9 \times 42 \times 200/4200)\,[(1750/1204) - 1]$$

$$A_{sh} = 2.4 \text{ cm}^2$$

$$A_{sh} = \frac{0.09\, sh_c f'_c}{f_y} \qquad \text{(ecuación 20.4)}$$

$$= \frac{0.09 \times 9 \times 42 \times 200}{4200}; \quad A_{sh} = 1.6 \text{ cm}^2 < 2.4 \text{ cm}^2$$

$\therefore$ Usar estribos de dos ramas del No. 4 ($A_s = 2.5 \text{ cm}^2 > 2.4 \text{ cm}^2$)

Tramo ℓ_o en el que debe conservarse la separación de 9 cm.

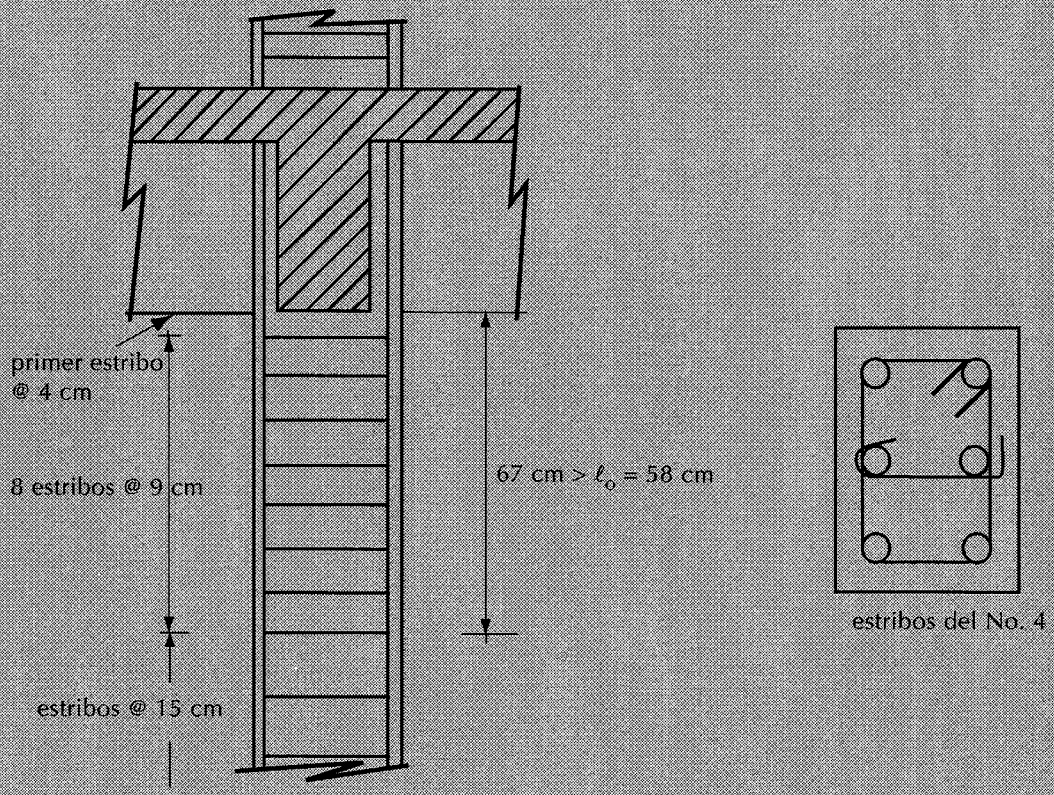
$$\left.\begin{array}{l} h = 50 \text{ cm} \\ 350/6 = 58 \text{ cm} \\ 45 \text{ cm} \end{array}\right\} \therefore \ell_o = 58 \text{ cm}$$

REFUERZO EN PORCIÓN CENTRAL DE LA COLUMNA

$$\left.\begin{array}{l} 16 \times 2.54 = 41 \text{ cm} \\ 48 \times 1.27 = 61 \text{ cm} \\ b = 35 \text{ cm} \\ d/2 = \frac{1}{2}\,(35 - 6) = 15 \text{ cm} \end{array}\right\} \therefore \text{colocar los estribos @ 15 cm}$$

EJEMPLO 20.2 (*continuación*)

DETALLE DEL ARMADO



Referencias

20.1 Park, R, y T. Paulay. Estructuras de concreto reforzado. México, D. F, Limusa, 1979.

20.2 Comité ACI *315*. ACI *Detailing* Manual (SP 66). Detroit, American Concrete Institute, 1994.

20.3 Whittle, R. *Reinforcement Detailing* Manual. Wexham Springs, Slough, Inglaterra, Cement and Concrete Association, 1981.

20.4 Leonhardt, F. "Das Bewehren von Stahlbetontragwerken". *Beton-* Kalender *7977,* Parte II. Berlín, Wilhelm Ernest, 1971.

20.5 Comité Euro-international du Béton. *Design* and *Detailing* of Steel *Reinforcement*. Hornby, Lancaster, Inglaterra, Construction Press, 1981.

20.6 Nilsson, H. E, y A. Losberg. Discusión de "Opportunities in Bond Research". *Journal* of the *American* Concrete *Institute*. Detroit, mayo 1971.

20.7 Mayfield, B., et al. "Corner Joint Details in Structural Lightweight Concrete". Journal of the *American* Concrete *Institute*. Detroit, mayo 1971.

20.8 Swann, R. A. *Flexural* Strength of Corners of *Reinforced* Concrete Portal Frames, Technical Report, TRA 434. Londres, Cement and Concrete Association, noviembre 1969.

20.9 Comité ACI 318. Building Code *Requirements* for *Reinforced* Concrete (AC1 318-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.

20.10 Comité ACI 318. Commentary on Building Code *Requirements* for *Reinforced* Concrete (ACI 318-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.

20.11 Bazán, E, y R. Meli. Manual de diseño sísmico de edificios. México, D.F., Limusa, 1999.

20.12 Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Concreto. Gaceta Oficial del Distrito Federal, Tomo I, No. 103-Bis, 6 de octubre de 2004.

20.13 Hanson, N. W., y H. W. Conner. "Seismic Resistance of Reinforced Concrete Beam-Column Joints". *Proceedings* ASCE, Vol. *93,* No. ST *5,* octubre 1967.

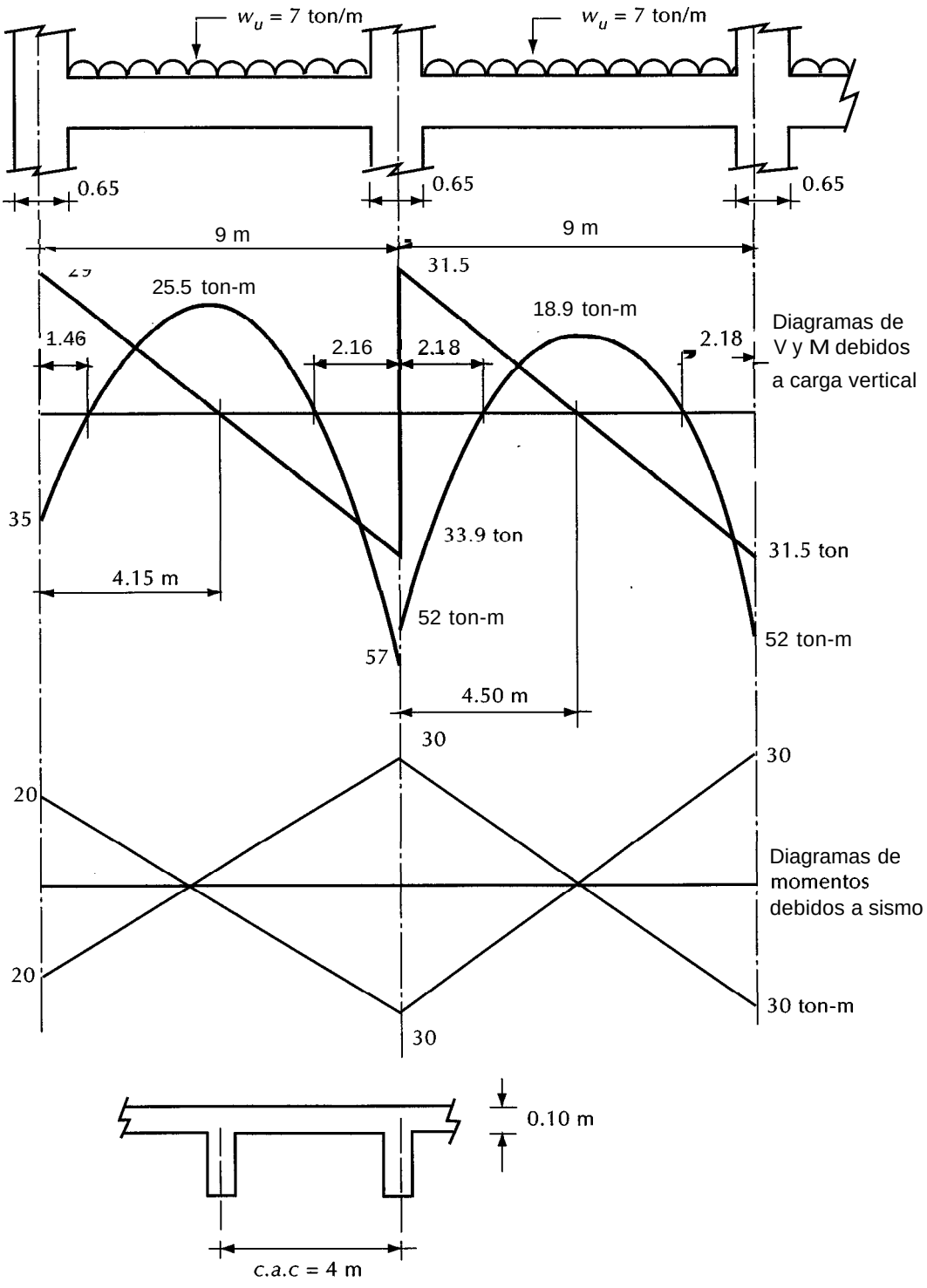
20.14 Comité ACI-ASCE 352. *Recommendations* for *Design* of Beam-Columns *Connections in Monolithic Reinforced* Concrete Structures (ACI 325R-02). Detroit, American Concrete Institute, 2002.

20.15 Meinheit, D. F, y J. O. Jirsa. The Shear Strength of *Reinforced* Concrete Beam-Column Joints, Reporte CESRL-No. 71. Austin, Texas, Universidad de Texas, enero 1977.

20.16 *Design* of Beam-Column *Joints* for *Seismic Resistance*. SP-123. American Concrete Institute. Detroit, 1991.

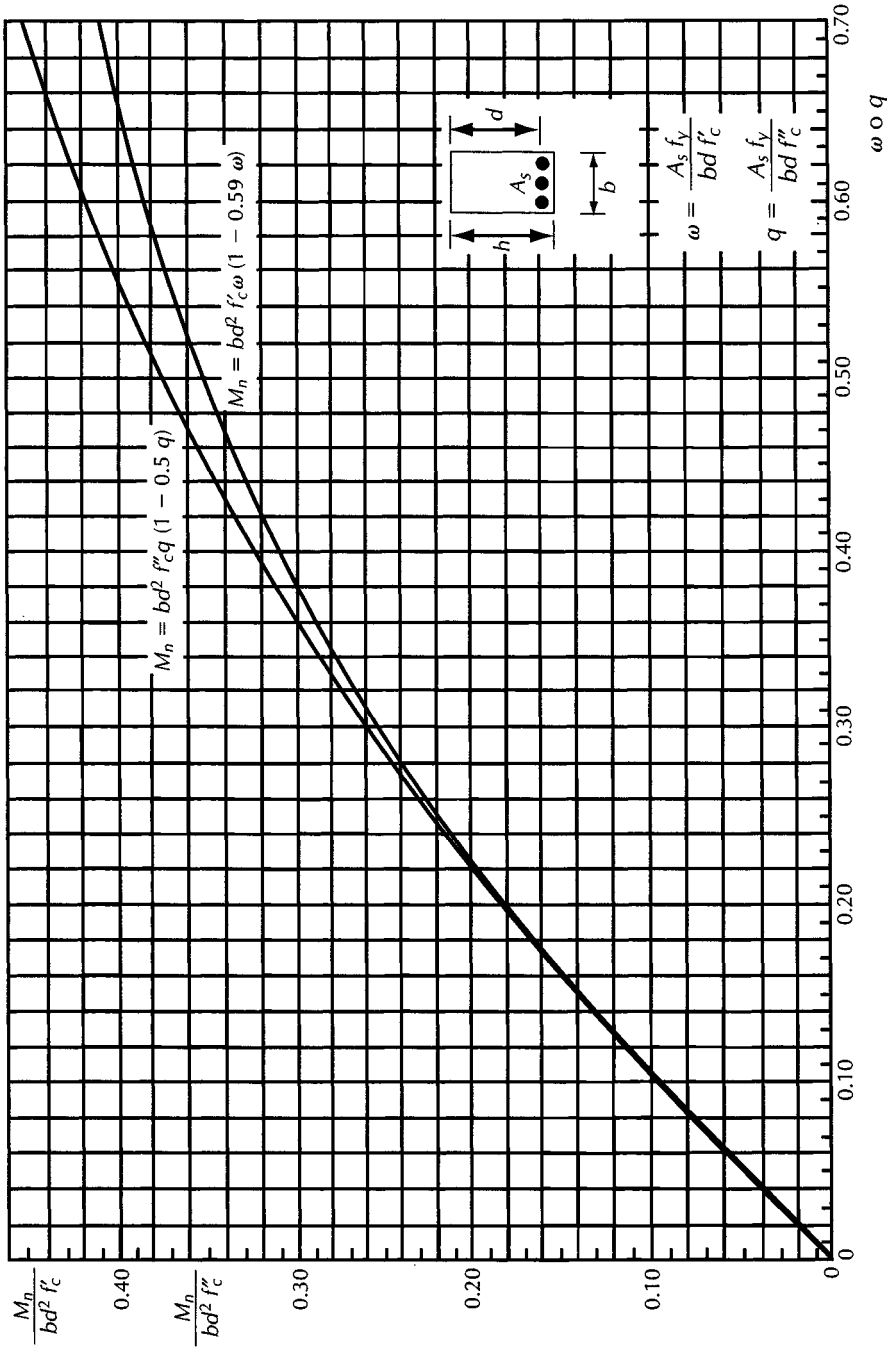
Ejercicio

20.1 Dimensionar las dos vigas del croquis, que forman parte de un marco sujeto a sismo. Los diagramas corresponden a acciones multiplicadas por los factores de carga apropiados. Considerar un concreto de 250 kg/cm^2 y un acero de 4200 kg/cm^2. Suponer que las columnas tienen un ancho de 65 cm. Considerar alto riesgo sísmico, si se emplea el Reglamento ACI 318-02 o un factor de ductilidad Q = 4, si utiliza el Reglamento del Distrito Federal y el manual de la referencia 20.11. Detallar el refuerzo longitudinal y el transversal. Revisar el agrietamiento y la deflexión bajo la combinación de carga vertical y sismo. (Ver croquis en la página siguiente.)


w_u = 7 ton/m
w_u = 7 ton/m
0.65
0.65
0.65
9 m
9 m
31.5
25.5 ton-m
18.9 ton-m
1.46
2.16
2.18
2.18
Diagramas de V y M debidos a carga vertical
35
33.9 ton
31.5 ton
4.15 m
52 ton-m
52 ton-m
57
4.50 m
30
30
20
Diagramas de momentos debidos a sismo
20
30 ton-m
30
0.10 m
c.a.c = 4 m

APÉNDICE A

Gráfica para diseño por flexión



Momentos resistentes nominales secciones rectangulares $\omega \leq \omega_b$, $q \leq q_b$

APÉNDICE B

Porcentajes de refuerzo para secciones rectangulares

(Referencia 14.12)

f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 200 kg/cm^2			ρ_b = 1.618%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.722	49	0.4736	16.59	97	0.8472	27.83
2	0.1078	4.006	50	0.4814	16.84	98	0.8550	28.05
3	0.1156	4.290	51	0.4892	17.09	99	0.8628	28.27
4	0.1233	4.574	52	0.4969	17.34	100	0.8705	28.48
5	0.1311	4.856	53	0.5047	17.59	101	0.8783	28.70
6	0.1389	5.138	54	0.5125	17.84	102	0.8861	28.91
7	0.1467	5.420	55	0.5203	18.09	103	0.8939	29.13
8	0.1545	5.700	56	0.5281	18.33	104	0.9017	29.34
9	0.1623	5.980	57	0.5359	18.58	105	0.9095	29.55
10	0.1700	6.259	58	0.5436	18.82	106	0.9172	29.76
11	0.1778	6.537	59	0.5514	19.07	107	0.9250	29.97
12	0.1856	6.815	60	0.5592	19.31	108	0.9328	30.18
13	0.1934	7.092	61	0.5670	19.56	109	0.9406	30.39
14	0.2012	7.368	62	0.5748	19.80	110	0.9484	30.60
15	0.2090	7.644	63	0.5826	20.04	111	0.9562	30.81
16	0.2167	7.919	64	0.5903	20.28	112	0.9639	31.01
17	0.2245	8.193	65	0.5981	20.52	113	0.9717	31.22
18	0.2323	8.466	66	0.6059	20.76	114	0.9795	31.43
19	0.2401	8.739	67	0.6137	21.00	115	0.9873	31.63
20	0.2479	9.011	68	0.6215	21.24	116	0.9951	31.83
21	0.2557	9.283	69	0.6293	21.47	117	1.003	32.04
22	0.2634	9.553	70	0.6370	21.71	118	1.011	32.24
23	0.2712	9.823	71	0.6448	21.95	119	1.018	32.44
24	0.2790	10.09	72	0.6526	22.18	120	1.026	32.64
25	0.2868	10.36	73	0.6604	22.42	121	1.034	32.84
26	0.2946	10.63	74	0.6682	22.65	122	1.042	33.04
27	0.3024	10.90	75	0.6760	22.88	123	1.050	33.24
28	0.3101	11.16	76	0.6837	23.12	124	1.057	33.44
29	0.3179	11.43	77	0.6915	23.35	125	1.065	33.64
30	0.3257	11.69	78	0.6993	23.58	126	1.073	33.84
31	0.3335	11.96	79	0.7071	23.81	127	1.081	34.03
32	0.3413	12.22	80	0.7149	24.04	128	1.088	34.23
33	0.3491	12.48	81	0.7227	24.27	129	1.096	34.42
34	0.3568	12.75	82	0.7304	24.50	130	1.104	34.62
35	0.3646	13.01	83	0.7382	24.72	131	1.112	34.81
36	0.3724	13.27	84	0.7460	24.95	132	1.120	35.00
37	0.3802	13.53	85	0.7538	25.18	133	1.127	35.20
38	0.3880	13.79	86	0.7616	25.40	134	1.135	35.39
39	0.3958	14.05	87	0.7694	25.63	135	1.143	35.58
40	0.4035	14.30	88	0.7771	25.85	136	1.151	35.77
41	0.4113	14.56	89	0.7849	26.07	137	1.159	35.96
42	0.4191	14.82	90	0.7927	26.30	138	1.166	36.15
43	0.4269	15.07	91	0.8005	26.52	139	1.174	36.33
44	0.4347	15.33	92	0.8083	26.74	140	1.182	36.52
45	0.4425	15.58	93	0.8161	26.96	141	1.190	36.71
46	0.4502	15.84	94	0.8238	27.18	142	1.197	36.89
47	0.4580	16.09	95	0.8316	27.40	143	1.205	37.08
48	0.4658	16.34	96	0.8394	27.62	144	1.213	37.26

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 250 kg/cm^2			ρ_b = 2.022%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.733	49	0.5753	20.20	97	1.051	34.56
2	0.1099	4.098	50	0.5852	20.52	98	1.061	34.84
3	0.1198	4.462	51	0.5951	20.84	99	1.070	35.11
4	0.1297	4.824	52	0.6050	21.16	100	1.080	35.39
5	0.1396	5.186	53	0.6149	21.48	101	1.090	35.66
6	0.1495	5.547	54	0.6248	21.79	102	1.100	35.93
7	0.1594	5.907	55	0.6347	22.11	103	1.110	36.21
8	0.1693	6.266	56	0.6446	22.43	104	1.120	36.48
9	0.1792	6.624	57	0.6545	22.74	105	1.130	36.75
10	0.1891	6.982	58	0.6644	23.05	106	1.140	37.02
11	0.1990	7.338	59	0.6743	23.37	107	1.150	37.28
12	0.2089	7.693	60	0.6842	23.68	108	1.160	37.55
13	0.2188	8.048	61	0.6941	23.99	109	1.169	37.82
14	0.2287	8.40	62	0.7040	24.30	110	1.179	38.08
15	0.2386	8.75	63	0.7139	24.61	111	1.189	38.35
16	0.2485	9.11	64	0.7238	24.91	112	1.199	38.61
17	0.2584	9.46	65	0.7337	25.22	113	1.209	38.88
18	0.2683	9.81	66	0.7436	25.53	114	1.219	39.14
19	0.2782	10.16	67	0.7535	25.83	115	1.229	39.40
20	0.2881	10.50	68	0.7634	26.14	116	1.239	39.66
21	0.2980	10.85	69	0.7733	26.44	117	1.249	39.92
22	0.3079	11.20	70	0.7832	26.74	118	1.259	40.18
23	0.3178	11.54	71	0.7931	27.04	119	1.268	40.43
24	0.3277	11.89	72	0.8030	27.34	120	1.278	40.69
25	0.3377	12.23	73	0.8130	27.64	121	1.288	40.95
26	0.3476	12.57	74	0.8229	27.94	122	1.298	41.20
27	0.3575	12.92	75	0.8328	28.24	123	1.308	41.46
28	0.3674	13.26	76	0.8427	28.54	124	1.318	41.71
29	0.3773	13.60	77	0.8526	28.83	125	1.328	41.96
30	0.3872	13.93	78	0.8625	29.13	126	1.338	42.21
31	0.3971	14.27	79	0.8724	29.42	127	1.348	42.46
32	0.4070	14.61	80	0.8823	29.71	128	1.358	42.71
33	0.4169	14.95	81	0.8922	30.01	129	1.367	42.96
34	0.4268	15.28	82	0.9021	30.30	130	1.377	43.21
35	0.4367	15.62	83	0.9120	30.59	131	1.387	43.45
36	0.4466	15.95	84	0.9219	30.88	132	1.397	43.70
37	0.4565	16.28	85	0.9318	31.17	133	1.407	43.94
38	0.4664	16.61	86	0.9417	31.45	134	1.417	44.19
39	0.4763	16.94	87	0.9516	31.74	135	1.427	44.43
40	0.4862	17.27	88	0.9615	32.03	136	1.437	44.67
41	0.4961	17.60	89	0.9714	32.31	137	1.447	44.91
42	0.5060	17.93	90	0.9813	32.60	138	1.457	45.15
43	0.5159	18.26	91	0.9912	32.88	139	1.466	45.39
44	0.5258	18.58	92	1.001	33.16	140	1.476	45.63
45	0.5357	18.91	93	1.011	33.44	141	1.486	45.87
46	0.5456	19.23	94	1.021	33.72	142	1.496	46.10
47	0.5555	19.56	95	1.031	34.00	143	1.506	46.34
48	0.5654	19.88	96	1.041	34.28	144	1.516	46.57

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 300 kg/cm^2			ρ_b = 2.427%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.741	49	0.6773	23.82	97	1.255	41.30
2	0.1120	4.186	50	0.6894	24.21	98	1.267	41.64
3	0.1241	4.629	51	0.7014	24.60	99	1.279	41.97
4	0.1361	5.072	52	0.7134	24.99	100	1.291	42.31
5	0.1481	5.513	53	0.7255	25.37	101	1.303	42.64
6	0.1601	5.953	54	0.7375	25.76	102	1.315	42.97
7	0.1722	6.393	55	0.7495	26.15	103	1.327	43.30
8	0.1842	6.831	56	0.7615	26.53	104	1.339	43.63
9	0.1962	7.267	57	0.7736	26.91	105	1.351	43.96
10	0.2083	7.703	58	0.7856	27.29	106	1.363	44.29
11	0.2203	8.138	59	0.7976	27.67	107	1.375	44.62
12	0.2323	8.571	60	0.8097	28.05	108	1.387	44.94
13	0.2443	9.004	61	0.8217	28.43	109	1.399	45.27
14	0.2564	9.435	62	0.8337	28.81	110	1.411	45.59
15	0.2684	9.865	63	0.8457	29.19	111	1.423	45.91
16	0.2804	10.29	64	0.8578	29.56	112	1.435	46.23
17	0.2924	10.72	65	0.8698	29.93	113	1.447	46.55
18	0.3045	11.15	66	0.8818	30.31	114	1.459	46.87
19	0.3165	11.57	67	0.8938	30.68	115	1.471	47.19
20	0.3285	12.00	68	0.9059	31.05	116	1.483	47.51
21	0.3406	12.42	69	0.9179	31.42	117	1.495	47.82
22	0.3526	12.84	70	0.9299	31.79	118	1.507	48.13
23	0.3646	13.27	71	0.9420	32.15	119	1.519	48.45
24	0.3766	13.69	72	0.9540	32.52	120	1.531	48.76
25	0.3887	14.10	73	0.9660	32.88	121	1.543	49.07
26	0.4007	14.52	74	0.9780	33.25	122	1.555	49.38
27	0.4127	14.94	75	0.9901	33.61	123	1.567	49.69
28	0.4248	15.35	76	1.002	33.97	124	1.579	50.00
29	0.4368	15.77	77	1.014	34.33	125	1.591	50.30
30	0.4488	16.18	78	1.026	34.69	126	1.603	50.61
31	0.4608	16.59	79	1.038	35.05	127	1.616	50.91
32	0.4729	17.00	80	1.050	35.41	128	1.628	51.21
33	0.4849	17.41	81	1.062	35.76	129	1.640	51.52
34	0.4969	17.82	82	1.074	36.12	130	1.652	51.82
35	0.5090	18.23	83	1.086	36.47	131	1.664	52.12
36	0.5210	18.64	84	1.098	36.82	132	1.676	52.41
37	0.5330	19.04	85	1.110	37.17	133	1.688	52.71
38	0.5450	19.45	86	1.122	37.52	134	1.700	53.01
39	0.5571	19.85	87	1.134	37.87	135	1.712	53.30
40	0.5691	20.25	88	1.146	38.22	136	1.724	53.60
41	0.5811	20.65	89	1.158	38.57	137	1.736	53.89
42	0.5931	21.05	90	1.170	38.91	138	1.748	54.18
43	0.6052	21.45	91	1.183	39.26	139	1.760	54.47
44	0.6172	21.85	92	1.195	39.60	140	1.772	54.76
45	0.6292	22.24	93	1.207	39.94	141	1.784	55.05
46	0.6413	22.64	94	1.219	40.28	142	1.796	55.34
47	0.6533	23.03	95	1.231	40.62	143	1.808	55.62
48	0.6653	23.43	96	1.243	40.96	144	1.820	55.91

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 350 kg/cm^2			ρ_b = 2.831%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.747	49	0.7790	27.42	97	1.458	48.03
2	0.1141	4.271	50	0.7932	27.88	98	1.472	48.42
3	0.1283	4.795	51	0.8073	28.34	99	1.486	48.82
4	0.1424	5.317	52	0.8215	28.80	100	1.501	49.21
5	0.1566	5.837	53	0.8356	29.26	101	1.515	49.60
6	0.1707	6.357	54	0.8498	29.71	102	1.529	49.99
7	0.1849	6.875	55	0.8639	30.17	103	1.543	50.38
8	0.1990	7.391	56	0.8781	30.62	104	1.557	50.77
9	0.2132	7.906	57	0.8922	31.07	105	1.571	51.16
10	0.2273	8.42	58	0.9064	31.52	106	1.585	51.55
11	0.2415	8.93	59	0.9205	31.97	107	1.600	51.93
12	0.2556	9.44	60	0.9347	32.42	108	1.614	52.31
13	0.2698	9.95	61	0.9488	32.86	109	1.628	52.69
14	0.2839	10.46	62	0.9630	33.31	110	1.642	53.08
15	0.2981	10.97	63	0.9771	33.75	111	1.656	53.45
16	0.3122	11.48	64	0.9913	34.19	112	1.670	53.83
17	0.3263	11.98	65	1.005	34.63	113	1.684	54.21
18	0.3405	12.48	66	1.020	35.07	114	1.699	54.58
19	0.3546	12.99	67	1.034	35.51	115	1.713	54.96
20	0.3688	13.49	68	1.048	35.95	116	1.727	55.33
21	0.3829	13.99	69	1.062	36.38	117	1.741	55.70
22	0.3971	14.48	70	1.076	36.82	118	1.755	56.07
23	0.4112	14.98	71	1.090	37.25	119	1.769	56.44
24	0.4254	15.48	72	1.104	37.68	120	1.783	56.81
25	0.4395	15.97	73	1.119	38.11	121	1.798	57.17
26	0.4537	16.46	74	1.133	38.54	122	1.812	57.54
27	0.4678	16.95	75	1.147	38.96	123	1.826	57.90
28	0.4820	17.44	76	1.161	39.39	124	1.840	58.26
29	0.4961	17.93	77	1.175	39.81	125	1.854	58.62
30	0.5103	18.42	78	1.189	40.24	126	1.868	58.98
31	0.5244	18.91	79	1.203	40.66	127	1.883	59.34
32	0.5386	19.39	80	1.218	41.08	128	1.897	59.70
33	0.5527	19.87	81	1.232	41.50	129	1.911	60.05
34	0.5668	20.36	82	1.246	41.92	130	1.925	60.40
35	0.5810	20.84	83	1.260	42.33	131	1.939	60.76
36	0.5951	21.31	84	1.274	42.75	132	1.953	61.11
37	0.6093	21.79	85	1.288	43.16	133	1.967	61.46
38	0.6234	22.27	86	1.302	43.58	134	1.982	61.81
39	0.6376	22.74	87	1.317	43.99	135	1.996	62.15
40	0.6517	23.22	88	1.331	44.40	136	2.010	62.50
41	0.6659	23.69	89	1.345	44.81	137	2.024	62.84
42	0.6800	24.16	90	1.359	45.21	138	2.038	63.19
43	0.6942	24.63	91	1.373	45.62	139	2.052	63.53
44	0.7083	25.10	92	1.387	46.02	140	2.066	63.87
45	0.7225	25.57	93	1.402	46.43	141	2.081	64.21
46	0.7366	26.03	94	1.416	46.83	142	2.095	64.55
47	0.7508	26.50	95	1.430	47.23	143	2.109	64.88
48	0.7649	26.96	96	1.444	47.63	144	2.123	65.22

