

**Fritz Leonhardt**

TOMO II

# **ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO**

Cursos de la Universidad de Stuttgart  
de estructuras de hormigón armado

**EL ATENEO**



**ESTRUCTURAS  
DE HORMIGON ARMADO**

## **PLAN DE LA OBRA**

### *TOMO I*

F. Leonhardt - E. Mönnig: BASES PARA EL DIMENSIONADO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO

### *TOMO II*

F. Leonhardt - E. Mönnig: CASOS ESPECIALES DEL DIMENSIONADO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO

### *TOMO III*

F. Leonhardt - E. Mönnig: BASES PARA EL ARMADO DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO

### *TOMO IV*

F. Leonhardt: VERIFICACION DE LA CAPACIDAD DE USO

### *TOMO V*

F. Leonhardt: HORMIGON PRETENSADO

### *TOMO VI*

F. Leonhardt: BASES PARA LA CONSTRUCCION DE PUENTES MONOLITICOS

# **ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO**

**Fritz Leonhardt  
Eduard Mönnig**

*TOMO II*

**CASOS ESPECIALES DEL DIMENSIONADO  
DE ESTRUCTURAS DE HORMIGON ARMADO**

Traducción del ingeniero *CURT R. LESSER*,  
Diploma de Honor de la U.B.A. (1936),  
con la desinteresada colaboración  
del ingeniero *ENRIQUE D. FLIESS* († 1984),  
Profesor Emérito de la U.B.A.

SEGUNDA EDICION  
REVISADA



LIBRERÍA "EL ATENEO" EDITORIAL  
BUENOS AIRES - LIMA - RIO DE JANEIRO - CARACAS - MEXICO  
BARCELONA - MADRID - BOGOTÁ

*“El Ateneo” quiere dejar constancia del desinteresado  
asesoramiento y apoyo para la realización de esta obra,  
prestados en todo momento por el ingeniero Enrique D.  
Fliess ( † 1984), prestigioso y antiguo  
colaborador de nuestra casa.*

Título de la obra original: “Vorlesungen über Massivbau”  
© 1973 por Springer - Verlag, Berlin/Heidelberg

Todos los derechos reservados.

Este libro no puede reproducirse, total o parcialmente,  
por ningún método gráfico, electrónico o mecánico,  
incluyendo los sistemas de fotocopia, registro  
magnetofónico o de alimentación de datos, sin expreso  
consentimiento del editor.

Queda hecho el depósito que establece la ley N° 11.723.

© 1985. 1986 “EL ATENEO” Pedro García S.A.

Librería, Editorial e Inmobiliaria, Florida 340, Buenos Aires.

Fundada en 1912 por don Pedro García.

I.S.B.N. 950-02-5242-2 edición completa  
I.S.B.N. 950-02-5263-5 tomo II, 2ª edición, revisada y corregida  
I.S.B.N. 950-02-5244-9 (tomo II, 2ª edición)  
I.S.B.N. 3-540-08121-6 Springer - Verlag, Berlin,  
edición original

IMPRESO EN LA ARGENTINA

## Prólogo

*Sin duda es un honor prologar una obra del Dr. Ing. Leonhardt y especialmente ésta que tiene tanta importancia en los más recientes progresos en la Técnica de las Construcciones de Hormigón Armado y Pretensado.*

*En efecto, en los albores de esta técnica las bases racionales con sustento experimental fueron establecidas por el famoso ingeniero E. Mörsch en numerosos trabajos y en su conocida obra en seis tomos, cuya traducción a nuestro idioma ha tenido amplia difusión (Teoría y práctica del hormigón armado).*

*La obra de Mörsch data de la década del 30 y desde entonces se ha progresado mucho en la teoría y en las aplicaciones del hormigón armado. Varios nombres pueden asociarse a estos progresos, tales como Saliger, Dischinger, Pucher, etcétera, pero, sin duda, la influencia más notable es la de Leonhardt, que ha realizado profundos estudios teóricos, además de numerosas experiencias en la Universidad de Stuttgart.*

*Conviene tener presente que los reglamentos en uso en la época de Mörsch, tales como la DIN 1045 en su edición de 1932, que fue adaptada en nuestro Reglamento Técnico de la Ciudad de Buenos Aires de 1935, constituyen prácticamente un "manual" en el que unas pocas reglas prácticas permitían proyectar todos los elementos constitutivos de una estructura de hormigón (en aquella época solamente en bases, columnas, vigas y losas). Eran tan simples las reglas que aun un ingeniero sin conocimientos profundos de la Técnica de las Construcciones, ni del Análisis Estructural, podía realizar un proyecto sin dificultad.*

*De aquellos reglamentos-manual se ha pasado ahora a lo que podríamos llamar los reglamentos-tratado. En estos últimos, por ejemplo la Norma DIN 1045 de 1978, además de reglas constructivas y de proyecto, se plantean una serie de problemas cuya resolución queda a cargo de quien realiza el proyecto en cada caso particular.*

*El proyectista en nuestros días debe ser, para poder actuar con éxito, un profundo conocedor de la Mecánica de las Estructuras.*

*La influencia de Leonhardt en la Norma DIN 1045 del año 1978 es, sin duda, importantísima y se ha ejercido a través de la Comisión Alemana para el Hormigón Armado y también del Comité Euro-Internacional del Hormigón.*

*En nuestro país acaban de ser aprobados, en el ámbito nacional, los Reglamentos CIR-SOC (Centro de Investigación de los Reglamentos Nacionales de Seguridad para las Obras Civiles) que en lo concerniente al Cálculo de los Elementos de Hormigón Armado y Pretensado son fundamentalmente una adaptación de la norma alemana citada en último término.*

*La importancia de la obra de Leonhardt, que a partir de ahora estará al alcance de los estudiosos ingenieros de habla hispana, así como de quienes tengan un interés profesional en el hormigón armado, resulta de que él mismo no solo ha influido en las nuevas normas, sino que además es un crítico de algunos aspectos de ellas, con los que no está de acuerdo. Sus desacuerdos en la gran mayoría de los casos tienen también sustento experimental y los resultados de sus experiencias están cuidadosamente expuestos en este magistral tratado.*

*Considero que esta obra es indispensable para cualquier ingeniero que deba tratar en*

*alguna forma los temas del hormigón armado y pretensado, puesto que en ella encontrarán no solo el porqué de muchas disposiciones reglamentarias que ahora, por lo que se dijo, son comunes a la Norma DIN y a los Reglamentos CIRSOC, sino también la descripción de su fundamento experimental y además su crítica muy correctamente sustentada.*

*La versión en nuestro idioma fue realizada por el Ingeniero Curt R. Lesser, egresado en 1936 de la Universidad de Buenos Aires con Diploma de Honor, habiendo tenido durante su extensa carrera profesional un íntimo contacto con las estructuras de hormigón. En esta importante y difícil tarea contó con la desinteresada colaboración y guía del Ingeniero Enrique D. A. Fliess ( † 1984), Profesor Emérito de la Universidad de Buenos Aires, cuya versación en los temas relacionados con el hormigón armado quedó evidenciada a lo largo de una serie de trabajos de la especialidad bien conocidos en nuestro medio y en el extranjero.*

*En los tiempos que vivimos, la vida útil de los textos y los tratados es, en general, muy breve. Puedo afirmar que en este caso la regla general no se cumplirá pues los experimentos y la profundidad de la teoría son tales que perdurarán por muchos años. Es por ello que esta obra servirá para la formación de alumnos, futuros ingenieros, que luego la seguirán consultando a lo largo de su vida profesional.*

*Esto justifica plenamente el esfuerzo realizado por el Ing. Fliess, el Ing. Lesser y la Editorial "El Ateneo".*

Arturo Juan Bignoli  
Ingeniero civil.  
Profesor en las Universidades de Buenos Aires  
y Católica Argentina. Miembro titular  
de las Academias Nacionales de Ingeniería  
y de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales y Académico  
Correspondiente de la Academia Nacional de Ciencias de Córdoba.

*Buenos Aires, diciembre de 1984*

# Indice

1. ARMADURA OBLICUA RESPECTO A LA DIRECCION DE LA SOLICITACION, 1
  - 1.1. Introducción, 1
  - 1.2. Chapas con mallas de armadura ortogonal, 2
    - 1.2.1. Los esfuerzos y su equilibrio en un elemento de chapa, 2
    - 1.2.2. Inclinación  $\varphi$  de las fisuras cuando la armadura trabaja en régimen elástico ( $\sigma_e < \beta_S$ ), 6
      - 1.2.2.1. Solución mediante el mínimo trabajo de deformación, 6
      - 1.2.2.2. Solución mediante la compatibilidad de las deformaciones, 8
    - 1.2.3. Inclinación de las fisuras al alcanzarse el límite de escurrimiento ( $\epsilon_e > \beta_S/E_e$ ), 9
  - 1.3. Chapas con una única dirección de armadura, 9
  - 1.4. Placas con armadura constituida por mallas ortogonales, 10
  - 1.5. Normas para el dimensionado, 11
    - 1.5.1. Generalidades, 11
    - 1.5.2. Dimensionado de estructuras constituidas por chapas, en el caso de armaduras oblicuas a las direcciones principales, 12
    - 1.5.3. Dimensionado de placas solicitadas a flexión con armadura oblicua con respecto a las direcciones de los momentos principales, 14
2. VIGAS DE GRAN ALTURA (VIGAS-PARED), MENSULAS, CHAPAS, 17
  - 2.1. Definición, 17
  - 2.2. Procedimiento para determinar las tensiones en el Estado I, 17
  - 2.3. Esfuerzos característicos y tensiones en vigas de gran altura, 18
    - 2.3.1. Generalidades, 18
    - 2.3.2. Tensiones en vigas de gran altura de un solo tramo, 19
      - 2.3.2.1. Cargas uniformemente distribuidas, 19
      - 2.3.2.2. Cargas concentradas, 21
      - 2.3.2.3. Influencia de los refuerzos en los apoyos, 23
    - 2.3.3. Tensiones en vigas de gran altura de varios tramos, 24
      - 2.3.3.1. Carga uniforme, 24
      - 2.3.3.2. Cargas concentradas, 27
      - 2.3.3.3. Influencia de los refuerzos en los apoyos, 27
      - 2.3.3.4. Sobre la obtención de los esfuerzos característicos en vigas continuas de gran altura, 31
    - 2.3.4. Determinación de las tensiones según W. Schlee, 32
  - 2.4. Vigas de gran altura en Estado II desde el punto de vista de su dimensionado, 33
    - 2.4.1. Vigas de gran altura directamente apoyadas, 33
    - 2.4.2. Vigas de gran altura indirectamente apoyadas o cargadas, 37
  - 2.5. Criterios de dimensionado para vigas de gran altura, 41
    - 2.5.1. Determinación del esfuerzo en el cordón traccionado, 41
    - 2.5.2. Limitación de las tensiones principales de compresión, 42
    - 2.5.3. Armadura de suspensión para cargas aplicadas en el borde inferior, 43

- 2.5.4. Mallas de armadura en la chapa, 44
- 2.5.5. Concepción de un modelo resistente y dimensionado según Nylander (Suecia), 44
- 2.6. Tensiones en ménsulas y chapas en voladizo, 45
- 2.7. Criterios de dimensionado para ménsulas y vigas de gran altura en voladizo, 48
- 3. INTRODUCCION DE CARGA O FUERZAS CONCENTRADAS, 52
  - 3.1. Descripción de las trayectorias de las tensiones, 52
  - 3.2. Métodos para determinar las tensiones, 54
    - 3.2.1. Solución teórica, 54
    - 3.2.2. Solución mediante elementos finitos, 55
    - 3.2.3. Solución mediante fotoelasticidad, 55
    - 3.2.4. Determinación de tensiones mediante extensómetros aplicados a modelos, 55
    - 3.2.5. Mediciones en piezas de hormigón, 55
    - 3.2.6. Soluciones simples aproximadas, 55
  - 3.3. Dimensionado del esfuerzo de hendedura en el caso de aplicación de cargas concentradas o fuerzas, en sistemas bidimensionales, 55
    - 3.3.1. La fuerza concentrada centrada, 55
      - 3.3.1.1. Esfuerzo de fractura por tracción para una presión uniforme  $p$ , 55
      - 3.3.1.2. Influencia de una presión  $p$  irregularmente distribuida, 59
      - 3.3.1.3. Tensiones en zonas de borde (entornos de vértices), 61
    - 3.3.2. Fuerza concentrada excéntrica de dirección  $x$ , 62
    - 3.3.3. Carga concentrada excéntrica, inclinada con respecto al eje  $x$ , 64
    - 3.3.4. Cargas o fuerzas concentradas, múltiples, 64
    - 3.3.5. Acción conjunta de los esfuerzos de pretensado y de las reacciones de vínculo en los extremos de vigas de hormigón armado, 65
    - 3.3.6. Acción conjunta de la aplicación de fuerzas con la flexión de la viga en los apoyos intermedios de vigas continuas, 68
    - 3.3.7. Carga concentrada aplicada en el interior de la chapa, 72
    - 3.3.8. Esfuerzos aplicados por adherencias a barras de armadura, 73
    - 3.3.9. Transferencia de una fuerza concentrada en una viga-placa, 74
  - 3.4. Valores de cálculo de los esfuerzos de fractura para el caso de introducción de cargas o fuerzas concentradas en un sistema tridimensional, 75
    - 3.4.1. Carga concentrada centrada, 76
      - 3.4.1.1. Las tensiones y el esfuerzo de fractura, 76
      - 3.4.1.2. Los esfuerzos de tracción en las zonas de borde, 80
    - 3.4.2. La carga concentrada excéntrica, 82
  - 3.5. Limitación de la presión de contacto en la superficie de carga, 82
  - 3.6. Introducción de fuerzas paralelas a la superficie de un elemento de hormigón, 83
    - 3.6.1. Introducción de fuerzas mediante pernos, 83
    - 3.6.2. Transmisión de esfuerzos mediante compresión previa (pretensado), 88
  - Apéndice a la sección 3.3.9, 89
- 4. ARTICULACIONES DE HORMIGON, 91
  - 4.1. Descripción, 91
  - 4.2. Criterios de dimensionamiento según Mönning-Netzel, 93
    - 4.2.1. Para apoyos lineales con rotaciones en torno a un eje, 93
    - 4.2.2. Apoyo puntual para rotaciones de cualquier dirección, 98
- 5. PUNZONADO DE PLACAS, 99
  - 5.1. Observación preliminar, 99
  - 5.2. Estado actual de los conocimientos, 99
  - 5.3. Modelos del proceso de punzonado sin armadura de corte para columnas interiores con carga centrada, 99
    - 5.3.1. Generalidades, 99
    - 5.3.2. Carga de punzonado según Kinnunen-Nylander (sin armadura de corte), 103
  - 5.4. Punzonado en el caso de columnas de borde o esquina, 105
  - 5.5. Criterios de dimensionado de acuerdo con DIN 1045, 106
    - 5.5.1. Caso normal de columnas interiores, 106
    - 5.5.2. Sobre la armadura de corte, 108
    - 5.5.3. Columnas de borde o de esquina, 108
    - 5.5.4. Aberturas en placas y canaletas para instalaciones, 108
    - 5.5.5. Refuerzos en las cabezas de columnas, losas-hongo, collares de acero, 110

- 6. DIMENSIONADO PARA CARGAS OSCILANTES O REPETIDAS CON FRECUENCIA, 112
  - 6.1. Criterios básicos, 112
  - 6.2. Criterios de dimensionado, 113
  - 6.3. Determinación de tensiones para carga de servicio, 114
  - 6.4. Verificación para carga oscilante según DIN 1045, 115
- 7. HORMIGÓN LIVIANO PARA ESTRUCTURAS PORTANTES, 118
  - 7.1. Observación preliminar. Tipos de hormigón liviano, 118
  - 7.2. Agregados y dosificación del hormigón liviano para estructuras, 119
    - 7.2.1. Agregados porosos, 119
    - 7.2.2. Granulometría y preparación del hormigón liviano, 121
  - 7.3. Flujo de esfuerzos en el hormigón liviano, 121
  - 7.4. Clases de hormigón liviano, 122
  - 7.5. Diferencias más importantes entre las propiedades de los hormigones livianos y normales, 123
    - 7.5.1. Resistencia a la tracción, 123
    - 7.5.2. Resistencia para cargas distribuidas parciales, 123
    - 7.5.3. Resistencia por adherencia, 124
    - 7.5.4. Deformaciones, relación  $\sigma - \epsilon$ , módulo E para cargas de corta duración, 125
    - 7.5.5. Expansión, retracción y deformación lenta, 125
    - 7.5.6. Comportamiento térmico del hormigón liviano, 128
    - 7.5.7. Protección de la armadura contra la corrosión, 130
  - 7.6. Conclusiones sobre el dimensionado de hormigón liviano con armadura (hormigón armado liviano y hormigón pretensado liviano), 130
  - 7.7. Sobre la economía de las estructuras de hormigón liviano, 132
  - 7.8. Aplicaciones, 132

*Bibliografía*, 133



## **Prefacio**

En el Tomo I de esta obra se trataron las bases para el dimensionado del hormigón armado y una breve información sobre materiales, así como el comportamiento bajo carga y el dimensionado de estructuras de barras solicitadas a flexión, corte y torsión con y sin esfuerzo axial, así como también el correspondiente a elementos comprimidos verificados contra el peligro de pandeo. En este segundo tomo se presentan casos especiales de dimensionamiento. Estos últimos son frecuentes en la práctica, pero generalmente se resuelven en forma deficiente por cuanto los métodos de aplicación práctica se han desarrollado recién en los últimos diez años y por ello aparecen en la bibliografía corriente tratados en forma anticuada, o simplemente no aparecen. Los nuevos procedimientos de cálculo en general se encuentran dispersos en revistas técnicas y por ello casi no son conocidos por los calculistas.

Nos hemos preocupado en este segundo tomo en mostrar, mediante una selección de lo publicado, de los informes más nuevos de las investigaciones y también de investigaciones propias, el estado actual de nuestros conocimientos al respecto, y presentarlos en una forma adecuada a su utilización práctica.

El último capítulo está dedicado al hormigón liviano, dándose un breve panorama de los distintos tipos de hormigón liviano para, a continuación, tratar a fondo el hormigón liviano para estructuras, por cuanto el mismo, justificadamente, es de aplicación cada vez mayor. Sus propiedades muy especiales implican para el dimensionado, apartarse de las reglas correspondientes al hormigón normal que se dan aquí para las condiciones vigentes en Alemania.

Para el contenido de este segundo tomo tienen mucha importancia las referencias bibliográficas, para lo cual nos hemos preocupado en indicar únicamente aquellas que son de relevancia en lo que respecta a los últimos avances de los desarrollos o que tienen importancia para una mayor profundización de los temas tratados, también para el ingeniero que se dedica a la parte práctica de su profesión.

Agradecemos a las señoras I. Paechter y V. Zander así como a los ingenieros adscriptos H. Lenzi y A. Hoch por el cuidado y esmero en la redacción y revisión del texto, así como en la preparación de las numerosas figuras.

Stuttgart, otoño de 1974

F. Leonhardt y E. Mönning

## **Prefacio a la segunda edición**

En la segunda edición se efectuaron algunas correcciones y agregados, manteniéndose sin modificar los temas tratados.

Stuttgart, Mayo 1975

F. Leonhardt y E. Mönning



# Armadura oblicua respecto a la dirección de la solicitación

## 1.1. Introducción

En el Tomo I de esta obra, Cap. 5 [1a], se estableció que la armadura actúa en forma más eficiente, cuando las barras de acero siguen la dirección de las tensiones principales o de los momentos principales. En ese caso, cruzan las fisuras ortogonalmente y pueden absorber directamente el esfuerzo de tracción en el hormigón. Pero en casi todas las estructuras existen zonas en que no es posible materializar, por razones prácticas dicha distribución ideal de la armadura.

Mientras que en los Caps. 8 y 9 del primer tomo se ha desarrollado el cálculo de la armadura en el alma de las vigas, donde para las solicitaciones por corte y torsión, la dirección de las tensiones principales de tracción difiere de la correspondiente a la armadura, daremos aquí normas de cálculo para armaduras dispuestas oblicuamente a la dirección de la solicitación en estructuras laminares (chapas, placas, cáscaras).

En los primeros trabajos referentes a este problema debidos a E. Suenson [2] y sobre todo a H. Leitz [3, 4] se supuso que las fisuras eran normales a la armadura y sólo se consideraron condiciones de equilibrio. W. Flügge [5] y G. Scholz [6], entre otros, ampliaron el estudio. En estas soluciones, la hipótesis que el esfuerzo de compresión en el hormigón coincidía con la bisectriz del ángulo que forman ambas direcciones de la armadura, conducía a la contradicción de que, luego de la fisuración, en determinados casos deberían actuar esfuerzos de compresión en el hormigón a través de las fisuras.

J. Peter [7] y F. Ebner [8, 9], para chapas y placas, partieron correctamente de que las primeras fisuras, independientemente de la dirección de la armadura, se formaban aproximadamente perpendiculares a la dirección de las tensiones principales de tracción (Fig. 1.1). De las condiciones de compatibilidad, resultan esfuerzos de resbalamiento a lo largo de las fisuras, que se transmiten en el caso de chapas, a través de las fisuras por encañado y efecto de cuña por trabazón de los agregados gruesos y la armadura y, en las placas, a través de la zona comprimida por flexión ubicada por encima de las fisuras. Estos esfuerzos de resbalamiento en las fisuras, originan tensiones secundarias de tracción en el hormigón y nuevas fisuras, que con respecto a las primeras tienen una cierta inclinación, y que a menudo resultan ubicadas entre las primeras.

R. Lenschow y M. Sozen [10], así como también posteriormente G. Wästlund junto con L. Hallbjörn [11] consideraron en sus contribuciones, sólo el estado de rotura, para el cual establecen las condiciones de equilibrio y obtienen la dirección de las fisuras de rotura mediante el principio del mínimo trabajo de deformación.

Th. Baumann [12, 13] fue el primero en llegar en 1972 a una solución satisfactoria. Utiliza tanto las condiciones de equilibrio como las de compatibilidad, y también el principio del

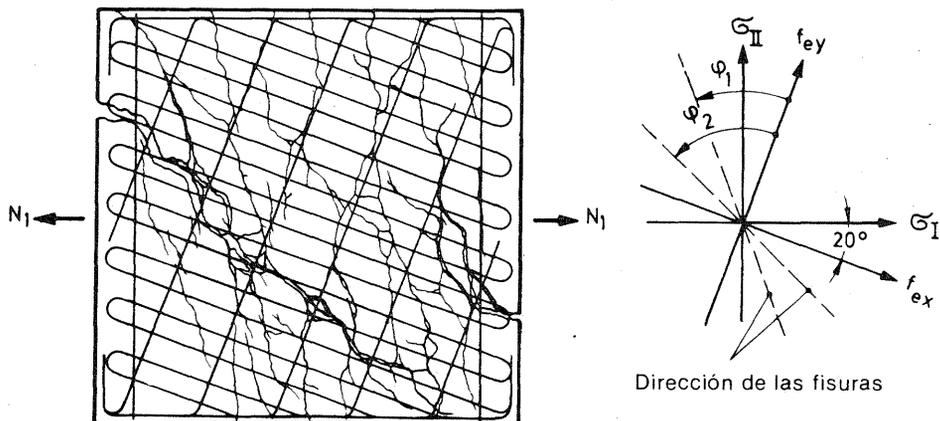


Fig. 1.1. Configuración de las fisuras en una chapa armada oblicuamente a la dirección de las tensiones principales de tracción y solicitada por un esfuerzo de tracción en una sola dirección, según J. Peter [6].

mínimo trabajo de deformación. Para ello distingue el estado al que corresponden tensiones en el acero en régimen elástico  $\sigma_e < \beta_S$  y el estado de rotura con  $\sigma_e > \beta_S$  (cuando se ha sobrepasado el límite de escurrimiento del acero) y obtiene para los dos estados distintas inclinaciones de las fisuras. Los desarrollos siguientes siguen el trabajo de Th. Baumann.

En el caso general pueden disponerse armaduras en una, dos o tres direcciones para absorber esfuerzos oblicuos, donde en el caso de dos y tres direcciones de armaduras los ángulos entre las mismas pueden ser cualesquiera. En lo que sigue, trataremos primeramente el caso de dos armaduras ortogonales. Para armaduras según tres direcciones oblicuas entre sí, se recomiendan los trabajos de Th. Baumann [12, 13].

## 1.2. Chapas con mallas de armadura ortogonal

### 1.2.1. Los esfuerzos y su equilibrio en un elemento de chapa

Consideremos un elemento rectangular de una chapa con una armadura constituida por una malla ortogonal estrecha ubicada en su plano medio (Fig. 1.2). Los lados de los elementos se suponen paralelos a las direcciones de las tensiones principales  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II} = k \cdot \sigma_I$ , mientras que la armadura está dispuesta oblicuamente con respecto a los mismos. Para definir el ángulo, se consideran dos sistemas de coordenadas ortogonales:

- con los ejes (1) y (2) coincidentes con las direcciones de las tensiones principales  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$ , positivo para tracción, negativo para compresión.
- con los ejes x e y correspondientes a las direcciones de las armaduras  $f_{ex}$  y  $f_{ey}$ .

En el caso que nos ocupa,  $\sigma_I$  es siempre una tensión de tracción y mayor que  $\sigma_{II}$ , de modo que se tiene  $k \leq 1$ . Llamemos  $\alpha$  al ángulo que forma el eje (1) con el eje x, y adoptemos como convención que el sistema de ejes x - y está ubicado en forma tal que siempre resulte  $\alpha \leq 45^\circ$ .

Supongamos que la chapa esté atravesada por fisuras paralelas y aproximadamente rectas, de separación  $a_m$  entre sí, y cuya dirección difiere de la dirección y de la armadura, de un ángulo  $\varphi$ , aún desconocido.

Las fuerzas solicitantes, referidas a la longitud unitaria 1, son

$$N_1 = \sigma_I d \cdot 1 \quad \text{y} \quad N_2 = \sigma_{II} d \cdot 1 = k \cdot N_1 \quad (1.1)$$

Se supone que en las fajas de hormigón entre fisuras, actúan tensiones de compresión  $\sigma_b$  uniformemente distribuidas, que corresponden a un esfuerzo centrado de compresión  $D_b$ .

$$D_b = \sigma_b \cdot d \cdot 1 \quad (1.2)$$

Cuando las fisuras y una de las direcciones de la armadura no son normales a la dirección (1) de las  $\sigma_I$ , es decir que  $\alpha$  y  $\varphi$  no son iguales a cero, pueden, bajo ciertas condiciones, aparecer en las fisuras esfuerzos de resbalamiento H. Mientras el ancho de las fisuras sea reducido, estos esfuerzos de resbalamiento pueden transferirse a través del endentado de los bordes de la fisura debido al agregado grueso y adicionalmente por el efecto de cuña sobre las barras que cruzan las fisuras (Fig. 1.3). Los esfuerzos de resbalamiento H significan que los esfuerzos de compresión  $D_b$  de las fajas vecinas de hormigón, difieren considerablemente, o también que los esfuerzos  $D_b$  están ligeramente inclinados respecto de la fisura, y que por ello existe en el hormigón un pequeño esfuerzo transversal de tracción (Fig. 1.4).

También los esfuerzos de endentado y de efecto de cuña originan tensiones de tracción en el hormigón, que no deben tenerse en cuenta en lo que respecta a la capacidad portante. El esfuerzo H de resbalamiento debe disminuir al aumentar el espesor de las fisuras y originarse roturas localizadas en el hormigón en las zonas de acuñaamiento y puede también desaparecer, con excepción de esfuerzos residuales de acuñaamiento. Por ello, en los desarrollos siguientes, y en beneficio de un cálculo más seguro, supondremos  $H = 0$ .

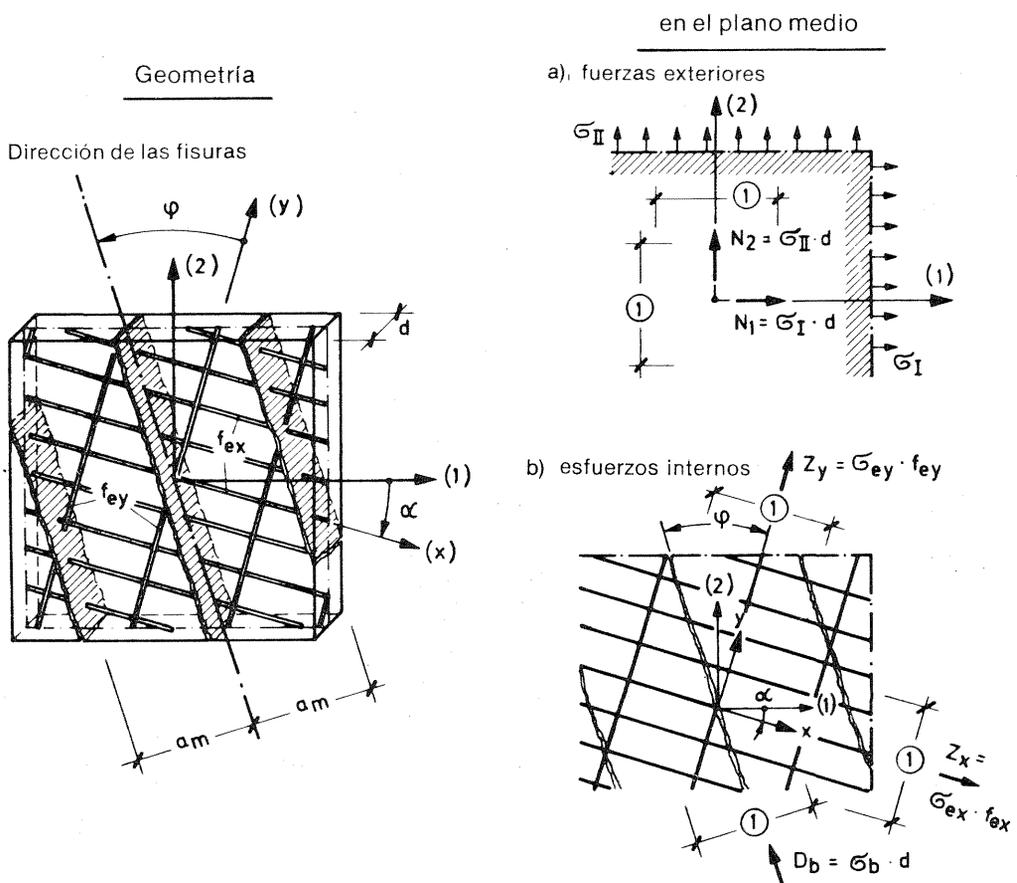


Fig. 1.2. Geometría y esfuerzos en el elemento de chapa con malla de armadura ortogonal.

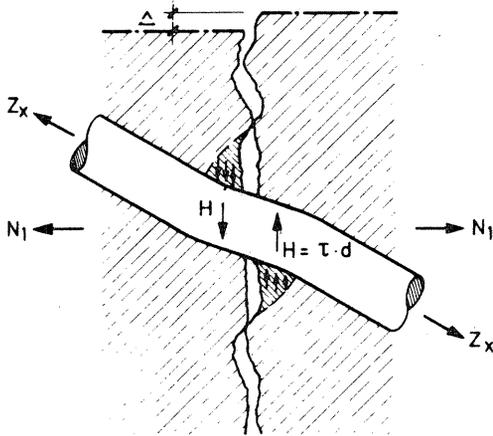


Fig. 1.3. Un esfuerzo de resbalamiento en una fisura es absorbido por endentado del borde de la misma y por el efecto de cuña de las barras de armadura

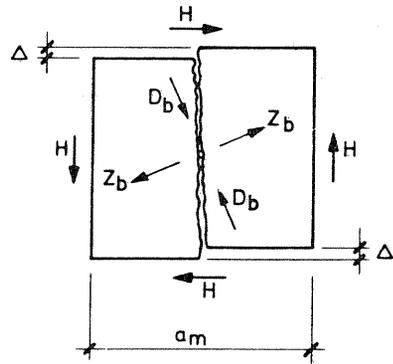


Fig. 1.4. Elemento de chapa ubicado en una fisura, con el esfuerzo inclinado de compresión  $D_b$  y el correspondiente esfuerzo transversal de tracción debido a un desplazamiento  $\Delta$ .

Si designamos  $f_{ex}$  y  $f_{ey}$  a las secciones de armadura por unidad de longitud, los correspondientes esfuerzos de tracción por unidad de longitud resultan ser

$$Z_x = \sigma_{ex} \cdot f_{ex} = \sigma_{ex} \cdot \mu_x \cdot d$$

$$Z_y = \sigma_{ey} \cdot f_{ey} = \sigma_{ey} \cdot \mu_y \cdot d$$

con  $\mu_{x,y} = \frac{f_{ex,y}}{d}$

Si se conocen las tensiones principales  $\sigma_1$  y  $\sigma_{II}$  ( $\sigma$ , respectivamente  $N_1$  y  $N_2$ ), así como también  $f_{ex}$  y  $f_{ey}$ , resultan 4 valores incógnitos:  $\sigma_{ex}$ ,  $\sigma_{ey}$ ,  $\sigma_b$  (o  $Z_x$ ,  $Z_y$ ,  $D_b$ ) y el ángulo  $\varphi$  correspondiente a la dirección de las fisuras. Mediante las condiciones de equilibrio es posible determinar sólo tres incógnitas. Como valor indeterminado se adopta  $\varphi$ , el que se determina mediante las ecuaciones de compatibilidad.

Si suponemos, a priori, conocido el ángulo  $\varphi$ , es posible, para el equilibrio en una sección paralela a una fisura, construir el polígono de fuerzas según Fig. 1.5. Del mismo se deducen las ecuaciones:

$$N_1 b_1 - Z_x b_x \cos \alpha - Z_y b_y \operatorname{sen} \alpha = 0$$

$$N_2 b_2 - Z_y b_y \cos \alpha + Z_x b_x \operatorname{sen} \alpha = 0.$$

Los anchos  $b_1$  a  $b_y$ , sobre los que actúan los esfuerzos  $N_1$  a  $Z_y$ , pueden también expresarse en función de  $\varphi$  y  $\alpha$  (ver Fig. 1.5). Con ello se obtienen de dichas ecuaciones los valores de los esfuerzos  $Z_x$  y  $Z_y$ .

$$Z_x = N_1 \operatorname{cosec}^2 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) + N_2 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{cot} \alpha \operatorname{tg} \varphi)$$

$$Z_y = N_1 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 + \operatorname{cota} \operatorname{cot} \varphi) + N_2 \operatorname{cos}^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cot} \varphi)$$

(1.3)

Si finalmente consideramos un corte de longitud 1 normal a las fisuras, como muestra la Fig. 1.6, se obtiene un polígono de fuerzas que también contiene el esfuerzo de compresión  $D_b$ .

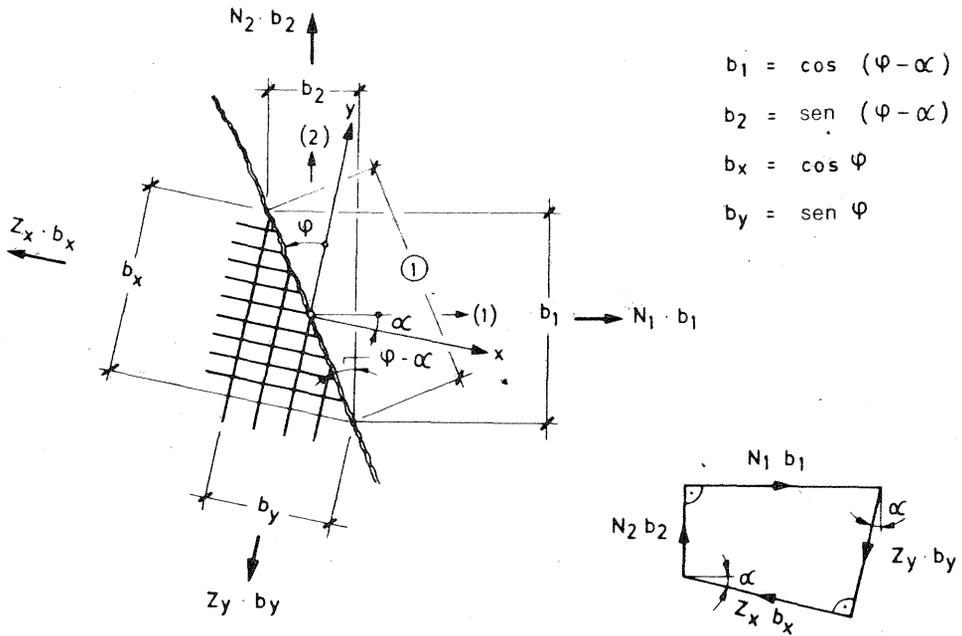


Fig. 1.5. Esfuerzos en equilibrio sobre una longitud 1 de fisura y el correspondiente polígono de fuerzas (el esfuerzo de resbalamiento H en la fisura se ha supuesto nulo).

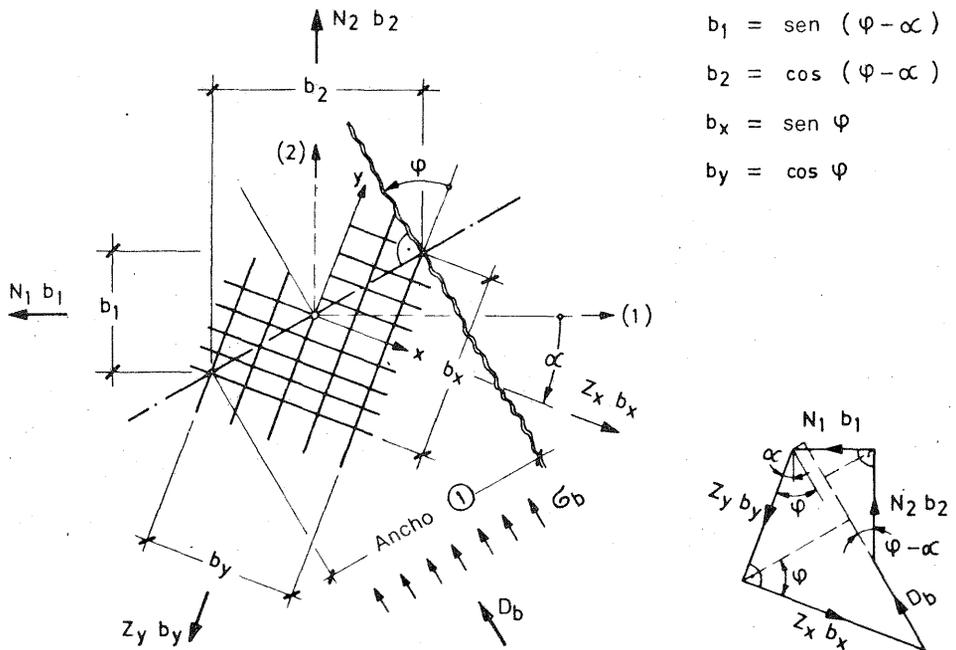


Fig. 1.6. Esfuerzos en equilibrio para el ancho 1 de una faja comprimida entre dos fisuras y el correspondiente polígono de fuerzas (el esfuerzo H de resbalamiento en la fisura se ha supuesto nulo).

Teniendo en cuenta que por la Ec. (1.3),  $Z_x$  y  $Z_y$  ya se conocen, es posible expresar  $D_b$  en la forma siguiente:

$$D_b = -N_1 b_1 \sin(\varphi - \alpha) - N_2 b_2 \cos(\varphi - \alpha) + Z_x b_x \sin \varphi + Z_y b_y \cos \varphi$$

Luego de introducir  $Z_x$  y  $Z_y$  de Ec. (1.3) y los valores de  $b_1$  a  $b_y$  de Fig. 1.6, se obtiene, luego de algunas transformaciones trigonométricas:

$$D_b = (N_1 - N_2) \frac{\sin 2\alpha}{\sin 2\varphi} \quad (1.4)$$

Si se suman las fuerzas interiores correspondientes a las Ec. (1.3) y (1.4), se obtiene una nueva ecuación, que permite un fácil control de cálculo

$$Z_x + Z_y - D_b = N_1 + N_2 \quad (1.5)$$

### 1.2.2. Inclinación $\varphi$ de las fisuras cuando la armadura trabaja en régimen elástico ( $\sigma_e < \beta_S$ )

Para determinar la inclinación  $\varphi$  de las fisuras, aún incógnita, puede emplearse tanto el principio del mínimo trabajo de deformación como la condición de compatibilidad de las deformaciones en el elemento de chapa. Desarrollaremos a continuación ambos procedimientos.

#### 1.2.2.1. Solución mediante el mínimo trabajo de deformación

El trabajo de deformación elemental de un material elástico, de acuerdo con los principios de la mecánica, despreciando las deformaciones por corte y la deformación transversal de las fajas comprimidas, tiene por expresión

$$A = \frac{E}{2} (\epsilon_x^2 + \epsilon_y^2 + \epsilon_z^2) = \frac{1}{2E} (\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + \sigma_z^2)$$

Con el valor de las fuerzas y secciones de armadura referidas a la unidad de longitud, resulta para el volumen  $\mu_x \cdot d \cdot 1$  o respectivamente  $d \cdot 1$

$$A = \frac{Z_x^2}{2 E_e \mu_x d} + \frac{Z_y^2}{2 E_e \mu_y d} + \frac{D_b^2}{2 E_b d}$$

Para simplificar haremos

$$\lambda = \frac{f_{ex}}{f_{ey}} = \frac{\mu_x}{\mu_y}; \quad \nu = \mu_x \cdot \frac{E_e}{E_b} = n \mu_x; \quad k = \frac{N_2}{N_1}$$

Con ello resulta

$$A \cdot 2 E_e \mu_x d = Z_x^2 + \lambda Z_y^2 + \nu \cdot D_b^2 \quad (1.6)$$

El miembro derecho de la ecuación contiene en cada término el ángulo incógnito  $\varphi$ . Si en la Ec. (1.6) derivamos respecto de  $\varphi$  e igualamos a cero, obtenemos el trabajo mínimo o bien una expresión adecuada para el cálculo de  $\varphi$ :

$$\frac{\partial A}{\partial \varphi} 2 E_e \mu_x N_1^2 = 0 = 2 \frac{Z_x}{N_1} \frac{\partial \left( \frac{Z_x}{N_1} \right)}{\partial \varphi} + 2 \lambda \frac{Z_y}{N_1} \frac{\partial \left( \frac{Z_y}{N_1} \right)}{\partial \varphi} + 2 \nu \frac{D_b}{N_1} \frac{\partial \left( \frac{D_b}{N_1} \right)}{\partial \varphi} \quad (1.7)$$

Mediante las Ec. (1.3) y (1.4) es posible expresar cada una de las derivadas en la forma siguiente

$$\frac{\partial \left( \frac{Z_x}{N_1} \right)}{\partial \varphi} = (1 - k) \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\cos^2 \varphi} ; \quad \frac{\partial \left( \frac{Z_y}{N_1} \right)}{\partial \varphi} = (1 - k) \frac{\operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{\operatorname{sen}^2 \varphi}$$

$$\frac{\partial \left( \frac{D_b}{N_1} \right)}{\partial \varphi} = (1 - k) \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) .$$

Luego de introducir estos valores y dividir por el factor común  $(1 - k) 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha$ , el miembro derecho de la Ec. (1.7) se transforma en

$$\frac{Z_x}{N_1} \cdot \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \lambda \frac{Z_y}{N_1} \cdot \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} + \nu \frac{D_b}{N_1} \left( \frac{1}{\cos^2 \varphi} - \frac{1}{\operatorname{sen}^2 \varphi} \right) = 0 \quad (1.8)$$

Multiplicando por  $\frac{N_1}{Z_x} \operatorname{sen}^2 \varphi$  se obtiene una expresión de la relación entre las tensiones en el acero  $\sigma_{ey}$  y  $\sigma_{ex}$

$$\frac{\lambda Z_y}{Z_x} = \frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}} = \operatorname{tg}^2 \varphi + \nu \frac{D_b}{Z_x} (\operatorname{tg}^2 \varphi - 1)$$

o también

$$\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}} = \operatorname{tg}^2 \varphi \left[ 1 + \nu \frac{D_b}{Z_x} (1 - \cot^2 \varphi) \right] \quad (1.9)$$

Si, por otra parte, se multiplica la Ec. (1.8) por  $\cos^2 \varphi$ , se obtiene

$$\frac{Z_x}{N_1} - \lambda \frac{Z_y}{N_1} \cot^2 \varphi + \nu \frac{D_b}{N_1} (1 - \cot^2 \varphi) = 0 \quad (1.10)$$

y luego de algunas transformaciones e introducción de los valores de  $Z_x$ ,  $Z_y$  y  $D_b$  dados por las Ec. (1.3) y (1.4), se llega a la expresión que define el ángulo  $\varphi$ :

$$\cot^4 \varphi + \cot^3 \varphi \frac{\operatorname{tg} \alpha + k \cdot \cot \alpha}{1 - k} - \cot \varphi \frac{\cot \alpha + k \cdot \operatorname{tg} \alpha}{\lambda (1 - k)} - \frac{1}{\lambda} =$$

$$= \frac{\nu}{\lambda} (1 - \cot^4 \varphi) \quad (1.11)$$

Al ángulo que satisface a dicha ecuación, lo denominaremos  $\varphi_1$ . Conduce, sin tener en cuenta la resistencia a la tracción del hormigón, para tensiones en el acero  $\sigma_{ex}$  y  $\sigma_{ey} < \beta_S$  al mínimo trabajo de deformación. Si en las Ec. (1.3) y (1.4) se introduce dicho ángulo  $\varphi_1$  en lugar de  $\varphi$ , las mismas nos dan los correspondientes esfuerzos en el acero y el hormigón.

1.2.2. Solución mediante la compatibilidad de las deformaciones

Si en una fisura consideramos un tramo de longitud 1, y representamos las correspondientes direcciones de las armaduras, obtenemos el triángulo rectángulo de líneas llenas de Fig. 1.7.

Como consecuencia del esfuerzo de compresión  $D_b$  se acorta la longitud "1" de la faja de hormigón de  $\epsilon_b = \sigma_b/E$ ; simultáneamente se alargan las armaduras, es decir, los catetos del triángulo de los valores específicos  $\epsilon_x = \sigma_{ex}/E_e$  y  $\epsilon_y = \sigma_{ey}/E_e$ .

Teniendo en cuenta que en la fisura no se debe tener en cuenta para el cálculo ningún esfuerzo de resbalamiento, ni tampoco ningún desplazamiento relativo paralelo a la misma, como consecuencia de las deformaciones, se origina el triángulo de líneas de trazos que muestra la Fig. 1.7. La longitud de los lados resultan de las relaciones geométricas.

No se ha tenido en cuenta en este caso la disminución de las deformaciones en la armadura debida a su colaboración con el hormigón, así como tampoco la deformación transversal debida al acortamiento  $\epsilon_b$  del hormigón.