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 400 kg/cm^2			ρ_b = 3.129%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.751	49	0.854	30.16	97	1.608	53.25
2	0.1157	4.335	50	0.870	30.68	98	1.624	53.70
3	0.1314	4.918	51	0.886	31.19	99	1.640	54.14
4	0.1471	5.499	52	0.901	31.70	100	1.656	54.58
5	0.1629	6.078	53	0.917	32.21	101	1.671	55.02
6	0.1786	6.657	54	0.933	32.72	102	1.687	55.46
7	0.1943	7.234	55	0.949	33.23	103	1.703	55.90
8	0.2100	7.809	56	0.964	33.73	104	1.718	56.34
9	0.2257	8.383	57	0.980	34.24	105	1.734	56.78
10	0.2414	8.956	58	0.996	34.74	106	1.750	57.21
11	0.2571	9.527	59	1.011	35.24	107	1.766	57.64
12	0.2728	10.10	60	1.027	35.75	108	1.781	58.07
13	0.2886	10.66	61	1.043	36.24	109	1.797	58.50
14	0.3043	11.23	62	1.059	36.74	110	1.813	58.93
15	0.3200	11.80	63	1.074	37.24	111	1.828	59.36
16	0.3357	12.36	64	1.090	37.73	112	1.844	59.78
17	0.3514	12.92	65	1.106	38.23	113	1.860	60.21
18	0.3671	13.48	66	1.121	38.72	114	1.876	60.63
19	0.3828	14.04	67	1.137	39.21	115	1.891	61.05
20	0.3986	14.60	68	1.153	39.70	116	1.907	61.47
21	0.4143	15.16	69	1.169	40.18	117	1.923	61.89
22	0.4300	15.71	70	1.184	40.67	118	1.938	62.31
23	0.4457	16.27	71	1.200	41.16	119	1.954	62.72
24	0.4614	16.82	72	1.216	41.64	120	1.970	63.14
25	0.4771	17.37	73	1.231	42.12	121	1.986	63.55
26	0.4928	17.92	74	1.247	42.60	122	2.001	63.96
27	0.5085	18.47	75	1.263	43.08	123	2.017	64.37
28	0.5243	19.01	76	1.278	43.56	124	2.033	64.78
29	0.5400	19.56	77	1.294	44.03	125	2.048	65.19
30	0.5557	20.10	78	1.310	44.51	126	2.064	65.59
31	0.5714	20.65	79	1.326	44.98	127	2.080	65.99
32	0.5871	21.19	80	1.341	45.45	128	2.096	66.40
33	0.6028	21.73	81	1.357	45.92	129	2.111	66.80
34	0.6185	22.26	82	1.373	46.39	130	2.127	67.20
35	0.6343	22.80	83	1.388	46.86	131	2.143	67.60
36	0.6500	23.34	84	1.404	47.32	132	2.158	67.99
37	0.6657	23.87	85	1.420	47.79	133	2.174	68.39
38	0.6814	24.40	86	1.436	48.25	134	2.190	68.78
39	0.6971	24.93	87	1.451	48.71	135	2.206	69.17
40	0.7128	25.46	88	1.467	49.17	136	2.221	69.57
41	0.7285	25.99	89	1.483	49.63	137	2.237	69.95
42	0.7442	26.52	90	1.498	50.09	138	2.253	70.34
43	0.7600	27.04	91	1.514	50.55	139	2.268	70.73
44	0.7757	27.56	92	1.530	51.00	140	2.284	71.11
45	0.7914	28.09	93	1.546	51.45	141	2.300	71.50
46	0.8071	28.61	94	1.561	51.90	142	2.316	71.88
47	0.8228	29.13	95	1.577	52.35	143	2.331	72.26
48	0.8385	29.64	96	1.593	52.80	144	2.347	72.64

f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 450 kg/cm^2			ρ_b = 3.398%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.754	49	0.9217	32.64	97	1.743	58.02
2	0.1171	4.387	50	0.9388	33.20	98	1.761	58.51
3	0.1342	5.022	51	0.9559	33.76	99	1.778	59.00
4	0.1514	5.654	52	0.9731	34.33	100	1.795	59.49
5	0.1685	6.286	53	0.9902	34.89	101	1.812	59.97
6	0.1856	6.915	54	1.007	35.44	102	1.829	60.46
7	0.2027	7.543	55	1.024	36.00	103	1.846	60.94
8	0.2198	8.169	56	1.042	36.56	104	1.863	61.42
9	0.2370	8.793	57	1.059	37.11	105	1.880	61.91
10	0.2541	9.415	58	1.076	37.66	106	1.897	62.38
11	0.2712	10.036	59	1.093	38.21	107	1.915	62.86
12	0.2883	10.66	60	1.110	38.76	108	1.932	63.34
13	0.3054	11.27	61	1.127	39.31	109	1.949	63.81
14	0.3225	11.89	62	1.144	39.86	110	1.966	64.29
15	0.3397	12.50	63	1.161	40.40	111	1.983	64.76
16	0.3568	13.11	64	1.178	40.94	112	2.000	65.23
17	0.3739	13.73	65	1.196	41.49	113	2.017	65.70
18	0.3910	14.33	66	1.213	42.03	114	2.034	66.16
19	0.4081	14.94	67	1.230	42.56	115	2.052	66.63
20	0.4253	15.55	68	1.247	43.10	116	2.069	67.09
21	0.4424	16.15	69	1.264	43.64	117	2.086	67.56
22	0.4595	16.75	70	1.281	44.17	118	2.103	68.02
23	0.4766	17.35	71	1.298	44.70	119	2.120	68.48
24	0.4937	17.95	72	1.315	45.23	120	2.137	68.94
25	0.5109	18.55	73	1.333	45.76	121	2.154	69.39
26	0.5280	19.14	74	1.350	46.29	122	2.171	69.85
27	0.5451	19.74	75	1.367	46.82	123	2.189	70.30
28	0.5622	20.33	76	1.384	47.34	124	2.206	70.75
29	0.5793	20.92	77	1.401	47.87	125	2.223	71.20
30	0.5964	21.51	78	1.418	48.39	126	2.240	71.65
31	0.6136	22.09	79	1.435	48.91	127	2.257	72.10
32	0.6307	22.68	80	1.452	49.43	128	2.274	72.55
33	0.6478	23.26	81	1.470	49.95	129	2.291	72.99
34	0.6649	23.84	82	1.487	50.46	130	2.308	73.43
35	0.6820	24.42	83	1.504	50.98	131	2.325	73.87
36	0.6992	25.00	84	1.521	51.49	132	2.343	74.31
37	0.7163	25.58	85	1.538	52.00	133	2.360	74.75
38	0.7334	26.15	86	1.555	52.51	134	2.377	75.19
39	0.7505	26.73	87	1.572	53.02	135	2.394	75.62
40	0.7676	27.30	88	1.589	53.52	136	2.411	76.06
41	0.7848	27.87	89	1.606	54.03	137	2.428	76.49
42	0.8019	28.43	90	1.624	54.53	138	2.445	76.92
43	0.8190	29.00	91	1.641	55.04	139	2.462	77.35
44	0.8361	29.56	92	1.658	55.54	140	2.480	77.78
45	0.8532	30.13	93	1.675	56.03	141	2.497	78.20
46	0.8703	30.69	94	1.692	56.53	142	2.514	78.63
47	0.8875	31.25	95	1.709	57.03	143	2.531	79.05
48	0.9046	31.81	96	1.726	57.52	144	2.548	79.47

f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 500 kg/cm^2			ρ_b = 3.639%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.757	49	0.9827	34.89	97	1.865	62.39
2	0.1184	4.442	50	1.001	35.50	98	1.884	62.92
3	0.1368	5.127	51	1.019	36.11	99	1.902	63.45
4	0.1552	5.809	52	1.038	36.72	100	1.920	63.98
5	0.1736	6.490	53	1.056	37.32	101	1.939	64.51
6	0.1919	7.169	54	1.075	37.92	102	1.957	65.04
7	0.2103	7.847	55	1.093	38.53	103	1.976	65.57
8	0.2287	8.524	56	1.111	39.13	104	1.994	66.09
9	0.2471	9.198	57	1.130	39.73	105	2.012	66.61
10	0.2655	9.871	58	1.148	40.32	106	2.031	67.14
11	0.2839	10.54	59	1.167	40.92	107	2.049	67.66
12	0.3023	11.21	60	1.185	41.51	108	2.068	68.17
13	0.3207	11.88	61	1.203	42.11	109	2.086	68.69
14	0.3391	12.55	62	1.222	42.70	110	2.104	69.21
15	0.3574	13.21	63	1.240	43.29	111	2.123	69.72
16	0.3758	13.88	64	1.258	43.87	112	2.141	70.23
17	0.3942	14.54	65	1.277	44.46	113	2.160	70.74
18	0.4126	15.20	66	1.295	45.04	114	2.178	71.25
19	0.4310	15.86	67	1.314	45.63	115	2.196	71.76
20	0.4494	16.52	68	1.332	46.21	116	2.215	72.26
21	0.4678	17.17	69	1.350	46.79	117	2.233	72.77
22	0.4862	17.83	70	1.369	47.37	118	2.251	73.27
23	0.5046	18.48	71	1.387	47.94	119	2.270	73.77
24	0.5229	19.13	72	1.406	48.52	120	2.288	74.27
25	0.5413	19.78	73	1.424	49.09	121	2.307	74.77
26	0.5597	20.43	74	1.442	49.66	122	2.325	75.27
27	0.5781	21.07	75	1.461	50.24	123	2.343	75.76
28	0.5965	21.72	76	1.479	50.80	124	2.362	76.25
29	0.6149	22.36	77	1.498	51.37	125	2.380	76.74
30	0.6333	23.00	78	1.516	51.94	126	2.399	77.23
31	0.6517	23.64	79	1.534	52.50	127	2.417	77.72
32	0.6701	24.28	80	1.553	53.06	128	2.435	78.21
33	0.6884	24.92	81	1.571	53.62	129	2.454	78.70
34	0.7068	25.55	82	1.589	54.18	130	2.472	79.18
35	0.7252	26.19	83	1.608	54.74	131	2.491	79.66
36	0.7436	26.82	84	1.626	55.30	132	2.509	80.14
37	0.7620	27.45	85	1.645	55.85	133	2.527	80.62
38	0.7804	28.08	86	1.663	56.41	134	2.546	81.10
39	0.7988	28.70	87	1.681	56.96	135	2.564	81.57
40	0.8172	29.33	88	1.700	57.51	136	2.582	82.05
41	0.8356	29.95	89	1.718	58.06	137	2.601	82.52
42	0.8539	30.58	90	1.737	58.60	138	2.619	82.99
43	0.8723	31.20	91	1.755	59.15	139	2.638	83.46
44	0.8907	31.82	92	1.773	59.69	140	2.656	83.93
45	0.9091	32.43	93	1.792	60.23	141	2.674	84.39
46	0.9275	33.05	94	1.810	60.77	142	2.693	84.86
47	0.9459	33.67	95	1.829	61.31	143	2.711	85.32
48	0.9643	34.28	96	1.847	61.85	144	2.7296	85.78

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 550 kg/cm^2			ρ_b = 3.853%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.759	49	1.037	36.90	97	1.973	66.32
2	0.1195	4.487	50	1.056	37.55	98	1.993	66.90
3	0.1390	5.214	51	1.076	38.20	99	2.012	67.47
4	0.1585	5.939	52	1.095	38.85	100	2.032	68.04
5	0.1781	6.663	53	1.115	39.50	101	2.051	68.61
6	0.1976	7.385	54	1.134	40.14	102	2.071	69.17
7	0.2171	8.105	55	1.154	40.78	103	2.090	69.74
8	0.2366	8.824	56	1.173	41.43	104	2.110	70.30
9	0.2561	9.541	57	1.193	42.06	105	2.129	70.86
10	0.2756	10.26	58	1.212	42.70	106	2.149	71.43
11	0.2951	10.97	59	1.232	43.34	107	2.168	71.98
12	0.3146	11.68	60	1.251	43.97	108	2.188	72.54
13	0.3342	12.39	61	1.271	44.61	109	2.207	73.10
14	0.3537	13.10	62	1.290	45.24	110	2.227	73.65
15	0.3732	13.81	63	1.310	45.87	111	2.246	74.20
16	0.3927	14.52	64	1.329	46.50	112	2.266	74.75
17	0.4122	15.22	65	1.349	47.12	113	2.285	75.30
18	0.4317	15.92	66	1.368	47.75	114	2.305	75.85
19	0.4512	16.62	67	1.388	48.37	115	2.324	76.40
20	0.4707	17.32	68	1.407	48.99	116	2.344	76.94
21	0.4903	18.02	69	1.427	49.61	117	2.363	77.48
22	0.5098	18.72	70	1.446	50.23	118	2.383	78.02
23	0.5293	19.41	71	1.466	50.85	119	2.402	78.56
24	0.5488	20.11	72	1.485	51.46	120	2.422	79.10
25	0.5683	20.80	73	1.505	52.08	121	2.442	79.64
26	0.5878	21.49	74	1.524	52.69	122	2.461	80.17
27	0.6073	22.17	75	1.544	53.30	123	2.481	80.70
28	0.6268	22.86	76	1.563	53.91	124	2.500	81.24
29	0.6464	23.55	77	1.583	54.52	125	2.520	81.77
30	0.6659	24.23	78	1.602	55.12	126	2.539	82.29
31	0.6854	24.91	79	1.622	55.73	127	2.559	82.82
32	0.7049	25.59	80	1.641	56.33	128	2.578	83.34
33	0.7244	26.27	81	1.661	56.93	129	2.598	83.87
34	0.7439	26.95	82	1.681	57.53	130	2.617	84.39
35	0.7634	27.62	83	1.700	58.13	131	2.637	84.91
36	0.7829	28.29	84	1.720	58.72	132	2.656	85.43
37	0.8025	28.97	85	1.739	59.32	133	2.676	85.94
38	0.8220	29.64	86	1.759	59.91	134	2.695	86.46
39	0.8415	30.30	87	1.778	60.50	135	2.715	86.97
40	0.8610	30.97	88	1.798	61.09	136	2.734	87.49
41	0.8805	31.64	89	1.817	61.68	137	2.754	88.00
42	0.9000	32.30	90	1.837	62.26	138	2.773	88.50
43	0.9195	32.96	91	1.856	62.85	139	2.793	89.01
44	0.9390	33.62	92	1.876	63.43	140	2.812	89.52
45	0.9586	34.28	93	1.895	64.01	141	2.832	90.02
46	0.9781	34.94	94	1.915	64.59	142	2.851	90.52
47	0.9976	35.60	95	1.934	65.17	143	2.871	91.02
48	1.017	36.25	96	1.954	65.75	144	2.890	91.52

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 600 kg/cm^2			ρ_b = 4.0408%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.761	49	1.084	38.68	97	2.067	69.83
2	0.1205	4.526	50	1.104	39.37	98	2.088	70.44
3	0.1410	5.291	51	1.125	40.05	99	2.108	71.05
4	0.1615	6.053	52	1.145	40.74	100	2.129	71.65
5	0.1820	6.814	53	1.166	41.42	101	2.149	72.26
6	0.2025	7.574	54	1.186	42.10	102	2.170	72.86
7	0.2230	8.331	55	1.207	42.78	103	2.190	73.46
8	0.2435	9.087	56	1.227	43.46	104	2.211	74.06
9	0.2639	9.842	57	1.248	44.13	105	2.231	74.66
10	0.2844	10.59	58	1.268	44.81	106	2.252	75.25
11	0.3049	11.35	59	1.289	45.48	107	2.272	75.85
12	0.3254	12.10	60	1.309	46.15	108	2.293	76.44
13	0.3459	12.84	61	1.330	46.82	109	2.313	77.03
14	0.3664	13.59	62	1.350	47.49	110	2.334	77.62
15	0.3869	14.33	63	1.371	48.15	111	2.354	78.21
16	0.4074	15.08	64	1.391	48.82	112	2.375	78.79
17	0.4279	15.82	65	1.412	49.48	113	2.395	79.38
18	0.4484	16.56	66	1.432	50.14	114	2.416	79.96
19	0.4689	17.30	67	1.453	50.80	115	2.436	80.54
20	0.4894	18.03	68	1.473	51.46	116	2.457	81.12
21	0.5099	18.77	69	1.494	52.12	117	2.477	81.70
22	0.5304	19.50	70	1.514	52.77	118	2.498	82.28
23	0.5509	20.23	71	1.535	53.42	119	2.518	82.85
24	0.5714	20.96	72	1.555	54.08	120	2.539	83.42
25	0.5918	21.69	73	1.576	54.73	121	2.559	84.00
26	0.6123	22.42	74	1.596	55.37	122	2.580	84.57
27	0.6328	23.14	75	1.617	56.02	123	2.600	85.13
28	0.6533	23.87	76	1.637	56.67	124	2.621	85.70
29	0.6738	24.59	77	1.658	57.31	125	2.641	86.27
30	0.6943	25.31	78	1.678	57.95	126	2.662	86.83
31	0.7148	26.03	79	1.699	58.59	127	2.682	87.39
32	0.7353	26.74	80	1.719	59.23	128	2.703	87.95
33	0.7558	27.46	81	1.739	59.87	129	2.723	88.51
34	0.7763	28.17	82	1.760	60.50	130	2.744	89.07
35	0.7968	28.88	83	1.780	61.13	131	2.764	89.62
36	0.8173	29.59	84	1.801	61.77	132	2.785	90.17
37	0.8378	30.30	85	1.821	62.40	133	2.805	90.73
38	0.8583	31.01	86	1.842	63.03	134	2.826	91.28
39	0.8788	31.71	87	1.862	63.65	135	2.846	91.82
40	0.8993	32.42	88	1.883	64.28	136	2.867	92.37
41	0.9197	33.12	89	1.903	64.90	137	2.887	92.92
42	0.9402	33.82	90	1.924	65.52	138	2.908	93.46
43	0.9607	34.52	91	1.944	66.14	139	2.928	94.00
44	0.9812	35.22	92	1.965	66.76	140	2.949	94.54
45	1.002	35.91	93	1.985	67.38	141	2.969	95.08
46	1.022	36.61	94	2.006	68.00	142	2.990	95.62
47	1.043	37.30	95	2.026	68.61	143	3.010	96.15
48	1.063	37.99	96	2.047	69.22	144	3.031	96.69

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 650 kg/cm^2			ρ_b = 4.200%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.762	49	1.124	40.22	97	2.148	72.90
2	0.1213	4.560	50	1.145	40.94	98	2.169	73.55
3	0.1427	5.356	51	1.167	41.65	99	2.191	74.19
4	0.1640	6.151	52	1.188	42.37	100	2.212	74.82
5	0.1853	6.944	53	1.209	43.08	101	2.233	75.46
6	0.2067	7.735	54	1.231	43.80	102	2.255	76.09
7	0.2280	8.525	55	1.252	44.51	103	2.276	76.73
8	0.2493	9.313	56	1.273	45.22	104	2.297	77.36
9	0.2707	10.10	57	1.295	45.93	105	2.319	77.99
10	0.2920	10.88	58	1.316	46.63	106	2.340	78.61
11	0.3133	11.67	59	1.337	47.34	107	2.361	79.24
12	0.3347	12.45	60	1.359	48.04	108	2.383	79.87
13	0.3560	13.23	61	1.380	48.74	109	2.404	80.49
14	0.3773	14.01	62	1.401	49.44	110	2.425	81.11
15	0.3987	14.78	63	1.423	50.14	111	2.447	81.73
16	0.4200	15.56	64	1.444	50.84	112	2.468	82.35
17	0.4413	16.33	65	1.465	51.53	113	2.489	82.96
18	0.4626	17.10	66	1.487	52.22	114	2.511	83.58
19	0.4840	17.87	67	1.508	52.92	115	2.532	84.19
20	0.5053	18.64	68	1.529	53.61	116	2.553	84.80
21	0.5266	19.41	69	1.551	54.29	117	2.575	85.41
22	0.5480	20.17	70	1.572	54.98	118	2.596	86.02
23	0.5693	20.94	71	1.593	55.67	119	2.617	86.63
24	0.5906	21.70	72	1.615	56.35	120	2.639	87.23
25	0.6120	22.46	73	1.636	57.03	121	2.660	87.84
26	0.6333	23.22	74	1.657	57.71	122	2.681	88.44
27	0.6546	23.98	75	1.679	58.39	123	2.703	89.04
28	0.6760	24.73	76	1.700	59.07	124	2.724	89.64
29	0.6973	25.48	77	1.721	59.74	125	2.745	90.23
30	0.7186	26.24	78	1.743	60.42	126	2.767	90.83
31	0.7400	26.99	79	1.764	61.09	127	2.788	91.42
32	0.7613	27.74	80	1.785	61.76	128	2.809	92.01
33	0.7826	28.48	81	1.807	62.43	129	2.831	92.60
34	0.8040	29.23	82	1.828	63.09	130	2.852	93.19
35	0.8253	29.97	83	1.849	63.76	131	2.873	93.78
36	0.8466	30.72	84	1.871	64.42	132	2.895	94.37
37	0.8680	31.46	85	1.892	65.09	133	2.916	94.95
38	0.8893	32.19	86	1.913	65.75	134	2.937	95.53
39	0.9106	32.93	87	1.935	66.41	135	2.959	96.11
40	0.9320	33.67	88	1.956	67.06	136	2.980	96.69
41	0.9533	34.40	89	1.977	67.72	137	3.001	97.27
42	0.9746	35.13	90	1.999	68.37	138	3.023	97.84
43	0.9960	35.87	91	2.020	69.02	139	3.044	98.42
44	1.017	36.59	92	2.041	69.68	140	3.065	98.99
45	1.039	37.32	93	2.063	70.32	141	3.087	99.56
46	1.060	38.05	94	2.084	70.97	142	3.108	100.1
47	1.081	38.77	95	2.105	71.62	143	3.129	100.7
48	1.103	39.50	96	2.127	72.26	144	3.151	101.3

	f_y = 4200 kg/cm^2			f'_c = 700 kg/cm^2			ρ_b = 4.333%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	3.763	49	1.157	41.51	97	2.215	75.54
2	0.1220	4.588	50	1.179	42.26	98	2.237	76.20
3	0.1441	5.411	51	1.201	43.01	99	2.259	76.87
4	0.1661	6.232	52	1.223	43.75	100	2.281	77.54
5	0.1881	7.052	53	1.245	44.49	101	2.303	78.20
6	0.2101	7.870	54	1.267	45.23	102	2.325	78.87
7	0.2322	8.686	55	1.290	45.97	103	2.347	79.53
8	0.2542	9.501	56	1.312	46.71	104	2.369	80.19
9	0.2762	10.31	57	1.334	47.44	105	2.391	80.84
10	0.2983	11.13	58	1.356	48.18	106	2.413	81.50
11	0.3203	11.94	59	1.378	48.91	107	2.435	82.15
12	0.3423	12.74	60	1.400	49.64	108	2.457	82.81
13	0.3643	13.55	61	1.422	50.37	109	2.479	83.46
14	0.3864	14.36	62	1.444	51.10	110	2.501	84.11
15	0.4084	15.16	63	1.466	51.82	111	2.523	84.76
16	0.4304	15.96	64	1.488	52.55	112	2.545	85.40
17	0.4524	16.76	65	1.510	53.27	113	2.567	86.05
18	0.4745	17.56	66	1.532	53.99	114	2.589	86.69
19	0.4965	18.36	67	1.554	54.71	115	2.611	87.33
20	0.5185	19.15	68	1.576	55.43	116	2.633	87.97
21	0.5406	19.95	69	1.598	56.14	117	2.655	88.61
22	0.5626	20.74	70	1.620	56.86	118	2.677	89.25
23	0.5846	21.53	71	1.642	57.57	119	2.699	89.88
24	0.6066	22.32	72	1.664	58.28	120	2.721	90.52
25	0.6287	23.10	73	1.686	58.99	121	2.743	91.15
26	0.6507	23.89	74	1.708	59.70	122	2.765	91.78
27	0.6727	24.67	75	1.730	60.41	123	2.787	92.41
28	0.6948	25.46	76	1.752	61.11	124	2.809	93.03
29	0.7168	26.24	77	1.774	61.81	125	2.831	93.66
30	0.7388	27.02	78	1.796	62.51	126	2.853	94.28
31	0.7608	27.79	79	1.818	63.21	127	2.876	94.91
32	0.7829	28.57	80	1.840	63.91	128	2.898	95.53
33	0.8049	29.34	81	1.862	64.61	129	2.920	96.15
34	0.8269	30.12	82	1.884	65.30	130	2.942	96.76
35	0.8490	30.89	83	1.906	66.00	131	2.964	97.38
36	0.8710	31.66	84	1.928	66.69	132	2.986	97.99
37	0.8930	32.43	85	1.950	67.38	133	3.008	98.60
38	0.9150	33.19	86	1.972	68.07	134	3.030	99.22
39	0.9371	33.96	87	1.994	68.76	135	3.052	99.82
40	0.9591	34.72	88	2.016	69.44	136	3.074	100.4
41	0.9811	35.48	89	2.038	70.12	137	3.096	101.0
42	1.003	36.24	90	2.060	70.81	138	3.118	101.6
43	1.025	37.00	91	2.083	71.49	139	3.140	102.2
44	1.047	37.76	92	2.105	72.17	140	3.162	102.8
45	1.069	38.51	93	2.127	72.84	141	3.184	103.4
46	1.091	39.26	94	2.149	73.52	142	3.206	104.0
47	1.113	40.02	95	2.171	74.19	143	3.228	104.6
48	1.135	40.77	96	2.193	74.86	144	3.250	105.2