Las deformaciones son compatibles entre sí cuando se tiene una nueva altura, igual para ambos lados del triángulo, lo que puede expresarse mediante la ecuación siguiente:

$$[(1 + \epsilon_x) \operatorname{sen} \varphi]^2 - [(1 - \epsilon_b) \operatorname{sen}^2 \varphi]^2 = [(1 + \epsilon_y) \operatorname{cos} \varphi]^2 - [(1 - \epsilon_b) \operatorname{cos}^2 \varphi]^2.$$

Resuelta la ecuación para  $\epsilon_y/\epsilon_x$ , y luego de algunas transformaciones y despreciando los términos de 2º orden, se llega a

$$\frac{\epsilon_y}{\epsilon_x} = \operatorname{tg}^2 \varphi \left[ 1 + \frac{\epsilon_b}{\epsilon_x} (1 - \cot^2 \varphi) \right].$$

Si se reemplazan las deformaciones por tensiones, teniendo en cuenta que  $\epsilon_y/\epsilon_x = \sigma_{ey}/\sigma_{ex}$  o también  $\epsilon_x/\epsilon_b = Z_x/\nu \cdot D_b$ , obtenemos como anteriormente

$$\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}} = \operatorname{tg}^2 \varphi \left[ 1 + \nu \frac{D_b}{Z_x} (1 - \cot^2 \varphi) \right] \quad (1.9)$$

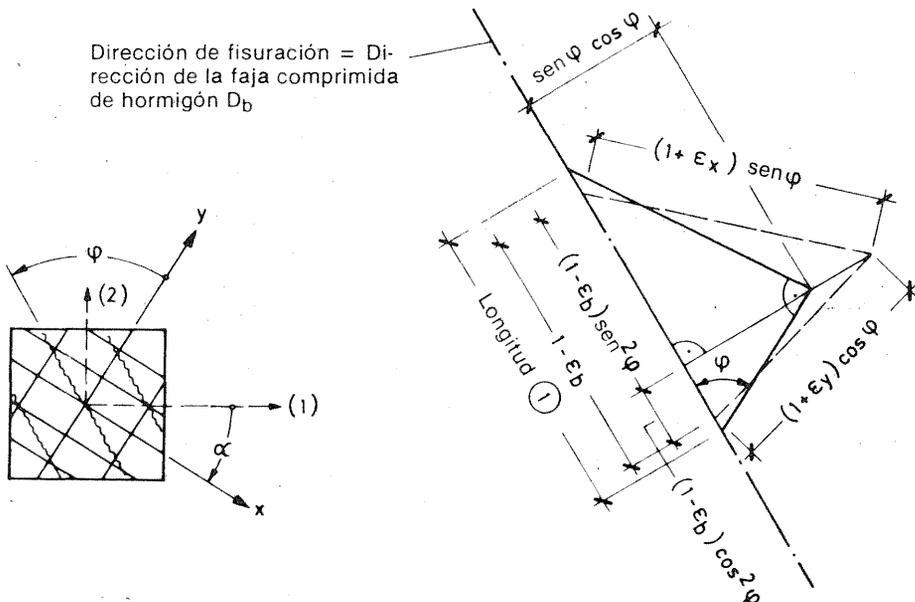


Fig. 1.7. Deformaciones en un elemento de chapa, partiendo de una longitud 1 en la faja comprimida.

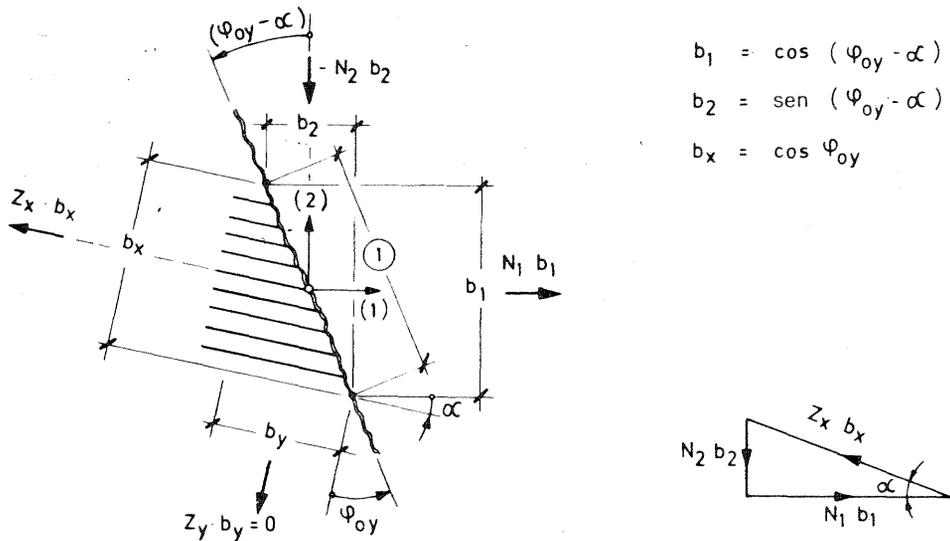


Fig. 1.8. Esfuerzos para el caso de armadura en una única dirección ( $\sigma_{11}$  o sea  $N_2 =$  compresión) y determinación de la correspondiente inclinación  $\varphi_{oy}$  de la fisura.

Los dos caminos desarrollados en Sec. 1.2.2.1 y 1.2.2.2 conducen, como se ha visto, al mismo resultado, es decir que el valor del ángulo  $\varphi_1$  hallado en Ec. (1.11) mediante el mínimo trabajo de deformación, satisface también a las condiciones de compatibilidad.

En general se tiene que  $\varphi_1 \neq \alpha$ , es decir que la fisura no es normal a la dirección de las máximas tensiones principales. En realidad, las primeras fisuras toman dicha configuración, pero al aumentar la carga, las sucesivas fisuras tienden a adoptar la inclinación  $\varphi_1$ . Ello ha sido también observado en ensayos.

### 1.2.3. Inclinación de las fisuras al alcanzarse el límite de escurrimiento ( $\epsilon_e > \beta_S/E_e$ )

Si un grupo de barras de la armadura alcanza el escurrimiento, las deformaciones cambian de modo tal que las sucesivas fisuras deben originarse con otra inclinación de fisuración  $\varphi_2 \neq \varphi_1$ , para que se mantenga la compatibilidad. Según las circunstancias, puede ocurrir que por causa de la deformación plástica del acero ambos grupos de armadura alcancen una tensión  $\sigma_e = \beta_S$ .

Para el dimensionado no deben utilizarse los estados para los cuales  $\epsilon_e > \beta_S/E_e$ , de modo que la nueva inclinación  $\varphi_2$  de las fisuras, que según Baumann difiere considerablemente de  $\varphi_1$ , no interesa en este caso.

## 1.3. Chapas con una única dirección de armadura

Si la menor tensión principal  $\sigma_{11}$  es de compresión y de suficiente intensidad, puede prescindirse de la 2ª dirección de armadura. La Fig. 1.8 muestra, para uno de estos casos, los esfuerzos que actúan sobre una longitud 1 de una fisura, de dirección  $\varphi_{oy}$  con respecto al eje (1). El polígono de fuerzas que aparece en la figura conduce a la siguiente condición de equilibrio

$$-\frac{N_2 b_2}{N_1 b_1} = k \cdot \text{tg} (\varphi_{oy} - \alpha) = \text{tg} \alpha .$$

De esta relación angular, por transformación resulta para la inclinación  $\varphi_{oy}$  de la fisura:

$$\cot \varphi_{oy} = \frac{\operatorname{tg} \alpha + k \cot \alpha}{k - 1} \quad (1.12)$$

Con este ángulo, las Ec. (1.3) y (1.4) dan los correspondientes valores de  $Z_x$  y  $D_b$  para el caso de una única dirección de la armadura.

#### 1.4. Placas con armadura constituida por mallas ortogonales

En el caso general se tiene un elemento de placa solicitado por los momentos principales  $m_1$  y  $m_2 = k \cdot m_1$  referidos a la unidad de longitud.

En lo que sigue, entenderemos por  $m_1$  al mayor de los dos momentos principales, en valor absoluto. Si la tracción por flexión y la compresión por flexión originadas por  $m_2$  no ocurren del mismo lado de la placa que los correspondientes a  $m_1$ , entonces debe considerársele como negativo ( $k < 0$ ). Un tal momento  $m_2$  origina en la zona comprimida (debida a  $m_1$ ) tensiones de tracción y en la zona traccionada (debida a  $m_1$ ) tensiones de compresión. La zona traccionada por flexión queda ubicada donde  $m_1$  origine tracción, y la comprimida donde produzca compresión.

La zona traccionada por flexión puede ser tratada como una chapa según Sec. 1.2 ó 1.3, cuando los esfuerzos longitudinales se calculen a partir de los momentos mediante un brazo elástico medio y se los suponga actuando sobre la chapa (Fig. 1.9):

$$N_1 = \frac{m_1}{z_m} ; \quad N_2 = \frac{m_2}{z_m} = k \cdot N_1 .$$

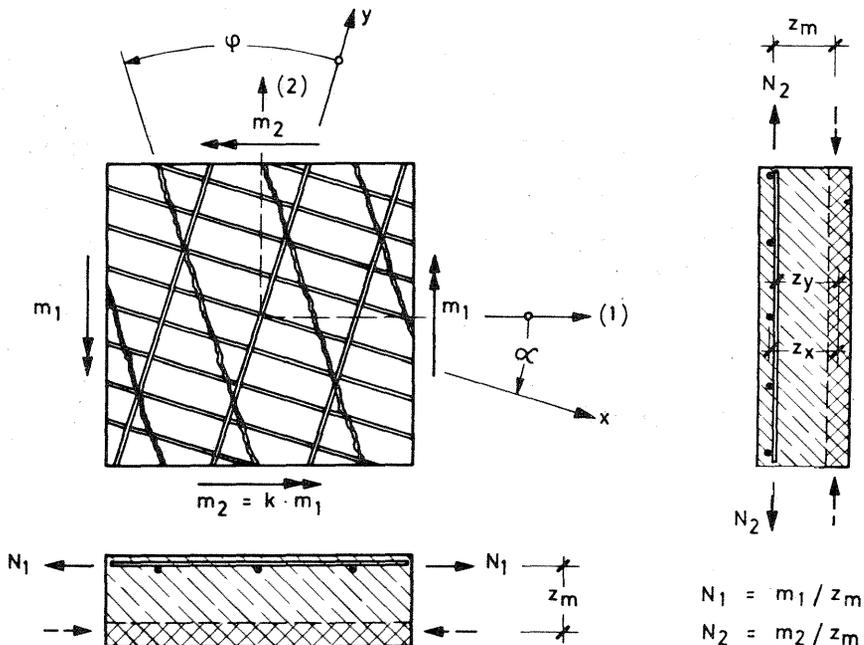


Fig. 1.9. Solicitación de una placa por los momentos  $m_1$  y  $m_2$ ; fisuración en la zona traccionada por flexión.

En lo que respecta a  $z_m$ , se puede calcular con valores aproximados, p. ej.:

$$z_m \approx 0,9 \frac{h_x + h_y}{2}$$

Estas hipótesis, por analogía con las Ec. (1.3) y (1.4), nos permiten expresar:

$$m_x = Z_x \cdot z_x = m_1 \cos^2 \alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \varphi) + m_2 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 - \operatorname{cot} \alpha \operatorname{tg} \varphi)$$

$$m_y = Z_y \cdot z_y = m_1 \operatorname{sen}^2 \alpha (1 + \operatorname{cot} \alpha \operatorname{cot} \varphi) + m_2 \cos^2 \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha \operatorname{cot} \varphi) \quad (1.13)$$

$$D_b \cdot z_m = (m_1 - m_2) \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{\operatorname{sen} 2\varphi}$$

En las mismas tienen validez para  $\alpha$  y  $\varphi$ , las convenciones establecidas en la Sec. 1.2. Si  $k$  es negativa ( $k < 0$ ), en la zona comprimida por flexión actúa, además del esfuerzo de compresión  $N_{2D} = -m_1/z_m$ , también un esfuerzo de tracción  $N_{1D} = -m_2/z_m$ , que exige una armadura de tracción en dicha zona comprimida. En este caso son aplicables las Ec. (1.3) y (1.4), siempre que dicho esfuerzo  $N_2$  se introduzca como esfuerzo de tracción (en lugar de  $N_1$ ) y se continúa consecuentemente el cálculo con  $k_D = 1/k$ .

Las verificaciones de la compatibilidad de las deformaciones pueden asimismo efectuarse como se indica en Sec. 1.2 y 1.3, en cuyo caso debe tenerse en cuenta la influencia de las diferencias de los brazos elásticos y de los espesores de las zonas comprimidas. Para ello se introduce

$$\lambda = \frac{f_{ex} \cdot z_x}{f_{ey} \cdot z_y} \approx \frac{f_{ex} \cdot h_x}{f_{ey} \cdot h_y}$$

y admitiendo como aproximación grosera para la altura de la zona comprimida  $\sim z_m/3$  y  $z_m \sim 0,9 h_x$

$$\nu = 3,3 \mu_x \frac{E_e}{E_b} = 3,3 n \mu_x$$

Cuando se utilizan para las placas las expresiones correspondientes a esfuerzos y ángulos, deducidos para chapas, se admite simultáneamente la condición establecida de que, tanto en las zonas comprimida y traccionada por flexión, no se admite una transferencia de esfuerzos de resbalamiento a través de las fisuras, es decir que, también en el dimensionado de placas mediante este procedimiento, no se tienen en cuenta tensiones secundarias de tracción en el hormigón. Se mantiene con ello el cálculo del lado de la seguridad.

## 1.5. Normas para el dimensionado

### 1.5.1. Generalidades

Limitaremos el dimensionado al período elástico de las tensiones en el acero  $\sigma_e < \beta_S y$  para ello utilizaremos las deducciones efectuadas en las Sec. 1.2.1 y 1.2.2.

La determinación del ángulo  $\varphi_1$  de la dirección de las fisuras puede también simplificarse considerablemente cuando las dos capas de armaduras de las direcciones  $x$  e  $y$  se dispon-

gan de forma tal que ambas se aprovechen por igual. En este caso se tiene, para la carga de servicio

$$\sigma_{ex} = \frac{\beta_S}{1,75} ; \quad \sigma_{ey} = \frac{\beta_S}{1,75} \quad (1.14)$$

Haciendo  $\sigma_{ex} = \sigma_{ey}$  en la Ec. (1.9) y despreciando la reducida influencia de  $\nu \cdot D_b/Z_x$  se obtiene la relación simple:

$$\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}} = 1 = \operatorname{tg}^2 \varphi_1$$

de donde

$$\varphi_1 = \pi/4 = 45^\circ \quad (1.15)$$

Este ángulo  $\varphi_1 = 45^\circ$  corresponde a la solución más económica porque ambas capas de armadura trabajan a la tensión admisible. Si se proyectara una distribución de armadura para la que  $\sigma_{ex} < \sigma_{ey}$  —que no tendría sentido, por cuanto la armadura ubicada más cerca de la máxima tensión de tracción debería poseer innecesariamente una gran sección de acero—  $\varphi$  resultaría mayor. En el caso inverso (lo que sí puede tener sentido, como demostraremos más adelante)  $\varphi$  sería menor que  $45^\circ$ .

Para el hormigón es necesario verificar que las tensiones de compresión debidas a  $D_b$  no sobrepasen el valor admisible. Según DIN 1045 podría tenerse:

$$\sigma_b = \frac{D_b}{d} \leq \frac{\beta_R}{2,1}$$

Pero esta expresión no tendría en cuenta que las diagonales ideales comprimidas resultan perturbadas por las barras transversales de armadura que la atraviesan y que están sujetas a tensiones transversales de tracción, debidas al efecto de cuña y por adherencia (ver Figs. 1.3 y 1.4). De las investigaciones realizadas sobre la resistencia del hormigón sometido a solicitaciones dobles de compresión y tracción resulta que en este caso sólo podría contarse con una resistencia efectiva del 80 % de  $\beta_R$ . Por ello, para las cargas de servicio se recomienda

$$\sigma_b \text{ adm.} = \frac{D_b}{d} \text{ adm.} \leq \frac{0,8 \beta_R}{2,1} \quad (1.16)$$

### 1.5.2. Dimensionado de estructuras constituidas por chapas, en el caso de armaduras oblicuas a las direcciones principales

Si en las Ec. (1.3) y (1.4) se introduce el ángulo  $\varphi_1 = \pi/4$  dado por la Ec. (1.15) como dirección de las fisuras, se obtienen ecuaciones simplificadas para la determinación de los esfuerzos internos en el caso de *mallas de armaduras ortogonales* (utilizando ambas direcciones) para *cargas de servicio*.

$$\begin{aligned} Z_x &= N_1 + \frac{N_1 - N_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha) \\ Z_y &= N_2 + \frac{N_1 - N_2}{2} \operatorname{sen} 2\alpha (1 + \operatorname{tg} \alpha) \end{aligned} \quad (1.17)$$

$$D_b = (N_1 - N_2) \operatorname{sen} 2\alpha$$

Estos esfuerzos permiten calcular las armaduras necesarias en la forma siguiente

$$f_{ex} = \frac{Z_x}{\beta_S / 1,75} ; \quad f_{ey} = \frac{Z_y}{\beta_S / 1,75} \quad (1.18)$$

resultando la tensión de compresión en el hormigón

$$\sigma_b \text{ exist.} = \frac{D_b}{d} \cong \frac{0,8 \beta_R}{2,1} \quad (1.16)$$

En todos los casos se tiene, como control de cálculo

$$Z_x + Z_y - D_b = N_1 + N_2 \quad (1.5)$$

Si  $k \leq 0,2$ , en ciertos casos, para pequeños ángulos  $\alpha$ , de las ecuaciones de dimensionado (1.17) y (1.18) válidas para  $\varphi_1 = \pi/4$ , puede resultar  $f_{ey} < 0,2 f_{ex}$ . Según DIN 1045, debe, normalmente, ser  $f_{ey} \geq 0,2 f_{ex}$ . En tales casos es  $\sigma_{ey} < \sigma_{ex}$  y el ángulo  $\varphi$  que satisface la ecuación de compatibilidad (1.9), debe ser menor que  $45^\circ$ .

Con  $\sigma_{ex} = Z_x/f_{ex}$  y  $\sigma_{ey} = Z_y/f_{ey} = Z_y/0,2 f_{ex}$ , de la Ec.(1.9) se obtiene, despreciando simultáneamente la parte debida a  $\nu D_b/Z_x$ , como ecuación determinante del ángulo que llamaremos  $\varphi_{0,2}$

$$\frac{\sigma_{ey}}{\sigma_{ex}} = \frac{Z_y \cdot f_{ex}}{0,2 f_{ex} \cdot Z_x} = \operatorname{tg}^2 \varphi_{0,2}$$

y de ésta

$$\operatorname{tg}^2 \varphi_{0,2} \cdot \frac{Z_x}{Z_y} = 5$$

Si introducimos los valores  $Z_y$  y  $Z_x$  obtenidos de las condiciones de equilibrio según Ec. (1.3), luego de algunas transformaciones se llega a la siguiente relación:

$$(1 - k) \operatorname{tg}^4 \varphi_{0,2} + \operatorname{tg}^3 \varphi_{0,2} (\cot \alpha + k \operatorname{tg} \alpha) - 5 \operatorname{tg} \varphi_{0,2} (\operatorname{tg} \alpha + k \cot \alpha) = 5(1 - k) \quad (1.19)$$

En la Fig. 1.10 se han representado dichos ángulos  $\varphi_{0,2}$ , en función del ángulo de inclinación  $\alpha$ , para algunos valores de la relación  $k = N_2/N_1$ . En la misma puede observarse que en general se tiene el ángulo  $\varphi_1 = 45^\circ$  (que corresponde a  $\sigma_{ex} = \sigma_{ey}$ ) según Ec. (1.15), y que sólo para  $\alpha$  relativamente pequeños y reducidas relaciones  $k$ , corresponde utilizar el ángulo  $\varphi_{0,2} < 45^\circ$  (para  $f_{ey} = 0,2 f_{ex}$ ) según Ec. (1.19).

Con los ángulos  $\varphi_1$  y  $\varphi_{0,2}$  representados en Fig. 1.10, Th. Baumann ha preparado diagramas de dimensionamiento muy útiles, que se han reproducido en Fig. 1.11.

Los diagramas permiten la lectura directa de las secciones relativas de armadura  $f_{ex}/f_1$  y  $f_{ey}/f_1$  así como también el esfuerzo relativo de compresión en el hormigón  $D_b/N_1$ . El valor de referencia  $f_1$  corresponde a la armadura necesaria para absorber  $N_1$  para  $\alpha = 0$

$$f_1 = \frac{N_1}{\beta_S / 1,75}$$

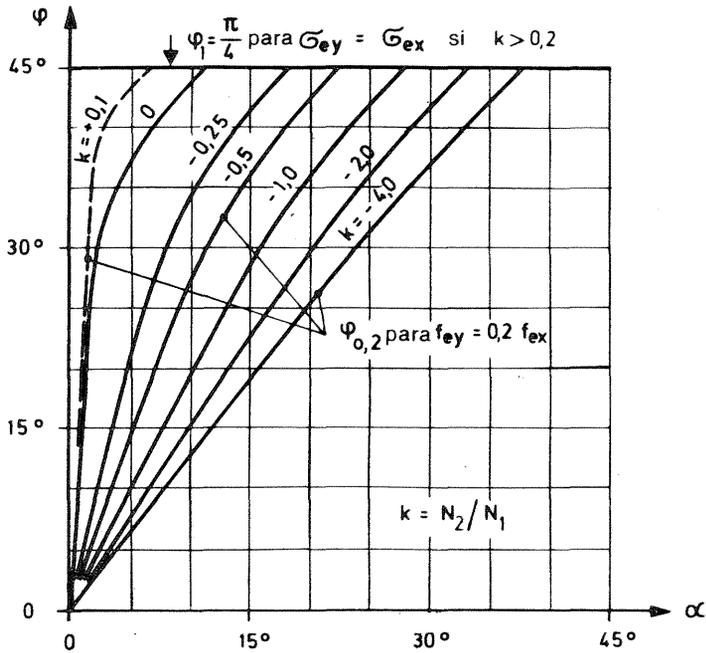


Fig. 1.10. Ángulos  $\varphi$ , a utilizar en mallas ortogonales de armadura.

En consecuencia, las armaduras  $f_{ex}$  y  $f_{ey}$  se obtienen mediante las expresiones

$$f_{ex} = \frac{N_1}{\beta_S/1,75} \left( \frac{f_{ex}}{f_1} \right), \quad f_{ey} = \frac{N_1}{\beta_S/1,75} \left( \frac{f_{ey}}{f_1} \right) \quad (1.20a)$$

De acuerdo con ello, la tensión de compresión en el hormigón es

$$\sigma_b \text{ exist.} = \frac{N_1}{d} \left( \frac{D_b}{N_1} \right) \quad (1.20b)$$

### 1.5.3. Dimensionado de placas solicitadas a flexión con armadura oblicua con respecto a las direcciones de los momentos principales

Las ecuaciones de Sec. 1.5.2 y los diagramas de Fig. 1.11 establecidos para chapas, pueden aplicarse directamente para dimensionar placas, solicitadas por los momentos principales  $m_1$  y  $m_2 = k \cdot m_1$ . Para ello, en lugar de la Ec. (1.20 a) debe emplearse la expresión

$$f_{ex} = \frac{m_1}{z_x \beta_S/1,75} \left( \frac{f_{ex}}{f_1} \right) \text{ o respectivamente } f_{ey} = \frac{m_1}{z_y \beta_S/1,75} \left( \frac{f_{ey}}{f_1} \right) \quad (1.21)$$

La verificación de que la sollicitación admisible a la compresión no sea sobrepasada, debido a la limitación establecida en Sec. 1.5.1 por la Ec. (1.16) para  $\beta_R$  al 80%, es muy difícil de lograr con los elementos de cálculo corrientes. Por ello, Th. Baumann ha agregado a su diagrama de dimensionado, una tabla con los valores de  $k_h$  (ver a este respecto el Tomo I, Sec. 7.2.2.4). En la misma aparecen —(Tabla 1.1)— valores límites inferiores de  $k_h$ , para 2 valores estimados de  $z_m/h_m$ , a saber 0,8 y 0,9, para dos calidades de aceros (B St III y B St IV, con

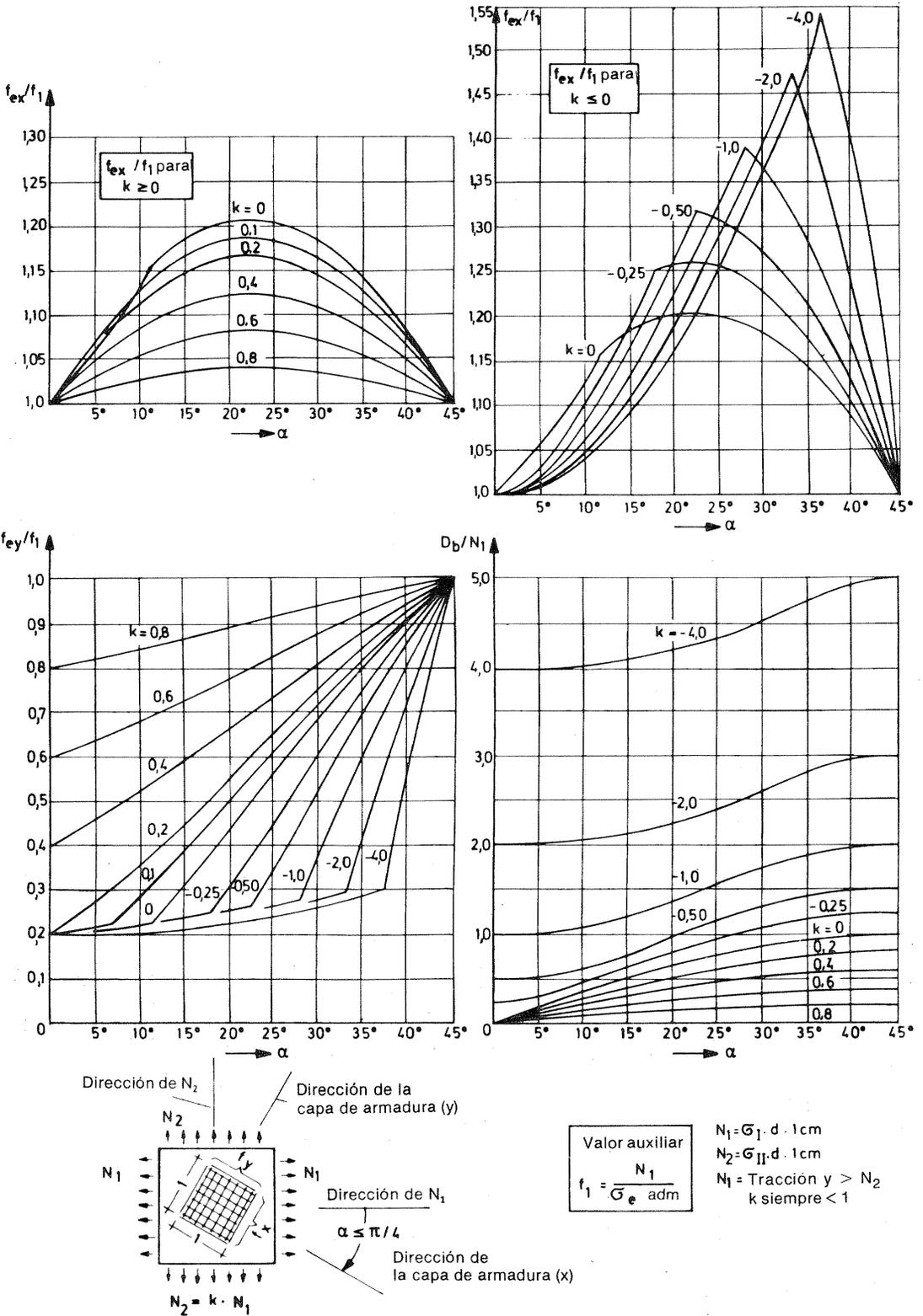


Fig. 1.11. Diagramas para determinar las armaduras necesarias  $f_{ex}$  y  $f_{ey}$  y el esfuerzo originado  $D_b$  para mallas ortogonales de armadura [12] y [13].

$\sigma_e \text{ adm} = 2400 \text{ y } \sim 2800 \text{ kp/cm}^2$  y para calidades de hormigón Bn 250 a Bn 550 (verificación en [12]).

Debe tenerse presente que, para momentos de igual dirección, es decir  $k = m_2/m_1 \geq 0$  (positivo), debe determinarse el valor de  $k_h \text{ exist.} = h_m/\sqrt{m_1}$ . En cambio, cuando los momentos actuantes son de signo contrario, es decir  $k = m_2/m_1 < 0$  (negativo), debe partirse de

$$k_h \text{ exist.} = \frac{h_m}{\sqrt{m_1 - m_2}}$$

$z_x/h_x = z_y/h_y = z_m/h_m$	$\beta_S/1,75$ [kp/cm <sup>2</sup> ]	$\bar{k}_h$ para				
		Bn250	Bn350	Bn450	Bn550	
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">para <math>k = m_2/m_1 \geq 0</math></div> $k_h = h_m/\sqrt{m_1}$ <sup>1)</sup> $\sigma_{bU} \text{ max} \leq \beta_R$	$\leq 0,8$	2400 2800	5,7 5,9	5,0 5,2	4,6 4,8	4,4 4,5
	$\leq 0,9$	2400 2800	8,4 8,1	7,3 7,1	6,7 6,5	6,4 6,2
<div style="border: 1px solid black; display: inline-block; padding: 2px;">para <math>k = m_2/m_1 &lt; 0</math></div> $k_h = h_m/\sqrt{m_1 - m_2}$ <sup>1)</sup> $\sigma_{bU} \text{ max} \leq 0,8 \beta_R$	$\leq 0,8$	2400 2800	6,4 6,6	5,6 5,8	5,2 5,3	4,9 5,0
	$\leq 0,9$	2400 2800	9,4 9,1	8,2 7,9	7,6 7,3	7,5 6,9
<sup>1)</sup> $h_m$ en cm ; $m_1$ y $m_2$ en Mpm/m						

Tabla 1.1. Tabla de los valores mínimos admisibles de  $\bar{k}_h$  para verificar que las tensiones de compresión en el hormigón se mantienen dentro de los límites admisibles [13].

## Vigas de gran altura (vigas-pared), ménsulas, chapas

### 2.1. Definición

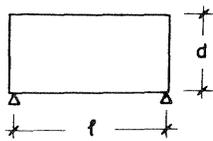
Chapas (*disks*) son estructuras en forma de placas, cargadas o solicitadas en su plano. Las chapas sustentadas como vigas constituyen las vigas-pared o vigas de gran altura (*deep-beams*). El límite entre vigas esbeltas y vigas de gran altura se establece según la distribución de las deformaciones  $\epsilon_x$ , que para esbelteces  $l/d \geq 2$  para vigas de un solo tramo y  $l/d \geq 3$  para tramos intermedios de vigas continuas aún se mantiene aproximadamente lineal, de modo que las tensiones  $\sigma_x$  pueden calcularse mediante la teoría común de flexión (Bernoulli-Navier). De acuerdo con DIN 1045, Sec. 17.1.2 y 23.3, las esbelteces que muestra la Fig. 2.1 pueden considerarse como límite de las vigas de gran altura. Las ménsulas (*corbels, brackets*) son voladizos cortos (*cantilevers*) con  $l_k/d \leq 1$ . En grandes estructuras (paredes formadas por chapas de varios pisos de altura) pueden también presentarse esbelteces  $l_k/d < 0,5$  – en este caso se habla de “vigas-pared en ménsula”.

### 2.2. Procedimiento para determinar las tensiones en el Estado I

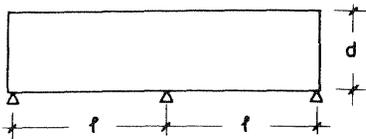
La teoría común a la flexión con  $\sigma_x = M/W$ , etc., ya no es más aplicable para vigas de gran altura y ménsulas, porque por efecto de la carga, las secciones no se mantienen planas (hipótesis de Bernoulli, diagrama de  $\epsilon_x$  lineal) y por ello, aun para un material idealmente elástico la distribución de las tensiones  $\sigma_x$  ya no es lineal. Tampoco es posible despreciar en este caso las componentes de tensión  $\sigma_y$  y las de resbalamiento  $\tau_{xy}$  debidas a las cargas exteriores. Por ello es necesario determinar las tensiones en chapas y vigas de gran altura teniendo en cuenta todas las condiciones de equilibrio y de compatibilidad de los esfuerzos internos.

Se dispone de los siguientes procedimientos:

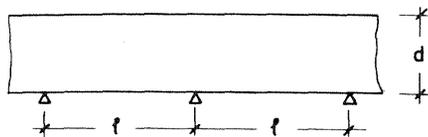
1. La teoría de las chapas (láminas), utilizando la función de Airy, expuesta en [14, 15, 16].
2. El método de los elementos finitos, preferentemente con mallas triangulares [17, 18].
3. Estudio en modelos [19]
  - 3.1. Fotoelasticidad, especialmente adecuada para problemas de chapas.
  - 3.2. Modelos de Araldita con rosetas de deformación.
  - 3.3. Modelos de microhormigón.
4. Para vigas de gran altura, W. Schleehe encontró que la distribución de tensiones puede determinarse por superposición de las tensiones en la chapa debidas a la introducción de las cargas con las tensiones de resbalamiento debidas a los esfuerzos característicos  $M$  y  $Q$  calculados por la teoría de la flexión [20, 21, 22, 23].



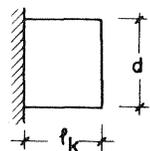
$$\frac{f}{d} < 2,0$$



$$\frac{f}{d} < \sim 2,5$$



$$\frac{f}{d} < \sim 3$$



$$\frac{fk}{d} \leq 1$$

Fig. 2.1. Esbelteces límites de las vigas de gran altura.

Todos estos procedimientos, normalmente presuponen materiales homogéneos isótropos y elásticos. Utilizando elementos finitos puede también admitirse una relación  $\sigma - \epsilon$  no lineal y en principio, también tener en cuenta la fisuración.

A los fines prácticos, para el dimensionado de chapas de hormigón armado, es suficiente un conocimiento aproximado de las tensiones correspondientes al Estado I, y en especial de la intensidad y dirección de las tensiones principales. Para el dimensionado de la armadura bastan fórmulas aproximadas y reglas para su distribución, obtenidas de numerosos ensayos realizados en chapas de hormigón armado llevados hasta la rotura [24].

### 2.3. Esfuerzos característicos y tensiones en vigas de gran altura

#### 2.3.1. Generalidades

Los esfuerzos característicos en vigas de gran altura se calculan en igual forma que para otras estructuras. Cuando se trate de sistemas indeterminados por vínculo externo debe tenerse presente que aun para *muy pequeñas deformaciones verticales* (¡también elásticas!) *de los apoyos*, las reacciones de vínculo pueden variar considerablemente como consecuencia de la gran rigidez de la viga de gran altura, de modo que al dimensionar, se recomienda incrementar los valores calculados de los esfuerzos característicos. También conviene tener en cuenta que los momentos en los tramos resultan mayores y los sobre los apoyos menores, que en el caso de vigas esbeltas de rigidez a la flexión constante.

El punto de aplicación de las cargas y el tipo de apoyo tienen una influencia considerable sobre las tensiones, de modo que debe diferenciarse si la carga actúa en la parte superior o cuelga de la inferior, los apoyos son directos o indirectos, etc., en lo que respecta al dimensionado y disposición de la armadura.

La mejor forma de hacerse una composición de lugar en lo que respecta a las tensiones en vigas de gran altura y con ello sobre la distribución de esfuerzos y capacidad portante, es mediante ejemplos. En los mismos se representan tanto las componentes de tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , como las trayectorias de las tensiones principales  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  y los esfuerzos de tracción resultantes.

### 2.3.2. Tensiones en vigas de gran altura de un solo tramo

#### 2.3.2.1. Cargas uniformemente distribuidas

La Fig. 2.2 muestra cómo influye la esbeltez  $l/d$  de una viga directamente apoyada sobre la distribución de las tensiones  $\sigma_x$ . Las componentes  $Z_x$  y  $D_x$  en la dirección  $x$  de las resultantes de tracción y compresión, que por razones de simplicidad denominaremos  $Z$  y  $D$ , se han representado en intensidad y recta de acción; su variación en función de  $l/d$  está indicada en la Fig. 2.3. Como comparación se han representado en línea fina los valores correspondientes obtenidos mediante la teoría clásica de flexión (Navier). Las diferencias en el brazo elástico interno comienzan a ponerse de manifiesto a partir de  $l/d = 2$ . Para  $l/d \leq 1$ , a pesar que el brazo elástico sigue reduciéndose, los valores de  $Z$  varían muy poco, es decir que sólo la parte inferior de una altura  $\sim l$  colabora en la resistencia y que la que queda por encima, actúa como una carga uniforme.

En el caso de las vigas-pared con  $l/d = 1$ , la Fig. 2.4 muestra la influencia de las distintas formas de aplicar la carga sobre las tensiones y sus trayectorias.  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  son las mismas para ambas formas de aplicación de las cargas y únicamente las  $\sigma_y$  son distintas y modifican las trayectorias de las  $\sigma_I$  y  $\sigma_{II}$  y con ello, fundamentalmente el comportamiento bajo carga.

La configuración de las fisuras (Fig. 2.5) confirma el recorrido de las tensiones principales. Para carga superior sólo existen tensiones de tracción en la parte inferior y de muy poca inclinación. Cuando se trata de carga suspendida en la parte inferior, las tensiones de tracción son muy empinadas, y se extienden casi a toda la altura de la viga. La carga debe ser anclada mediante armaduras verticales a los arcos comprimidos de descarga, análogamente a lo que ocurre en todos los casos de cargas suspendidas en la parte inferior de las vigas.

El peso propio de la viga de gran altura conduce a una distribución de tensiones ubicada entre los dos casos que muestra la Fig. 2.4, es decir que en la zona inferior origina tensiones verticales  $\sigma_y$  de tracción (positivas). La parte comprendida un poco por debajo de una parábola que pasa por los apoyos y con una flecha  $y = 1,5 x_u$  (1,5 veces la distancia del eje neutro al borde inferior) debe, en consecuencia ser colgada, lo que exige siempre una ligera armadura vertical (Fig. 2.6).

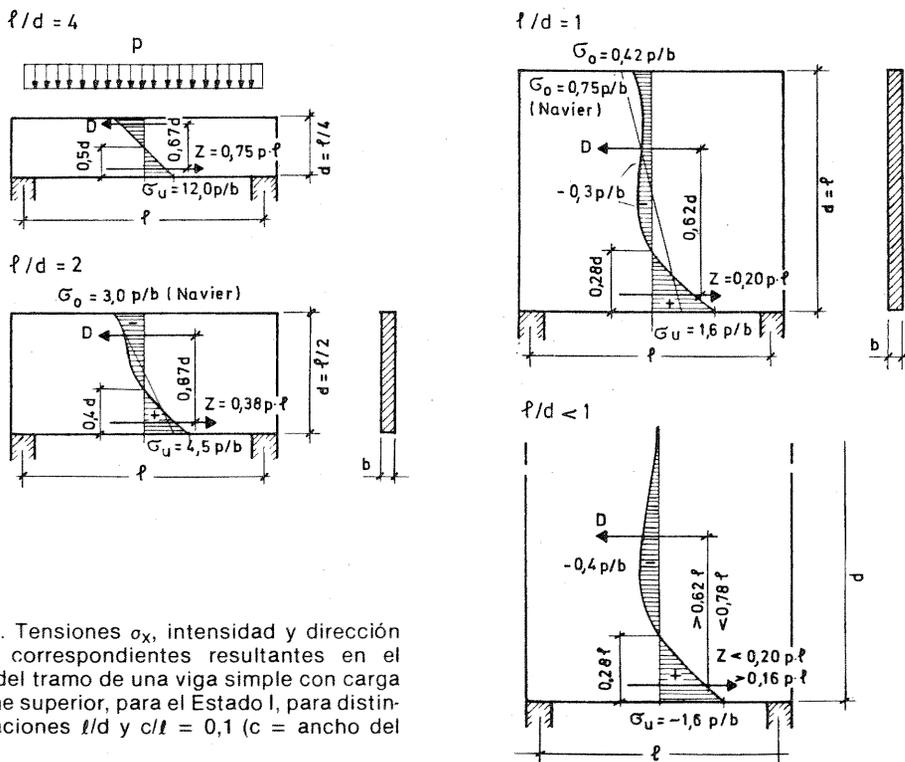


Fig. 2.2. Tensiones  $\sigma_x$ , intensidad y dirección de las correspondientes resultantes en el centro del tramo de una viga simple con carga uniforme superior, para el Estado I, para distintas relaciones  $l/d$  y  $c/l = 0,1$  ( $c$  = ancho del apoyo).

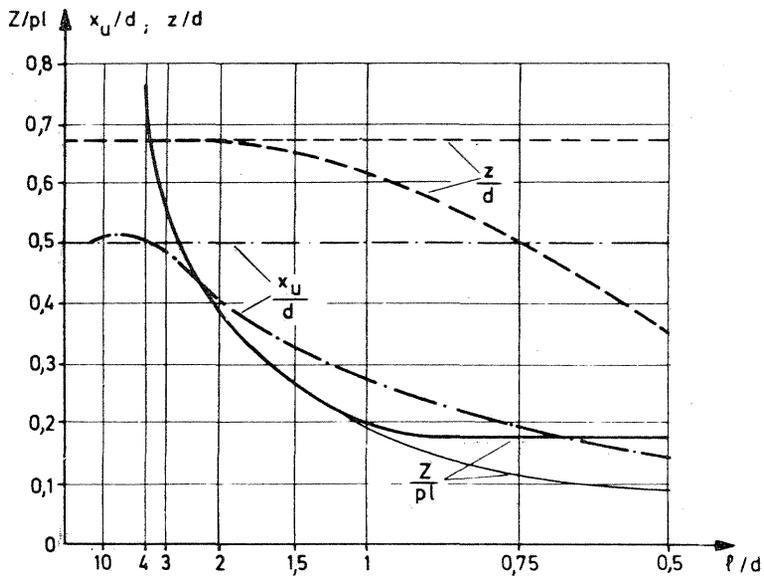


Fig. 2.3. Magnitudes relativas del esfuerzo de tracción  $Z/p \cdot l$ , del brazo elástico interno  $z/d$  y de la distancia  $x_u/d$  del eje neutro al borde inferior en chapas de un solo tramo con sección rectangular según Navier (líneas de trazo fino) y de acuerdo con la teoría laminar (líneas gruesas) en función de la esbeltez  $l/d$ .

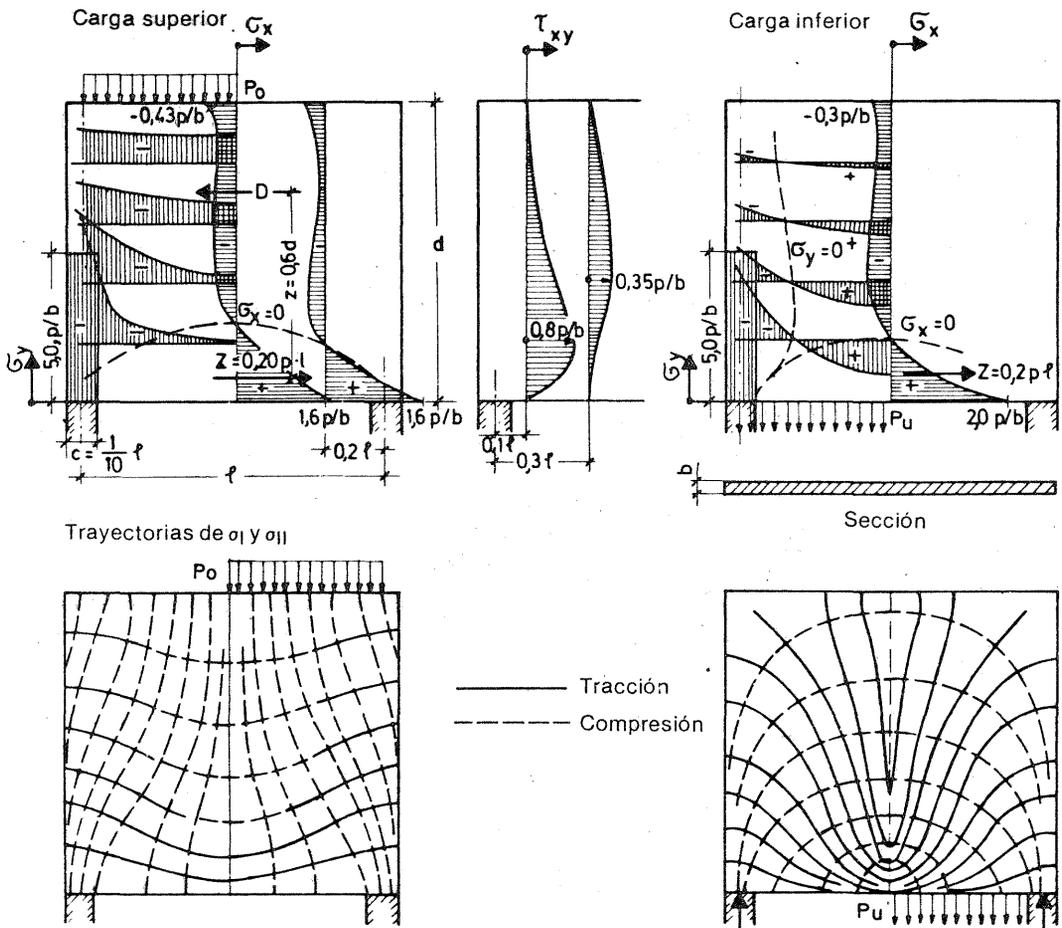


Fig. 2.4. Diagramas de las componentes de tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$  y trayectorias de las tensiones principales para una viga de gran altura de un solo tramo y  $l/d = 1$  y  $c/l = 0,1$  para cargas superior e inferior respectivamente.

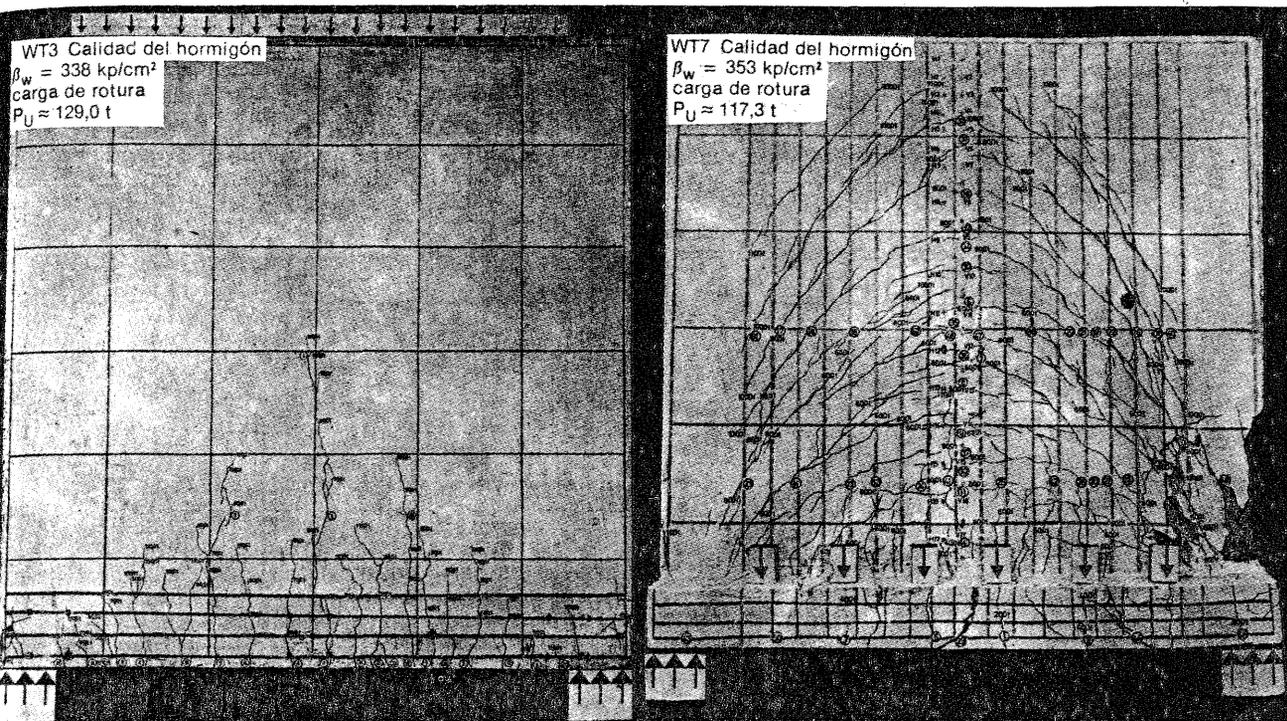


Fig. 2.5. El aspecto de la fisuración poco antes de alcanzarse la rotura, confirma la consistencia de la hipótesis relativa a las trayectorias de las tensiones principales en lo que respecta al comportamiento bajo carga.