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 200 kg/cm^2			ρ_b = 0.9622%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.281	49	0.3088	15.54	97	0.5176	24.76
2	0.1043	5.505	50	0.3131	15.74	98	0.5219	24.94
3	0.1087	5.729	51	0.3175	15.94	99	0.5263	25.12
4	0.1130	5.952	52	0.3218	16.15	100	0.5306	25.30
5	0.1174	6.175	53	0.3262	16.35	101	0.5350	25.48
6	0.1217	6.398	54	0.3305	16.55	102	0.5393	25.66
7	0.1261	6.620	55	0.3349	16.75	103	0.5437	25.84
8	0.1304	6.841	56	0.3392	16.95	104	0.5480	26.02
9	0.1348	7.063	57	0.3436	17.15	105	0.5524	26.19
10	0.1391	7.283	58	0.3479	17.35	106	0.5567	26.37
11	0.1435	7.504	59	0.3523	17.54	107	0.5611	26.55
12	0.1478	7.723	60	0.3566	17.74	108	0.5654	26.72
13	0.1522	7.943	61	0.3610	17.94	109	0.5698	26.90
14	0.1565	8.162	62	0.3653	18.14	110	0.5741	27.08
15	0.1609	8.380	63	0.3697	18.33	111	0.5785	27.25
16	0.1652	8.598	64	0.3740	18.53	112	0.5828	27.43
17	0.1696	8.815	65	0.3784	18.73	113	0.5872	27.60
18	0.1739	9.033	66	0.3827	18.92	114	0.5915	27.77
19	0.1783	9.249	67	0.3871	19.12	115	0.5959	27.95
20	0.1826	9.465	68	0.3914	19.31	116	0.6002	28.12
21	0.1870	9.681	69	0.3958	19.51	117	0.6046	28.29
22	0.1913	9.896	70	0.4001	19.70	118	0.6089	28.46
23	0.1957	10.11	71	0.4045	19.89	119	0.6133	28.64
24	0.2000	10.33	72	0.4088	20.09	120	0.6176	28.81
25	0.2044	10.54	73	0.4132	20.28	121	0.6220	28.98
26	0.2087	10.75	74	0.4175	20.47	122	0.6263	29.15
27	0.2131	10.97	75	0.4219	20.66	123	0.6307	29.32
28	0.2174	11.18	76	0.4262	20.85	124	0.6350	29.49
29	0.2218	11.39	77	0.4306	21.04	125	0.6394	29.66
30	0.2261	11.60	78	0.4349	21.23	126	0.6437	29.82
31	0.2305	11.81	79	0.4393	21.42	127	0.6481	29.99
32	0.2348	12.02	80	0.4436	21.61	128	0.6524	30.16
33	0.2392	12.23	81	0.4480	21.80	129	0.6568	30.33
34	0.2435	12.44	82	0.4523	21.99	130	0.6611	30.49
35	0.2479	12.65	83	0.4567	22.18	131	0.6655	30.66
36	0.2522	12.86	84	0.4610	22.36	132	0.6698	30.83
37	0.2566	13.07	85	0.4654	22.55	133	0.6742	30.99
38	0.2609	13.28	86	0.4697	22.74	134	0.6785	31.16
39	0.2653	13.49	87	0.4741	22.92	135	0.6829	31.32
40	0.2696	13.69	88	0.4784	23.11	136	0.6872	31.48
41	0.2740	13.90	89	0.4828	23.29	137	0.6916	31.65
42	0.2783	14.11	90	0.4871	23.48	138	0.6959	31.81
43	0.2827	14.31	91	0.4915	23.66	139	0.7003	31.97
44	0.2870	14.52	92	0.4958	23.85	140	0.7046	32.13
45	0.2914	14.72	93	0.5002	24.03	141	0.7090	32.30
46	0.2957	14.93	94	0.5045	24.21	142	0.7133	32.46
47	0.3001	15.13	95	0.5089	24.39	143	0.7177	32.62
48	0.3044	15.34	96	0.5132	24.58	144	0.7220	32.78

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 250 kg/cm^2			ρ_b = 1.202%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.305	49	0.3692	18.64	97	0.6384	30.59
2	0.1056	5.597	50	0.3748	18.90	98	0.6440	30.82
3	0.1112	5.888	51	0.3804	19.16	99	0.6496	31.06
4	0.1168	6.178	52	0.3860	19.43	100	0.6552	31.29
5	0.1224	6.469	53	0.3916	19.69	101	0.6608	31.52
6	0.1280	6.758	54	0.3972	19.95	102	0.6664	31.76
7	0.1337	7.047	55	0.4029	20.21	103	0.6721	31.99
8	0.1393	7.335	56	0.4085	20.47	104	0.6777	32.22
9	0.1449	7.623	57	0.4141	20.73	105	0.6833	32.45
10	0.1505	7.910	58	0.4197	20.98	106	0.6889	32.68
11	0.1561	8.196	59	0.4253	21.24	107	0.6945	32.91
12	0.1617	8.482	60	0.4309	21.50	108	0.7001	33.13
13	0.1673	8.768	61	0.4365	21.76	109	0.7057	33.36
14	0.1729	9.052	62	0.4421	22.01	110	0.7113	33.59
15	0.1785	9.336	63	0.4477	22.27	111	0.7169	33.82
16	0.1841	9.620	64	0.4533	22.52	112	0.7225	34.04
17	0.1897	9.903	65	0.4589	22.78	113	0.7281	34.27
18	0.1953	10.18	66	0.4645	23.03	114	0.7337	34.49
19	0.2010	10.47	67	0.4702	23.28	115	0.7394	34.72
20	0.2066	10.75	68	0.4758	23.53	116	0.7450	34.94
21	0.2122	11.03	69	0.4814	23.79	117	0.7506	35.16
22	0.2178	11.31	70	0.4870	24.04	118	0.7562	35.38
23	0.2234	11.59	71	0.4926	24.29	119	0.7618	35.61
24	0.2290	11.87	72	0.4982	24.54	120	0.7674	35.83
25	0.2346	12.14	73	0.5038	24.79	121	0.7730	36.05
26	0.2402	12.42	74	0.5094	25.04	122	0.7786	36.27
27	0.2458	12.70	75	0.5150	25.28	123	0.7842	36.49
28	0.2514	12.97	76	0.5206	25.53	124	0.7898	36.71
29	0.2570	13.25	77	0.5262	25.78	125	0.7954	36.92
30	0.2626	13.53	78	0.5318	26.02	126	0.8010	37.14
31	0.2683	13.80	79	0.5375	26.27	127	0.8067	37.36
32	0.2739	14.07	80	0.5431	26.51	128	0.8123	37.58
33	0.2795	14.35	81	0.5487	26.76	129	0.8179	37.79
34	0.2851	14.62	82	0.5543	27.00	130	0.8235	38.01
35	0.2907	14.89	83	0.5599	27.25	131	0.8291	38.22
36	0.2963	15.16	84	0.5655	27.49	132	0.8347	38.43
37	0.3019	15.43	85	0.5711	27.73	133	0.8403	38.65
38	0.3075	15.70	86	0.5767	27.97	134	0.8459	38.86
39	0.3131	15.97	87	0.5823	28.21	135	0.8515	39.07
40	0.3187	16.24	88	0.5879	28.45	136	0.8571	39.28
41	0.3243	16.51	89	0.5935	28.69	137	0.8627	39.50
42	0.3299	16.78	90	0.5991	28.93	138	0.8683	39.71
43	0.3356	17.05	91	0.6048	29.17	139	0.8740	39.92
44	0.3412	17.31	92	0.6104	29.41	140	0.8796	40.12
45	0.3468	17.58	93	0.6160	29.65	141	0.8852	40.33
46	0.3524	17.85	94	0.6216	29.88	142	0.8908	40.54
47	0.3580	18.11	95	0.6272	30.12	143	0.8964	40.75
48	0.3636	18.37	96	0.6328	30.36	144	0.9020	40.95

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 300 kg/cm^2			ρ_b = 1.443%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.321	49	0.4296	21.73	97	0.7592	36.42
2	0.1069	5.680	50	0.4365	22.06	98	0.7661	36.71
3	0.1137	6.039	51	0.4434	22.38	99	0.7730	37.00
4	0.1206	6.397	52	0.4502	22.70	100	0.7798	37.28
5	0.1275	6.754	53	0.4571	23.02	101	0.7867	37.57
6	0.1343	7.111	54	0.4640	23.34	102	0.7936	37.85
7	0.1412	7.467	55	0.4708	23.66	103	0.8004	38.14
8	0.1481	7.822	56	0.4777	23.98	104	0.8073	38.42
9	0.1549	8.176	57	0.4846	24.30	105	0.8142	38.70
10	0.1618	8.530	58	0.4914	24.62	106	0.8210	38.98
11	0.1687	8.882	59	0.4983	24.94	107	0.8279	39.26
12	0.1755	9.234	60	0.5052	25.25	108	0.8348	39.54
13	0.1824	9.586	61	0.5120	25.57	109	0.8417	39.82
14	0.1893	9.936	62	0.5189	25.88	110	0.8485	40.10
15	0.1961	10.29	63	0.5258	26.20	111	0.8554	40.38
16	0.203	10.64	64	0.5326	26.51	112	0.8623	40.66
17	0.2099	10.98	65	0.5395	26.82	113	0.8691	40.93
18	0.2167	11.33	66	0.5464	27.13	114	0.8760	41.21
19	0.2236	11.68	67	0.5532	27.44	115	0.8829	41.48
20	0.2305	12.02	68	0.5601	27.75	116	0.8897	41.76
21	0.2373	12.37	69	0.5670	28.06	117	0.8966	42.03
22	0.2442	12.71	70	0.5738	28.37	118	0.9035	42.30
23	0.2511	13.06	71	0.5807	28.68	119	0.9103	42.58
24	0.2579	13.40	72	0.5876	28.99	120	0.9172	42.85
25	0.2648	13.74	73	0.5944	29.29	121	0.9241	43.12
26	0.2717	14.08	74	0.6013	29.60	122	0.9309	43.39
27	0.2785	14.43	75	0.6082	29.90	123	0.9378	43.66
28	0.2854	14.77	76	0.6150	30.21	124	0.9447	43.92
29	0.2923	15.10	77	0.6219	30.51	125	0.9515	44.19
30	0.2991	15.44	78	0.6288	30.81	126	0.9584	44.46
31	0.306	15.78	79	0.6356	31.12	127	0.9653	44.72
32	0.3129	16.12	80	0.6425	31.42	128	0.9721	44.99
33	0.3197	16.45	81	0.6494	31.72	129	0.9790	45.25
34	0.3266	16.79	82	0.6562	32.02	130	0.9859	45.52
35	0.3335	17.12	83	0.6631	32.32	131	0.9927	45.78
36	0.3403	17.46	84	0.6700	32.61	132	0.9996	46.04
37	0.3472	17.79	85	0.6768	32.91	133	1.0060	46.30
38	0.3541	18.12	86	0.6837	33.21	134	1.0130	46.57
39	0.361	18.46	87	0.6906	33.50	135	1.0200	46.83
40	0.3678	18.79	88	0.6974	33.80	136	1.0270	47.08
41	0.3747	19.12	89	0.7043	34.09	137	1.0340	47.34
42	0.3816	19.45	90	0.7112	34.39	138	1.0410	47.60
43	0.3884	19.78	91	0.7180	34.68	139	1.0480	47.86
44	0.3953	20.10	92	0.7249	34.97	140	1.0550	48.11
45	0.4022	20.43	93	0.7318	35.26	141	1.0610	48.37
46	0.409	20.76	94	0.7386	35.55	142	1.0680	48.62
47	0.4159	21.08	95	0.7455	35.84	143	1.0750	48.88
48	0.4228	21.41	96	0.7524	36.13	144	1.0820	49.13

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 350 kg/cm^2			ρ_b = 1.683%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.332	49	0.4904	24.84	97	0.881	42.28
2	0.1081	5.760	50	0.4985	25.23	98	0.889	42.62
3	0.1163	6.186	51	0.5066	25.61	99	0.897	42.96
4	0.1244	6.612	52	0.5148	25.99	100	0.905	43.30
5	0.1325	7.037	53	0.5229	26.38	101	0.913	43.64
6	0.1407	7.461	54	0.5310	26.76	102	0.921	43.98
7	0.1488	7.884	55	0.5392	27.14	103	0.930	44.31
8	0.1569	8.307	56	0.5473	27.52	104	0.938	44.65
9	0.1651	8.728	57	0.5554	27.89	105	0.946	44.99
10	0.1732	9.148	58	0.5636	28.27	106	0.954	45.32
11	0.1813	9.568	59	0.5717	28.65	107	0.962	45.65
12	0.1895	9.987	60	0.5798	29.02	108	0.970	45.98
13	0.1976	10.40	61	0.5880	29.40	109	0.978	46.32
14	0.2057	10.82	62	0.5961	29.77	110	0.986	46.65
15	0.2139	11.24	63	0.6042	30.14	111	0.995	46.98
16	0.2220	11.65	64	0.6124	30.52	112	1.003	47.30
17	0.2301	12.07	65	0.6205	30.89	113	1.011	47.63
18	0.2383	12.48	66	0.6286	31.26	114	1.019	47.96
19	0.2464	12.89	67	0.6368	31.63	115	1.027	48.28
20	0.2545	13.30	68	0.6449	31.99	116	1.035	48.61
21	0.2627	13.71	69	0.6530	32.36	117	1.043	48.93
22	0.2708	14.12	70	0.6612	32.73	118	1.052	49.26
23	0.2789	14.53	71	0.6693	33.09	119	1.060	49.58
24	0.2871	14.94	72	0.6774	33.46	120	1.068	49.90
25	0.2952	15.35	73	0.6856	33.82	121	1.076	50.22
26	0.3033	15.75	74	0.6937	34.18	122	1.084	50.54
27	0.3115	16.16	75	0.7018	34.55	123	1.092	50.86
28	0.3196	16.56	76	0.7100	34.91	124	1.100	51.18
29	0.3277	16.97	77	0.7181	35.27	125	1.108	51.49
30	0.3359	17.37	78	0.7262	35.63	126	1.117	51.81
31	0.3440	17.77	79	0.7344	35.98	127	1.125	52.13
32	0.3521	18.17	80	0.7425	36.34	128	1.133	52.44
33	0.3603	18.57	81	0.7506	36.70	129	1.141	52.75
34	0.3684	18.97	82	0.7588	37.05	130	1.149	53.07
35	0.3765	19.37	83	0.7669	37.41	131	1.157	53.38
36	0.3847	19.76	84	0.7750	37.76	132	1.165	53.69
37	0.3928	20.16	85	0.7832	38.12	133	1.174	54.00
38	0.4009	20.56	86	0.7913	38.47	134	1.182	54.31
39	0.4090	20.95	87	0.7994	38.82	135	1.190	54.61
40	0.4172	21.34	88	0.8076	39.17	136	1.198	54.92
41	0.4253	21.74	89	0.8157	39.52	137	1.206	55.23
42	0.4334	22.13	90	0.8238	39.87	138	1.214	55.53
43	0.4416	22.52	91	0.8320	40.21	139	1.222	55.84
44	0.4497	22.91	92	0.8401	40.56	140	1.230	56.14
45	0.4578	23.30	93	0.8482	40.91	141	1.239	56.44
46	0.4660	23.68	94	0.8564	41.25	142	1.247	56.74
47	0.4741	24.07	95	0.8645	41.60	143	1.255	57.04
48	0.4822	24.46	96	0.8726	41.94	144	1.263	57.34

	f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 400 kg/cm^2			ρ_b = 1.859%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.340	49	0.5347	27.17	97	0.9694	46.75
2	0.1091	5.818	50	0.5437	27.60	98	0.9784	47.13
3	0.1181	6.295	51	0.5528	28.03	99	0.9875	47.52
4	0.1272	6.771	52	0.5619	28.46	100	0.9965	47.90
5	0.1362	7.246	53	0.5709	28.89	101	1.006	48.28
6	0.1453	7.719	54	0.5800	29.31	102	1.015	48.66
7	0.1543	8.192	55	0.5890	29.74	103	1.024	49.04
8	0.1634	8.664	56	0.5981	30.17	104	1.033	49.42
9	0.1724	9.135	57	0.6071	30.59	105	1.042	49.79
10	0.1815	9.605	58	0.6162	31.01	106	1.051	50.17
11	0.1906	10.07	59	0.6252	31.43	107	1.060	50.55
12	0.1996	10.54	60	0.6343	31.86	108	1.069	50.92
13	0.2087	11.01	61	0.6434	32.28	109	1.078	51.29
14	0.2177	11.47	62	0.6524	32.70	110	1.087	51.66
15	0.2268	11.94	63	0.6615	33.11	111	1.096	52.04
16	0.2358	12.40	64	0.6705	33.53	112	1.105	52.41
17	0.2449	12.87	65	0.6796	33.95	113	1.114	52.78
18	0.2540	13.33	66	0.6886	34.36	114	1.123	53.14
19	0.2630	13.79	67	0.6977	34.78	115	1.132	53.51
20	0.2721	14.25	68	0.7067	35.19	116	1.141	53.88
21	0.2811	14.71	69	0.7158	35.60	117	1.150	54.24
22	0.2902	15.17	70	0.7249	36.01	118	1.160	54.61
23	0.2992	15.63	71	0.7339	36.42	119	1.169	54.97
24	0.3083	16.08	72	0.7430	36.83	120	1.178	55.33
25	0.3173	16.54	73	0.7520	37.24	121	1.187	55.69
26	0.3264	16.99	74	0.7611	37.65	122	1.196	56.06
27	0.3355	17.44	75	0.7701	38.05	123	1.205	56.41
28	0.3445	17.90	76	0.7792	38.46	124	1.214	56.77
29	0.3536	18.35	77	0.7883	38.86	125	1.223	57.13
30	0.3626	18.80	78	0.7973	39.27	126	1.232	57.49
31	0.3717	19.25	79	0.8064	39.67	127	1.241	57.84
32	0.3807	19.70	80	0.8154	40.07	128	1.250	58.20
33	0.3898	20.14	81	0.8245	40.47	129	1.259	58.55
34	0.3988	20.59	82	0.8335	40.87	130	1.268	58.90
35	0.4079	21.04	83	0.8426	41.27	131	1.277	59.26
36	0.4170	21.48	84	0.8516	41.67	132	1.286	59.61
37	0.4260	21.92	85	0.8607	42.07	133	1.295	59.96
38	0.4351	22.37	86	0.8698	42.46	134	1.304	60.31
39	0.4441	22.81	87	0.8788	42.86	135	1.313	60.65
40	0.4532	23.25	88	0.8879	43.25	136	1.323	61.00
41	0.4622	23.69	89	0.8969	43.64	137	1.332	61.35
42	0.4713	24.13	90	0.9060	44.03	138	1.341	61.69
43	0.4803	24.56	91	0.9150	44.43	139	1.350	62.03
44	0.4894	25.00	92	0.9241	44.81	140	1.359	62.38
45	0.4985	25.44	93	0.9331	45.20	141	1.368	62.72
46	0.5075	25.87	94	0.9422	45.59	142	1.377	63.06
47	0.5166	26.31	95	0.9513	45.98	143	1.386	63.40
48	0.5256	26.74	96	0.9603	46.36	144	1.395	63.74

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 450 kg/cm^2			ρ_b = 2019%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.347	49	0.5750	29.30	97	1.050	50.86
2	0.1099	5.870	50	0.5849	29.77	98	1.060	51.28
3	0.1198	6.393	51	0.5948	30.24	99	1.070	51.71
4	0.1297	6.914	52	0.6047	30.72	100	1.080	52.13
5	0.1396	7.434	53	0.6145	31.19	101	1.090	52.55
6	0.1495	7.953	54	0.6244	31.66	102	1.099	52.97
7	0.1594	8.472	55	0.6343	32.12	103	1.109	53.39
8	0.1693	8.989	56	0.6442	32.59	104	1.119	53.81
9	0.1792	9.505	57	0.6541	33.06	105	1.129	54.22
10	0.1891	10.02	58	0.6640	33.52	106	1.139	54.64
11	0.1990	10.53	59	0.6739	33.99	107	1.149	55.05
12	0.2088	11.05	60	0.6838	34.45	108	1.159	55.47
13	0.2187	11.56	61	0.6937	34.91	109	1.169	55.88
14	0.2286	12.07	62	0.7036	35.37	110	1.179	56.29
15	0.2385	12.58	63	0.7135	35.83	111	1.188	56.70
16	0.2484	13.09	64	0.7234	36.29	112	1.198	57.11
17	0.2583	13.60	65	0.7333	36.75	113	1.208	57.52
18	0.2682	14.10	66	0.7432	37.21	114	1.218	57.92
19	0.2781	14.61	67	0.7531	37.66	115	1.228	58.33
20	0.2880	15.11	68	0.7630	38.12	116	1.238	58.74
21	0.2979	15.62	69	0.7729	38.57	117	1.248	59.14
22	0.3078	16.12	70	0.7828	39.03	118	1.258	59.54
23	0.3177	16.62	71	0.7927	39.48	119	1.268	59.94
24	0.3276	17.12	72	0.8026	39.93	120	1.278	60.35
25	0.3375	17.62	73	0.8124	40.38	121	1.287	60.75
26	0.3474	18.12	74	0.8223	40.83	122	1.297	61.14
27	0.3573	18.62	75	0.8322	41.27	123	1.307	61.54
28	0.3672	19.11	76	0.8421	41.72	124	1.317	61.94
29	0.3771	19.61	77	0.8520	42.17	125	1.327	62.34
30	0.3870	20.10	78	0.8619	42.61	126	1.337	62.73
31	0.3969	20.60	79	0.8718	43.05	127	1.347	63.12
32	0.4067	21.09	80	0.8817	43.50	128	1.357	63.52
33	0.4166	21.58	81	0.8916	43.94	129	1.367	63.91
34	0.4265	22.07	82	0.9015	44.38	130	1.376	64.30
35	0.4364	22.56	83	0.9114	44.82	131	1.386	64.69
36	0.4463	23.05	84	0.9213	45.26	132	1.396	65.08
37	0.4562	23.53	85	0.9312	45.69	133	1.406	65.46
38	0.4661	24.02	86	0.9411	46.13	134	1.416	65.85
39	0.4760	24.51	87	0.9510	46.57	135	1.426	66.24
40	0.4859	24.99	88	0.9609	47.00	136	1.436	66.62
41	0.4958	25.47	89	0.9708	47.43	137	1.446	67.00
42	0.5057	25.95	90	0.9807	47.86	138	1.456	67.39
43	0.5156	26.43	91	0.9906	48.30	139	1.466	67.77
44	0.5255	26.91	92	1.000	48.73	140	1.475	68.15
45	0.5354	27.39	93	1.010	49.15	141	1.485	68.53
46	0.5453	27.87	94	1.020	49.58	142	1.495	68.91
47	0.5552	28.35	95	1.030	50.01	143	1.505	69.28
48	0.5651	28.82	96	1.040	50.44	144	1.515	69.66

	f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 500 kg/cm^2			ρ_b = 2.162%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.352	49	0.6109	31.21	97	1.122	54.59
2	0.1106	5.916	50	0.6216	31.73	98	1.133	55.05
3	0.1213	6.480	51	0.6322	32.24	99	1.143	55.51
4	0.1319	7.042	52	0.6429	32.75	100	1.154	55.96
5	0.1426	7.602	53	0.6535	33.26	101	1.164	56.42
6	0.1532	8.162	54	0.6642	33.76	102	1.175	56.88
7	0.1639	8.721	55	0.6748	34.27	103	1.186	57.33
8	0.1745	9.279	56	0.6855	34.78	104	1.196	57.79
9	0.1852	9.835	57	0.6961	35.28	105	1.207	58.24
10	0.1958	10.39	58	0.7068	35.78	106	1.218	58.69
11	0.2064	10.95	59	0.7174	36.29	107	1.228	59.14
12	0.2171	11.50	60	0.7280	36.79	108	1.239	59.59
13	0.2277	12.05	61	0.7387	37.29	109	1.250	60.04
14	0.2384	12.60	62	0.7493	37.79	110	1.260	60.49
15	0.2490	13.15	63	0.7600	38.29	111	1.271	60.93
16	0.2597	13.70	64	0.7706	38.78	112	1.282	61.38
17	0.2703	14.25	65	0.7813	39.28	113	1.292	61.82
18	0.2810	14.80	66	0.7919	39.78	114	1.303	62.27
19	0.2916	15.34	67	0.8026	40.27	115	1.314	62.71
20	0.3023	15.89	68	0.8132	40.76	116	1.324	63.15
21	0.3129	16.43	69	0.8238	41.25	117	1.335	63.59
22	0.3235	16.97	70	0.8345	41.74	118	1.345	64.03
23	0.3342	17.51	71	0.8451	42.23	119	1.356	64.47
24	0.3448	18.05	72	0.8558	42.72	120	1.367	64.90
25	0.3555	18.59	73	0.8664	43.21	121	1.377	65.34
26	0.3661	19.13	74	0.8771	43.70	122	1.388	65.77
27	0.3768	19.67	75	0.8877	44.18	123	1.399	66.21
28	0.3874	20.20	76	0.8984	44.67	124	1.409	66.64
29	0.3981	20.74	77	0.9090	45.15	125	1.420	67.07
30	0.4087	21.27	78	0.9196	45.63	126	1.431	67.50
31	0.4193	21.81	79	0.9303	46.11	127	1.441	67.93
32	0.4300	22.34	80	0.9409	46.59	128	1.452	68.36
33	0.4406	22.87	81	0.9516	47.07	129	1.463	68.78
34	0.4513	23.40	82	0.9622	47.55	130	1.473	69.21
35	0.4619	23.93	83	0.9729	48.03	131	1.484	69.64
36	0.4726	24.45	84	0.9835	48.50	132	1.494	70.06
37	0.4832	24.98	85	0.9942	48.98	133	1.505	70.48
38	0.4939	25.51	86	1.005	49.45	134	1.516	70.90
39	0.5045	26.03	87	1.015	49.92	135	1.526	71.32
40	0.5151	26.55	88	1.026	50.39	136	1.537	71.74
41	0.5258	27.08	89	1.037	50.86	137	1.548	72.16
42	0.5364	27.60	90	1.047	51.33	138	1.558	72.58
43	0.5471	28.12	91	1.058	51.80	139	1.569	73.00
44	0.5577	28.64	92	1.069	52.27	140	1.580	73.41
45	0.5684	29.15	93	1.079	52.73	141	1.590	73.82
46	0.5790	29.67	94	1.090	53.20	142	1.601	74.24
47	0.5897	30.18	95	1.101	53.66	143	1.612	74.65
48	0.6003	30.70	96	1.111	54.12	144	1.622	75.06

	f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 550 kg/cm^2			ρ_b = 2.290%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.357	49	0.6431	32.94	97	1.186	57.96
2	0.1113	5.957	50	0.6544	33.48	98	1.198	58.45
3	0.1226	6.557	51	0.6657	34.03	99	1.209	58.95
4	0.1339	7.155	52	0.6770	34.58	100	1.220	59.44
5	0.1453	7.753	53	0.6884	35.12	101	1.231	59.93
6	0.1566	8.349	54	0.6997	35.66	102	1.243	60.42
7	0.1679	8.944	55	0.7110	36.20	103	1.254	60.91
8	0.1792	9.538	56	0.7223	36.74	104	1.265	61.40
9	0.1905	10.13	57	0.7336	37.28	105	1.277	61.88
10	0.2018	10.72	58	0.7449	37.82	106	1.288	62.37
11	0.2131	11.31	59	0.7563	38.36	107	1.299	62.85
12	0.2245	11.90	60	0.7676	38.90	108	1.311	63.34
13	0.2358	12.49	61	0.7789	39.43	109	1.322	63.82
14	0.2471	13.08	62	0.7902	39.97	110	1.333	64.30
15	0.2584	13.66	63	0.8015	40.50	111	1.345	64.78
16	0.2697	14.25	64	0.8128	41.03	112	1.356	65.26
17	0.2810	14.83	65	0.8241	41.56	113	1.367	65.73
18	0.2923	15.42	66	0.8355	42.09	114	1.379	66.21
19	0.3037	16.00	67	0.8468	42.62	115	1.390	66.69
20	0.3150	16.58	68	0.8581	43.15	116	1.401	67.16
21	0.3263	17.16	69	0.8694	43.67	117	1.413	67.63
22	0.3376	17.74	70	0.8807	44.20	118	1.424	68.10
23	0.3489	18.31	71	0.8920	44.72	119	1.435	68.58
24	0.3602	18.89	72	0.9033	45.25	120	1.446	69.05
25	0.3716	19.47	73	0.9147	45.77	121	1.458	69.51
26	0.3829	20.04	74	0.9260	46.29	122	1.469	69.98
27	0.3942	20.61	75	0.9373	46.81	123	1.480	70.45
28	0.4055	21.18	76	0.9486	47.33	124	1.492	70.91
29	0.4168	21.76	77	0.9599	47.84	125	1.503	71.38
30	0.4281	22.32	78	0.9712	48.36	126	1.514	71.84
31	0.4394	22.89	79	0.9825	48.88	127	1.526	72.30
32	0.4508	23.46	80	0.9939	49.39	128	1.537	72.76
33	0.4621	24.03	81	1.005	49.90	129	1.548	73.22
34	0.4734	24.59	82	1.016	50.41	130	1.560	73.68
35	0.4847	25.16	83	1.028	50.93	131	1.571	74.14
36	0.4960	25.72	84	1.039	51.44	132	1.582	74.60
37	0.5073	26.28	85	1.050	51.94	133	1.594	75.05
38	0.5186	26.84	86	1.062	52.45	134	1.605	75.51
39	0.5300	27.40	87	1.073	52.96	135	1.616	75.96
40	0.5413	27.96	88	1.084	53.46	136	1.627	76.41
41	0.5526	28.52	89	1.096	53.97	137	1.639	76.86
42	0.5639	29.07	90	1.107	54.47	138	1.650	77.31
43	0.5752	29.63	91	1.118	54.97	139	1.661	77.76
44	0.5865	30.18	92	1.130	55.47	140	1.673	78.21
45	0.5978	30.74	93	1.141	55.97	141	1.684	78.65
46	0.6092	31.29	94	1.152	56.47	142	1.695	79.10
47	0.6205	31.84	95	1.164	56.97	143	1.707	79.54
48	0.6318	32.39	96	1.175	57.47	144	1.718	79.99

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 600 kg/cm^2			ρ_b = 2.401%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.360	49	0.6710	34.44	97	1.242	60.94
2	0.1119	5.993	50	0.6829	35.02	98	1.254	61.46
3	0.1238	6.624	51	0.6948	35.60	99	1.266	61.99
4	0.1357	7.254	52	0.7067	36.18	100	1.278	62.51
5	0.1476	7.883	53	0.7185	36.75	101	1.290	63.03
6	0.1595	8.511	54	0.7304	37.33	102	1.301	63.55
7	0.1714	9.137	55	0.7423	37.90	103	1.313	64.07
8	0.1833	9.763	56	0.7542	38.47	104	1.325	64.59
9	0.1952	10.39	57	0.7661	39.04	105	1.337	65.10
10	0.2071	11.01	58	0.7780	39.61	106	1.349	65.62
11	0.2190	11.63	59	0.7899	40.18	107	1.361	66.13
12	0.2308	12.25	60	0.8018	40.75	108	1.373	66.65
13	0.2427	12.87	61	0.8137	41.31	109	1.385	67.16
14	0.2546	13.49	62	0.8256	41.88	110	1.397	67.67
15	0.2665	14.11	63	0.8375	42.44	111	1.408	68.18
16	0.2784	14.73	64	0.8494	43.00	112	1.420	68.69
17	0.2903	15.34	65	0.8613	43.56	113	1.432	69.20
18	0.3022	15.96	66	0.8732	44.12	114	1.444	69.70
19	0.3141	16.57	67	0.8851	44.68	115	1.456	70.21
20	0.3260	17.18	68	0.8970	45.24	116	1.468	70.71
21	0.3379	17.79	69	0.9089	45.80	117	1.480	71.22
22	0.3498	18.40	70	0.9208	46.35	118	1.492	71.72
23	0.3617	19.01	71	0.9327	46.91	119	1.504	72.22
24	0.3736	19.62	72	0.9446	47.46	120	1.516	72.72
25	0.3855	20.23	73	0.9564	48.02	121	1.527	73.22
26	0.3974	20.83	74	0.9683	48.57	122	1.539	73.71
27	0.4093	21.44	75	0.9802	49.12	123	1.551	74.21
28	0.4212	22.04	76	0.9921	49.67	124	1.563	74.71
29	0.4331	22.64	77	1.004	50.21	125	1.575	75.20
30	0.4450	23.24	78	1.016	50.76	126	1.587	75.69
31	0.4569	23.84	79	1.028	51.31	127	1.599	76.18
32	0.4687	24.44	80	1.040	51.85	128	1.611	76.68
33	0.4806	25.04	81	1.052	52.40	129	1.623	77.17
34	0.4925	25.63	82	1.064	52.94	130	1.634	77.65
35	0.5044	26.23	83	1.075	53.48	131	1.646	78.14
36	0.5163	26.82	84	1.087	54.02	132	1.658	78.63
37	0.5282	27.42	85	1.099	54.56	133	1.670	79.11
38	0.5401	28.01	86	1.111	55.10	134	1.682	79.60
39	0.5520	28.60	87	1.123	55.63	135	1.694	80.08
40	0.5639	29.19	88	1.135	56.17	136	1.706	80.56
41	0.5758	29.78	89	1.147	56.70	137	1.718	81.04
42	0.5877	30.36	90	1.159	57.24	138	1.730	81.52
43	0.5996	30.95	91	1.171	57.77	139	1.742	82.00
44	0.6115	31.54	92	1.182	58.30	140	1.753	82.48
45	0.6234	32.12	93	1.194	58.83	141	1.765	82.95
46	0.6353	32.70	94	1.206	59.36	142	1.777	83.43
47	0.6472	33.28	95	1.218	59.89	143	1.789	83.90
48	0.6591	33.87	96	1.230	60.41	144	1.801	84.37

	f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 650 kg/cm^2			ρ_b = 2.496%	
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.363	49	0.6948	35.75	97	1.290	63.54
2	0.1124	6.023	50	0.7072	36.36	98	1.302	64.09
3	0.1248	6.681	51	0.7196	36.96	99	1.314	64.64
4	0.1372	7.338	52	0.7320	37.56	100	1.327	65.19
5	0.1496	7.995	53	0.7444	38.16	101	1.339	65.74
6	0.1620	8.650	54	0.7568	38.77	102	1.352	66.29
7	0.1743	9.303	55	0.7691	39.37	103	1.364	66.83
8	0.1867	9.956	56	0.7815	39.96	104	1.376	67.38
9	0.1991	10.61	57	0.7939	40.56	105	1.389	67.92
10	0.2115	11.26	58	0.8063	41.16	106	1.401	68.47
11	0.2239	11.91	59	0.8187	41.75	107	1.414	69.01
12	0.2363	12.56	60	0.8311	42.35	108	1.426	69.55
13	0.2487	13.20	61	0.8435	42.94	109	1.438	70.09
14	0.2611	13.85	62	0.8559	43.53	110	1.451	70.62
15	0.2735	14.49	63	0.8683	44.12	111	1.463	71.16
16	0.2859	15.14	64	0.8807	44.71	112	1.475	71.70
17	0.2983	15.78	65	0.8931	45.30	113	1.488	72.23
18	0.3107	16.42	66	0.9055	45.89	114	1.500	72.76
19	0.3230	17.06	67	0.9178	46.48	115	1.513	73.30
20	0.3354	17.70	68	0.9302	47.06	116	1.525	73.83
21	0.3478	18.34	69	0.9426	47.65	117	1.537	74.36
22	0.3602	18.98	70	0.9550	48.23	118	1.550	74.89
23	0.3726	19.61	71	0.9674	48.81	119	1.562	75.41
24	0.3850	20.25	72	0.9798	49.39	120	1.575	75.94
25	0.3974	20.88	73	0.9922	49.97	121	1.587	76.47
26	0.4098	21.51	74	1.005	50.55	122	1.599	76.99
27	0.4222	22.14	75	1.017	51.13	123	1.612	77.51
28	0.4346	22.77	76	1.029	51.70	124	1.624	78.04
29	0.4470	23.40	77	1.042	52.28	125	1.637	78.56
30	0.4594	24.03	78	1.054	52.85	126	1.649	79.08
31	0.4717	24.66	79	1.067	53.42	127	1.661	79.60
32	0.4841	25.28	80	1.079	54.00	128	1.674	80.11
33	0.4965	25.91	81	1.091	54.57	129	1.686	80.63
34	0.5089	26.53	82	1.104	55.14	130	1.699	81.15
35	0.5213	27.15	83	1.116	55.70	131	1.711	81.66
36	0.5337	27.78	84	1.129	56.27	132	1.723	82.17
37	0.5461	28.40	85	1.141	56.84	133	1.736	82.69
38	0.5585	29.02	86	1.153	57.40	134	1.748	83.20
39	0.5709	29.63	87	1.166	57.97	135	1.760	83.71
40	0.5833	30.25	88	1.178	58.53	136	1.773	84.21
41	0.5957	30.87	89	1.190	59.09	137	1.785	84.72
42	0.6081	31.48	90	1.203	59.65	138	1.798	85.23
43	0.6204	32.09	91	1.215	60.21	139	1.810	85.73
44	0.6328	32.71	92	1.228	60.77	140	1.822	86.24
45	0.6452	33.32	93	1.240	61.33	141	1.835	86.74
46	0.6576	33.93	94	1.252	61.88	142	1.847	87.24
47	0.6700	34.54	95	1.265	62.44	143	1.860	87.74
48	0.6824	35.14	96	1.277	62.99	144	1.872	88.24

f_y = 6000 kg/cm^2			f'_c = 700 kg/cm^2			ρ_b = 2.575%		
	ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)		ρ (%)	M_u/bd^2 (kg/cm^2)
1	0.1000	5.366	49	0.715	36.85	97	1.329	65.76
2	0.1128	6.048	50	0.727	37.48	98	1.342	66.34
3	0.1256	6.729	51	0.740	38.11	99	1.355	66.91
4	0.1384	7.409	52	0.753	38.73	100	1.368	67.49
5	0.1512	8.088	53	0.766	39.36	101	1.380	68.06
6	0.1640	8.766	54	0.779	39.98	102	1.393	68.63
7	0.1768	9.442	55	0.791	40.61	103	1.406	69.20
8	0.1896	10.12	56	0.804	41.23	104	1.419	69.77
9	0.2024	10.79	57	0.817	41.85	105	1.432	70.33
10	0.2152	11.47	58	0.830	42.47	106	1.444	70.90
11	0.2280	12.14	59	0.843	43.09	107	1.457	71.46
12	0.2408	12.81	60	0.855	43.70	108	1.470	72.03
13	0.2537	13.48	61	0.868	44.32	109	1.483	72.59
14	0.2665	14.15	62	0.881	44.94	110	1.496	73.15
15	0.2793	14.81	63	0.894	45.55	111	1.508	73.71
16	0.2921	15.48	64	0.907	46.16	112	1.521	74.27
17	0.3049	16.15	65	0.919	46.77	113	1.534	74.83
18	0.3177	16.81	66	0.932	47.38	114	1.547	75.39
19	0.3305	17.47	67	0.945	47.99	115	1.560	75.94
20	0.3433	18.14	68	0.958	48.60	116	1.572	76.50
21	0.3561	18.80	69	0.971	49.21	117	1.585	77.05
22	0.3689	19.46	70	0.983	49.82	118	1.598	77.61
23	0.3817	20.12	71	0.996	50.42	119	1.611	78.16
24	0.3945	20.77	72	1.009	51.03	120	1.624	78.71
25	0.4073	21.43	73	1.022	51.63	121	1.637	79.26
26	0.4201	22.09	74	1.035	52.23	122	1.649	79.80
27	0.4329	22.74	75	1.048	52.83	123	1.662	80.35
28	0.4457	23.39	76	1.060	53.43	124	1.675	80.90
29	0.4585	24.04	77	1.073	54.03	125	1.688	81.44
30	0.4713	24.70	78	1.086	54.63	126	1.701	81.99
31	0.4841	25.35	79	1.099	55.22	127	1.713	82.53
32	0.4969	25.99	80	1.112	55.82	128	1.726	83.07
33	0.5097	26.64	81	1.124	56.41	129	1.739	83.61
34	0.5225	27.29	82	1.137	57.00	130	1.752	84.15
35	0.5353	27.93	83	1.150	57.60	131	1.765	84.69
36	0.5481	28.58	84	1.163	58.19	132	1.777	85.23
37	0.5610	29.22	85	1.176	58.78	133	1.790	85.76
38	0.5738	29.86	86	1.188	59.37	134	1.803	86.30
39	0.5866	30.50	87	1.201	59.95	135	1.816	86.83
40	0.5994	31.14	88	1.214	60.54	136	1.829	87.36
41	0.6122	31.78	89	1.227	61.12	137	1.841	87.89
42	0.6250	32.42	90	1.240	61.71	138	1.854	88.42
43	0.6378	33.06	91	1.252	62.29	139	1.867	88.95
44	0.6506	33.69	92	1.265	62.87	140	1.880	89.48
45	0.6634	34.33	93	1.278	63.45	141	1.893	90.01
46	0.6762	34.96	94	1.291	64.03	142	1.905	90.54
47	0.6890	35.59	95	1.304	64.61	143	1.918	91.06
48	0.7018	36.22	96	1.316	65.19	144	1.931	91.58

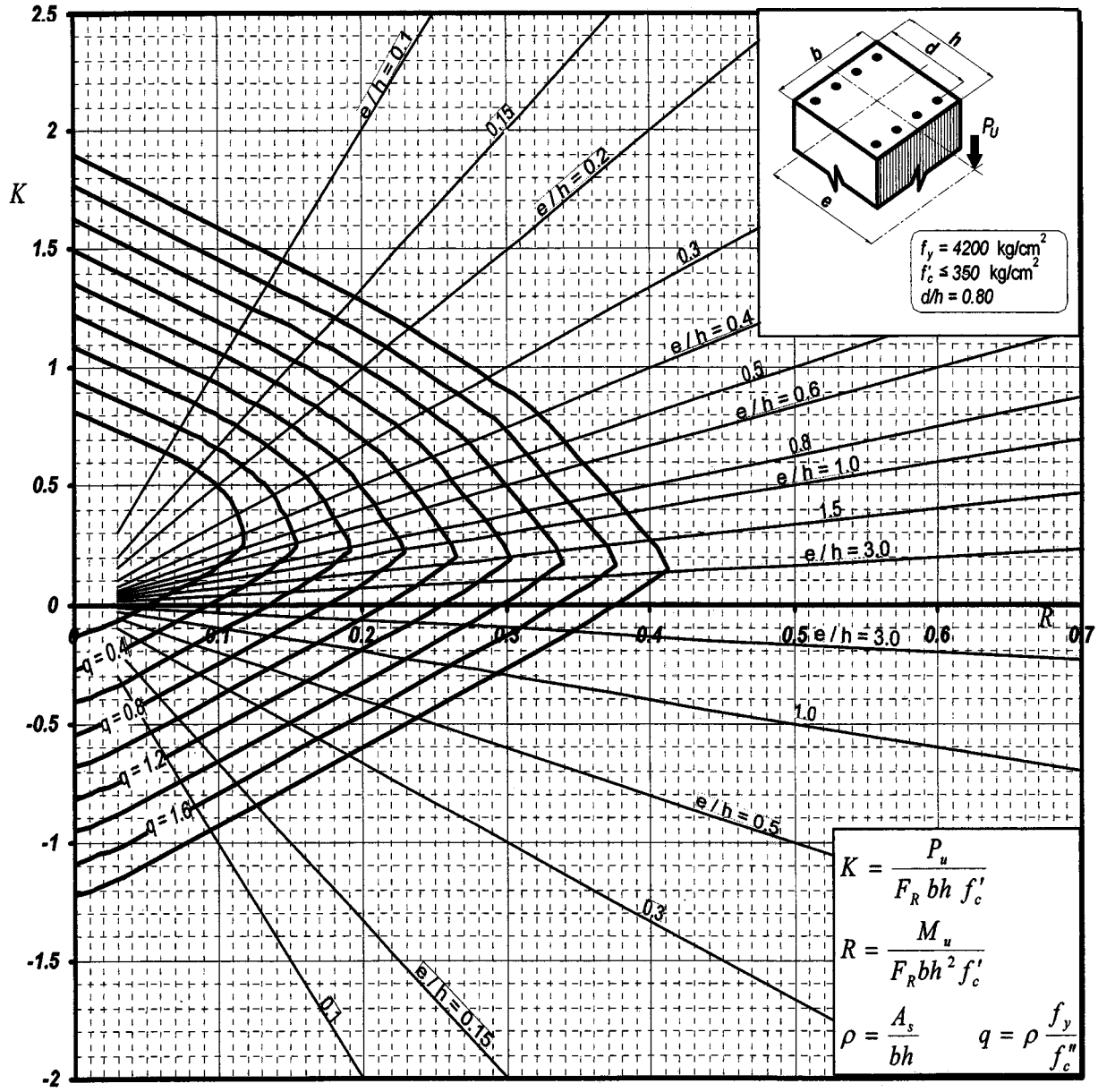
APÉNDICE C

Gráficas de interacción para columnas de concreto reforzado

En este apéndice se presentan algunos diagramas de interacción que facilitan el cálculo de la resistencia de columnas sujetas a carga axial y flexión en uno de los planos de simetría de las columnas, o bien, el dimensionamiento de este tipo de elementos cuando se conocen la carga axial y el momento flexionante que actúan sobre ellos. Se elaboraron con el programa de cómputo descrito en la referencia 15.2, a partir de las hipótesis de las Normas Técnicas Complementarias de Concreto Reforzado versión 2004.

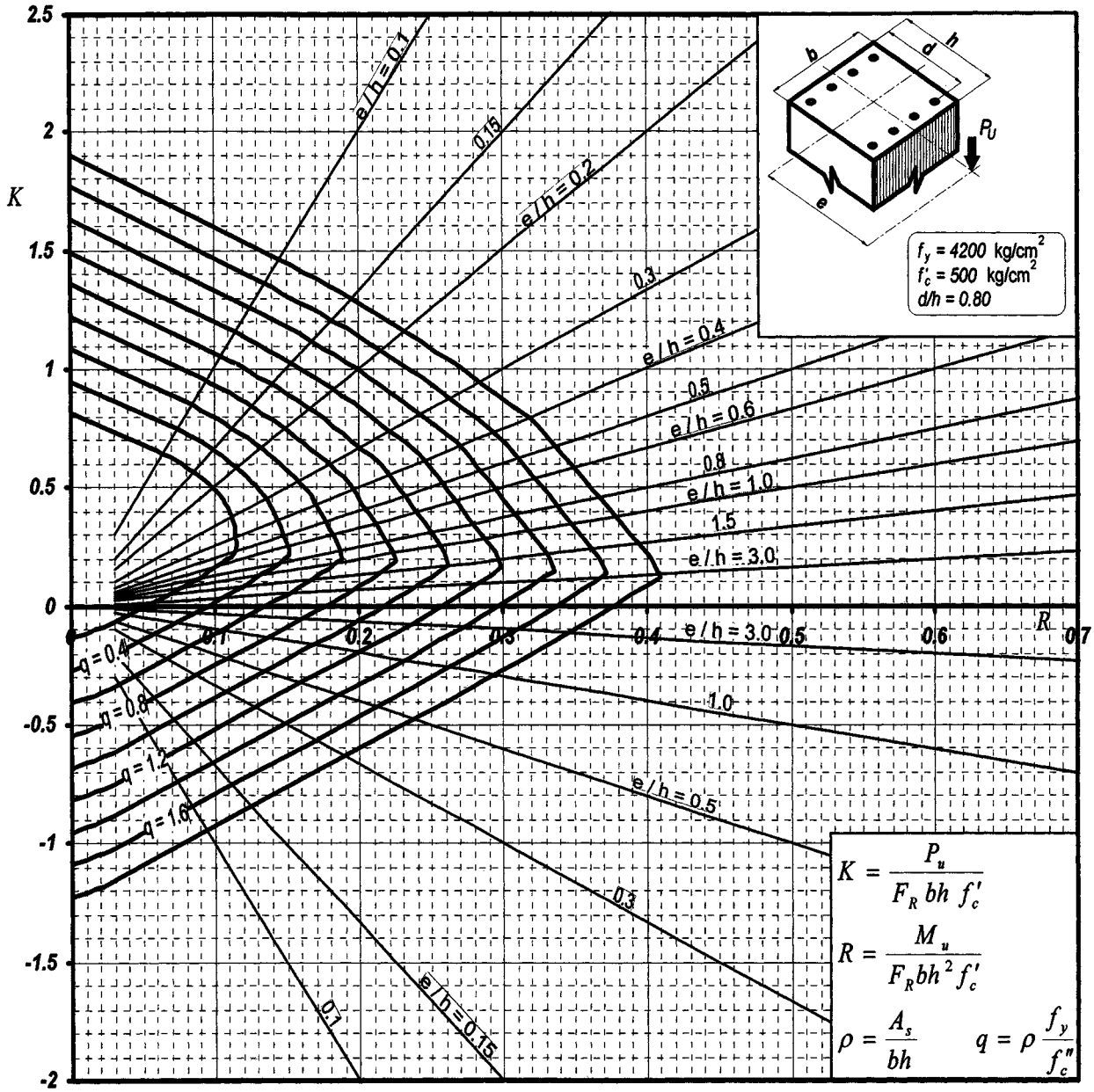
En el capítulo 5 se indicó que el bloque equivalente de esfuerzos de compresión utilizado en el cálculo de resistencias a flexión y a flexocompresión cambió en 2004 respecto al bloque supuesto en versiones anteriores. A partir de este cambio, no es posible elaborar diagramas de interacción adimensionales, válidos para cualquier valor de f'_c y de f_y. Es necesario elaborar un juego de diagramas para cada combinación de valores, excepto para valores de f'_c de hasta 350 kg/cm^2, para los cuales es suficiente un solo juego de diagramas debido a que el parámetro β_1 que define la profundidad del bloque de esfuerzos de compresión permanece constante hasta este valor. Los valores de f'_c incluidos en este apéndice son $f'_c \leq 350$ kg/cm^2 y $f'_c = 500$ kg/cm^2. Se cree que con estos valores pueden resolverse la mayoría de los casos que se presentan en la práctica y que es suficientemente preciso usar el valor más cercano incluido en las gráficas, en caso de que se tenga un valor intermedio de f'_c. Sólo se incluye un valor de f_y, 4200 kg/cm^2, que es por mucho el más usado en México.

Los diagramas de este apéndice pueden usarse para diseñar con el Reglamento ACI, haciendo los cambios explicados en la sección 15.3 de este texto. En esta sección se explica también con mayor detalle la utilización de los diagramas.



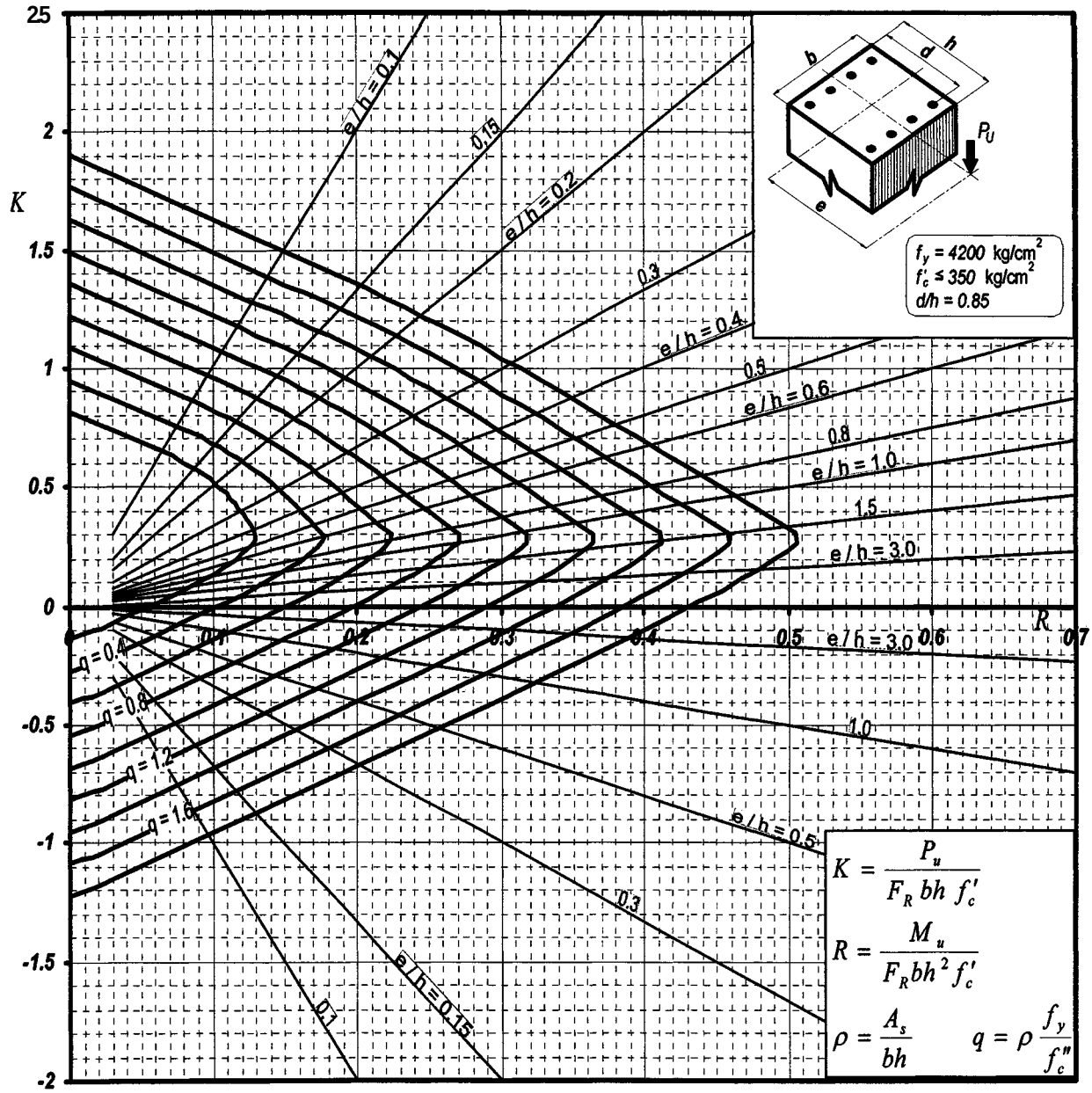
A_s = Área total de refuerzo
$f''_C = 0.85\ f^*_C$
$f^*_C = 0.80\ f'_C$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.I



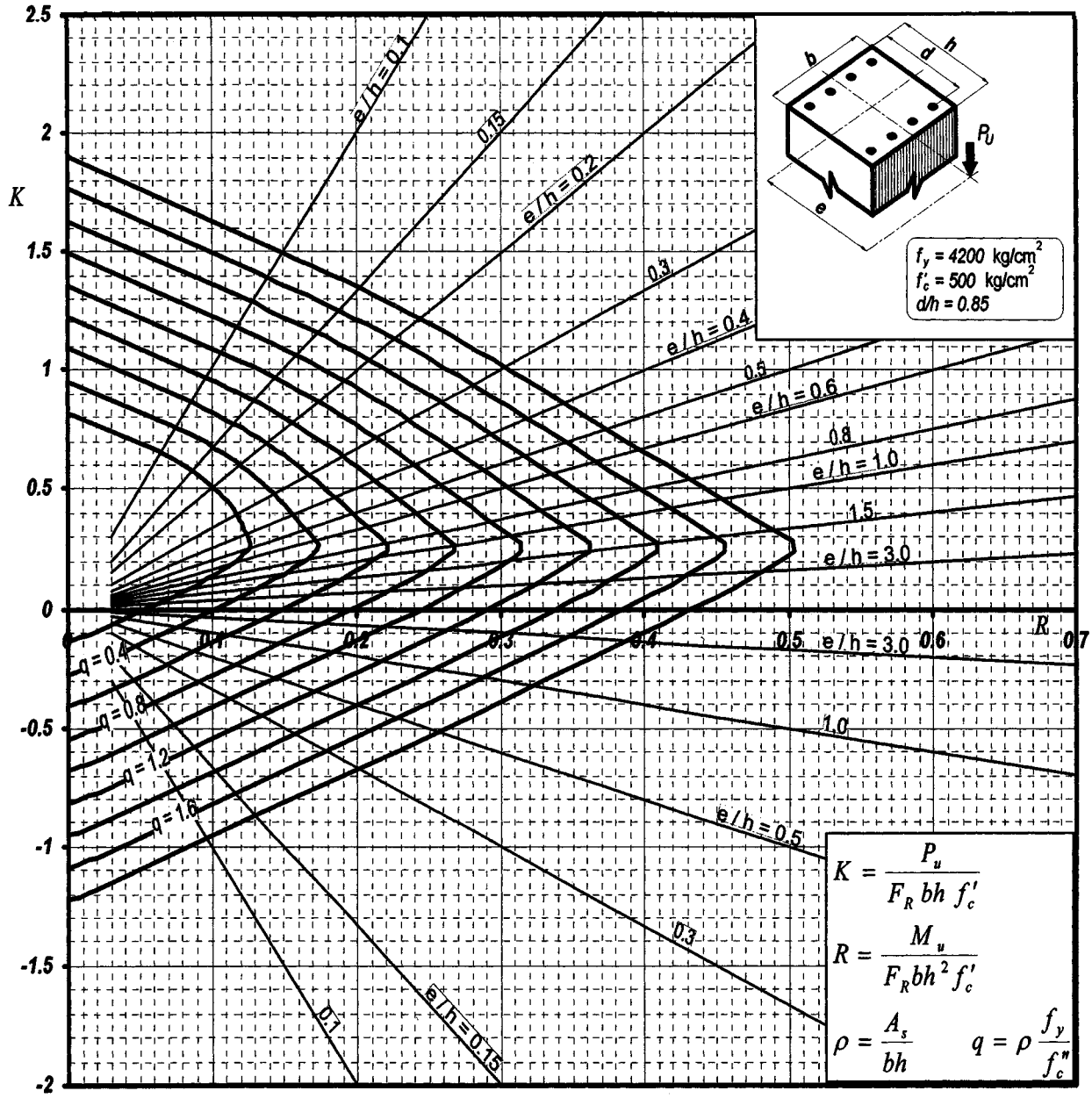
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.2