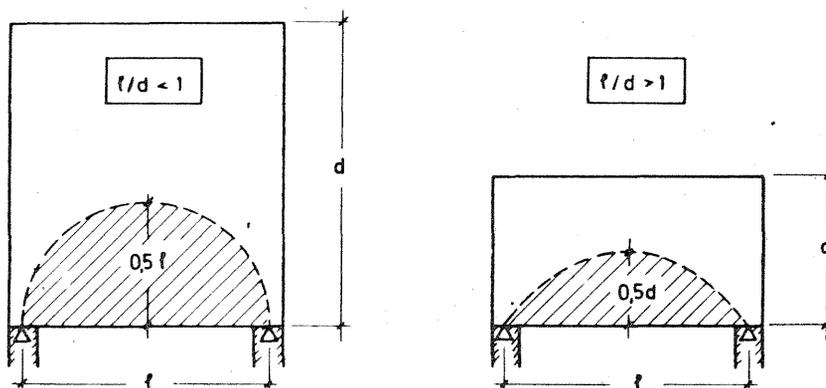


Fig. 2.6. El peso propio de la chapa que corresponde a la parte ubicada por debajo del semicírculo o de la parábola, debe colgarse de la parte superior.

En los casos representados en las Figs. 2.2 a 2.4, la carga  $p$  se extiende a la luz teórica  $l$ . Si se carga la totalidad de la longitud de la viga de gran altura,  $Z$  aumenta y la tensión de compresión en el borde superior resulta menor, por cuanto las porciones de carga aplicadas en los extremos originan tracción (Fig. 2.7).

### 2.3.2.2. Cargas concentradas

Según H. Bay [16], cuando en el borde superior actúa una carga concentrada, en la sección del centro del tramo, para  $l/d = 1$ , se obtiene una repartición de tensiones  $\sigma_x$  como la que

muestra la Fig. 2.8. Debajo de la carga se originan tensiones de fractura, del tipo que se estudiará en el Cap. 3, originadas por la aplicación de las cargas. Para  $l/d > 1,2$  dichas tensiones son sobrepasadas por las tensiones de compresión por flexión  $\sigma_x$  en una medida cada vez mayor al aumentar la esbeltez. Para vigas de muy gran altura, por ejemplo  $l/d = 0,5$ , al aplicar la carga concentrada se forma una zona con distribución uniforme de  $\sigma_y$  constante. A partir de  $d = l$ , el diagrama de tensiones iguala al correspondiente a las vigas de gran altura con carga uniforme en su borde superior.

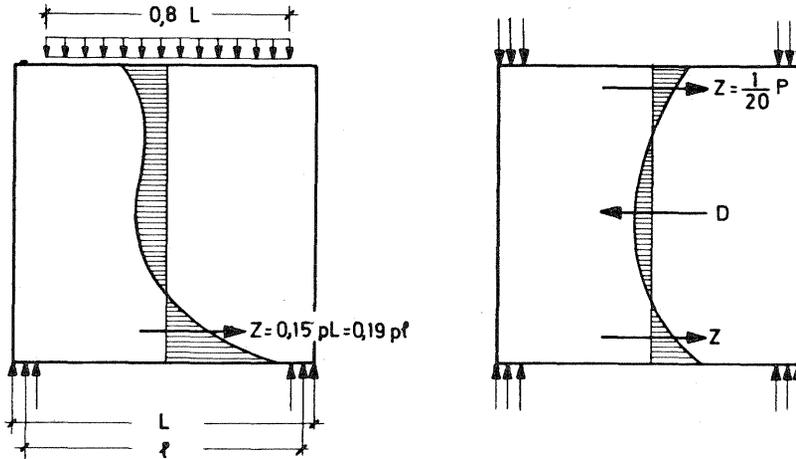


Fig. 2.7. Influencia de las cargas  $p$ , aplicadas directamente sobre los apoyos, sobre los esfuerzos característicos en el centro del tramo (para  $l/d = 1$  y  $c/l = 0,1$ ).

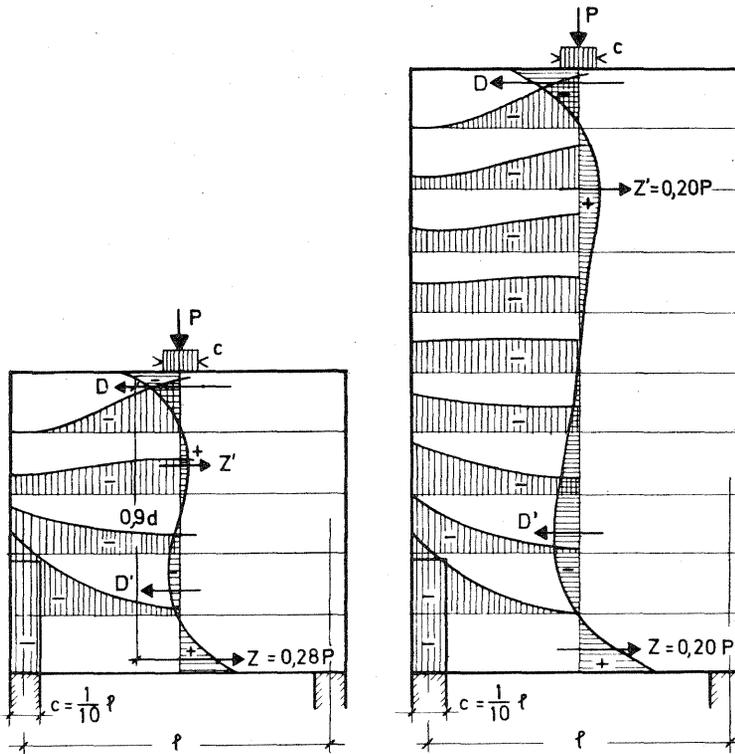


Fig. 2.8. Distribución de las tensiones  $\sigma_x$  en la sección central y las  $\sigma_y$  en distintas secciones horizontales, originadas por una carga concentrada en el borde superior en chapas de  $l/d = 1$  y  $l/d = 0,5$  ( $c/l = 0,1$ ).

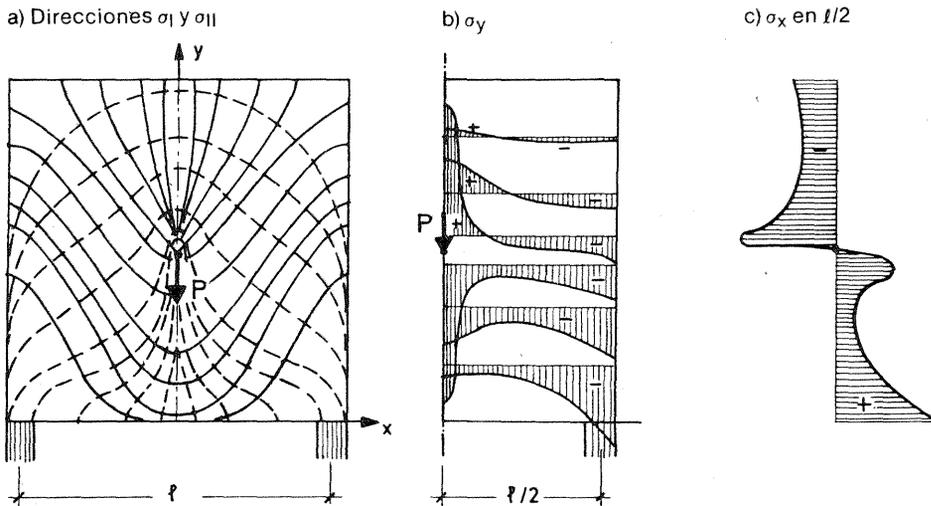


Fig. 2.9. Trayectorias de las tensiones principales y componentes de tensión  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$  en una chapa cuadrada con una carga concentrada aplicada en el interior [25].

Para una carga concentrada aplicada en el centro geométrico de la chapa, se obtiene la distribución de las direcciones de las tensiones principales que muestra la Fig. 2.9 a (según S. El-Behairy [25]). Debajo del punto de aplicación de la carga se originan diagonales ideales comprimidas, primero empujadas y que luego se curvan hacia los bordes. Sobre la carga se origina una especie de estructura colgante radial, suspendida de arcos de descarga comprimidos. Las tensiones  $\sigma_y$  correspondientes a la recta de acción de la carga, que actúan sobre la misma (tracción) son casi de la misma intensidad que las que lo hacen por debajo (compresión) (Fig. 2.9 b).

Las  $\sigma_x$  correspondientes a la recta de acción de la carga inmediatamente debajo de la misma muestran las tensiones típicas de astillado (Fig. 2.9 c), ver al respecto Cap. 3. En este caso nuevamente deberá tenerse en cuenta que dicho diagrama de tensiones sólo es válido cuando la rigidez a la deformación y la resistencia de la chapa son las mismas en cualquier dirección, tanto en tracción como en compresión, lo que no es el caso para el hormigón. Luego de la primera fisura transversal, detrás de la carga, la repartición del esfuerzo entre una diagonal ideal comprimida dirigida hacia abajo y la estructura radial colgante, depende totalmente de la rigidez de esta última, que generalmente, aún en el caso de una muy buena armadura de suspensión, es menor que la correspondiente a una diagonal ideal comprimida. En vigas de hormigón armado, es necesario tener en cuenta dichas relaciones de rigideces, que pueden resultar influidas por el dimensionado.

### 2.3.2.3. Influencia de los refuerzos en los apoyos

La existencia de refuerzos en los apoyos, pilares de apoyo o aumento del espesor de los bordes, tal como ocurre cuando una viga de gran altura se vincula a columnas o a paredes transversales influyen, según sea su rigidez, considerablemente en la distribución de tensiones, considerando que las vigas de gran altura transmiten carga a los apoyos a lo largo de su altura. La Fig. 2.10 muestra la distribución de las tensiones y los esfuerzos de tracción resultantes, para refuerzos de borde de espesor mediano para  $l/d = 1$  y cargas superiores e inferiores. El eje neutro para  $x = l/2$  queda ubicado sensiblemente más arriba, la tracción inferior se reparte sobre una altura mayor y para mantener la equivalencia, las máximas tensiones de tracción resultan menores. En las cercanías de los apoyos ( $x = 0,1 l$ ), las tensiones de corte en la parte inferior son menores que cuando no existe refuerzo en los bordes laterales pero, en cambio, se extienden en este caso mucho más arriba, es decir que las tensiones principales se mantienen en el borde inclinadas en una altura mayor, porque los bordes reforzados deben absorber en la parte superior cargas transmitidas por la viga-pared (condicionado esto por la compatibilidad de las deformaciones  $\epsilon_y$ ).

La Fig. 2.11 muestra la misma situación anterior pero para el caso de refuerzo de los bordes laterales más robustos y  $l/d = 0.67$ . La zona traccionada de las  $\sigma_x$  resulta más alta aún, pero la resultante de tracción es sólo un poco menor. Debe tenerse en cuenta la existencia de una tracción transversal en toda la altura, entre la viga de gran altura y el refuerzo del borde lateral. Cuando se trata de una carga suspendida del borde inferior, los apoyos de borde lateral originan un desplazamiento hacia arriba de los arcos de descarga comprimidos y los  $\sigma_y$  positivos llegan hasta una altura mayor.

Las figuras se basan en los trabajos de H. Linse [26], S. Rosenhaupt [27] y H. Bay [28].

### 2.3.3. Tensiones en vigas de gran altura de varios tramos

#### 2.3.3.1. Carga uniforme

Cuando se trata de vigas de gran altura de varios tramos (suponiendo apoyos indeformables) se tiene para el tramo, para  $l/2$ , los mismos diagramas de tensiones que para la viga de un tramo. Sobre los apoyos puede observarse una concentración creciente de la zona comprimida por flexión al disminuir la flexión, con elevadas tensiones de compresión  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$ . También las tensiones de corte se concentran en la zona de apoyo, de modo que las tensiones principa-

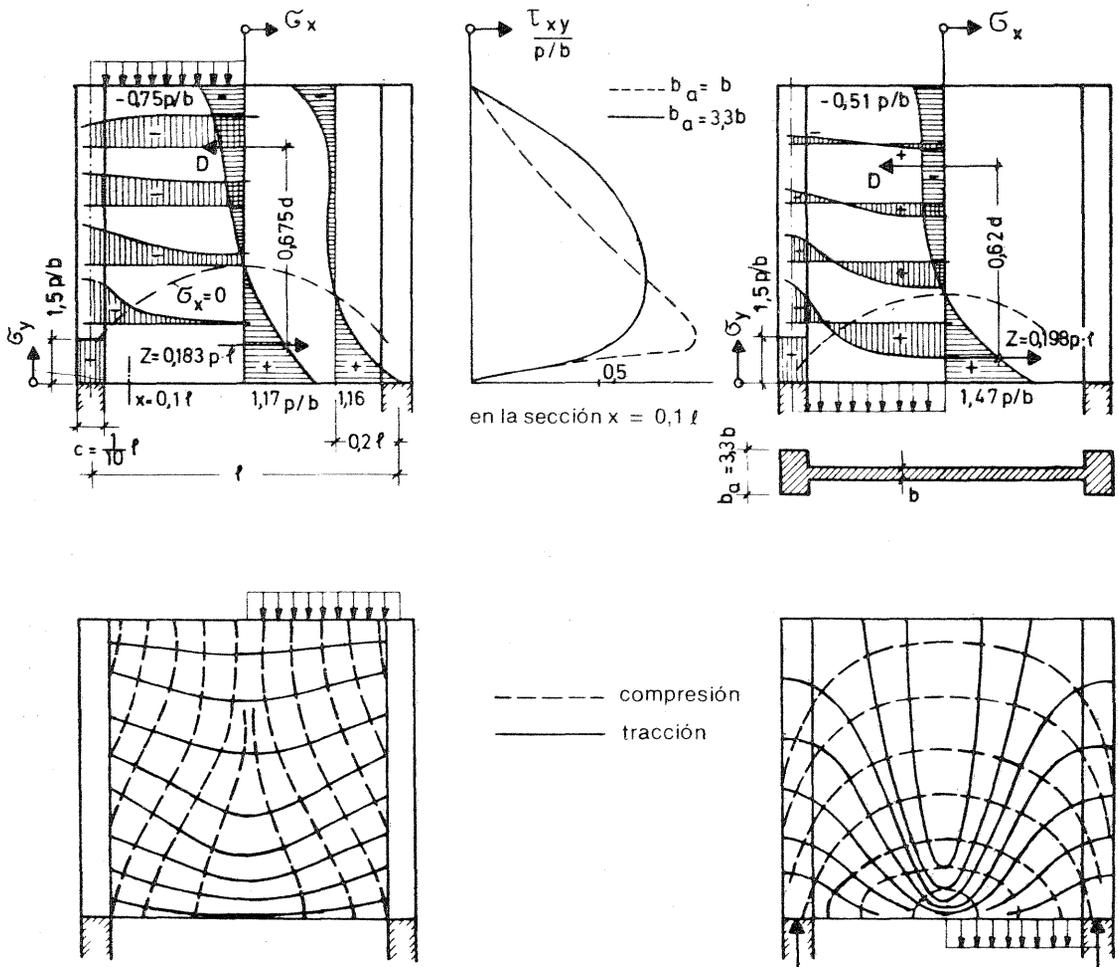


Fig. 2.10. Distribución de las componentes de tensión  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  y de las trayectorias de las tensiones principales en una viga de gran altura de un solo tramo, con apoyos de borde reforzados de  $b_a = 3.3b$ , para  $l/d = 1$  y  $c/l = 0.1$ , para cargas superior e inferior, respectivamente (ver Fig. 2.4).

lés alcanzan mayores pendientes en dicho lugar (para carga superior resulta  $\alpha_{\text{trac.}} \approx 30^\circ$ ). La Fig. 2.12 muestra, para un tramo interior de una viga de varios tramos, sucesivamente  $\sigma_x$ ,  $\tau_{xy}$ ,  $\sigma_y$  y las resultantes  $Z_x$  y  $D_x$ , juntamente con el brazo elástico interno para distintos  $l/d$ .

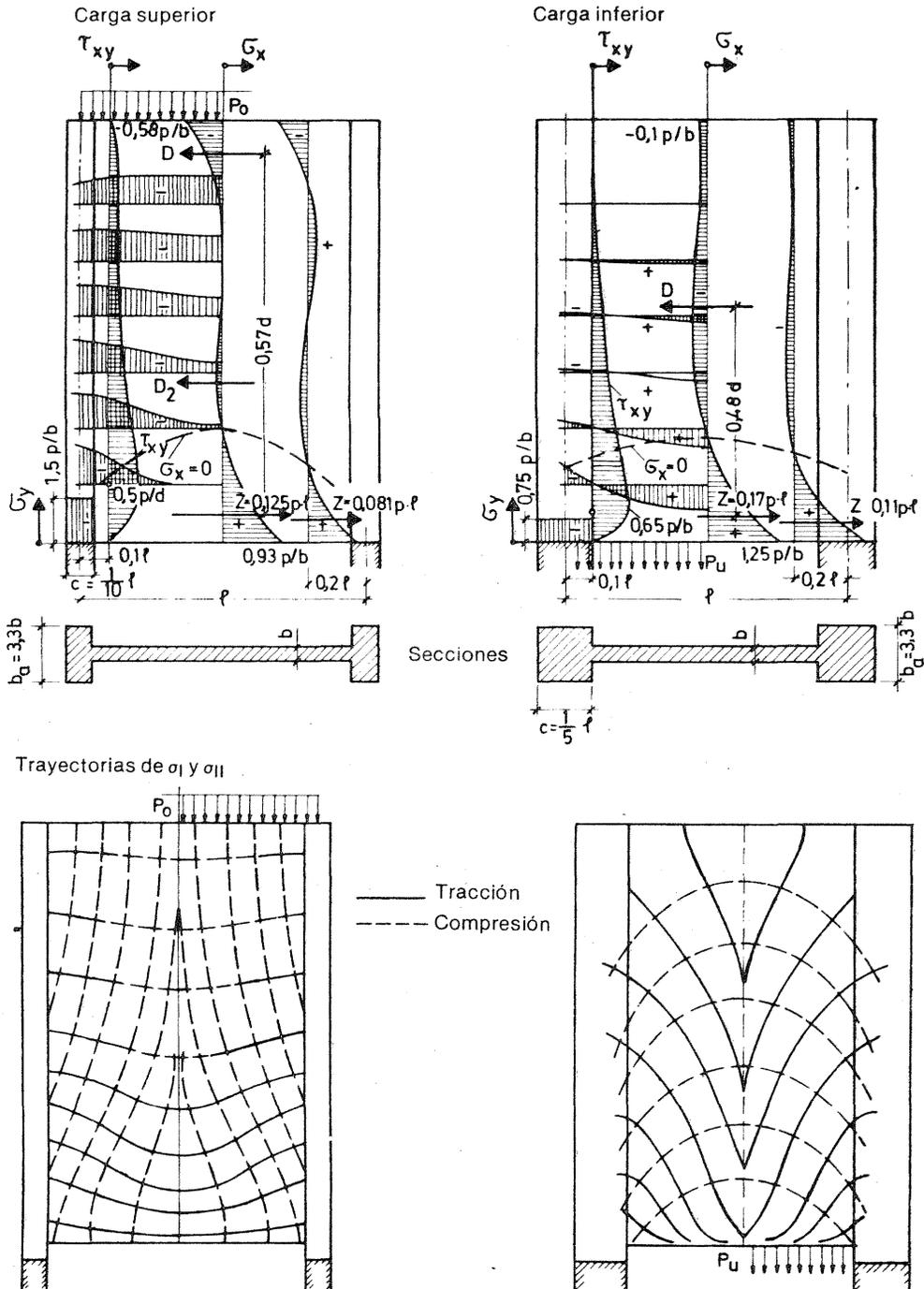


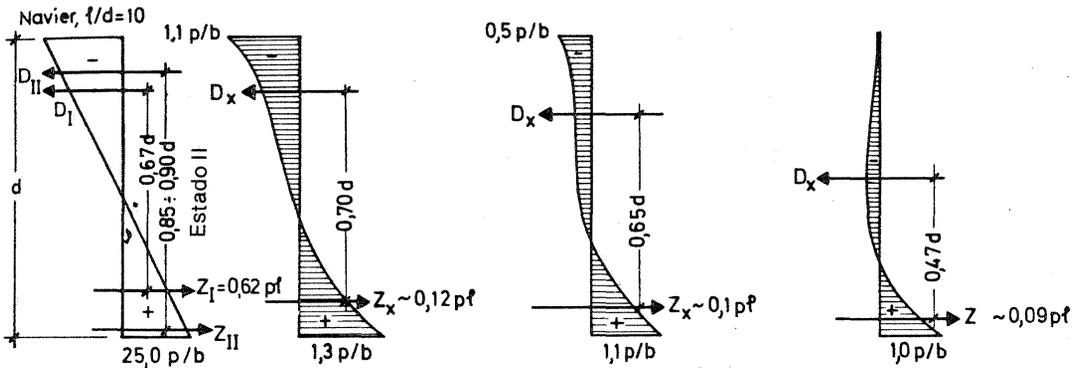
Fig. 2.11. Tensiones y trayectorias de las tensiones principales, análogas a las de Fig. 2.10 pero para vigas con  $l/d = 0,67$  y apoyos de borde con  $b_a = 3,3 b$  y  $c/l = 0,1$  y  $0,2$ .

$l/d = 2$

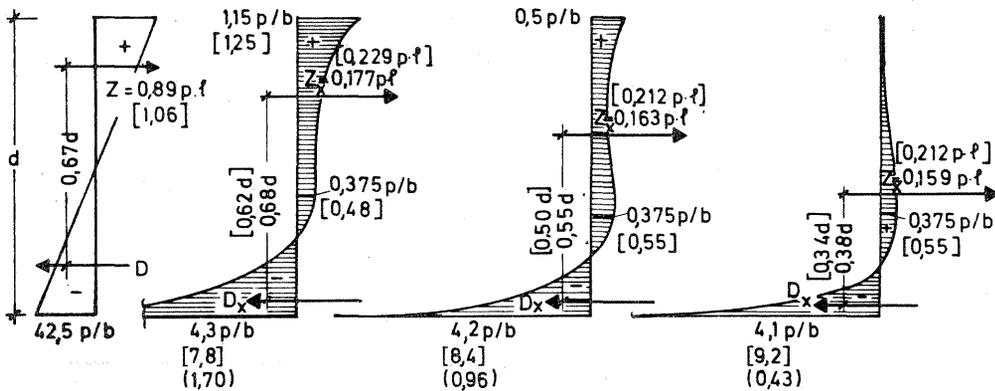
$l/d = 1,5$

$l/d = 1$

Secciones en el centro del tramo



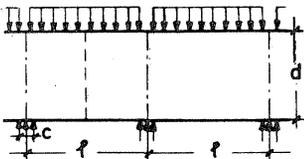
Secciones en el borde del apoyo (los valores [ ] valen para el centro del apoyo y los ( ) en el centro del apoyo según Navier).



en el borde del apoyo  $M_S = \frac{p \cdot l^2}{16,8}$

en el centro del apoyo  $\frac{p \cdot l^2}{14,1} (< \frac{p \cdot l^2}{12})$

¡porque p se extiende sólo sobre  $l - c$ !