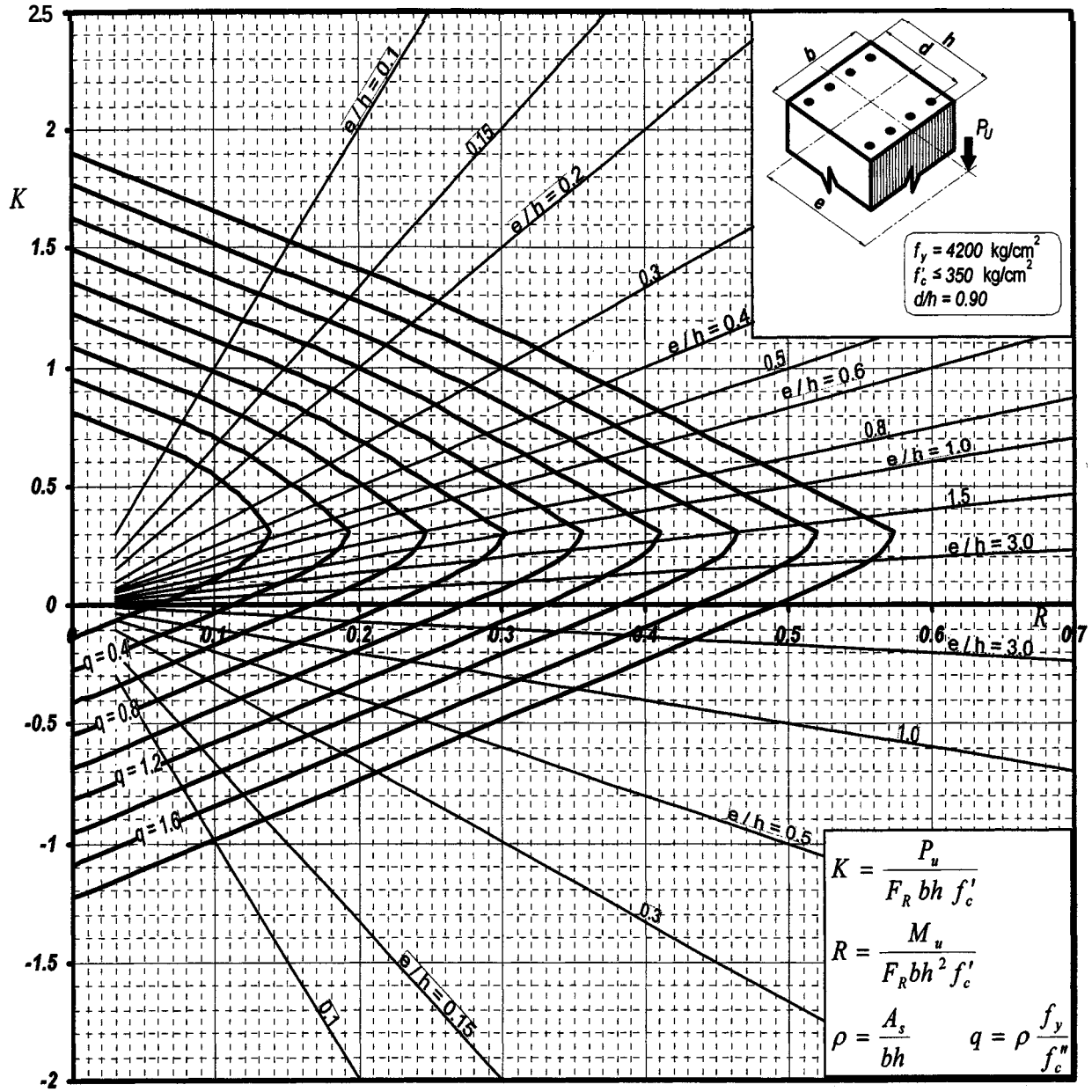
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.3



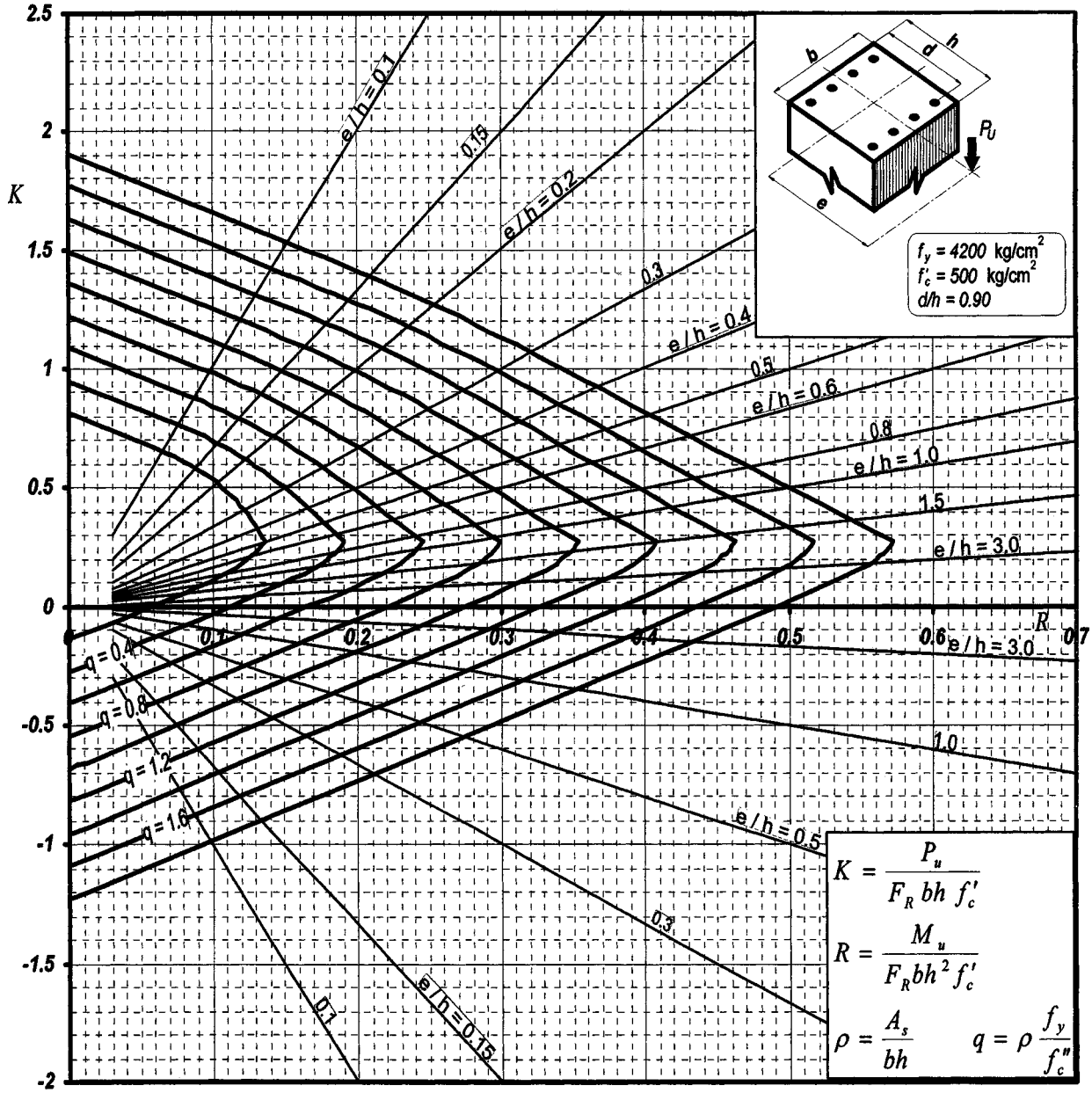
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.4



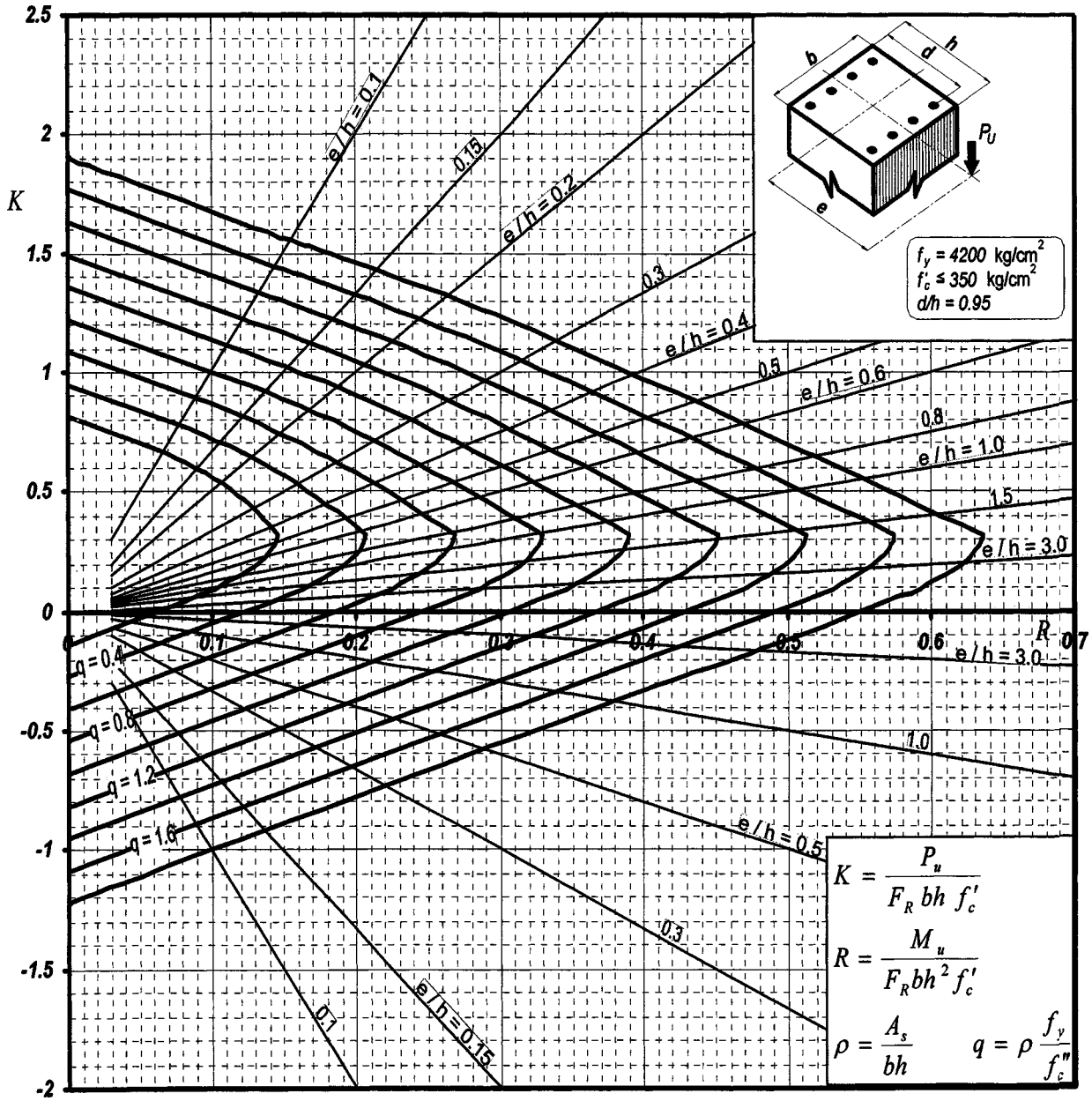
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.5



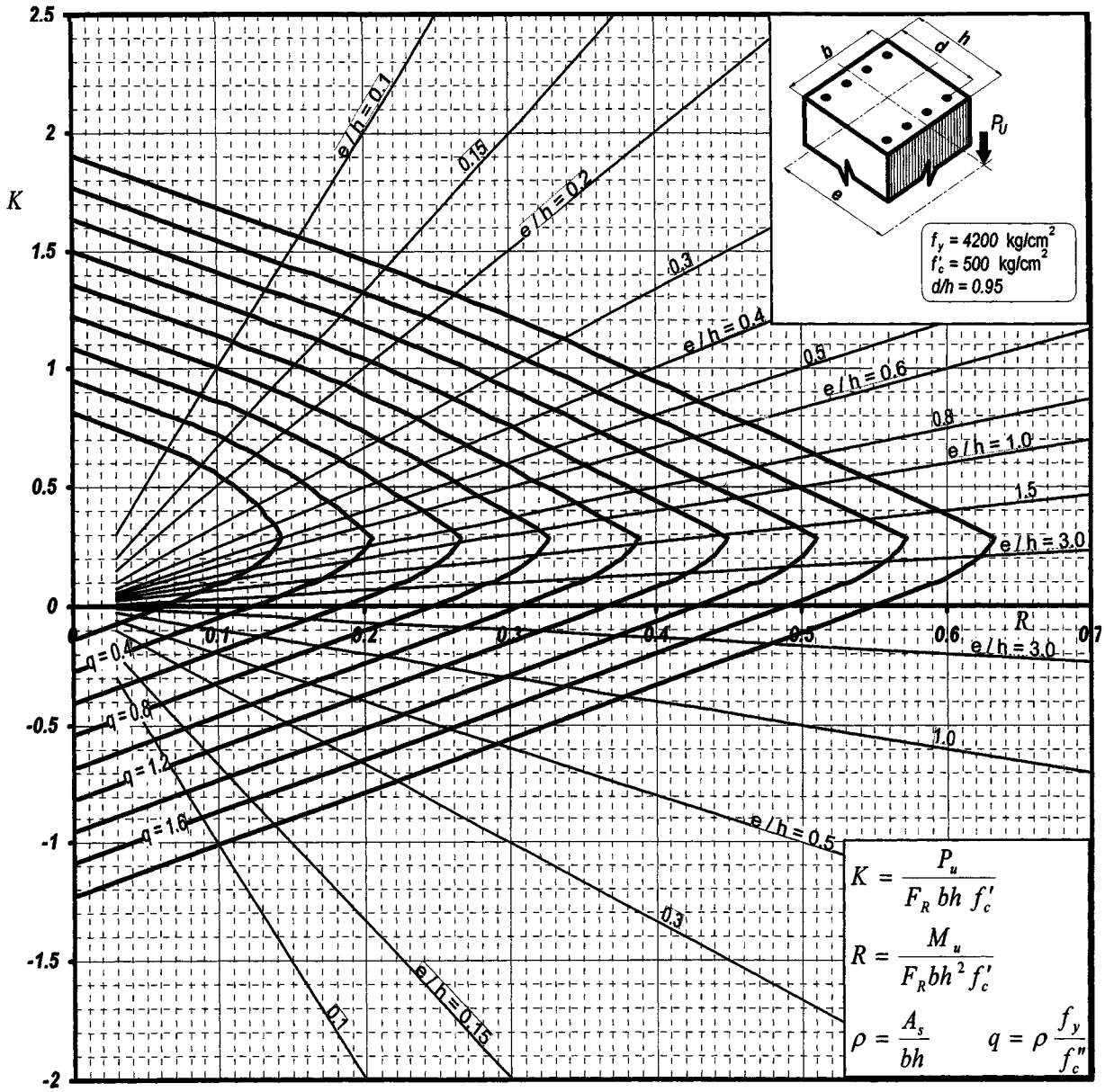
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura *C.6*



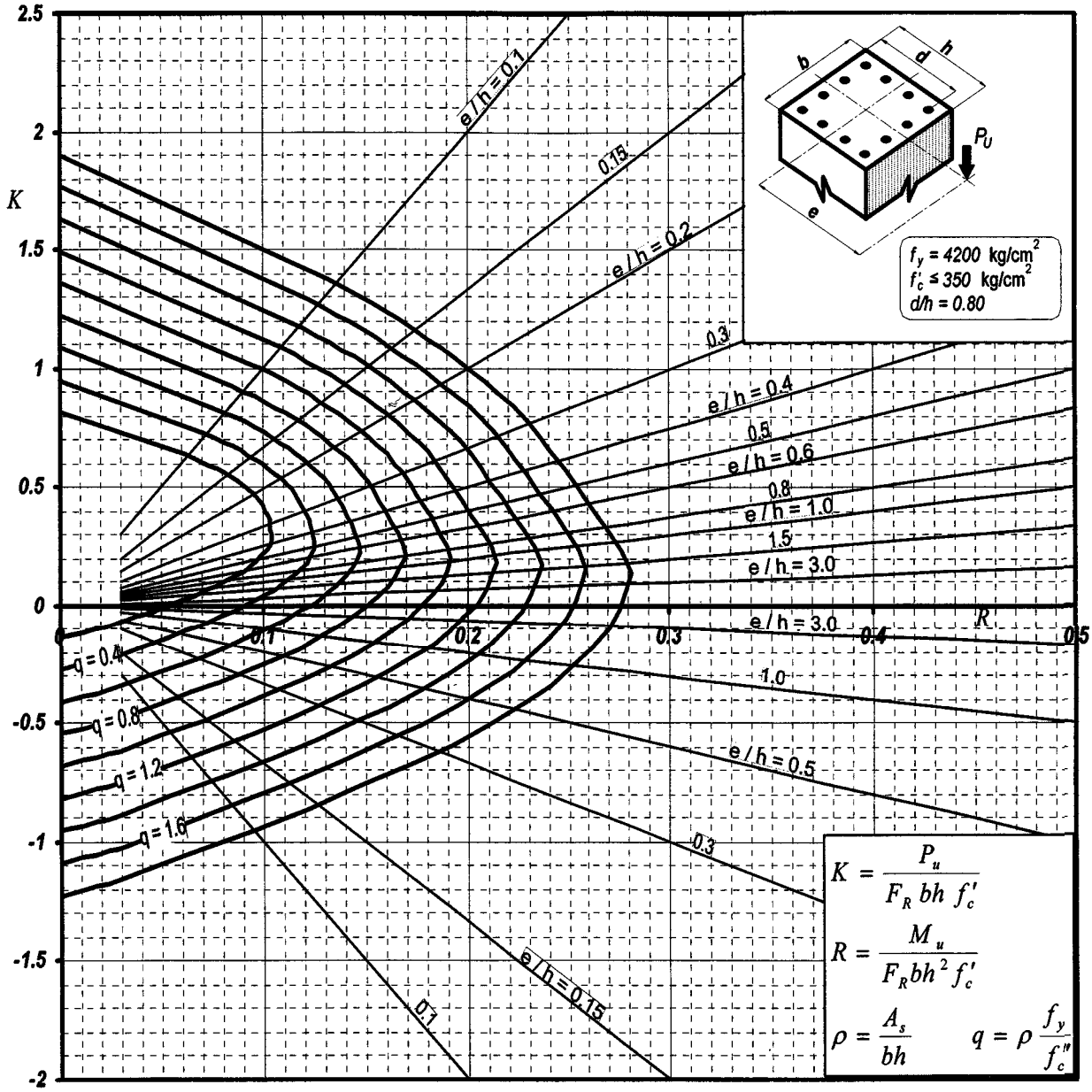
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.7



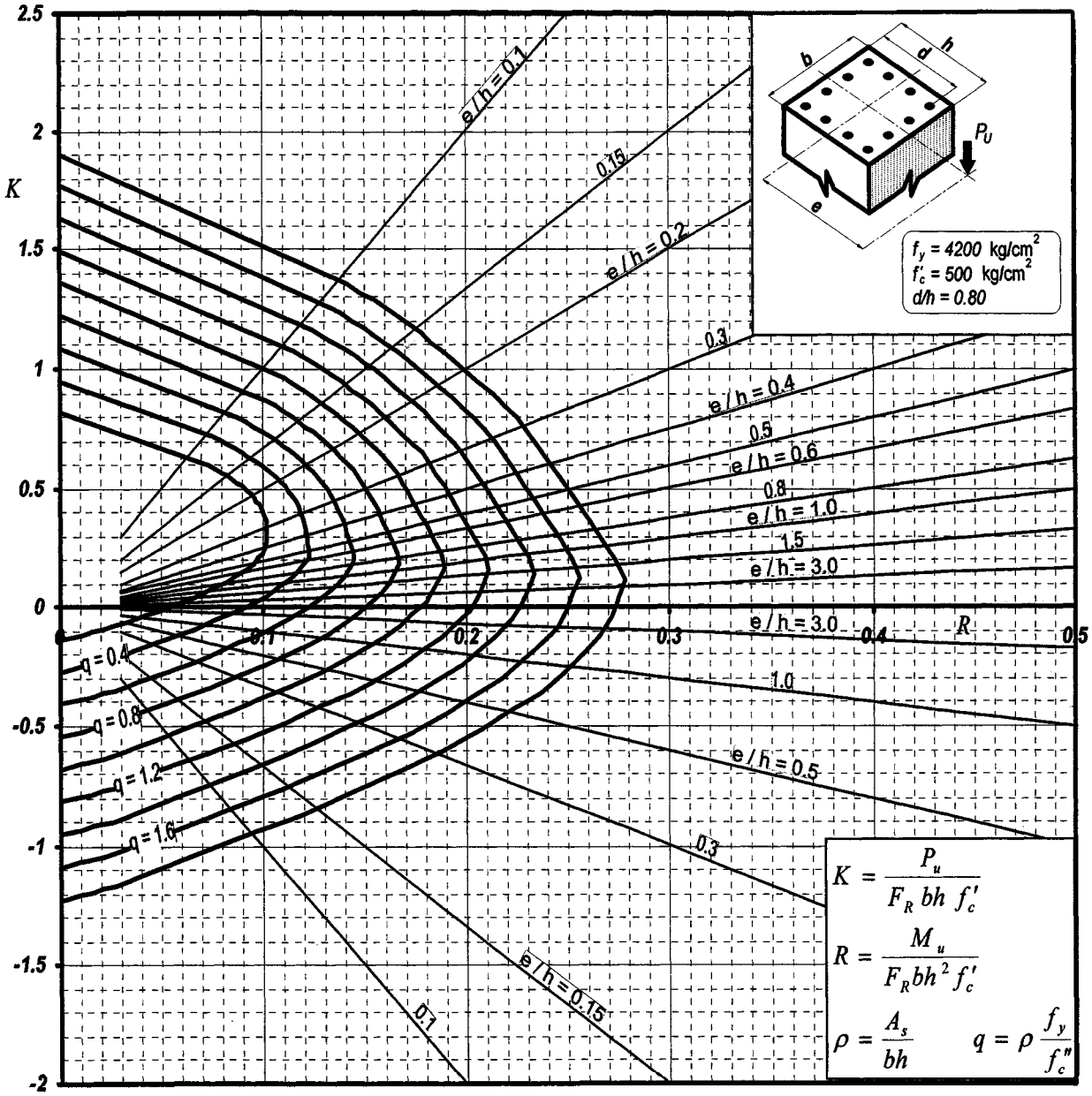
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.8



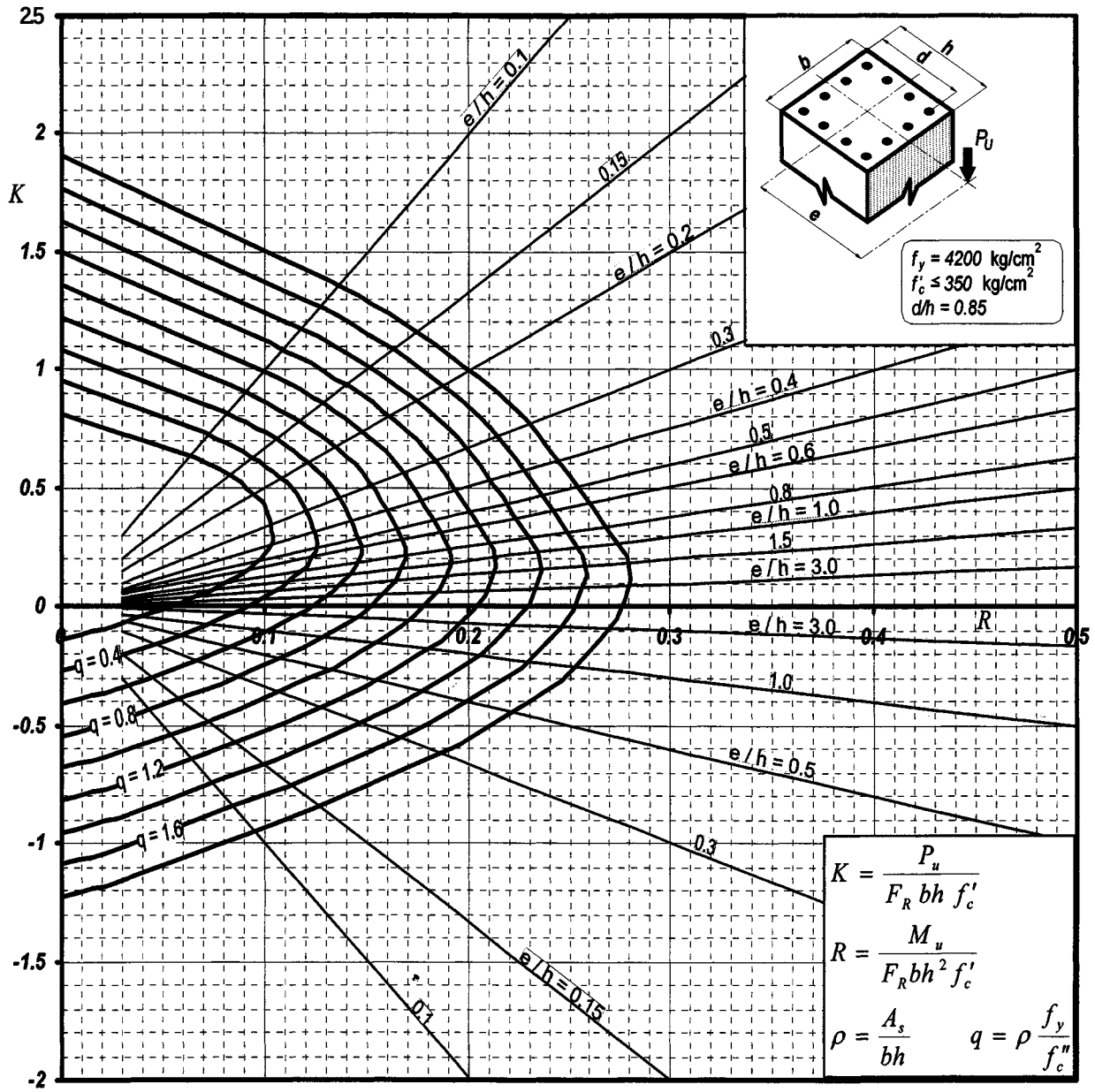
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\, f^*_c$
$f^*_c = 0.80\, f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.9



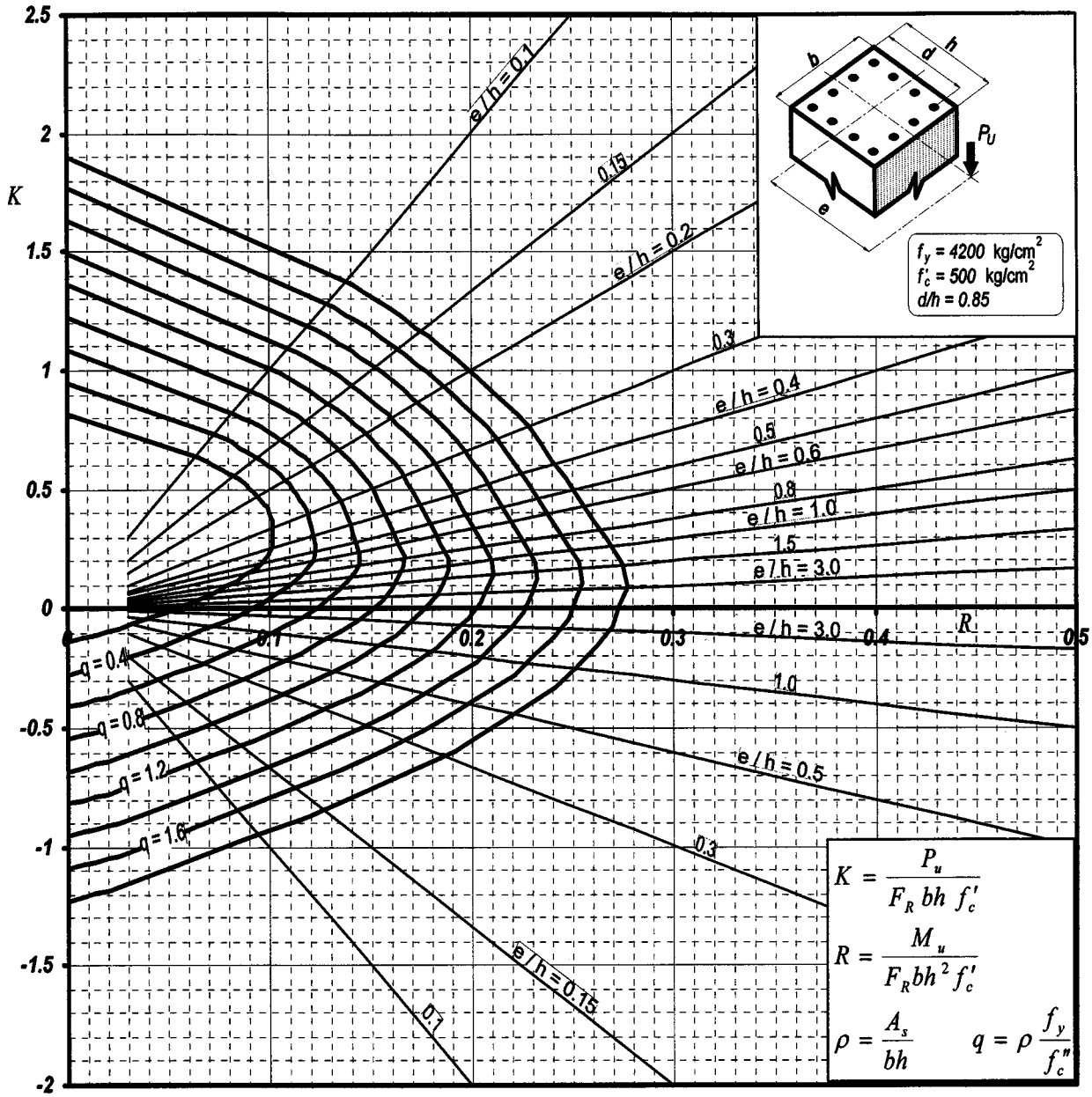
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.10



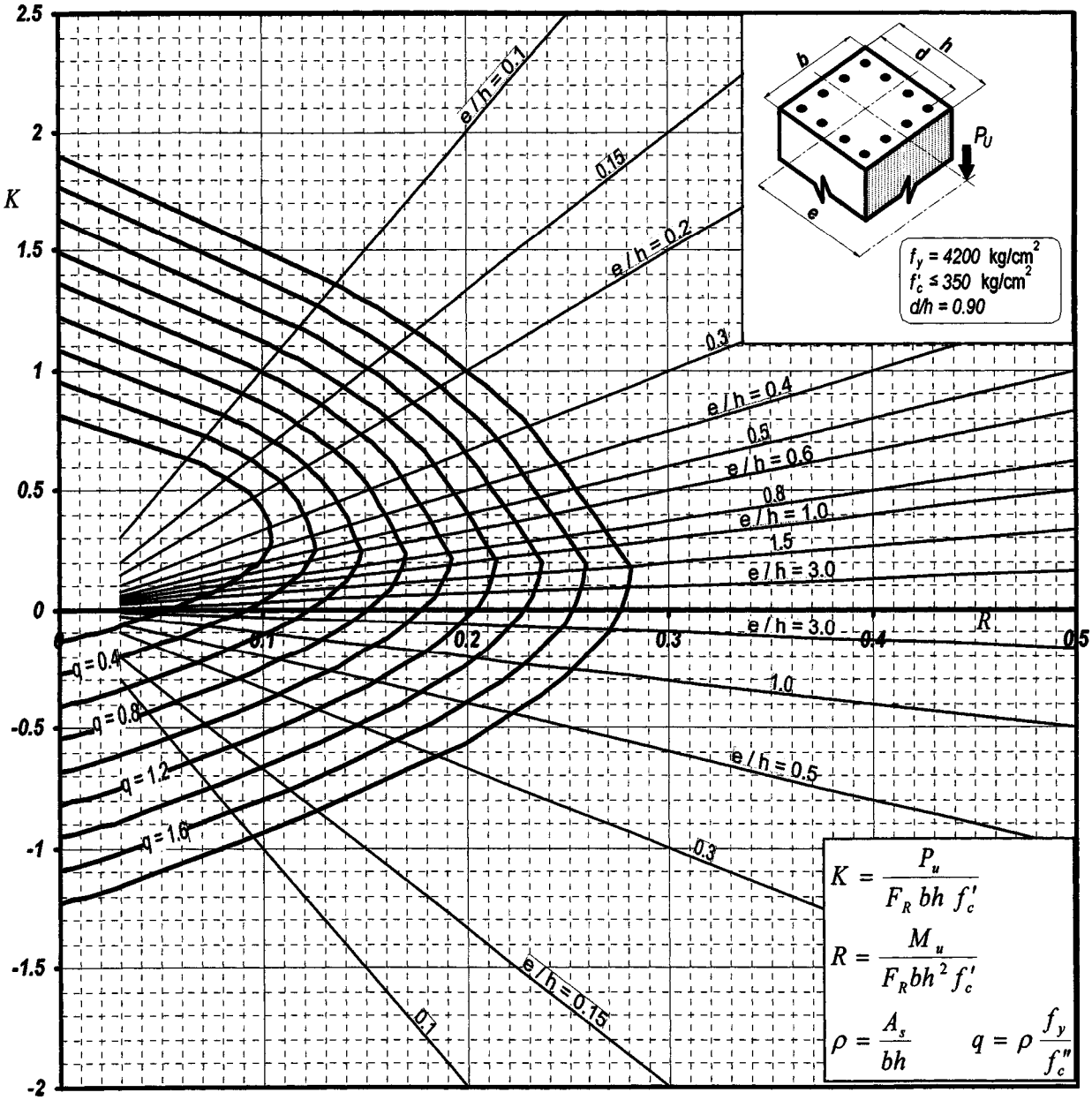
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.11



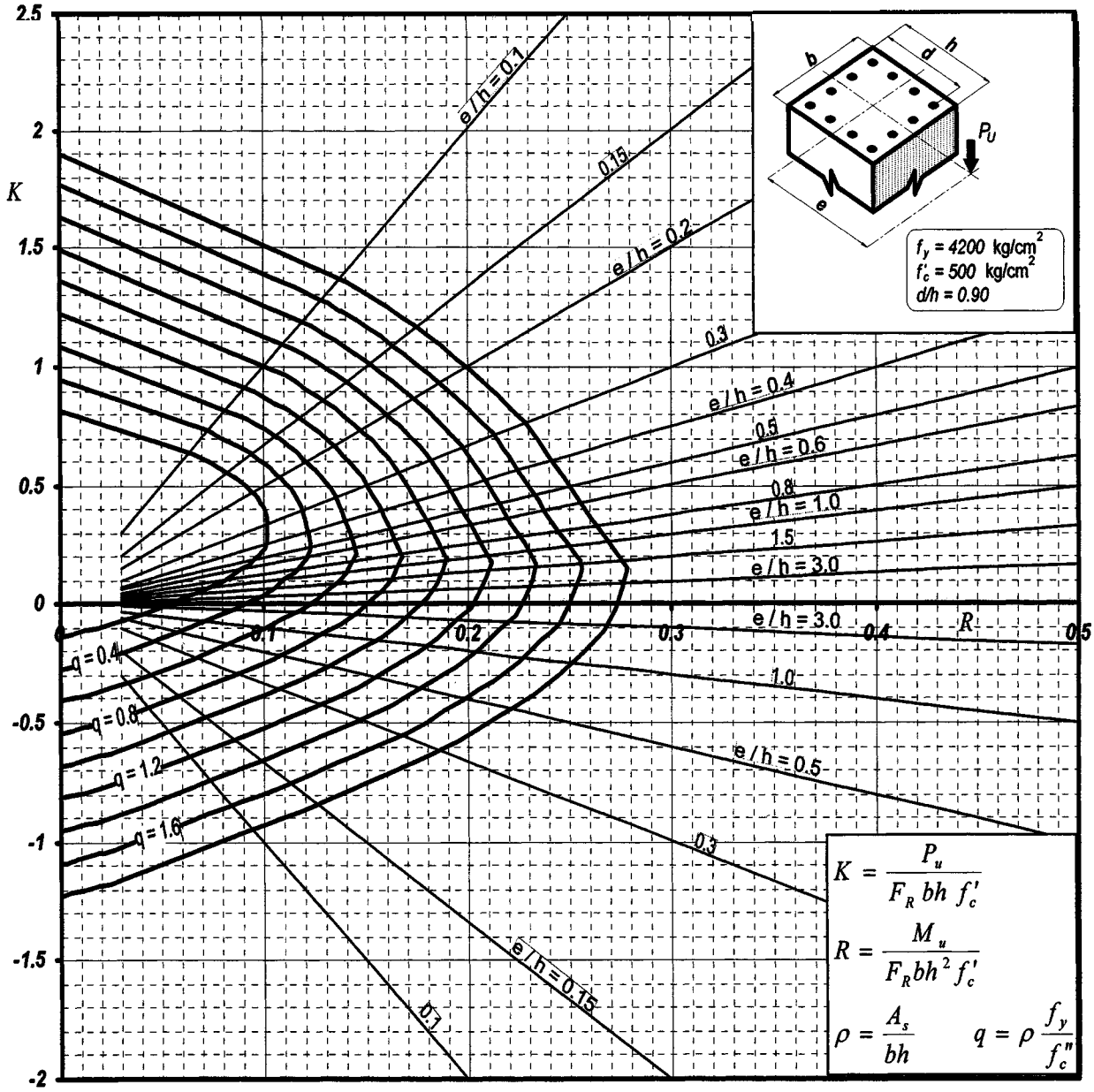
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.12



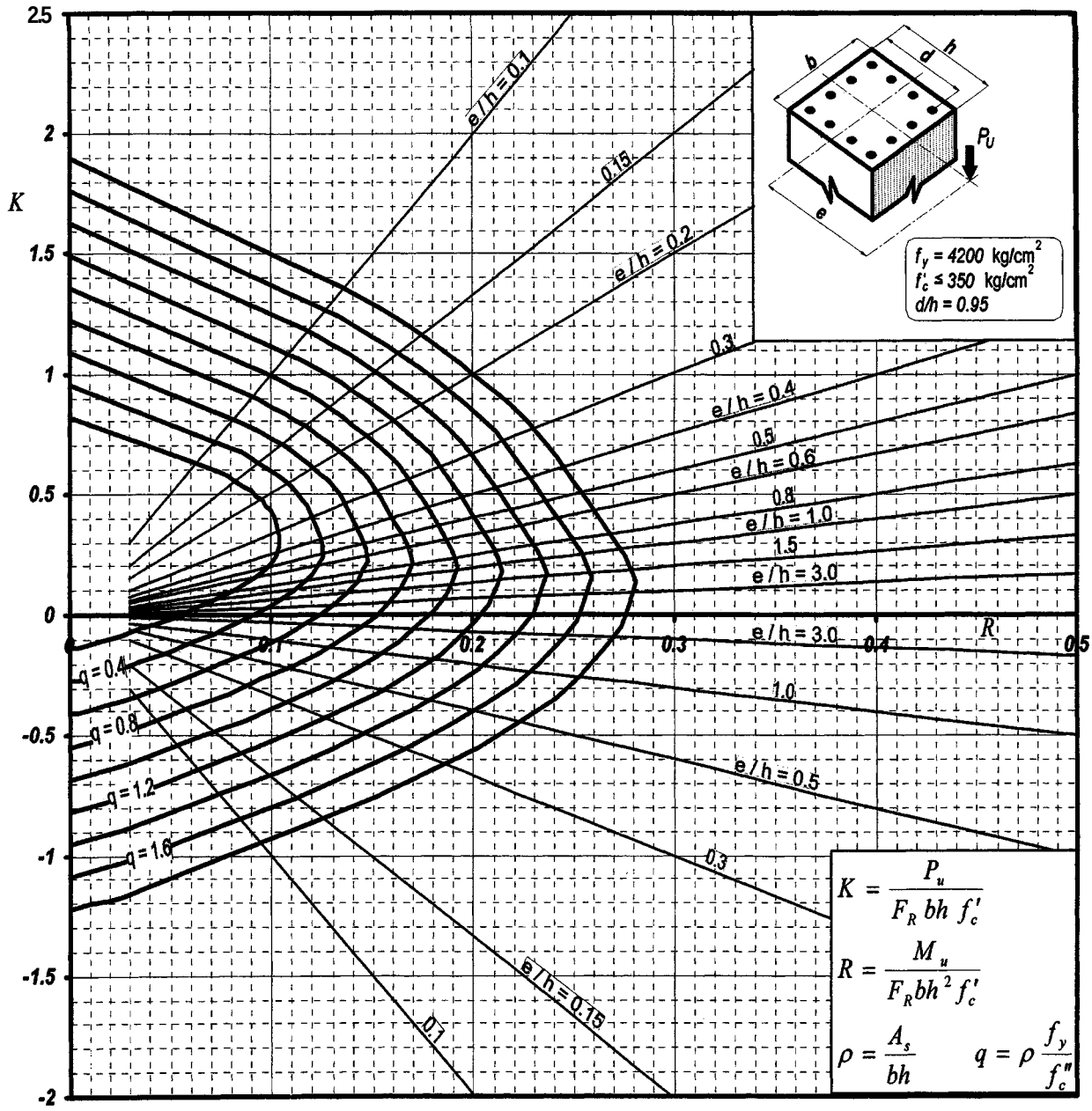
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.13



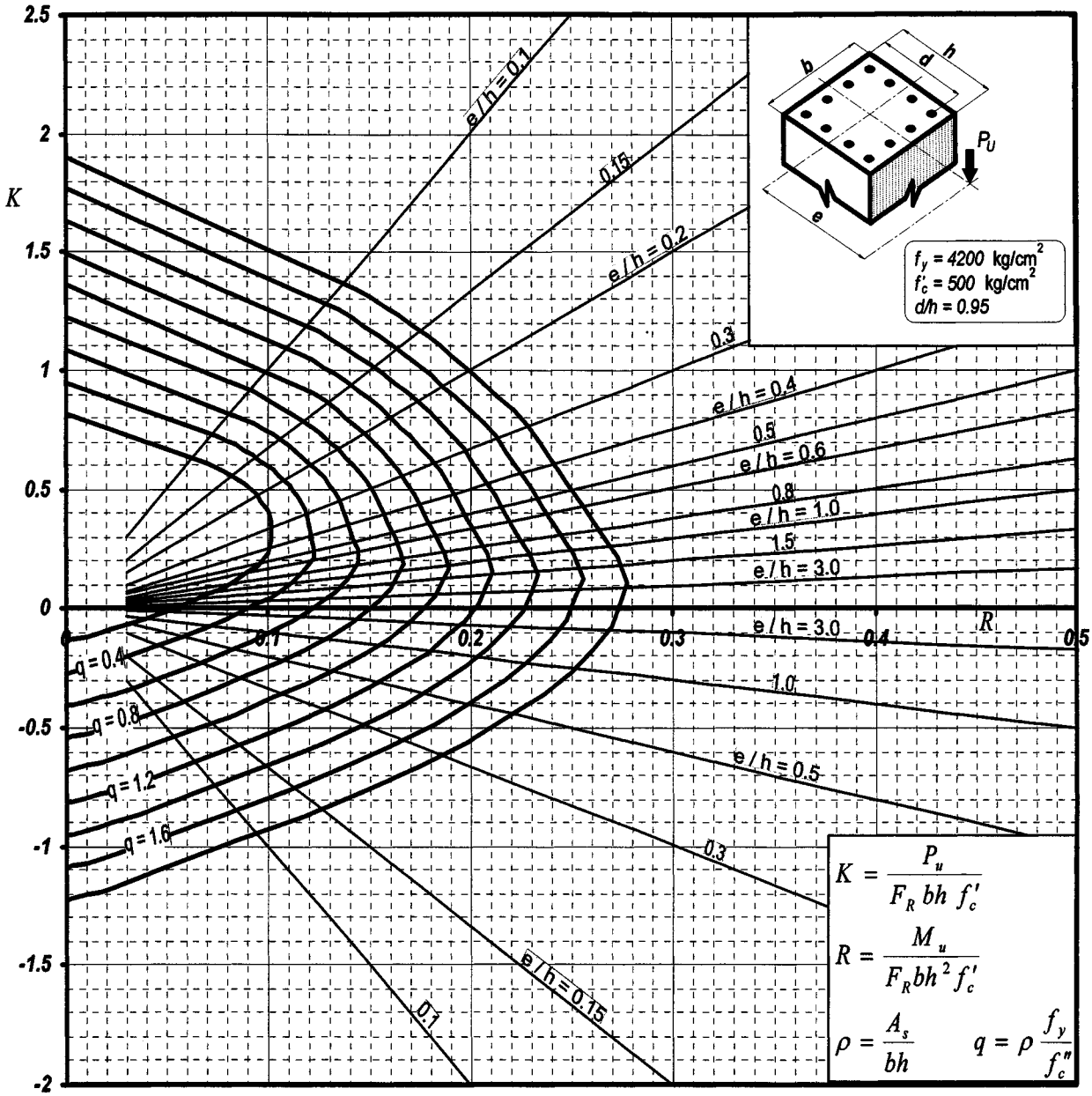
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.14



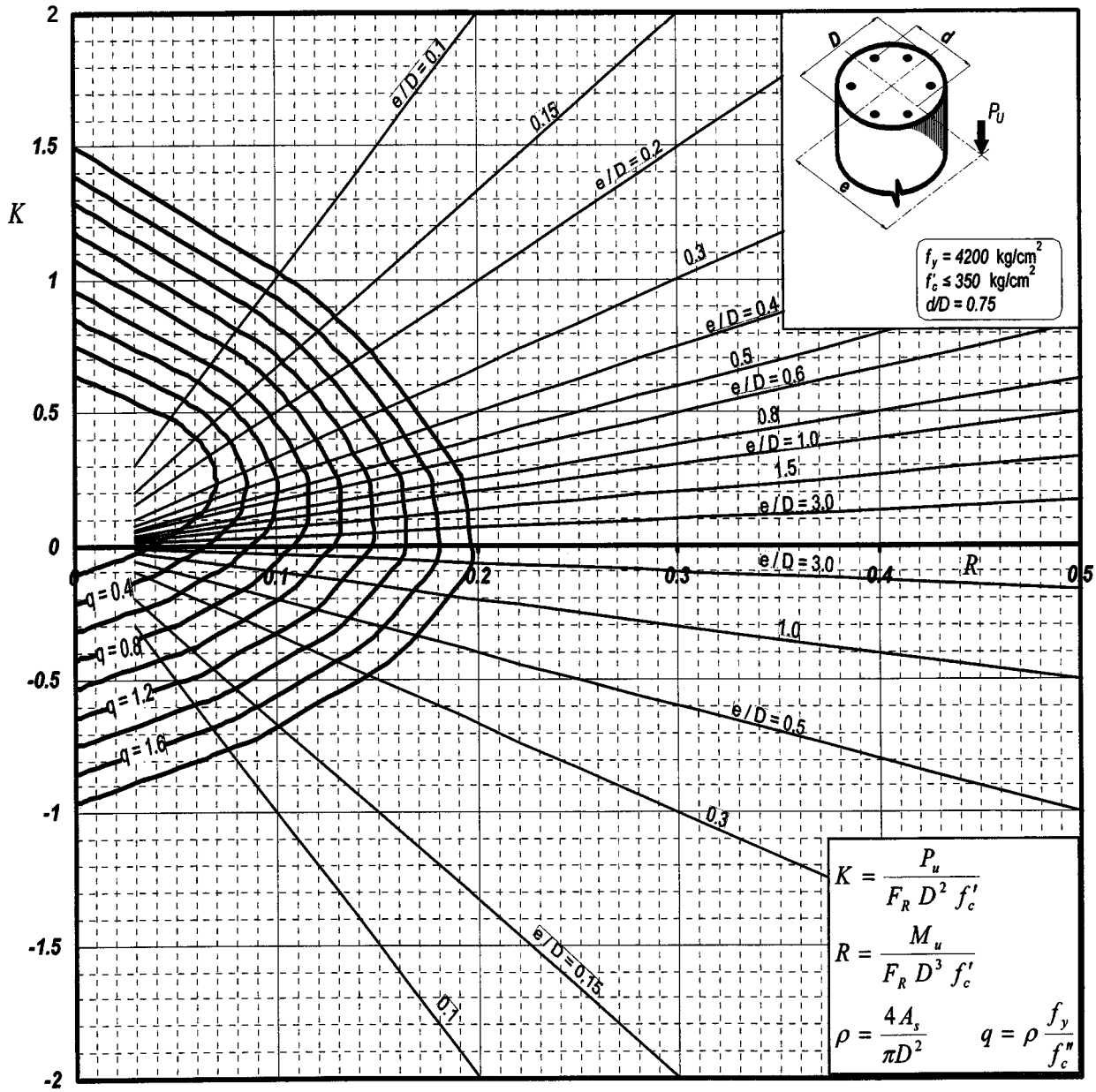
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.15



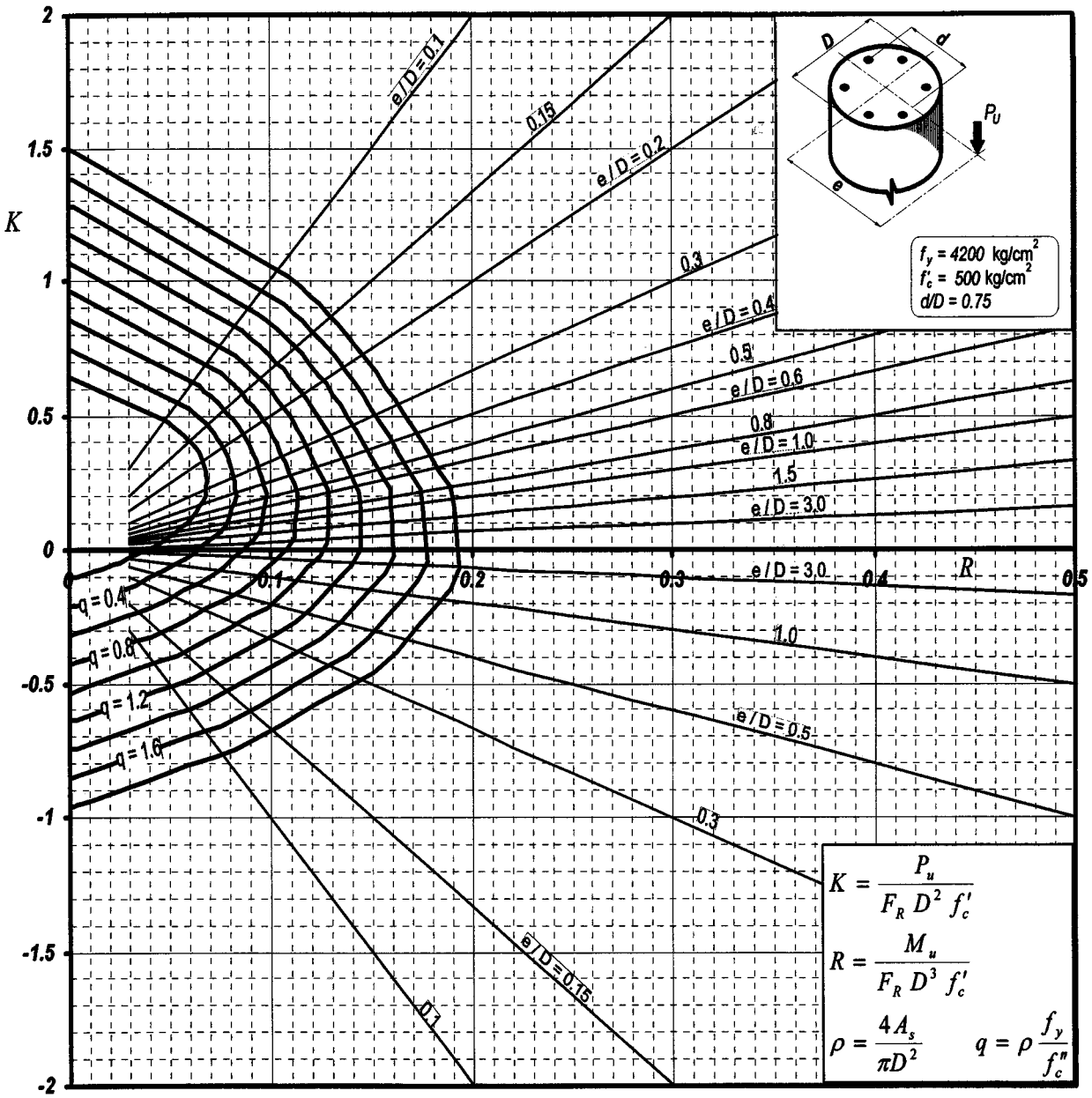
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.16



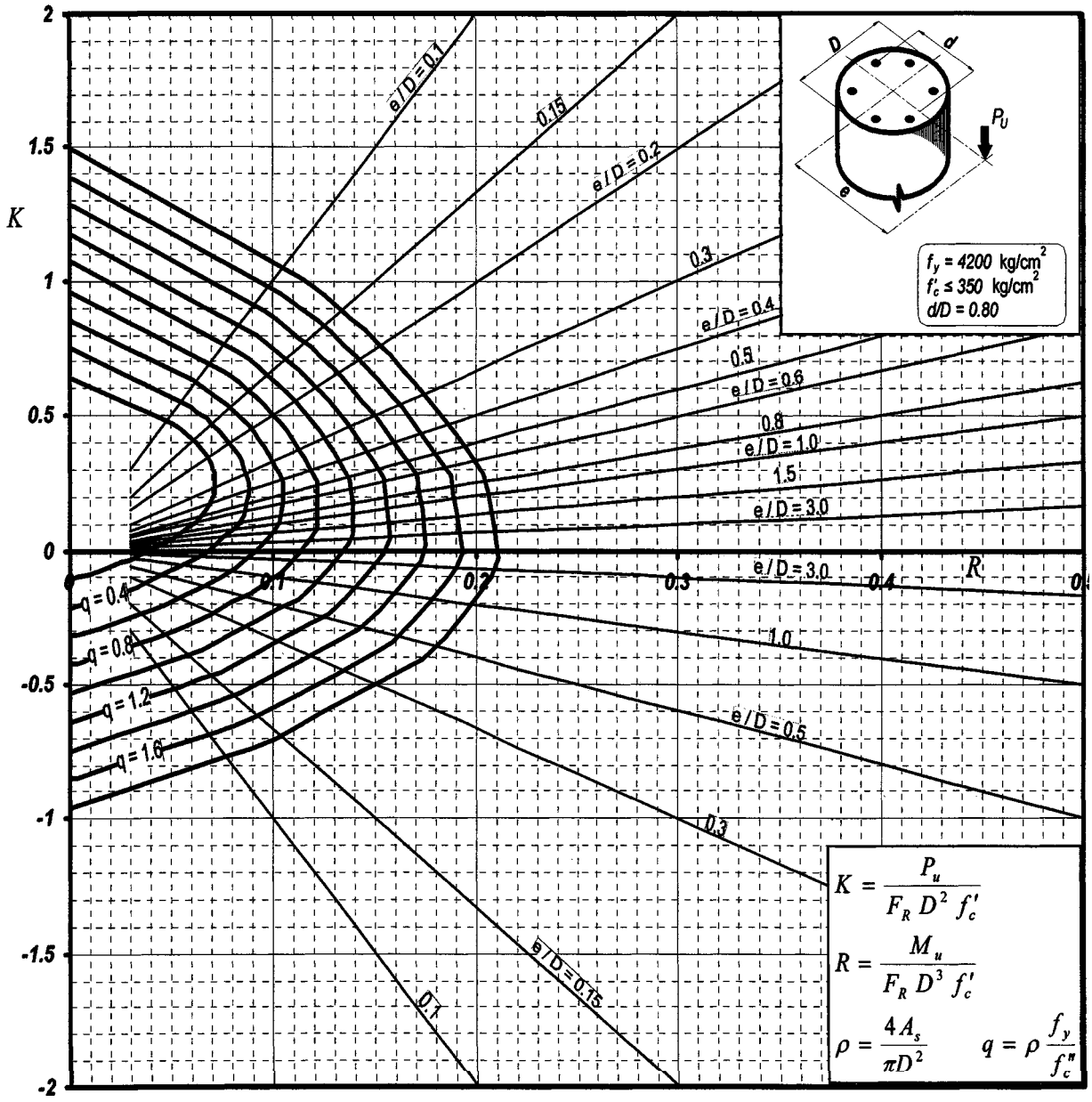
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.17