$\tau_{xy}$  para secciones en el borde de apoyo

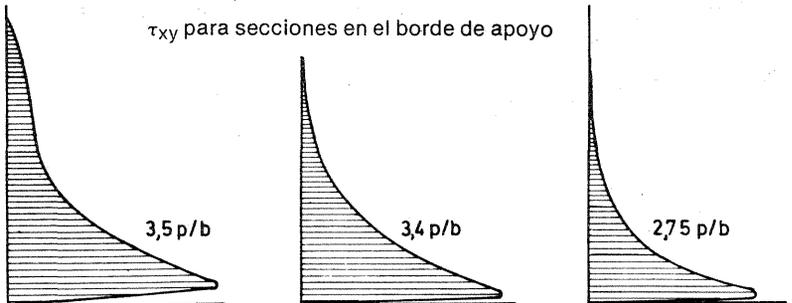


Fig. 2.12 a. Componentes de tensión  $\sigma_x$  y  $\tau_{xy}$  así como también intensidad y recta de acción de los esfuerzos internos en el centro del tramo y en el borde apoyo en un tramo interior de una viga de gran altura continua cargada superiormente para distintas esbelteces  $l/d$  ( $c/l = 0,1$ ).

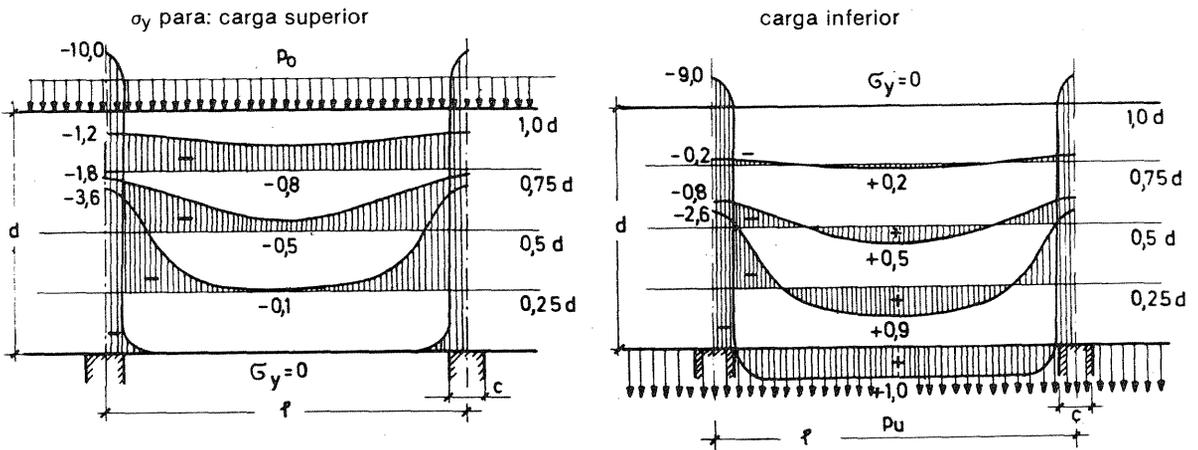


Fig. 2.12 b. Tensiones  $\sigma_y$  correspondientes a Fig. 2.12 a en vigas continuas de gran altura para  $l/d = 1,5$  con carga superior e inferior.

La Fig. 2.13 permite visualizar las trayectorias de las tensiones principales para  $l/d = 1$  para los casos de cargas uniformes superior e inferior. Las mismas se basan principalmente en el trabajo de R. Thon [29].

En los apoyos intermedios de las vigas continuas de gran altura, las máximas tensiones de compresión ocurren sobre los apoyos, alcanzando su máximo valor  $\sigma_{11} \approx \sigma_y = l \cdot p/c \cdot b$  sobre el eje de los mismos. La longitud  $c$  del apoyo y el espesor  $b$  de la chapa deben, por ello, elegirse de modo tal que en dicha zona, el hormigón posea una seguridad suficiente a la compresión. La zona de tracción sobre el apoyo se extiende a una parte considerable de la altura de la viga, y la tensión de tracción alcanza su valor máximo por debajo de  $d/2$  cuando se tiene  $l/d \leq 1,5$ . Esta circunstancia debe tenerse presente al proceder a la distribución de la armadura de flexión.

### 2.3.3.2. Cargas concentradas

F. Dischinger [15] calculó, para cargas concentradas en el centro del tramo, los diagramas de las tensiones  $\sigma_x$  en la sección central, representadas en Fig. 2.14 para distintos  $l/d$ . Cuando  $c = c'$ , los mismos, pero con signo contrario, son aplicables a la sección coincidente con el eje del apoyo.

La carga constituida por dos cargas opuestas concentradas ocurre cuando las reacciones de apoyo se transmiten a través de la pared (Fig. 2.15). En este caso se originan esfuerzos transversales de tracción, que pueden determinarse como esfuerzos de fractura (o hendidura) *provocados por la introducción de fuerzas*, según Cap. 3. F. Dischinger [15] da la distribución de las tensiones de tracción transversales  $\sigma_x$  para  $c/l = 0,05$  y distintos valores de  $l/d$ . De los mismos es posible calcular la magnitud y ubicación de la armadura transversal requerida (Fig. 2.16 y Tabla 2.16).

### 2.3.3.3. Influencia de los refuerzos en los apoyos

También en el caso de vigas-pared de varios tramos, los refuerzos en los apoyos, mediante columnas o pilastras continuas sobre toda la altura, ya dentro de la altura de la viga, alivianan la carga, tanto más cuanto mayor sea la sección transversal relativa del apoyo. G. Pfeiffer [30] trae a este respecto curvas muy útiles, que permiten conocer (Fig. 2.17) la distribución de la parte  $P_L$  en el apoyo de la carga total  $P = p\ell$  a lo largo de la altura de la viga para distintas relaciones  $l/d$ . De estos valores es posible deducir la reducción de la tensión principal de compresión oblicua en el borde inferior de la chapa, la que, de no existir dichos refuerzos, podría alcanzar fácilmente un valor crítico. En el caso de carga inferior suspendida, la absorción de la carga se extiende a una zona más reducida. La Fig. 2.18 muestra en las trayectorias de las tensiones principales en forma clara la considerable influencia de la sección relativa de los apoyos.

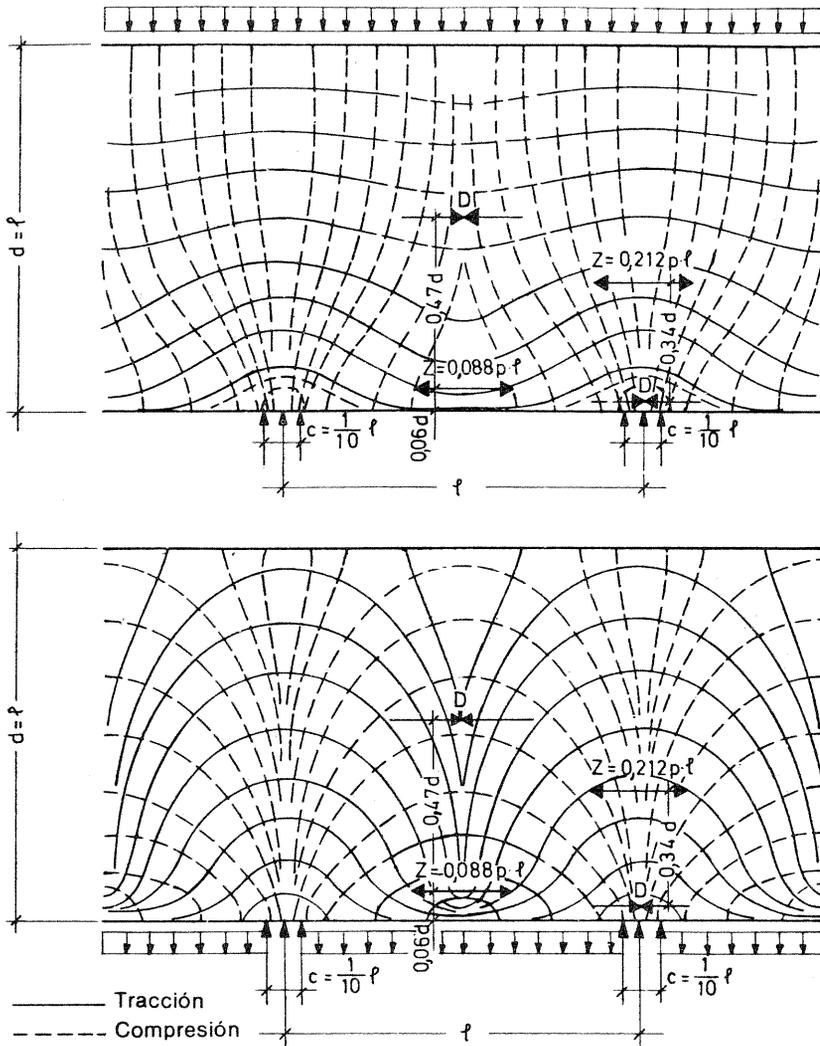


Fig. 2.13. Trayectorias de las tensiones principales en un tramo intermedio de una viga continua de gran altura con  $l/d = 1$  y  $c/l = 0,1$ , para cargas superiores o inferiores, respectivamente [29].

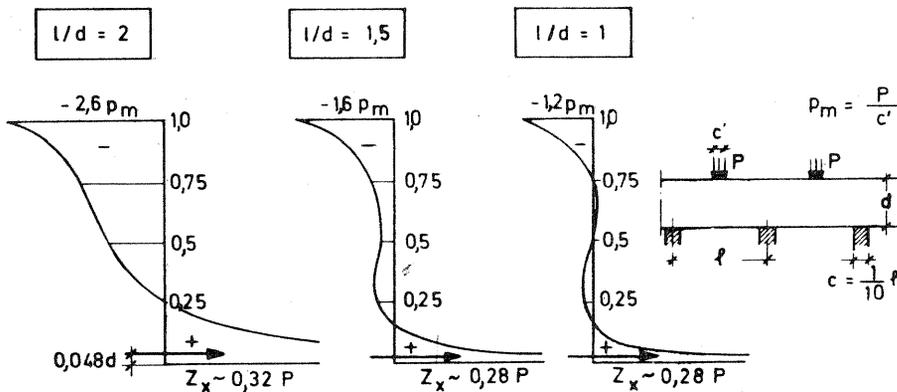
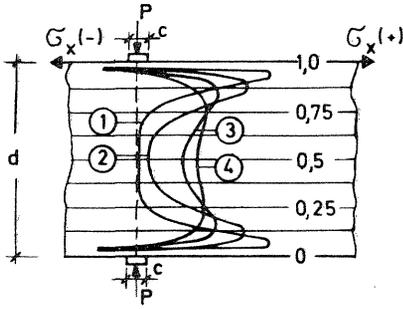
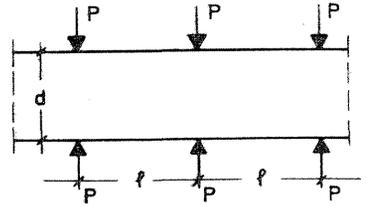


Fig. 2.14. Componentes de tensión  $\sigma_x$ , así como también, recta de acción e intensidad de las resultantes de tracción  $Z_x$  en el centro del tramo de vigas continuas de gran altura para distintas relaciones  $l/d$  solicitadas por una carga concentrada aplicada en el centro del borde superior. (Para la distribución de tensiones en el eje del apoyo deben invertirse los diagramas) [15].

Fig. 2.15. Viga de gran altura solicitada por cargas opuestas concentradas.



$l/d$	1/4	1/2	1	2
Línea	①	②	③	④
$1,0 d$	-76,00	-38,00	-19,09	-9,98
$0,875 d$	+ 0,72	+ 0,93	+ 0,66	+ 0,47
$0,75 d$	+ 0,08	+ 0,40	+ 0,56	+ 0,56
$0,625 d$	+ 0,01	+ 0,14	+ 0,44	+ 0,51
$0,5 d$	+ 0,00	+ 0,08	+ 0,40	+ 0,49

$\left. \begin{matrix} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \end{matrix} \right\} \frac{P}{b d}$

Fig. 2.16. Distribución de las tensiones transversales de tracción  $\sigma_x$  en vigas de gran altura con cargas concentradas opuestas para distintas relaciones de  $l/d$  y  $c/l = 0,05$  [15].

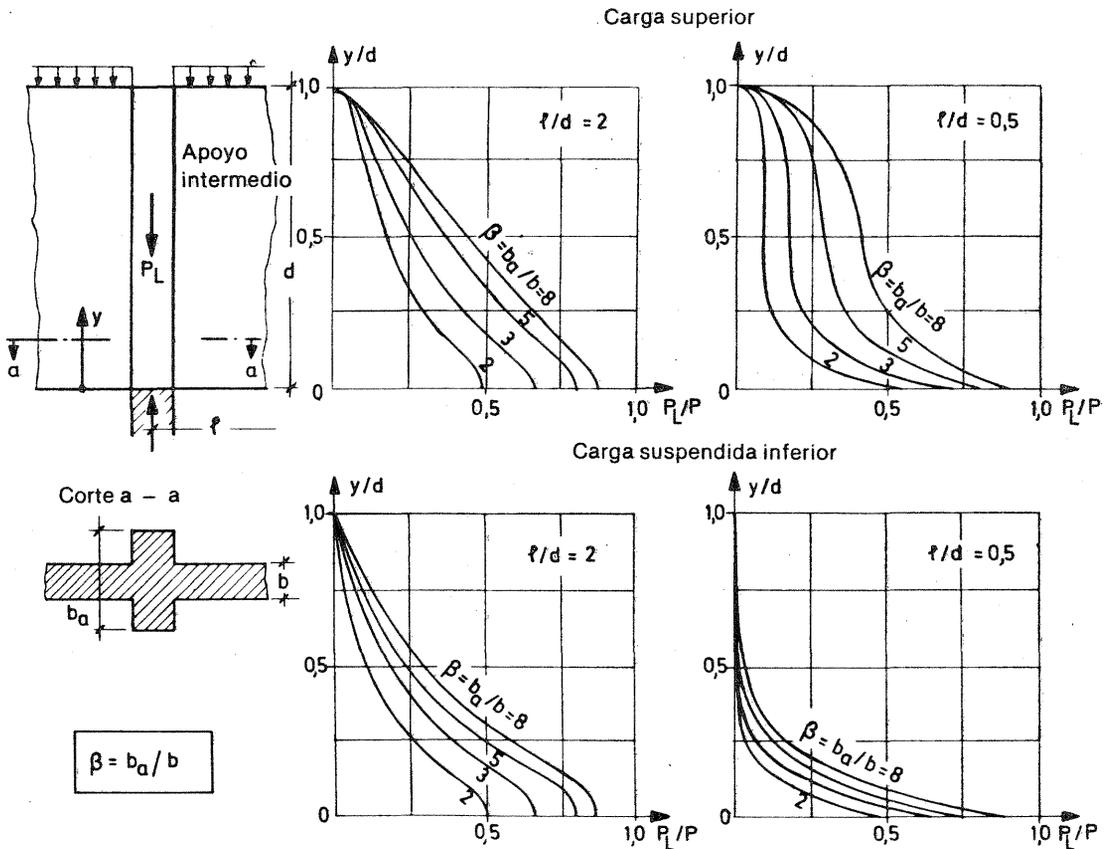


Fig. 2.17. Carga parcial  $P_L$ , de la carga total  $P = p \cdot l$ , que absorben los apoyos reforzados, en función de la esbeltez  $l/d$  y de la relación  $\beta = b_a/b$  entre el espesor del refuerzo y el de la chapa [30].

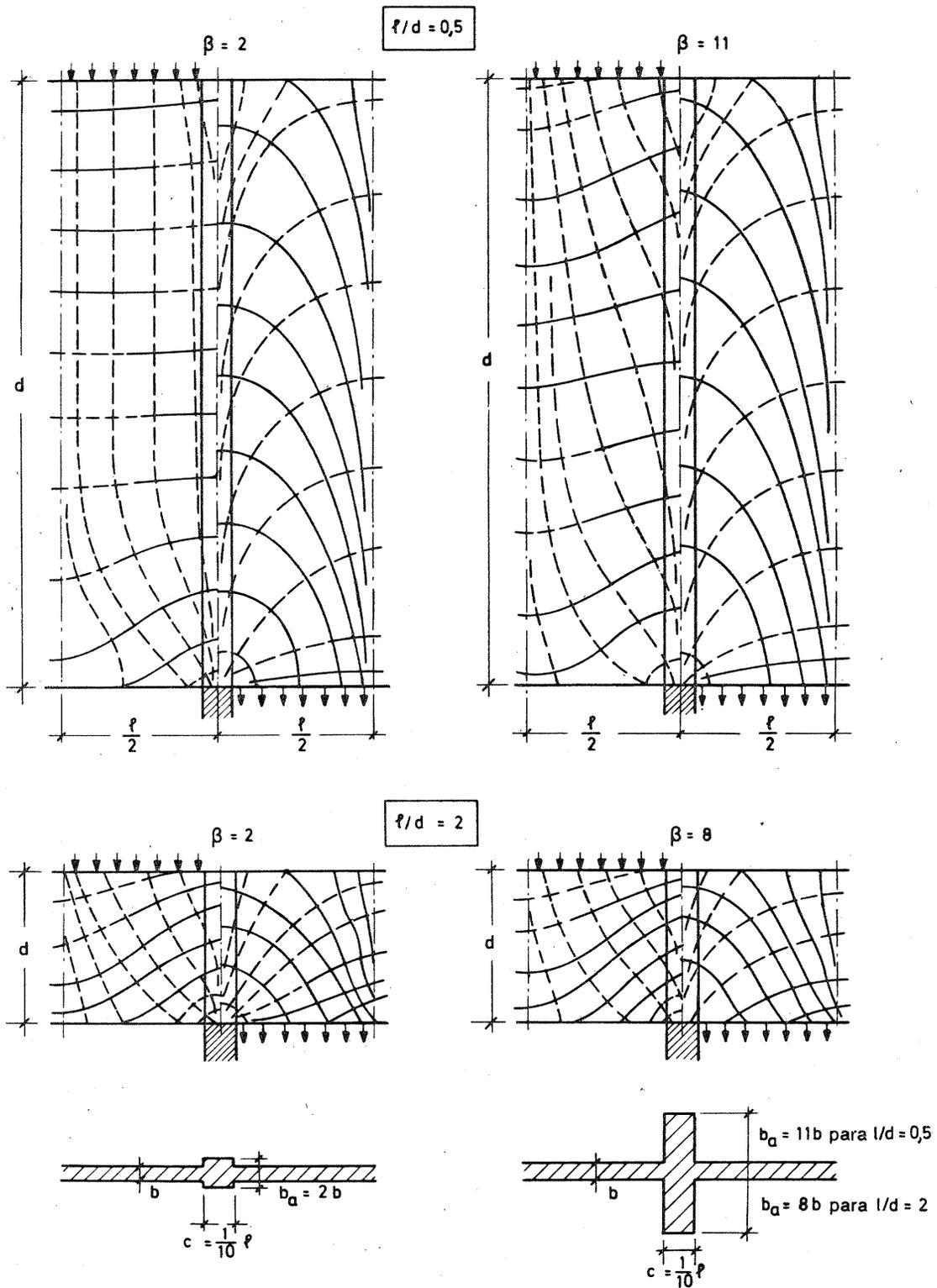


Fig. 2.18. Trayectorias de las tensiones principales en vigas continuas de gran altura con  $l/d = 0,5$  y  $l/d = 2$  y distintos  $\beta = b_a/b$ , para cargas uniformemente distribuidas aplicadas en los bordes superior e inferior respectivamente [30].

### 2.3.3.4. Sobre la obtención de los esfuerzos característicos en vigas continuas de gran altura

En lo que se refiere a la distribución de los esfuerzos característicos, un trabajo de H. Bay [16] contiene indicaciones para el caso de vigas de dos tramos, de mucho valor (Fig. 2.19). Para  $l/d \leq 1$  y carga uniforme, los momentos sobre los apoyos resultan ser aproximadamente la mitad que para vigas esbeltas de  $EJ$  constante. Por las condiciones de equilibrio, los momentos en los tramos deben, en consecuencia, ser mayores. Para los esfuerzos de corte, la diferencia es menor. La causa reside en las deformaciones producidas por  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$  en zonas de compresión por flexión más reducidas y más solicitadas sobre los apoyos intermedios, que por esta razón sufre una mayor deformación que la zona correspondiente del tramo. En las vigas de hormigón armado, esta reducción de los momentos en los apoyos y el correspondiente aumento de los momentos en los tramos, puede llegar a ser aún mayor, de acuerdo con el dimensionado y tipo de la armadura sobre los apoyos. Esta circunstancia debe tenerse presente al dimensionar vigas continuas de gran altura, de varios tramos. En especial debe pensarse que los apoyos extremos de las vigas de gran altura continuas, soportan una carga mayor que los correspondientes en las vigas continuas esbeltas (ver Fig. 2.19).

W. Schlee determinó con mayor exactitud las influencias de  $\tau_{xy}$  y  $\sigma_y$  para el Estado I. Para ello, calcula la viga continua según los procedimientos comunes de la teoría de la flexión para una viga continua sobre apoyos elásticos (ecuación de los cinco momentos basada en las ecuaciones de Clapeyron).

La tangente del ángulo de giro (rotación de la barra) debe, en este caso, incluir la influencia de los momentos y esfuerzos de corte. Las constantes elásticas de los puntos de apoyo se obtienen de la compresión elástica de la parte de la chapa comprendida entre el apoyo rígido y el eje de la barra, como consecuencia de las deformaciones verticales en dicho lugar.

$$\epsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \mu \sigma_x) .$$

Los giros de los extremos de barras  $\bar{\varphi}$  multiplicados por  $EJ$ , correspondiente a  $\bar{M} = 1$  y  $\bar{Q} = 1/l$  actuando sobre el apoyo A son

$$EJ \bar{\varphi}_a = \frac{\ell}{6} (2 + \xi)$$

$$EJ \bar{\varphi}_b = \frac{\ell}{6} (1 - \xi)$$

$$\text{donde } \xi = \kappa (1 + \mu) \frac{1}{n} ; n = \frac{\ell}{d} .$$

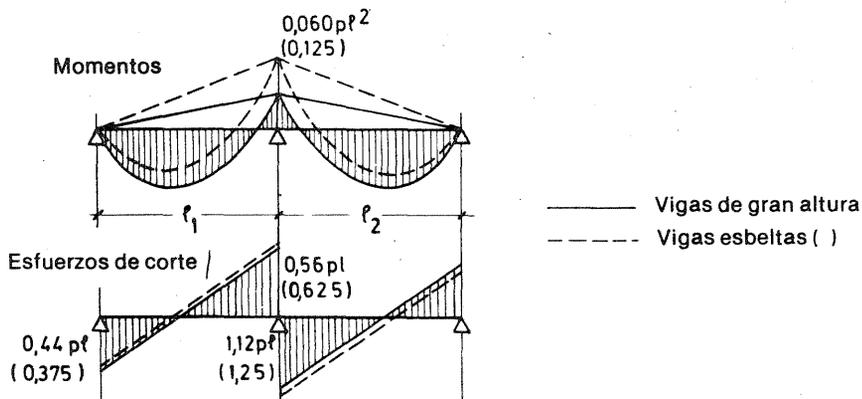


Fig. 2.19. Diagramas de momentos flexores y esfuerzos de corte en vigas esbeltas y de gran altura sobre tres apoyos para  $l/d \leq 1$  [16].