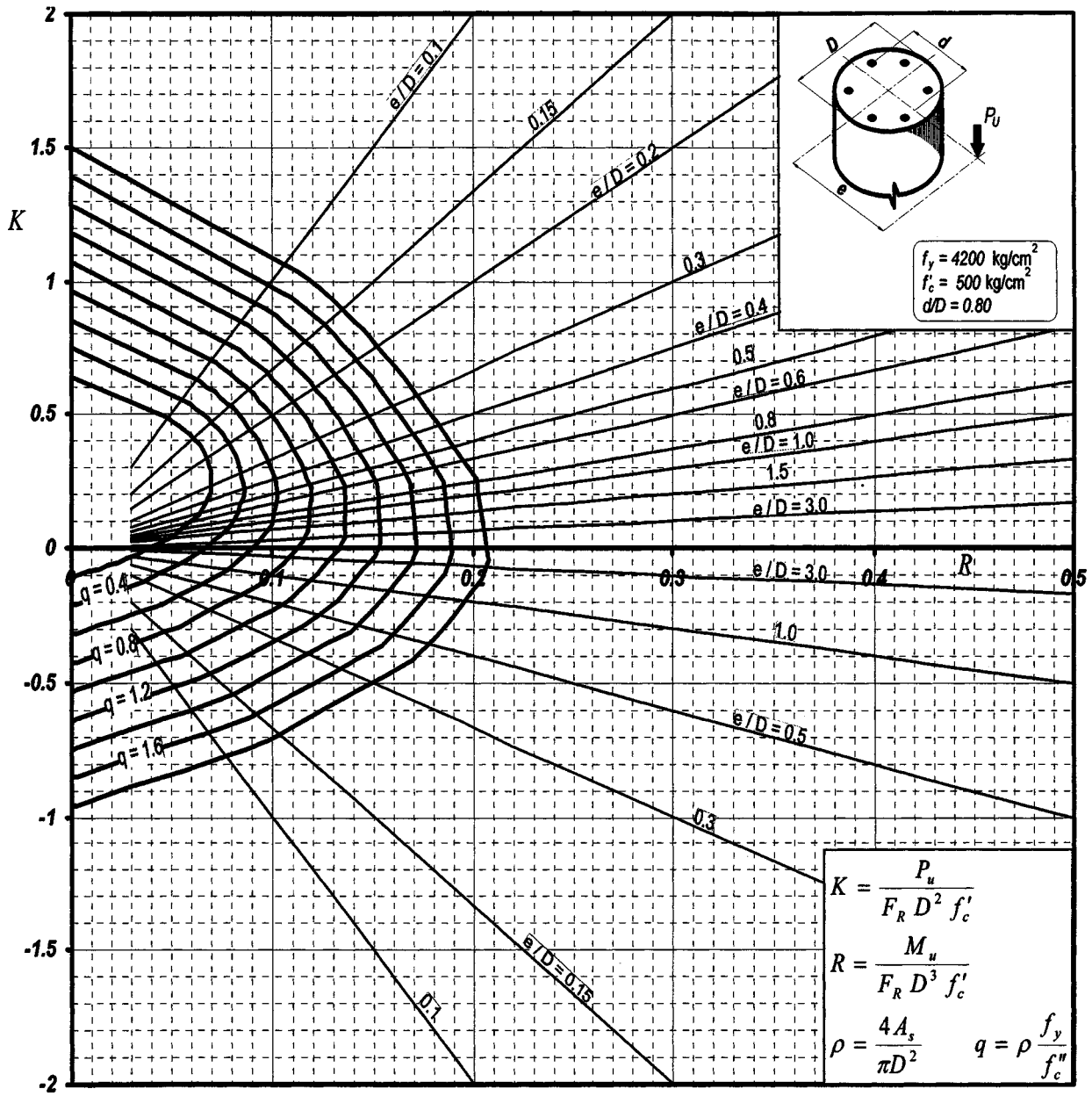
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.18



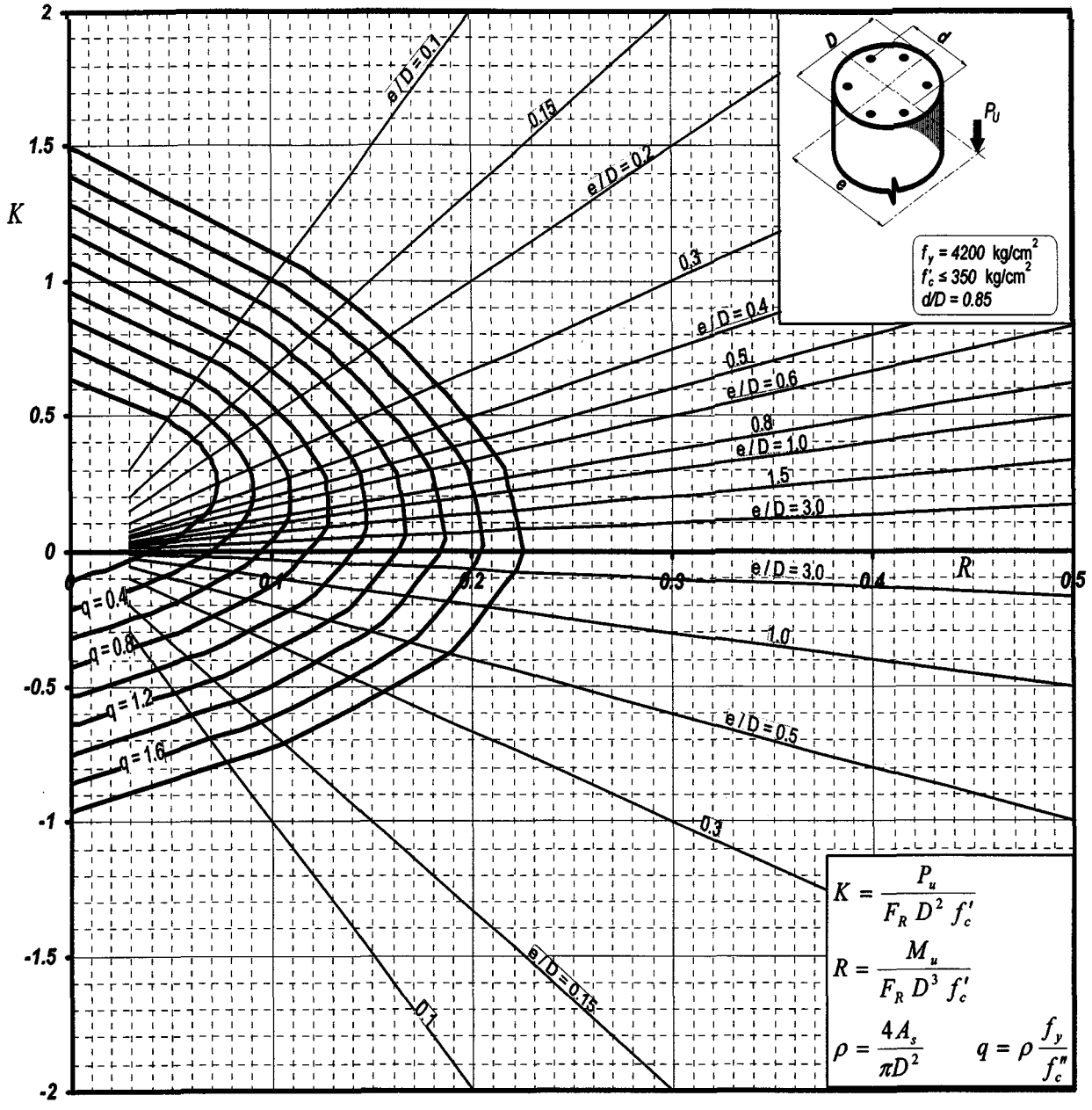
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.19



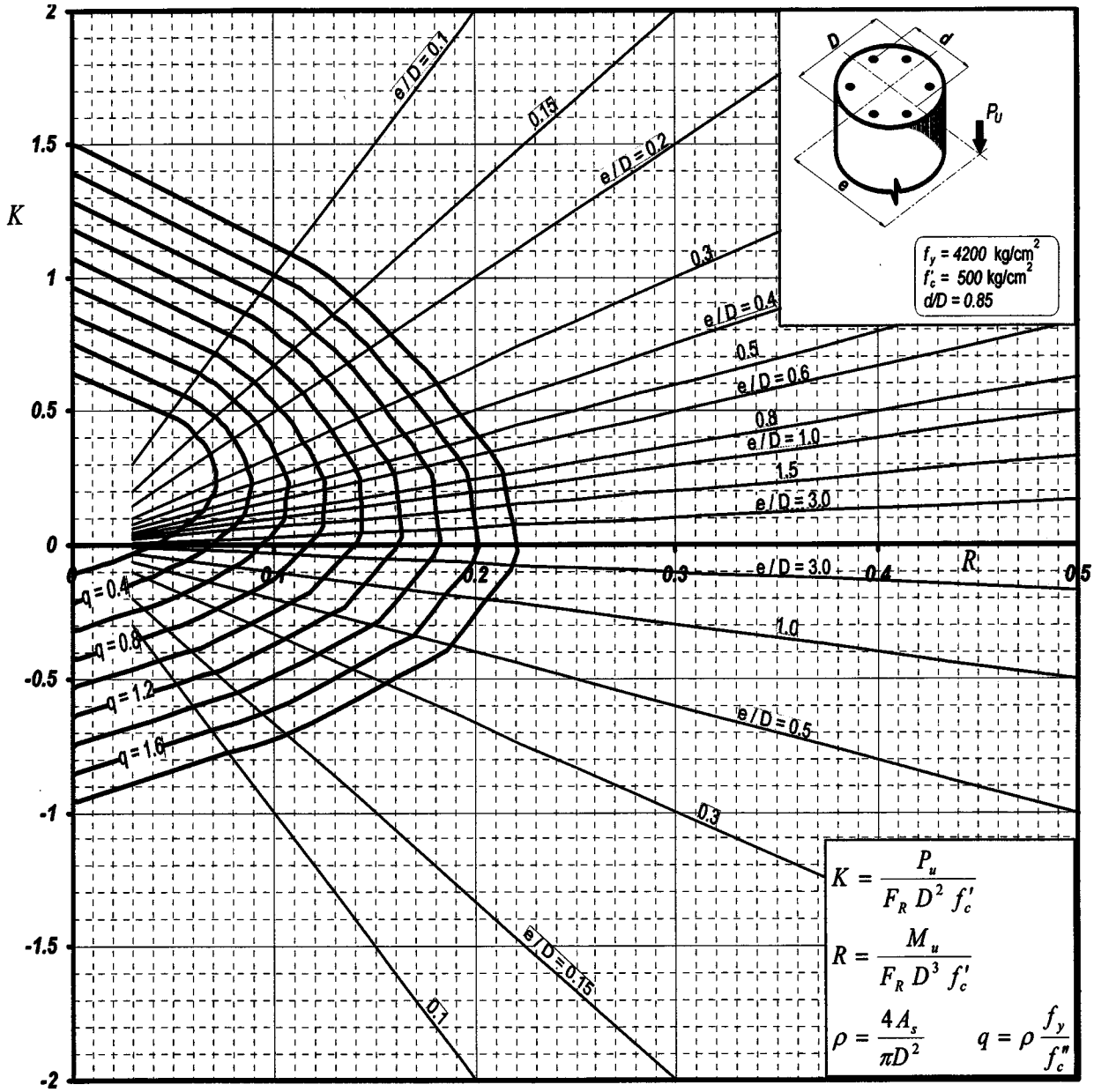
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.20



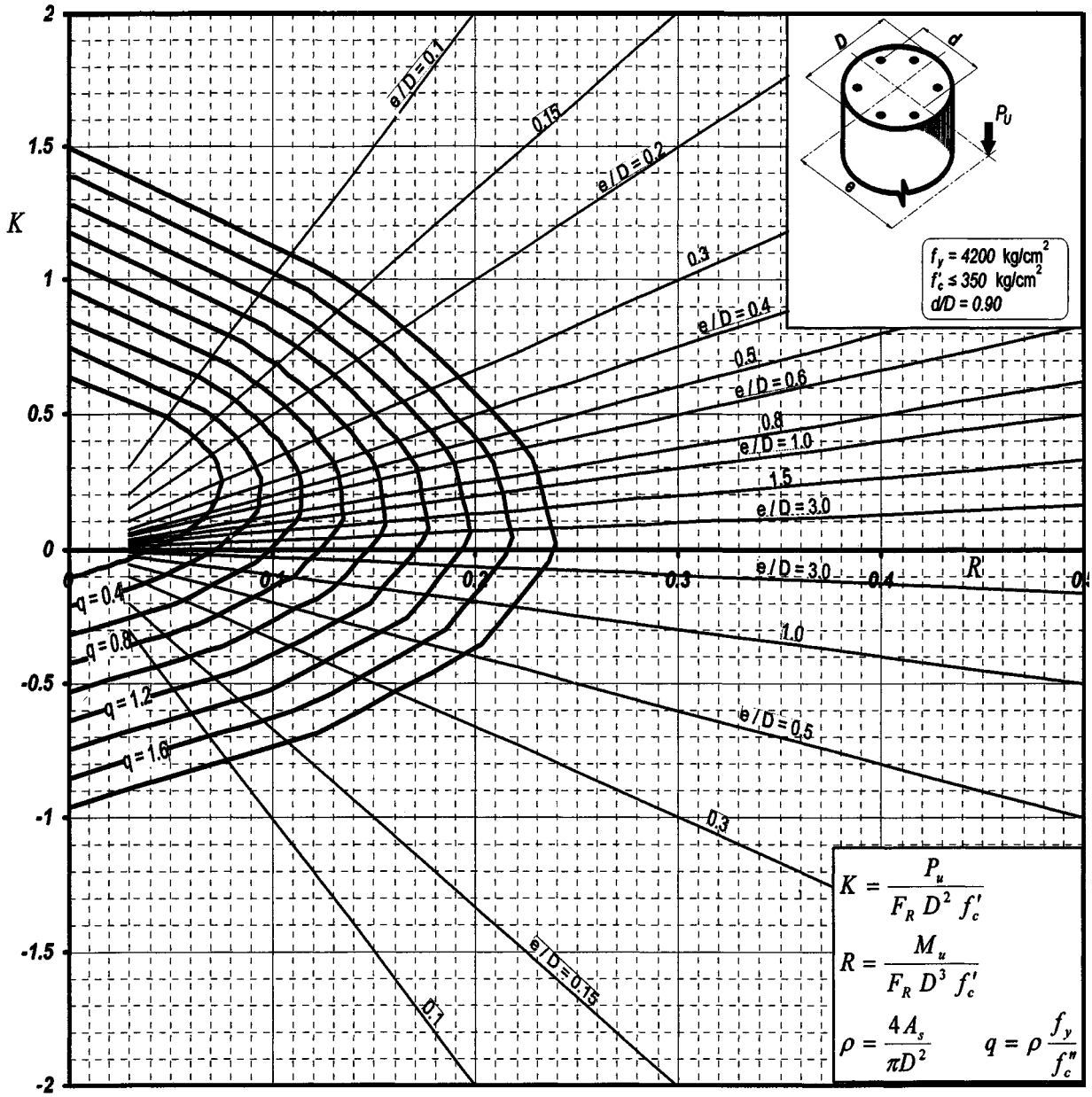
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.21



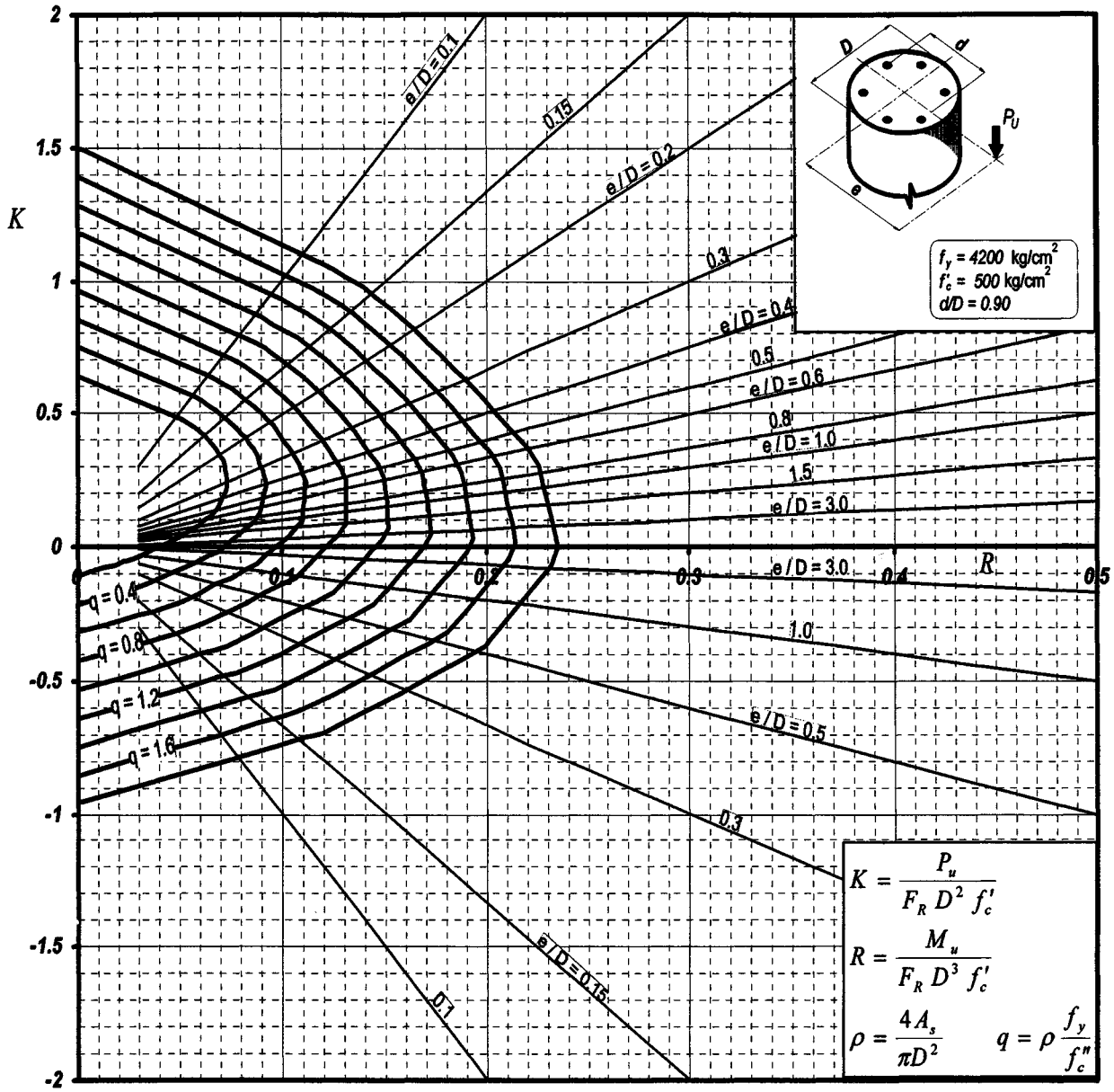
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.22



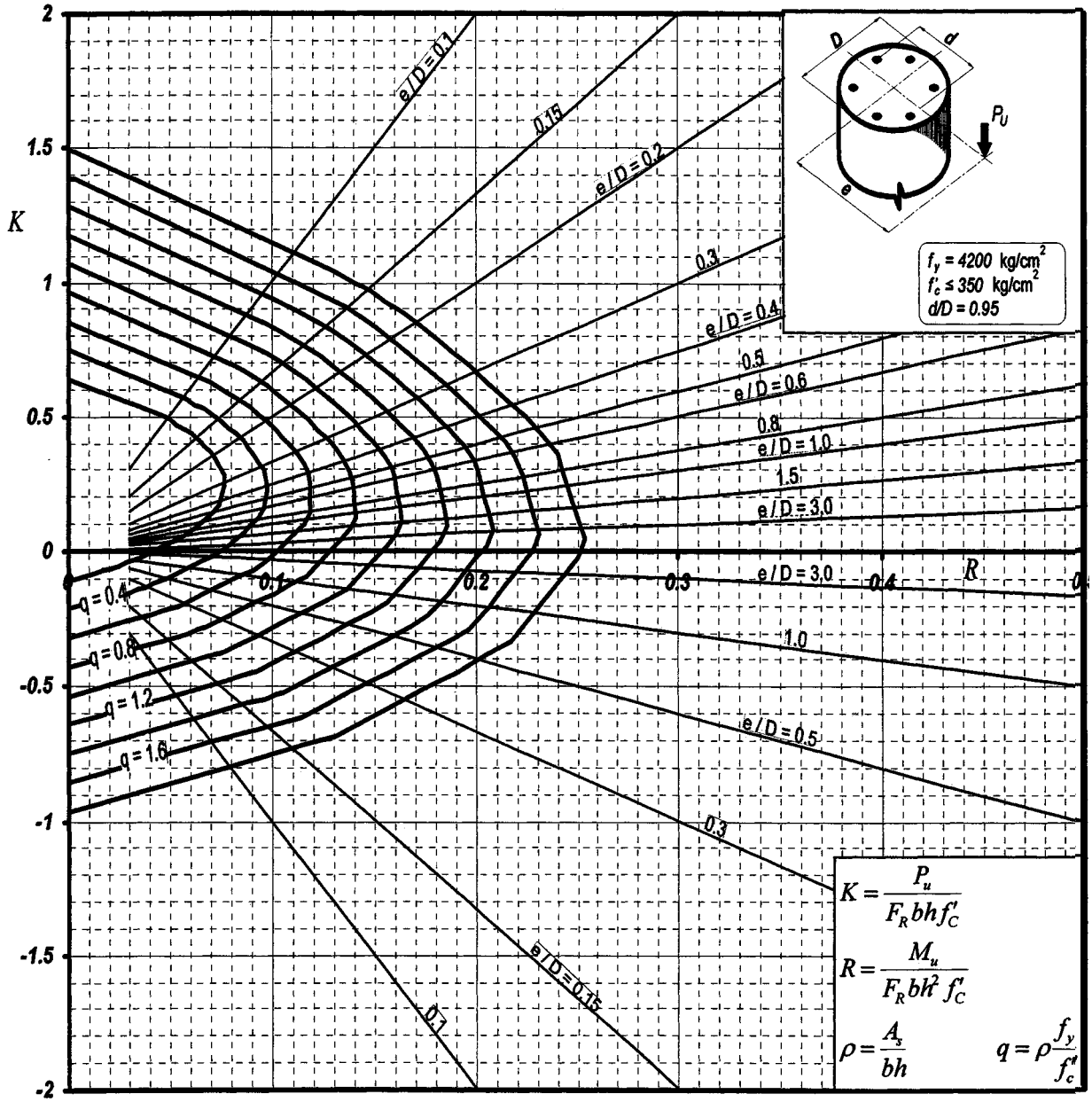
A_s = Área total de refuerzo
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.23



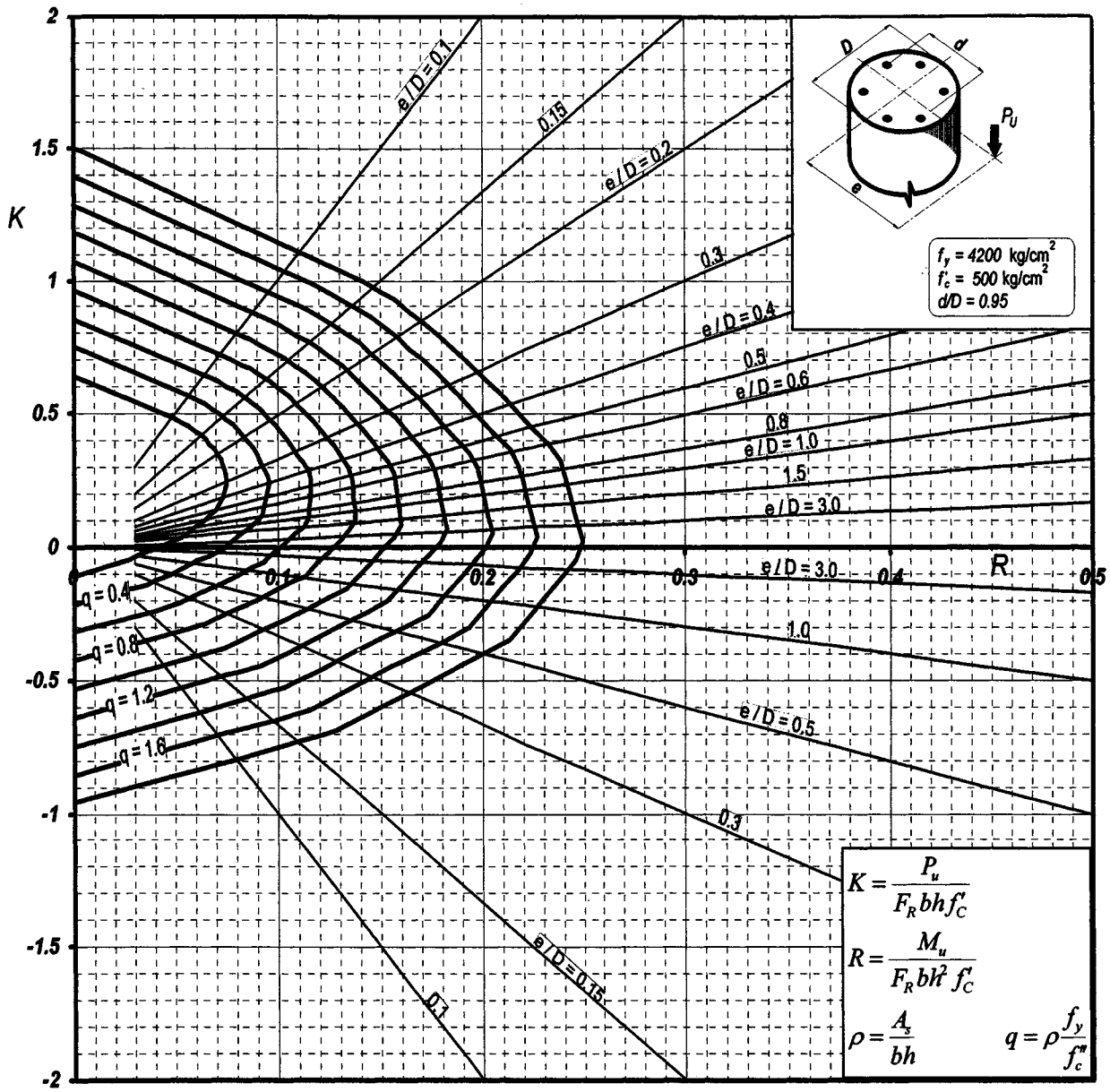
A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.24



A_s = Área total de refuerzo
$f''_C = 0.85\ f^*_C$
$f^*_C = 0.80\ f'_C$
F_R = Factor de reducción de resistencia
P_u = Carga axial última
M_u = Momento flexionante último

Figura C.25

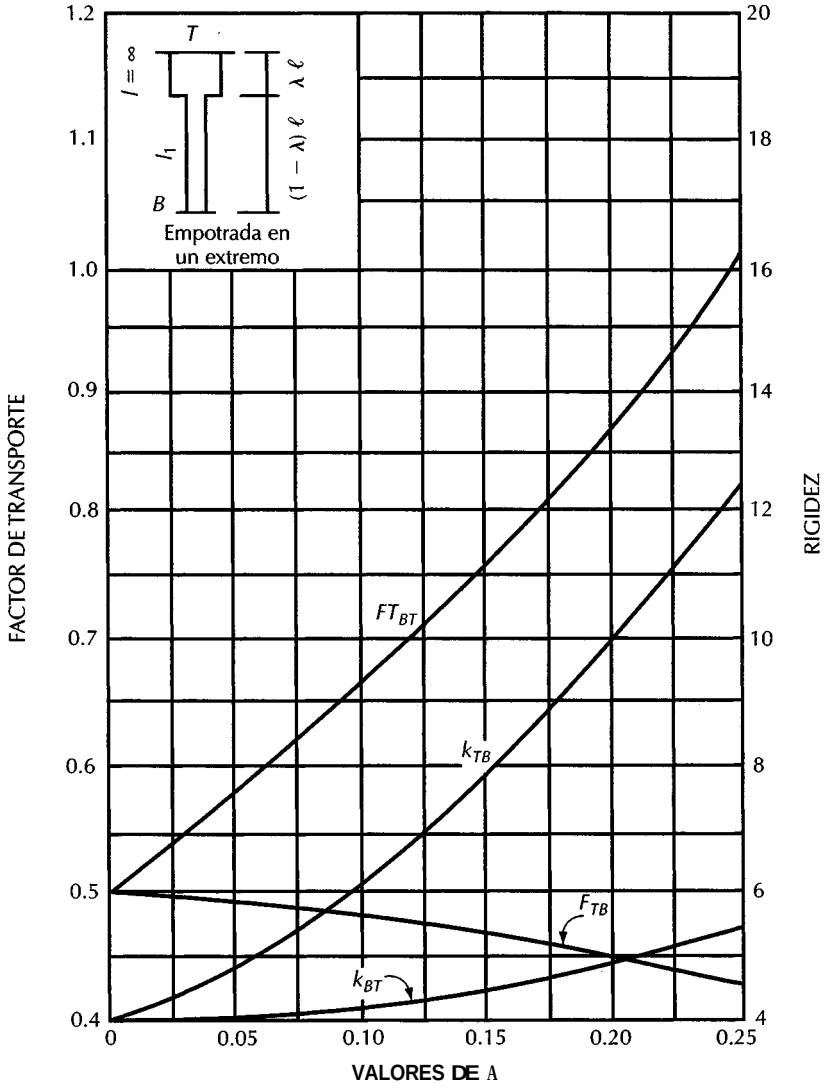


A_s = *Área total de refuerzo*
$f''_c = 0.85\ f^*_c$
$f^*_c = 0.80\ f'_c$
F_R = *Factor de reducción de resistencia*
P_u = *Carga axial última*
M_u = *Momento flexionante último*

Figura C.26

APÉNDICE D

D.1 Gráfica para determinar factores de rigidez y transporte para miembros con rigidez infinita en una parte de su longitud.