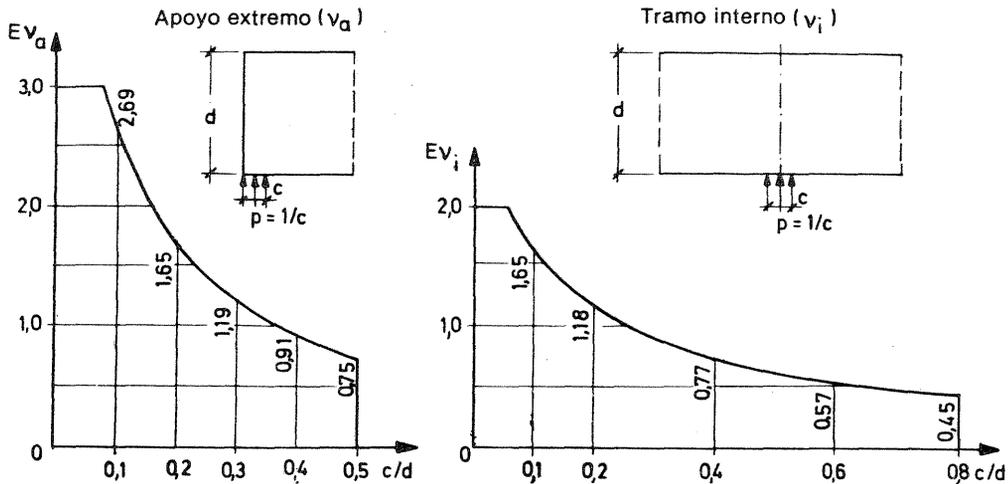


Fig. 2.20. Constantes elásticas  $E_v$  para apoyos extremos e intermedios en función del ancho de apoyo  $c/d$  [22].

Los valores  $\xi$  y  $x$  pueden tomarse de la tabla I de [22] para distintos coeficientes de Poisson  $\mu$  y esbelteces  $l/d$ , debiendo tenerse presente que es necesario distinguir entre apoyos extremos y apoyos intermedios.

Las constantes elásticas  $E_v$ , despreciando el coeficiente de Poisson  $\mu$ , dependen sólo de  $\sigma_y$ :

$$E_v = \int_{-b}^b \sigma_y \frac{d}{y} dy$$

Pueden calcularse mediante las tablas de valores de  $\sigma_y$  dadas en [8]. Las integrales fueron calculadas para las relaciones usuales, de modo que los valores  $E_v$  pueden tomarse de los diagramas de [22] (Fig. 2.20).

Para determinar los esfuerzos característicos, mediante los cuales deben calcularse las tensiones  $\sigma_x^0$  y  $\sigma_y^0$  de la viga, pueden utilizarse las ecuaciones de los cinco momentos.

En casos especiales y para la determinación de líneas de influencia, Schlee da en [22] indicaciones prácticas adicionales.

### 2.3.4. Determinación de las tensiones según W. Schlee

En 1964, W. Schlee [21] propuso un método, que permite calcular en forma simple las tensiones en vigas de gran altura o en chapas. El procedimiento se basa en el concepto que el estado de tensiones en la chapa ( $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\tau_{xy}$ ) puede obtenerse por la superposición de las tensiones en una viga según la hipótesis de Navier y un estado de tensiones adicional ( $\Delta \sigma_x$ ,  $\sigma_y$ ,  $\Delta \tau_{xy}$ ).

El estado de tensiones en la viga satisface la totalidad de las condiciones de borde y de equilibrio. Se determina, independientemente de la esbeltez  $l/d$  mediante las fórmulas usuales de la teoría de flexión en vigas, es decir que se admite una distribución lineal de las tensiones  $\sigma_x^0$ ; no considerar las tensiones  $\sigma_y$  y una distribución parabólica de las tensiones de corte  $\tau_{xy}^0$ .

Las tensiones adicionales, como tensiones propias, se encuentran de por sí en equilibrio, dependen únicamente de la distribución de las cargas de borde y no están influidas por la esbeltez  $l/d$ . De acuerdo con el principio de Saint-Venant disminuyen hasta anularse a una distancia del orden de  $1,5 d$  del punto de aplicación de la carga.

## OBSERVACIONES SOBRE LOS VALORES DE LAS TABLAS DE SCHLEECH

Schleeh da valores tabulados de dichas tensiones adicionales para 3 estados de carga importantes (ver Fig. 2.21):

- Carga exterior  $p$  aplicada a una chapa, cuya longitud sea por lo menos  $1,5 d$  a ambos lados de la carga (Tabla I para  $c/d = 0,1$  y II para  $c/d = 0,2$  en [21]).
- Carga en el extremo de una chapa (esquina), cuya longitud sea por lo menos  $1,5 d$  (Tabla II en [21]).
- Carga uniforme total  $p$ , en la zona extrema de una chapa con una longitud  $\geq d$  (Tabla IV en [21]).

Los valores de las tensiones  $\Delta \sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\Delta \tau_{xy}$  están dados para los nudos de una cuadrícula, separados entre sí de  $0,1 d$ . La Fig. 2.22 muestra un ejemplo de la superposición de tensiones. Sin embargo, si la chapa se extiende lateralmente a la zona cargada de una longitud menor que  $1,5 d$  (Fig. 2.23), en el borde vertical quedan tensiones residuales, que requieren correcciones a efectuar mediante el procedimiento indicado en [20] y [21].

## 2.4. Vigas de gran altura en Estado II desde el punto de vista de su dimensionado

### 2.4.1. Vigas de gran altura directamente apoyadas

La fisuración en vigas de gran altura de hormigón armado, las modificaciones de los esfuerzos internos originadas por la misma y con ello la seguridad, sólo pueden aclararse mediante ensayos. Sobre estos ensayos, en especial sobre los extensos ensayos efectuados en Stuttgart, se ha informado en el cuaderno 178 de la DAfStb [24]. Los resultados de mayor importancia son los siguientes:

Generalmente, las primeras fisuras son debidas a la flexión, que parten del borde en la zona de los máximos momentos y cuya dirección coincide con la de las direcciones de las tensiones principales (Fig. 2.5). Para carga superior y armadura inferior bien anclada y distribuida, prácticamente no se observa ninguna inclinación de las fisuras, es decir que no hay fisuras de corte ni tampoco peligro de rotura por corte, de modo que no se justifican las barras levantadas ni otro tipo de armadura de corte, como era corriente disponer anteriormente.

Las fisuras de corte observadas en algunos ensayos de vigas con columnas de borde, entre éstas y la pared (Fig. 2.24) se deben a una armadura transversal insuficiente y

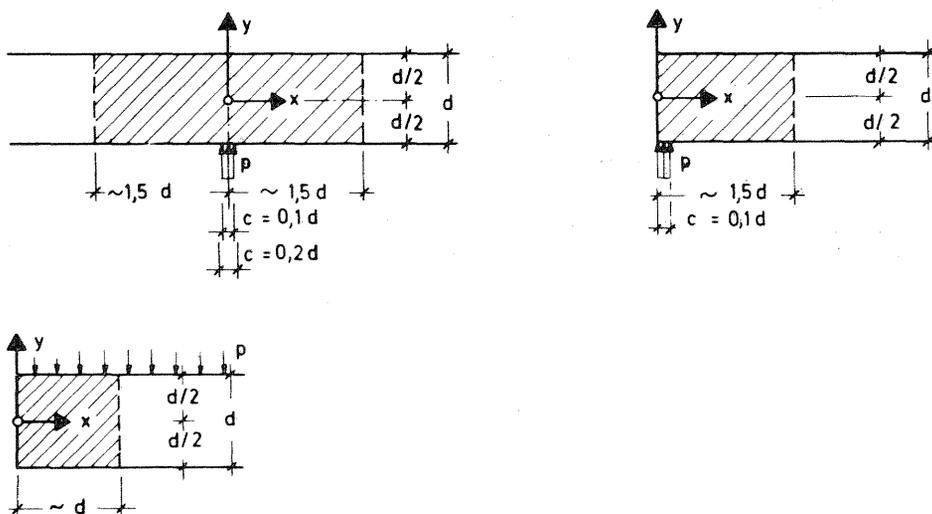
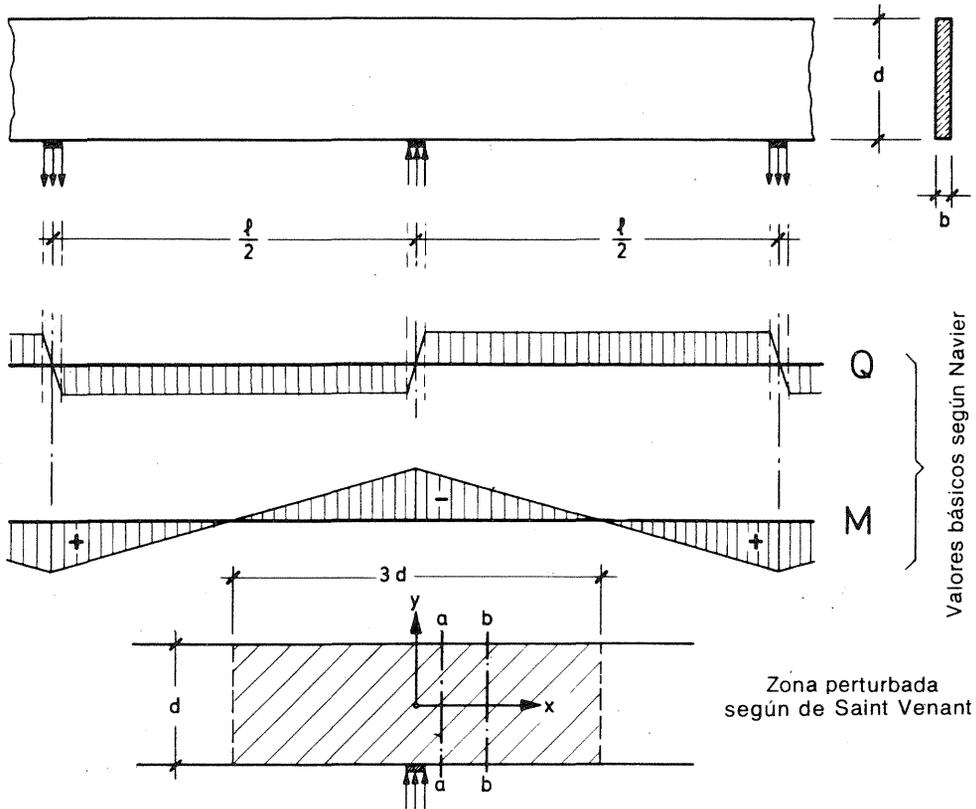
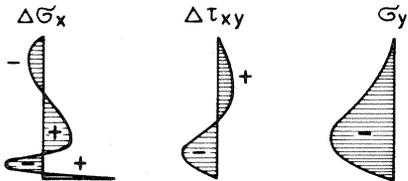


Fig. 2.21. Zonas de chapas, donde es posible calcular las tensiones adicionales debidas a la carga  $p$ , mediante las tablas de Schleeh [21].



Tensiones adicionales debidas a la presión de apoyo

Corte a - a ( $x = 0,2 d$ )



Corte b - b ( $x = 0,6 d$ )

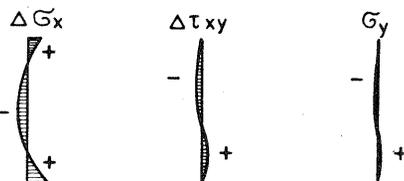


Fig. 2.22. Ejemplo de superposición de tensiones en una viga calculadas según Navier con las adicionales según SchleeH.

defectuosa anclada. Son fáciles de evitar puesto que los esfuerzos transversales de tracción en dicha zona son reducidos y muy poco inclinados.

También para carga inferior primero aparecen las fisuras de flexión, luego siguen las fisuras arqueadas siguiendo las tensiones principales, en un principio en la zona interior y luego se extienden a la zona superior como consecuencia de la deformación de la armadura de suspensión. Estas fisuras se dirigen hacia los bordes con una inclinación bastante pronunciada.

Cuando se trata de vigas de gran altura de varios tramos, primero aparecen fisuras de flexión en los tramos. Las fisuras sobre los apoyos intermedios comienzan casi en la parte inferior de la viga y presentan, para cargas concentradas superiores, una inclinación en dirección a las mismas, especialmente cuando existen refuerzos del apoyo en toda la altura de la viga (Fig. 2.25).

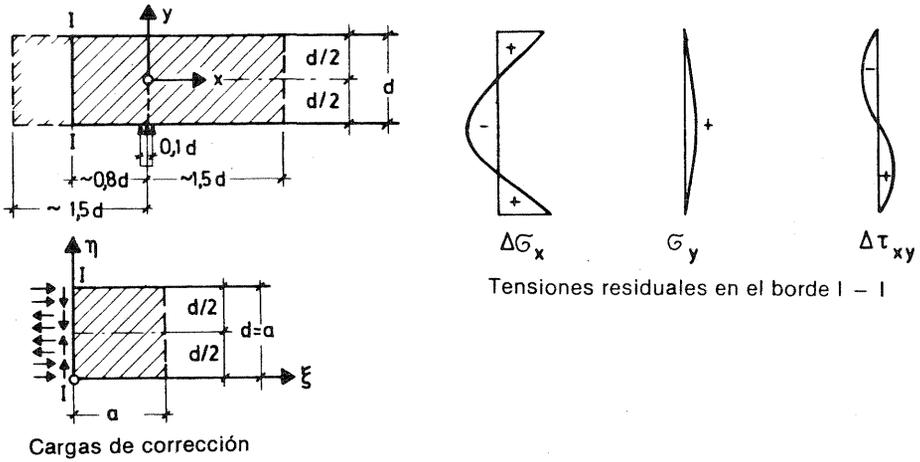


Fig. 2.23. Si una chapa no posee las longitudes mínimas indicadas en Fig. 2.21, en el extremo acortado de la chapa (p. ej. en el borde I - I), las tensiones residuales de [21] deben eliminarse mediante el procedimiento indicado en [20] por W. Schlee.

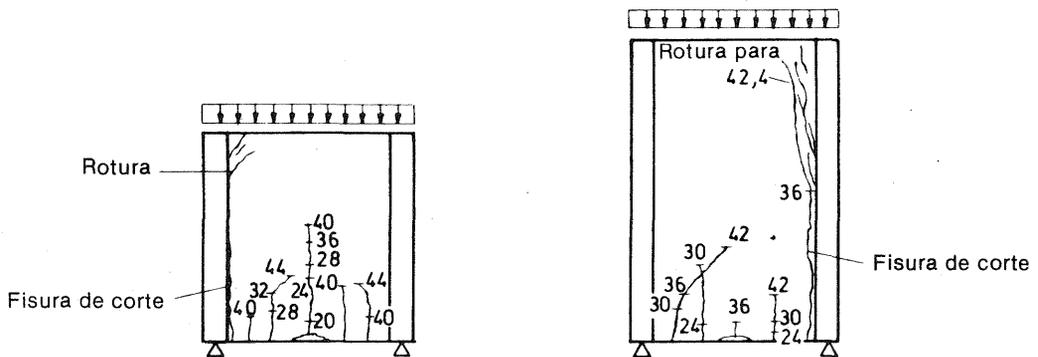


Fig. 2.24. Configuraciones de fisuración y rotura de los modelos ensayados por Schütt con armadura transversal insuficiente [54].

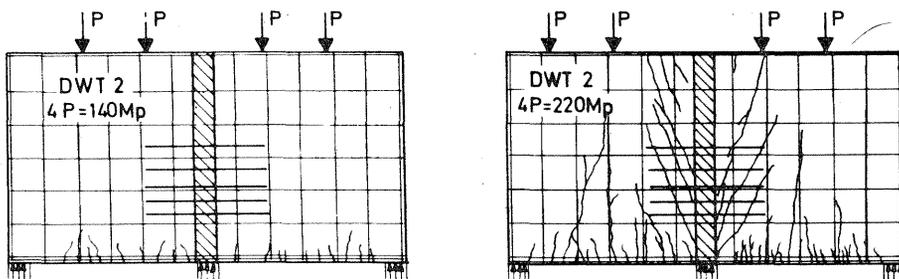


Fig. 2.25. Configuración de fisuración ( $4P = 140 \text{ Mp}$ ) y de rotura ( $4P = 220 \text{ Mp}$ ) de la viga de dos tramos DWT 2 reforzada sobre el apoyo interno.

El colapso de las vigas de gran altura puede obedecer a las siguientes causas:

1. Al sobrepasarse el límite de escurrimiento de la armadura del cordón traccionado (armadura longitudinal) las tensiones medidas son inferiores a las calculadas para el Estado I, porque ya, al aparecer las primeras fisuras de flexión, el eje neutro se desplaza hacia arriba y el brazo elástico  $z$  de las fuerzas internas aumenta. A pesar de ello, generalmente sucede que la armadura de tracción rompe antes que el hormigón de la zona comprimida, siempre que no se adopte una  $\mu = F_e/bd$  mayor que la que resulte al dimensionar para  $\epsilon_e = 5\text{‰}$  y  $\epsilon_b < 3\text{‰}$ . La armadura puede repartirse hasta una altura de  $0,1 d$ , pero sin embargo, para la carga portante trabajan al máximo todas las capas de la misma (Fig. 2.26).
2. Por *ceder el anclaje* de la armadura longitudinal de tracción. En este caso debe tenerse presente que el esfuerzo en dicha armadura para cargas muy elevadas, es constante casi hasta los apoyos, es decir que no existe una reducción en correspondencia con el diagrama de momentos (Fig. 2.26). Por ello, el anclaje debe ser suficiente, como para absorber la totalidad de la sollicitación del acero en toda la longitud entre apoyos. Las cortas longitudinales de anclaje exigen generalmente una división de la armadura longitudinal en barras de poco diámetro dispuestas en varias capas o placas de anclaje fijas.
3. Por *agotamiento de la resistencia del hormigón a la compresión*, en las diagonales inclinadas ideales en las cercanías de los apoyos. Este tipo de rotura puede presentarse también cuando los apoyos están reforzados por ensanches o mochetas de la altura de la viga. Los ensayos demuestran que las tensiones de compresión en el Estado II pueden llegar a duplicar el valor calculado para el Estado I de las tensiones principales de compresión. Por ello, las tensiones  $\sigma_{II}$  calculadas deben ser incrementadas.
4. Por *talla de la armadura necesaria para la introducción de las fuerzas*, en especial las armaduras de suspensión (estribos) de cargas, cuando las mismas han sido subdimensionadas o no han sido ancladas suficientemente. La tensión medida en los estribos queda, sin embargo, siempre dentro de los límites de lo calculado.
5. Por *redistribución de esfuerzos* como consecuencia de asentamientos diferenciales de los apoyos, en el caso de sustentación hiperestática.

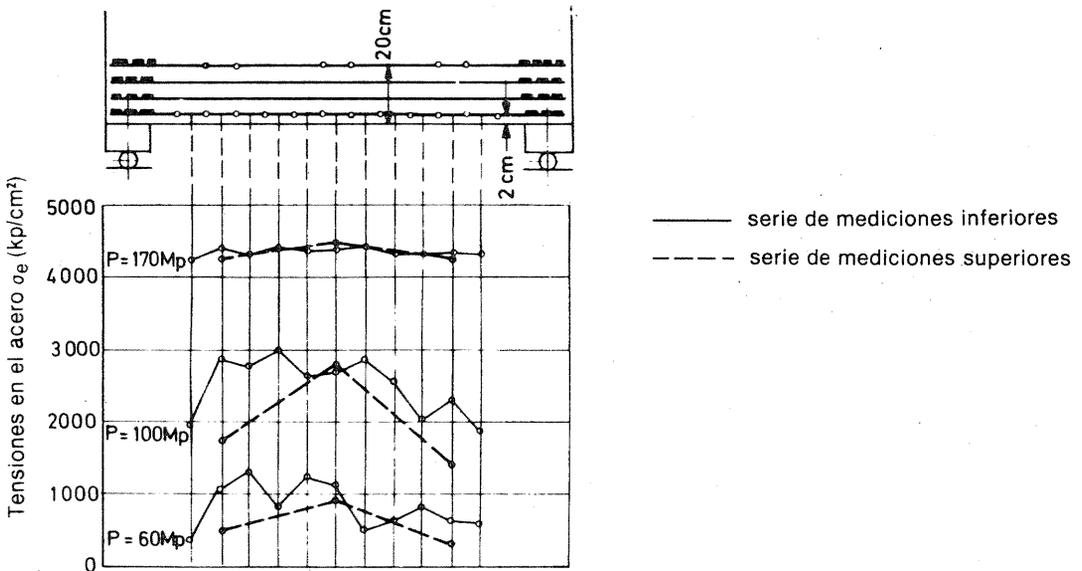


Fig. 2.26. Tensiones  $\sigma_e$  en el acero a lo largo de la armadura longitudinal inferior de tracción de la viga WT 4 (carga uniforme superior,  $l/d = 1$ ) con  $\mu = 0,268\text{‰}$  [24].

Del comportamiento a la rotura de las vigas de gran altura es posible deducir las siguientes *reglas cualitativas para el dimensionado*:

1. La armadura del cordón traccionado resulta relativamente débil para pequeñas esbelteces, por lo que no tiene sentido dimensionarla aún más débil adoptando el brazo elástico mayor, correspondiente al Estado II. Con ello sólo se conseguiría aumentar el espesor de las fisuras y empeorar las condiciones para el anclaje. En consecuencia, para el dimensionado son suficientes fórmulas empíricas, eligiendo para el brazo elástico  $Z$  de los esfuerzos  $Z$  y  $D$ , aproximadamente el correspondiente al Estado I.
2. La armadura longitudinal de tracción debe extenderse en toda su longitud sin reducciones, y anclarse para absorber la totalidad del esfuerzo de tracción, dentro de la zona de apoyo o detrás del apoyo.
3. Las tensiones principales de compresión oblicuas deben limitarse cuidadosamente, en especial en las cercanías de los apoyos. Las tensiones de compresión por flexión  $\sigma_x$ , no resultan críticas en la práctica, siempre que se tenga  $b \geq l/20$ . Si  $b$  es menor que  $l/20$ , en general es necesario un cordón comprimido con  $b_D \geq l/20$ , con el objeto de asegurar el borde comprimido contra abolladura o deflexión.
4. Las armaduras de suspensión para cargas que actúan en el borde interior, deben dimensionarse para la totalidad de la carga y anclarse en la parte superior de la viga de gran altura.
5. Para vigas de gran altura hiperestáticamente sustentadas, debe tenerse en cuenta la influencia del cedimiento de los apoyos y posibles esfuerzos de coacción sobre los esfuerzos característicos. Generalmente deben incrementarse los esfuerzos calculados, para cubrir una posible redistribución de los mismos.

Para directivas completas sobre armaduras: ver Tomo III, Cap. 12.

#### 2.4.2. Vigas de gran altura indirectamente apoyadas o cargadas

En las estructuras en que existen paredes portantes, puede ocasionalmente ocurrir que una pared se apoye en toda su altura (apoyo indirecto) sobre otra, o también que esté cargada en la misma forma.

El comportamiento estructural de estas vigas fue examinado a través de ensayos (ver [24], pág. 113). El modelo adoptado en los ensayos se representa en la Fig. 2.27.

En la viga IWT 1 la armadura era ortogonal (direcciones  $x$  e  $y$ ) con un considerable número de barras adicionales levantadas a  $\sim 60^\circ$  como parte de la armadura de suspensión necesaria para el esfuerzo en el nudo, según Tomo I, Sec. 8.4.2.3.