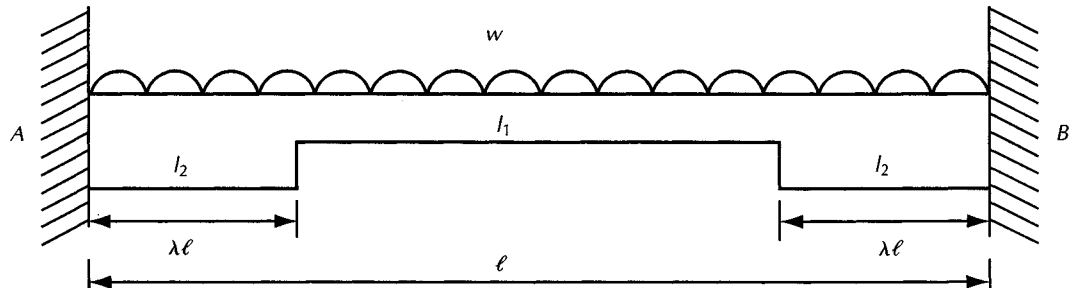


Rigideces:

$$K_{BT} = k_{BT}\,\frac{EI_1}{\ell}$$

$$K_{TB} = k_{TB}\,\frac{EI_1}{\ell}$$

D.2 Ecuaciones para calcular los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte de vigas con tramos extremos iguales y con momentos de inercia distintos al del tramo central.



Momentos de empotramiento perfecto $= \overline{M} = \dfrac{\theta_A}{\theta_{AA} + \theta_{AB}}$

Rigidez a flexión $= K = \dfrac{\theta_{AA}}{\theta^2_{AA} - \theta^2_{AB}}$

Factor de transporte $= FT = \dfrac{\theta_{AB}}{\theta_{AA}}$

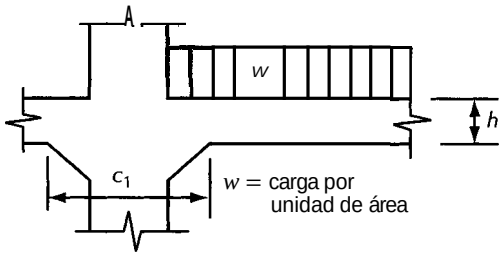
En las ecuaciones anteriores

$$\theta_A = \frac{w\ell^3}{24\,EI_1}(1 - 6\lambda^2 + 4\lambda^3) + \frac{w\,\ell^3}{24\,EI_2}(6\lambda^2 - 4\lambda^3)$$

$$\theta_{AA} = \frac{\ell}{EI_1}\left(\frac{1}{3} - \lambda + \lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{\ell}{EI_2}\left(\lambda - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

$$\theta_{AB} = \frac{\ell}{EI_1}\left(\frac{1}{6} - \lambda^2 + \frac{2}{3}\lambda^3\right) + \frac{\ell}{EI_2}\left(\lambda^2 - \frac{2}{3}\lambda^3\right)$$

D.3 Constantes para calcular los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte en sistema de piso sin vigas y con capiteles en las columnas.



Momentos de empotramiento perfecto = Mw $\ell_2\ell_1^2$

Rigidez a flexión = K = $k\ EI_2\ h^3/12\ \ell_1$

Factor de transporte = *FT*

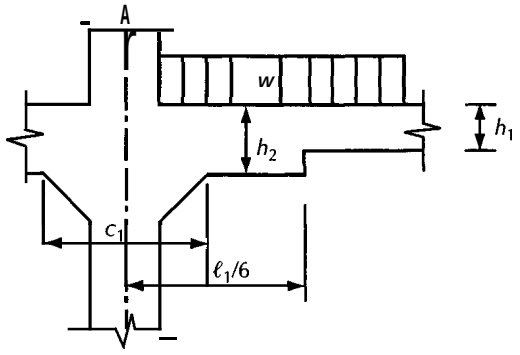
c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	*0.00*	*0.05*	*0.10*	*0.15*	*0.20*	*0.25*	*0.30*	*0.35*	*0.40*	*0.45*	*0.50*
0.00	*M*	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083	0.083
	k	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000	4.000
	FT	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500
0.05	*M*	0.083	0.084	0.084	0.084	0.085	0.085	0.085	0.086	0.086	0.086	0.086
	k	4.000	4.047	4.093	4.138	4.181	4.222	4.261	4.299	4.334	4.368	4.398
	FT	0.500	0.503	0.507	0.510	0.513	0.516	0.518	0.521	0.523	0.526	0.528
0.10	*M*	0.083	0.084	0.085	0.085	0.086	0.087	0.087	0.088	0.088	0.089	0.089
	k	4.000	4.091	4.182	4.272	4.362	4.449	4.535	4.618	4.698	4.774	4.846
	FT	0.500	0.506	0.513	0.519	0.524	0.530	0.535	0.540	0.545	0.550	0.554
0.15	*M*	0.083	0.084	0.085	0.086	0.087	0.088	0.089	0.090	0.090	0.091	0.092
	k	4.000	4.132	4.267	4.403	4.541	4.680	4.818	4.955	5.090	5.222	4.349
	FT	0.500	0.509	0.517	0.526	0.534	0.543	0.550	0.558	0.565	0.572	0.579
0.20	*M*	0.083	0.085	0.086	0.087	0.088	0.089	0.090	0.091	0.092	0.093	0.094
	k	4.000	4.170	4.346	4.529	4.717	4.910	5.108	5.308	5.509	5.710	5.908
	FT	0.500	0.511	0.522	0.532	0.543	0.554	0.564	0.574	0.584	0.593	0.602
0.25	*M*	0.083	0.085	0.086	0.087	0.089	0.090	0.091	0.093	0.094	0.095	0.096
	k	4.000	4.204	4.420	4.648	4.887	5.138	5.401	5.672	5.952	6.238	6.527
	FT	0.500	0.512	0.525	0.538	0.550	0.563	0.576	0.588	0.600	0.612	0.623
0.30	*M*	0.083	0.085	0.086	0.088	0.089	0.091	0.092	0.094	0.095	0.096	0.098
	k	4.000	4.235	4.488	4.760	5.050	5.361	5.692	6.044	6.414	6.802	7.205
	FT	0.500	0.514	0.527	0.542	0.556	0.571	0.585	0.600	0.614	0.628	0.642
0.35	*M*	0.083	0.085	0.087	0.088	0.090	0.091	0.093	0.095	0.096	0.098	0.099
	k	4.000	4.264	4.551	4.864	5.204	5.575	5.979	6.416	6.888	7.395	7.935
	FT	0.500	0.514	0.529	0.545	0.560	0.576	0.593	0.609	0.626	0.642	0.658
0.40	*M*	0.083	0.085	0.087	0.088	0.090	0.092	0.094	0.095	0.097	0.099	0.100
	k	4.000	4.289	4.607	4.959	5.348	5.778	6.255	6.782	7.365	8.007	8.710
	FT	0.500	0.515	0.530	0.546	0.563	0.580	0.598	0.617	0.635	0.654	0.672
0.45	*M*	0.083	0.085	0.087	0.088	0.090	0.092	0.094	0.096	0.098	0.100	0.101
	k	4.000	4.311	4.658	5.046	5.480	5.967	6.517	7.136	7.836	8.625	9.514
	FT	0.500	0.515	0.530	0.547	0.564	0.583	0.602	0.621	0.642	0.662	0.683
0.50	*M*	0.083	0.085	0.087	0.088	0.090	0.092	0.094	0.096	0.098	0.100	0.102
	k	4.000	4.331	4.703	5.123	5.599	6.141	6.760	7.470	8.289	9.234	10.329
	FT	0.500	0.515	0.530	0.547	0.564	0.583	0.603	0.624	0.645	0.667	0.690
$x=(1-c_2/\ell_2)^3$		1.000	0.856	0.729	0.613	0.512	0.421	0.343	0.274	0.216	0.166	0.125

D.4 Constantes para calcular los momentos de empotramiento, rigideces y factores de transporte en sistema de piso sin vigas, y con ábacos y capiteles.

Momentos de empotramiento perfecto = Mw $\ell_2\ell_1^2$

Rigidez a flexión = K = $k\ EI_2\ h^3/12\ \ell_1$

Factor de transporte = FT



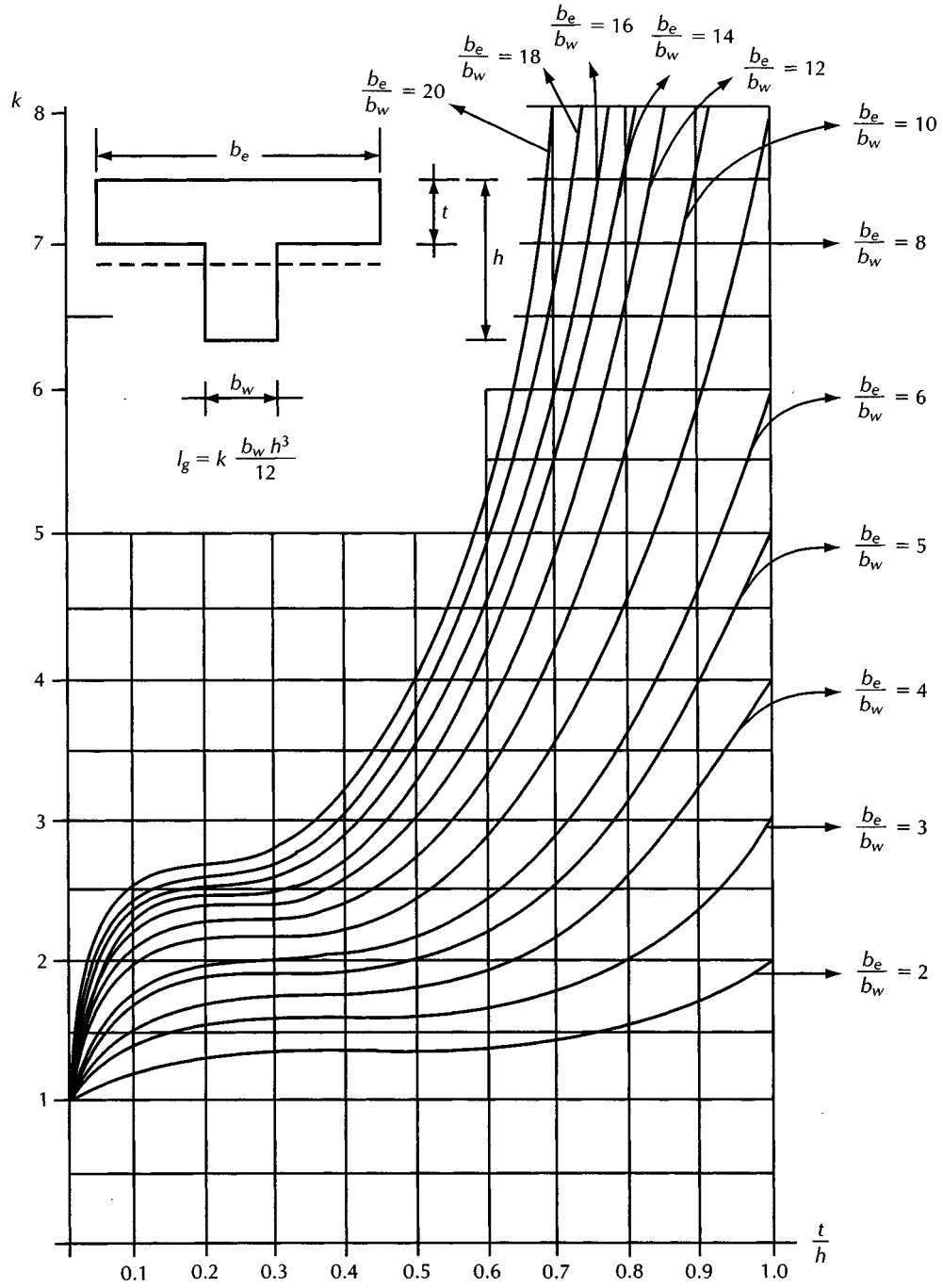
a) Constantes para $h_2 = 1.25\ h_1$

c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	*0.00*	*0.05*	*0.10*	*0.15*	*0.20*	*0.25*	*0.30*
0.00	*M*	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088	0.088
	k	4.795	4.795	4.795	4.795	4.795	4.795	4.797
	FT	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542	0.542
0.05	*M*	0.088	0.088	0.089	0.089	0.089	0.089	0.090
	k	4.795	4.846	4.896	4.944	4.990	5.035	5.077
	FT	0.542	0.545	0.548	0.551	0.553	0.556	0.558
0.10	*M*	0.088	0.088	0.089	0.090	0.090	0.091	0.091
	k	4.795	4.894	4.992	5.039	5.184	5.278	5.368
	FT	0.542	0.548	0.553	0.559	0.564	0.569	0.573
0.15	*M*	0.088	0.089	0.090	0.090	0.091	0.092	0.092
	k	4.795	4.938	5.082	5.228	5.374	5.520	5.665
	FT	0.542	0.550	0.558	0.565	0.573	0.580	0.587
0.20	*M*	0.088	0.089	0.090	0.091	0.092	0.093	0.094
	k	4.795	4.978	5.184	5.361	5.558	5.760	5.962
	FT	0.542	0.552	0.562	0.571	0.581	0.590	0.590
0.25	*M*	0.088	0.089	0.090	0.091	0.092	0.094	0.095
	k	4.795	5.015	5.245	5.485	5.735	5.994	6.261
	FT	0.542	0.553	0.565	0.576	0.587	0.598	0.600
0.30	*M*	0.088	0.089	0.090	0.092	0.093	0.094	0.095
	k	4.795	5.048	5.317	5.601	5.902	6.219	6.550
	FT	0.542	0.554	0.567	0.580	0.593	0.605	0.618

b) **Constantes** para $h_2 = 1.5\ h_1$

c_1/ℓ_1	c_2/ℓ_2	*0.00*	*0.05*	*0.10*	*0.15*	*0.20*	*0.25*	*0.30*
0.00	*M*	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093	0.093
	k	5.837	5.837	5.837	5.837	5.837	5.837	5.837
	FT	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589	0.589
0.05	*M*	0.093	0.093	0.093	0.093	0.094	0.094	0.094
	k	5.837	5.890	5.942	5.993	6.041	6.087	6.131
	FT	0.589	0.591	0.594	0.596	0.598	0.600	0.602
0.10	*M*	0.093	0.093	0.094	0.094	0.094	0.095	0.095
	k	5.837	5.940	6.042	6.142	6.240	6.335	6.427
	FT	0.589	0.593	0.598	0.602	0.607	0.611	0.615
0.15	*M*	0.093	0.093	0.094	0.095	0.095	0.096	0.096
	k	5.837	5.986	6.135	6.284	6.432	6.579	6.723
	FT	0.589	0.595	0.602	0.608	0.614	0.620	0.626
0.20	*M*	0.093	0.093	0.094	0.095	0.096	0.096	0.097
	k	5.837	6.027	6.221	6.418	6.616	6.816	7.015
	FT	0.589	0.597	0.605	0.613	0.621	0.628	0.635
0.25	*M*	0.093	0.094	0.094	0.095	0.096	0.097	0.098
	k	5.837	6.065	6.300	6.543	6.790	7.043	7.298
	FT	0.589	0.598	0.608	0.617	0.626	0.635	0.644
0.30	*M*	0.093	0.094	0.095	0.096	0.097	0.098	0.099
	k	5.837	6.099	6.372	6.657	6.953	7.258	7.571
	FT	0.589	0.599	0.610	0.620	0.631	0.641	0.651

D.5 Gráfica para calcular el momento de inercia de sección T o L.



APÉNDICE E

E.1 Equivalencias entre el "sistema MKS" (metro, kilogramo-fuerza, segundo) y el "sistema internacional de medidas SI".

Fuerzas

1 kgf (kilogramo-fuerza) = 9.807 N (newton)
1 N = 0.102 kgf
1 kN (kilonewton) = 10^3 N = 102 kgf
1 MN (meganewton) = 10^6 N = 102,000 kgf

Esfuerzos o presiones

1 N/m^2 = 1 Pa (pascal)
1 kgf/m^2 = 9.807 N/m^2 = 9.807 Pa
1 kgf/cm^2 = 98,070 N/m^2 = 98,070 Pa ≅ 0.1 N/mm^2
1 N/mm^2 = 1 MN/m^2 = 1 MPa (megapascal) = 10.2 kgf/cm^2

Momentos

1 kN-m (kilonewton-metro) = 10^3 N · m (newton-metro)
1 kgf-m = 9.807 N · m = 9807 N · mm
1 N · mm = 102×10^{-6} kgf-m = 102×10^{-3} ton-m

Nota: en cálculos de concreto reforzado, las unidades del sistema SI más comúnmente utilizadas son las siguientes: dimensiones lineales y propiedades de secciones: mm, mm^2, mm^3, mm^4. Fuerzas: N. Esfuerzos: MPa. Momentos: N · mm.

índice

Acciones, 17, 21
Acción-respuesta, características, 17
Acero de refuerzo,
  acero máximo en vigas, 443, 711
  acero máximo en columnas, 522
  acero mínimo en columnas, 521
  acero mínimo en losas, 549, 577, 598
  acero mínimo en vigas, 443, 711
  corrugaciones, 276
  curvas esfuerzo-deformación, 33
  deformaciones por cambio de temperatura, 48
  dimensiones de barras, 48
  separación entre barras, 265, 444, 521
  mallas, 50
  soldabilidad, 50
  tipos, 48
  trabajabilidad, 50
Adherencia, 261, 266
  adherencia en anclaje, 262
  adherencia en flexión, 263
  ensayes, 268, 271
  esfuerzos, 261
Agregados, 31, 47
Agrietamiento, 309
  agrietamiento en losas, 320, 570
  agrietamiento permisible, 321, 325
  cálculo de ancho y separación de grietas, 316
  carga de agrietamiento inclinado, 165
  ejemplos, 326
  mecanismos de agrietamiento, 311
Agujeros en losas, 187
Análisis estructural, 14, 17,22
  análisis al límite, 24
  análisis de segundo orden, 418
  coeficientes para análisis aproximado, 481
  factor de transporte, 791, 792, 793, 794
  método de la estructura equivalente, 593, 676
  método directo, 592, 638
  momentos de empotramiento, 791, 792, 793, 794
  rigidez, 791, 792, 793, 794
Anclaje, 261
  ejemplos, 291
  longitud de anclaje o desarrollo, 676
  refuerzo longitudinal, 261, 277
  refuerzo transversal, 291
  requisitos en zonas sísmicas, 716
Aplastamiento, 395, 396
Ayudas de diseño, 425, 442, 737

B

Barras de refuerzo *(véase* Acero de refuerzo)
Bloques de esfuerzos de compresión, 84
Bresler, fórmula de, 148

C

Cargas (véase acciones)
Cemento,
  efecto en la resistencia del concreto, 31, 35
  tipos de cemento, 35
Cilindros para ensayes, 37, 39, 55
Columnas, 65, 127, 521
  ayudas para el dimensionamiento, 525, 763
  columnas de estribos, 67, 526
  columnas esbeltas, 411, 414, 417
  columnas zunchadas, 67, 526
  comportamiento en carga axial, 65
  comportamiento en flexocompresión, 129
  detallado del refuerzo, 66, 521
  dimensionamiento, 521
  efecto de la fuerza cortante, 525, 538, 714
  ejemplos, 70, 538, 730
  excentricidad mínima, 522
  flexocompresiónbiaxial, 150, 541
  fórmula de Bresler, 148
  momento de inercia, 424-425
  momentos en columnas, 645, 713
  refuerzo longitudinal, 521, 522, 714
  refuerzo transversal, 522, 714
  requisitos especiales en zonas sísmicas, 713
  resistencia en carga axial, 65
  resistencia en flexocompresión, 129
Compresión axial, 55
Computadoras, programas de, 14, 442
Concreto simple, 32
  características esfuerzo-deformación, 32
  características generales, 17, 32
  compresión triaxial, 37
  contracción, 44
  deformaciones por cambios de temperatura, 48
  efecto de la edad, 34
  fatiga, 46
  flexión, 41
  flujo plástico, 45
  tensión, 39
Construcción, procedimientos de, 16
Contracción, 44, 346
Control de calidad, 53, 57, 61
Cortante *(véase* Fuerza cortante).
Cortante por fricción, 382
Corte y doblado de barras, 177, 288, 444

Costo, 13, 15
Cuantía balanceada (véase Refuerzo balanceado)
Cuantía de acero (véase Acero de Refuerzo)
Cubos para ensayes, 56
Curva esfuerzo-deformación,
del acero, 49
del concreto, 31

Deflexiones, 339
cálculo de deflexiones, 342, 347
cargas de corta duración, 341
cargas de larga duración, 346
deflexiones permisibles, 349
efecto de la contracción, 346
efecto del flujo plástico, 347
ejemplos, 352
momentos de inercia efectivos, 343
Deformaciones (véase Deflexiones)
Detallado del refuerzo, 441, 521-522, 707
corte y doblado de barras, 177, 277,288,444
detalles de esquina, 708
detalles de anclaje, 279-280
detalles para zonas sísmicas, 709
empalmes y traslapes, 284, 285, 288,445
ganchos, 279, 445
haces de barras, 444, 521
recomendaciones generales, 445
recubrimiento, 316, 445
Diafragmas (véase Vigas de gran peralte)
Diagramas de interacción, 127, 129, 152, 230, 232, 233, 234, 235, 525, 763
Dimensionamiento,
columnas, 521
losas, 547, 569, 589, 633
recomendaciones generales, 13, 22,439
vigas, 443, 446, 480
Diseño estructural, 13, 14
método de esfuerzos permisibles o de trabajo, 23
método plástico, de resistencia o de resistencia última, 23
método por estados límites, 23
métodos probabilistas, 19-20

E

Empalmes de barras, 284, 285, 288
Ensayes de acero, 58
Ensayes de concreto
compresión, 55
flexión, 57
tensión, 39, 57
Esbeltez, 411
cálculo de los efectos de esbeltez, 417, 420
desplazamiento lateral, 412, 416
duración de la carga, 417
efecto de la curvatura, 414
efectos de segundo orden, 416
ejemplos, 426
longitud efectiva de pandeo, 423
restricciones en los extremos, 414
valor efectivo de El, 423, 424
Escaleras, 708
Esfuerzos principales, 159
Esfuerzos reducidos, 85-86
Estadística, parámetros, 58, 63
Estribos, 65, 166, 172, 173, 181, 183, 184, 185,445
Estructura equivalente, 593, 676

F

Factor de carga, 24, 26
Factor de reducción de resistencia, 24, 27, 69-70
Factores de rigidez y transporte, 791, 792, 793, 794
Factor de seguridad, 19
Falla, criterios de, 43
Fatiga, 46
Flexión, 79
ayudas de diseño, 442, 737
cálculo de resistencia, 86, 121
comportamiento y modos de falla, 79
dimensionamiento, 439
ejemplos, 187, 447
flexión asimétrica, 119
flexión de ménsulas, 378, 384, 390
flexión en vigas de gran peralte, 394,396
flexión simple, 79
gráfica carga-deflexión, 80, 81
hipótesis para el cálculo de resistencia, 83
módulo de rotura, 42
Flexocompresión, 127
biaxial, 148-149
cálculo de resistencia, 129, 142
comportamiento y modos de falla, 129
dimensionamiento, 521
ejemplos, 132, 239
Flexotensión, 152
Flujo plástico, 45, 346
Fuerza cortante, 159
analogía de la armadura, 172
cálculo de resistencia, 178, 180
carga de agrietamiento inclinado, 165, 176
comportamiento y modos de falla, 163
cortante en losas y zapatas, 167, 175, 178-179, 184, 552, 578, 604, 643, 645
cortante en ménsulas, 382
cortante en vigas, 163, 170, 645, 712
cortante en vigas de gran peralte, 396,399
dimensionamiento, 446
ejemplos, 195, 468
mecanismos de falla, 170
refuerzo por cortante, 166, 171, 175, 184, 712
Fuerzas laterales, 703

G

Ganchos, 279,445
Grietas (véase Agrietamiento)

H

Haces de barras, 445, 521

I

índice de refuerzo, 83
índice de resistencia, 53, 54
Interacción, flexión y compresión, 127,129
flexión y torsión, 230
torsión, cortante y flexión, 258
torsión y carga axial, 233
torsión y cortante, 231

L

Líneas de fluencia, 570
Longitud de anclaje o desarrollo, 268,277

Longitud efectiva de pandeo, 423-424
Losas, 547, 569, 589, 633
acero mínimo, 549, 578, 599-600
acero por cambios volumétricos, 550
agrietamiento, 320, 571
agujeros, 187
análisis, 552, 571, 592, 634, 638, 643, 676, 683, 702
ancho equivalente, 599-600
cargas concentradas, 557, 579
cargas lineales, 579
coeficientes para diseño, 575, 596, 642
deflexiones, 341, 569
detallado del refuerzo, 551, 651
ejemplos, 552, 554, 580, 600, 653, 672, 685
fuerza cortante, 162, 167, 174, 1.77, 178, 184, 552, 579, 645
líneas de fluencia, 570
losas encasetonadas o reticulares, 589, 633
losas en una dirección, 547
losas apoyadas perimetralmente, 569
losas planas, 589, 633
método de la estructura equivalente, 593, 634, 676, 701
método directo, 592, 638
método generalizado (método ACI), 633
momento estático total, 592, 640
peralte mínimo, 549, 577, 600, 650
separación de barras, 550, 579, 600, 650-651
transferencia de momento, 187, 604, 643

Malla de refuerzo, 50
Marco equivalente (véase Estructura equivalente)
Marcus, método de, 573
Ménsulas, 377
comportamiento y modos de falla, 377
cortante por fricción, 382
detalles de armado, 378
dimensionamiento, 384
ejemplo, 385
resistencia, 380
Modelos estructurales, 18, 53
Módulo de elasticidad
acero, 50, 96
al esfuerzo cortante, 47
concreto, 47
Módulo de Poisson, 48
Módulo de rotura, 41
Momentos de empotramiento, 792, 793, 794
Momentos de inercia, 796

O

Optimización, 14

P

Paquetes de barras (véase Haces de barras)
Pisos, sistemas de (véase Losas)
Placas planas (véase Losas planas)
Planos, 14
Porcentaje de refuerzo (véase Acero de refuerzo)
Prefabricación, 16
Probabilidad,
de falla, 18-19
enfoques, 20
Proporcionamiento de mezclas, 62-63
Prueba brasileña, 40

R

Recubrimiento de concreto, 265, 315,445
Refuerzo (véase Acero, detallado del refuerzo y el elemento estructural de que se trate)
Refuerzo balanceado, 80, 111, 443
Refuerzo, índice de, 82-83
Relación acero-concreto (véase Acero de refuerzo)
Relación ancho-peralte, 177
Relación modular, *n,* 324
Resistencia,
compresión axial, 55, 59
cortante por fricción, 382
definición, 19, 27
flexión, 57, 79, 83
flexión asimétrica, 119
flexocompresión, 127
flexotensión, 152
fuerza cortante, 177, 180
tensión, 39, 57-58, 70, 176
torsión simple, 217
torsión, flexión y cortante, 233
torsión y carga coaxial, 233
torsión y cortante, 231
torsión y flexión, 230
Resistencia de diseño, 24, 72
Rigidez a flexión, 792, 793, 794, 795
Rigidez de columnas, 422, 792

S

Sección balanceada, 80, 111
Sección doblemente armada, 95, 456
Sección simplemente armada, 87, 447,453
Sección sobrerreforzada, 80
Sección subreforzada, 80
Sección T, 105, 468
Sección transformada, 323
Secciones de forma cualquiera, 111, 476
Seguridad estructural, 13, 17, 24
Servicio, condiciones de, 17
Sismos, diseñado por,
ejemplo, 716
recomendaciones generales de dimensionamiento, 709
Sistemas, Ingeniería de, 13
Sistemas de medidas o de unidades, 5-6, 181, 797
Solicitaciones (véase Acciones)

T

Temperatura, efecto de la, 48
Tensión, 39, 57, 70, 176
Tensión diagonal (véase Fuerza cortante)
Tensores, 70
Tiempo, efectos del, 43
Torsión, 215
analogía de la membrana, 221
analogía del montón de arena, 223
cálculo de resistencia, 225, 235
comportamiento y modos de falla, 217
ejemplo, 239

refuerzo de torsión, 225, 232, 235,236
teoría de Hsu, 224
teoría elástica, 220
teoría plástica, 222
torsión combinada, 230, 231, 233
torsión simple, 217
Traslapes (véase Empalmes de barras)

Uniones, 708-709, 714

Velocidad de carga, 36
Velocidad de deformación, 36
Vigas, 79, 439
ayudas para el dimensionamiento, 443, 737, 739
coeficientes para análisis aproximado, 481
comportamiento en cortante, 163
comportamiento en flexión, 79
comportamiento en torsión, 217
dimensionamiento, 443, 448
ejemplos de dimensionamiento, 470, 477, 716
requisitos especiales en zonas sísmicas, 711
vigas de sección cualquiera, 476
vigas rectangulares doblemente armadas, 456
vigas rectangulares simplemente armadas, 447
vigas T, 468
Vigas de gran peralte, 393
comportamiento *y* modos de falla, 394
dimensionamiento, 399
ejemplo, 401

Z

Zapatas, 167, 175, 177, 179, 184, 192, 551, 578, 606, 643, 645