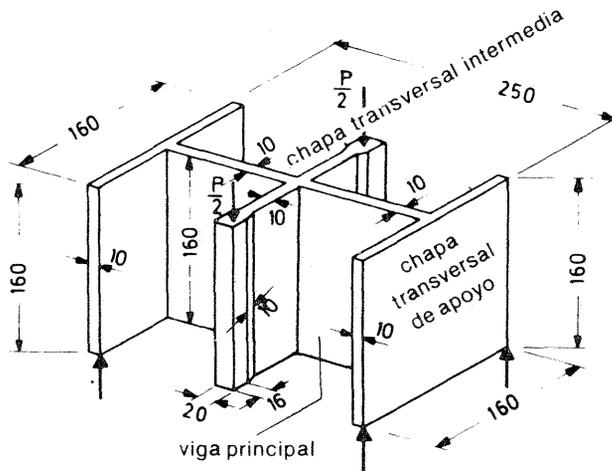


Fig. 2.27. Distribución y dimensiones del modelo de ensayo de vigas de gran altura con apoyos y cargas indirectas.

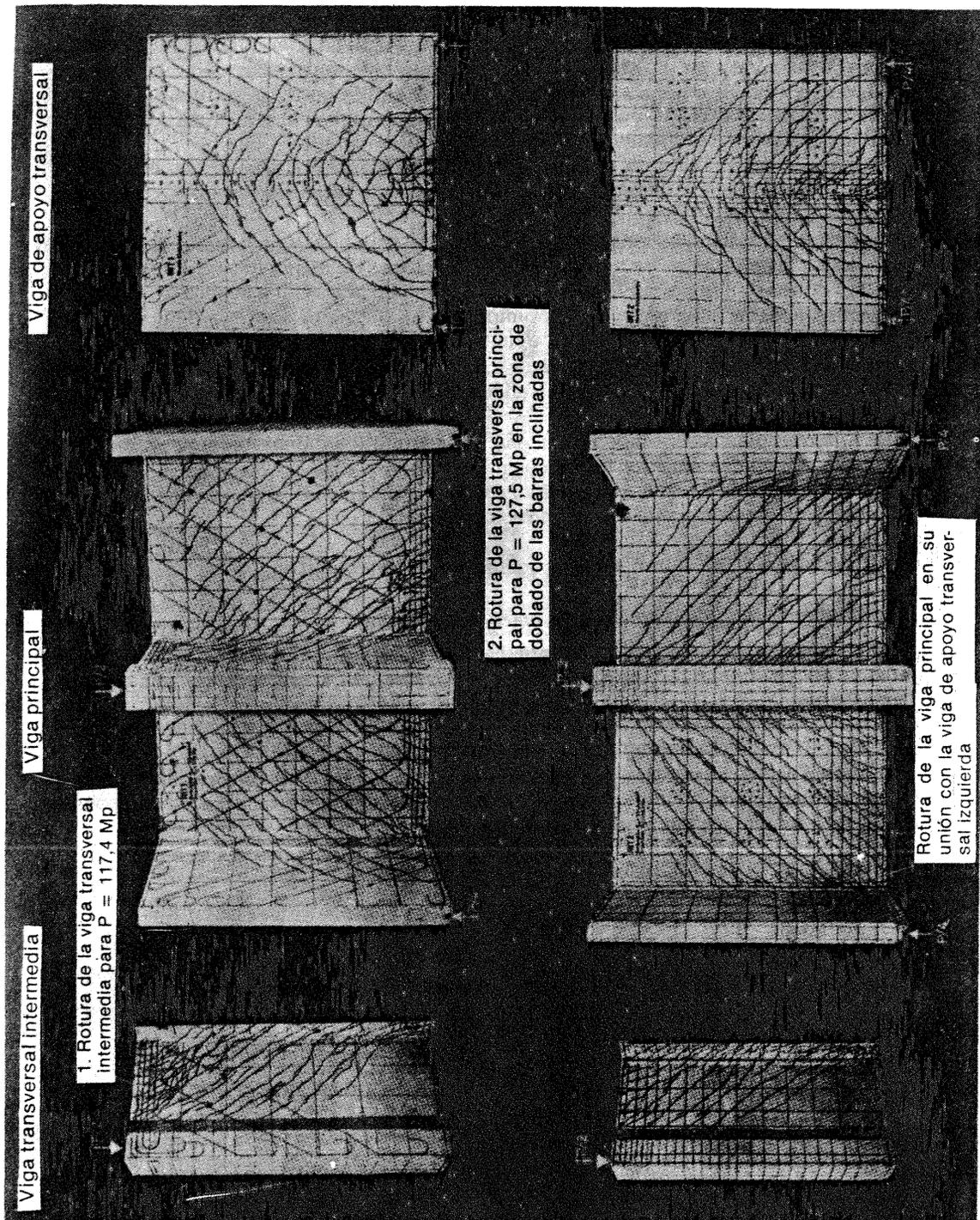


Fig. 2.28. Viga de ensayo IWT 1 con barras levantadas, luego de la rotura para  $P_U = 127,5$  Mp [24].

Fig. 2.29. Viga de ensayo IWT 2 con solo barras rectas luego de la rotura para  $P_U = 120$  Mp [24].

En la viga IWT 2 la totalidad de la armadura era horizontal y vertical, y la armadura de suspensión estaba constituida por estribos.

Las configuraciones de fisuración (Figs. 2.28 y 2.29) muestran pocas diferencias. En la IWT 1 la rotura se produjo en el lugar de doblado de una barra de  $\varnothing 8$  mm pese a que el diámetro del mandril de dobladura era de  $d_B = 15 \varnothing$ , por hendidura del hormigón para  $P_U = 127,5$  Mp. Ello es fácil de evitar disponiendo estribos inclinados. En la IWT 2 el colapso de la chapa de la viga principal se produjo abajo, en el apoyo indirecto sobre la viga transversal para  $P_U = 120$  Mp por compresión, porque los esfuerzos en las diagonales ideales comprimidas de la analogía del reticulado, con estribos verticales, resultan mayores que en el caso de barras inclinadas de suspensión.

La importancia de los resultados de dichos ensayos puede deducirse de la configuración de las fisuras en las chapas transversales de apoyo, que es totalmente igual a las de las vigas de gran altura con carga inferior suspendida. Las fisuras tienen forma de arco, siendo horizontales en el centro. Ello significa que la viga principal transmite su carga preferentemente por medio de las diagonales ideales comprimidas inferiores a la chapa transversal y de ahí que *también en las vigas de gran altura es necesario disponer una armadura de suspensión para absorber la totalidad de la carga.*

Este resultado indica que los sistemas constituidos por diagonales ideales comprimidas son mucho más rígidos que las vigas armadas y por ello deben preferentemente absorber los esfuerzos. Para visualizar la gran influencia de las rigideces, *compararemos las rigideces de las estructuras que funcionan como arco atirantado y como viga armada, que muestra la Fig. 2.30, para esbelteces al corte  $a/h$  variables.*

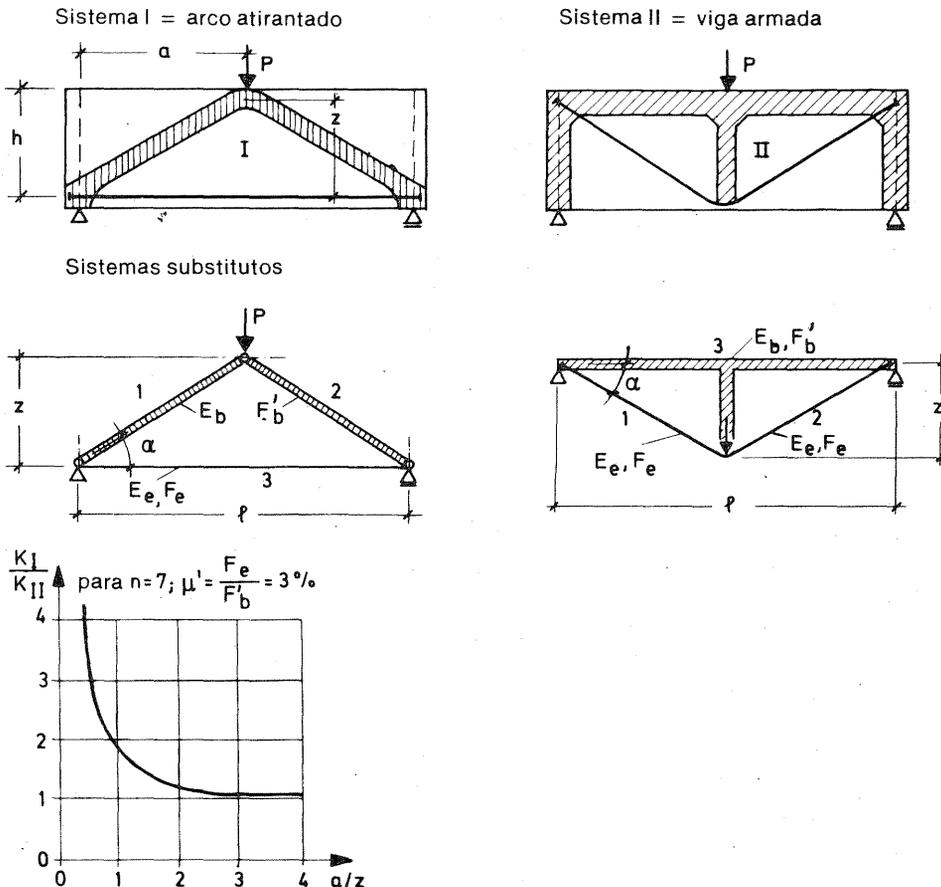


Fig. 2.30. Comparación de la rigidez  $K_I$  de un arco atirantado (I) y la correspondiente  $K_{II}$  de una viga armada (II).

En este caso se ha supuesto que las secciones de las diagonales ideales comprimidas ( $F'_b$ ) y respectivamente de las traccionadas ( $F_e$ ), en ambos sistemas son iguales. Introducimos  $\mu' = F_e/F'_b$ . Reproducimos a continuación el cálculo en forma simplificada:

Longitudes:

$$s_3 = \ell = 2 z \cotg \alpha \qquad a = \frac{1}{2} \cdot \ell$$

$$s_1 = s_2 = \frac{z}{\text{sen } \alpha} \qquad \frac{a}{z} = \cotg \alpha$$

Esfuerzos:

$$S_1^0 = S_2^0 = \frac{P}{2 \text{ sen } \alpha} ; \qquad S_1^1 = S_2^1 = \frac{1}{2 \text{ sen } \alpha}$$

$$S_3^0 = \frac{P}{2} \cotg \alpha \qquad S_3^1 = -\frac{1}{2} \cotg \alpha .$$

Flecha debida a P (en el sistema II se ha despreciado la deformación del puntal)

$$\delta_P = \sum \frac{S^0 \cdot S^1}{E \cdot F} \cdot s .$$

Para el sistema I:

$$\frac{\delta_P}{P} = 2 \cdot \frac{1}{4 \text{ sen}^2 \alpha} \cdot \frac{z}{\text{sen } \alpha} \cdot \frac{1}{E_b F'_b} + \frac{1}{4} \cotg^2 \alpha \cdot 2 z \cotg \alpha \cdot \frac{1}{E_e F_e}$$

$$\frac{2 \delta_P}{P \cdot z} E_b F'_b = \frac{1}{\text{sen}^3 \alpha} + \frac{\cotg^3 \alpha}{n \cdot \mu'} = \frac{1}{\text{sen}^3 \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{n \mu' \text{ sen}^3 \alpha}$$

$$\varphi_I = \frac{n \mu' + \cos^3 \alpha}{n \mu' \text{ sen}^3 \alpha}$$

Análogamente, para el sistema II:

$$\frac{2 \delta_P}{P \cdot z} E_b F'_b = \frac{1}{n \mu' \text{ sen}^3 \alpha} + \cotg^3 \alpha = \frac{1}{n \mu' \text{ sen}^3 \alpha} + \frac{\cos^3 \alpha}{\text{sen}^3 \alpha}$$

$$\varphi_{II} = \frac{1 + n \mu' \cos^3 \alpha}{n \mu' \text{ sen}^3 \alpha}$$

Relación de rigideces =  $\frac{1}{\text{relación entre flechas}}$ :

$$\frac{K_I}{K_{II}} = \frac{\varphi_{II}}{\varphi_I} = \frac{1 + n \mu' \cos^3 \alpha}{n \mu' + \cos^3 \alpha}$$

Para  $n = 7$ ,  $\mu' = 3\%$ ,  $n\mu' = 0,21$  ( $\mu' = 3\%$  corresponde aproximadamente a  $\mu = F_e/b h \approx 1\%$ ) se obtiene la curva de Fig. 2.30, que coincide bastante bien con los resultados experimentales.

En el caso de apoyos indirectos debe considerarse  $a/d \approx 0,5$ , con lo que  $K_I/K_{II} \approx 4$ , es decir que aún con una fuerte armadura inclinada puede sólo "levantarse"  $\frac{1}{4} A$  de la reacción de apoyo, de modo que la armadura de anclaje debería siempre calcularse para  $\frac{3}{4} A$ .

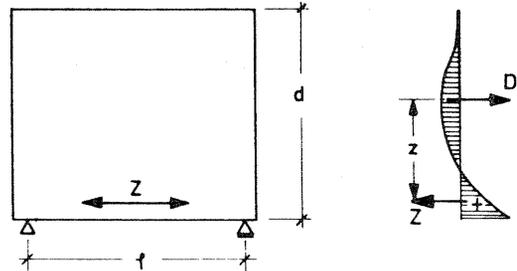
## 2.5. Criterios de dimensionado para vigas de gran altura

Los criterios simples de dimensionado que se dan a continuación, conducen juntamente con las *recomendaciones para el armado* del Tomo III, a una capacidad portante suficiente, sin que sea necesario proceder a una verificación de tensiones. En especial, para las vigas de gran altura no se requiere una "verificación al corte" como en el caso de vigas comunes esbeltas, es decir no es necesario determinar  $\tau$ , porque los esfuerzos de corte a absorber, resultan determinados por las tensiones principales de compresión verticales en las cercanías de los apoyos, para los que sólo es necesario considerar valores límites aproximados. El dimensionado puede efectuarse tanto para la carga de servicio como para la carga portante requerida. Trataremos aquí el caso de la carga portante, donde para determinar la sección de armadura  $F_e$ , el acero debería suponerse trabajando a su límite de escurrimiento, pero nunca a más de  $4200 \text{ kp/cm}^2$ .

### 2.5.1. Determinación del esfuerzo en el cordón traccionado

#### Vigas de gran altura de un solo tramo

Fig. 2.31. Notación para la aplicación de las ecuaciones aproximadas en una viga de un tramo.



$Z_U = M_U \text{ máx.}/z$  donde  $M_U \text{ máx.}$  se calcula mediante la teoría de flexión de vigas para  $v$  veces la carga.

Para el brazo elástico, y con el objeto de mantener una semejanza con los esfuerzos característicos de las vigas esbeltas, que difieren, se puede admitir

$$\text{para } 2 > l/d > 1 : z = 0,15 d (3 + l/d) \quad (2.1)$$

$$l/d \leq 1 : z = 0,6 l$$

#### Vigas de gran altura de dos tramos continuos

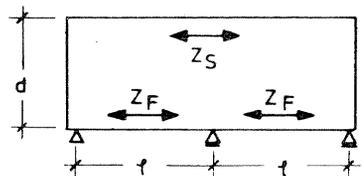


Fig. 2.32. Notación para aplicar las ecuaciones aproximadas al caso de vigas de dos o más tramos.

$$z_{F,U} = \frac{M_{F,U} \text{ máx}}{z_F} ; \quad z_{S,U} = \frac{M_{S,U} \text{ mín}}{z_S}$$

donde  $M_{F,U} \text{ máx.}$  y  $M_{S,U} \text{ mín.}$  se calculan por la teoría común de vigas para  $\nu$  veces la carga. Para los brazos elásticos  $z_F$  y  $z_S$  se tiene, análogamente:

$$\begin{aligned} \text{para } 2,5 > \ell/d > 1 : \quad z_F = z_S = 0,10 d (2,5 + 2 \ell/d) \\ \ell/d \leq 1 : \quad z_F = z_S = 0,45 \ell \end{aligned} \quad (2.2)$$

### Vigas de gran altura de varios tramos continuos

Para el tramo extremo y el primer apoyo interno, son aplicables las aproximaciones dadas para las vigas de dos tramos.

Para los tramos interiores, se tiene con

$$z_{F,U} = \frac{M_{F,U} \text{ máx}}{z_F} ; \quad z_{S,U} = \frac{M_{S,U} \text{ mín}}{z_S}$$

de acuerdo con la teoría de vigas para  $\nu$  veces la carga, los siguientes valores de los brazos elásticos:

$$\begin{aligned} \text{para } 3 > \ell/d > 1 : \quad z_F = z_S = 0,15 d (2 + \ell/d) \\ \ell/d \leq 1 : \quad z_F = z_S = 0,45 \ell \end{aligned} \quad (2.3)$$

La Fig. 2.33 da indicaciones para una correcta distribución de la armadura sobre los apoyos intermedios correspondiente a  $z_S$ , en función de la esbeltez.

#### *Influencia de los refuerzos en los apoyos y del apoyo indirecto, sobre el esfuerzo en el cordón traccionado*

Cuando se trata de vigas de gran altura que terminan en mochetas, refuerzos de apoyo o paredes transversales, la intensidad del esfuerzo en el cordón en un tramo disminuye hasta un 30 % según sea la rigidez del perfil de apoyo, pero con ello aumenta la altura de la zona traccionada en el tramo hasta un 70 %. Se recomienda dimensionar la correspondiente armadura en la misma forma que para apoyo directo, pero repartiéndola sobre una altura mayor. Estas armaduras, en el caso de apoyos de borde, deben anclarse cuidadosamente.

### 2.5.2. Limitación de las tensiones principales de compresión

La tensión principal de compresión  $\sigma_{II}$  determinada teóricamente, puede ser sobrepasada considerablemente en la cercanía de los apoyos, como consecuencia de la diferencia de direcciones entre la armadura y la tensión principal  $\sigma_I$  y por la redistribución de los esfuerzos internos debida a aparición de fisuras. La verificación de  $\sigma_{II}$  puede evitarse cuando para apoyo directo, la presión de contacto en el apoyo, supuesta uniformemente distribuida, para 2,1 veces la carga de servicio, no sobrepasa los siguientes valores

$$\begin{aligned} \text{en un apoyo extremo} \quad p_U &\leq 0,8 \beta_R \\ \text{en los apoyos internos} \quad p_U &\leq 1,2 \beta_R \quad (\text{compresión biaxial}) \end{aligned} \quad (2.4)$$

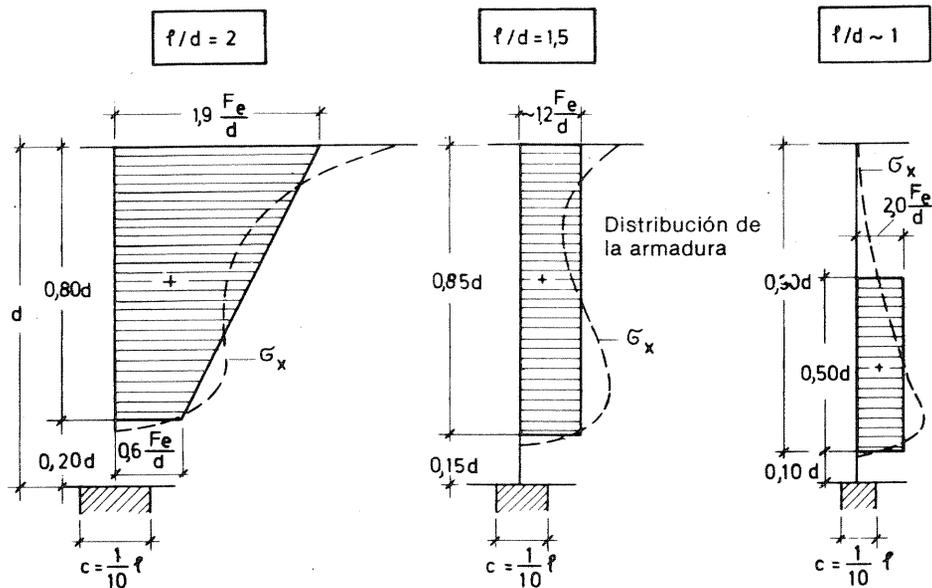


Fig. 2.33. Orientación para la repartición de la armadura de tracción sobre los apoyos de vigas de varios tramos. Para valores intermedios de la esbeltez puede interpolarse groseramente.

En esto se supone que la zona de apoyo, próxima al mismo, está cercada con estribos cerrados y que no resulta perturbada por el efecto de hendidura originado por ganchos verticales o barras gruesas.

La presión de contacto  $p_U$  se obtiene de  $\nu$  veces la compresión en el apoyo que en general se determina de la misma forma que para una viga esbelta:

$$p_U \text{ exist.} = \frac{2,1 A}{c \cdot b} \quad (2.5)$$

donde  $c$  = longitud de apoyo y  $b$  = espesor de la chapa. La extensión  $c$  del apoyo que debe ser considerada no debe ser, sin embargo, mayor que  $1/5$  de la menor separación entre apoyos vecinos. Si entre el apoyo y la chapa existe una losa de entrepiso, puede admitirse en ésta, para aumentar  $c$ , una distribución a  $45^\circ$  de la fuerza, en el plano de la chapa (es decir que no es aplicable al espesor  $b$ ).

Si existen refuerzos de apoyos (engrosamientos) o también en el caso de apoyo indirecto, el valor de  $p_U$  calculado con la Ec. (2.5) ya no constituye una medida de la magnitud de la tensión principal de compresión  $\sigma_{II}$  que actúa en la chapa. Para establecer una solución aproximada, en estos casos se adopta el valor del esfuerzo de corte  $Q_U$  deducido de la teoría común de las vigas, la que en la unión de la chapa no debe sobrepasar el valor

$$Q_U \text{ máx} = 0,19 d b \beta_R \frac{\ell}{\ell - c} \quad (2.6)$$

Para esbelteces  $\ell/d < 1$ , en la Ec. (2.6) debe tomarse como valor de  $d$ , la longitud  $\ell$ .

### 2.5.3. Armadura de suspensión para cargas aplicadas en el borde inferior

Cuando las vigas de gran altura están solicitadas por cargas uniformes  $p$  o cargas concentradas  $P$  aplicadas en el borde inferior o en su superficie por debajo de la línea de vértice  $0,5 d < 0,5 \ell$ , que muestra la Fig. 2.6, en ese caso deben disponerse armaduras de suspensión capaces de soportar una carga  $\nu \Sigma P$ . (En la misma se incluye el peso propio de la parte de chapa comprendida dentro de la curva límite.) Ver Fig. 2.34.

Si las cargas son pequeñas o están distribuidas uniformemente sobre la longitud  $l$  (Fig. 2.34 a), se adopta una armadura constituida por estribos verticales de sección.

$$\Sigma F_e = \frac{\Sigma P}{\beta_S / \nu} \quad (2.7)$$

Para grandes cargas concentradas (por ejemplo: carga de una pared apoyada indirectamente), resultan adecuados estribos o barras inclinadas de  $\alpha = 50^\circ$  a  $60^\circ$  (Fig. 2.34 b). En este caso se tiene

$$F_{e, \text{der.}} = F_{e, \text{izq.}} = \frac{P}{2 \operatorname{sen} \alpha \beta_S / \nu} \quad (2.8)$$

#### 2.5.4. Mallas de armadura en la chapa

En las vigas de gran altura debe disponerse, fuera de las zonas con armaduras calculadas de acuerdo con lo establecido anteriormente, una armadura constituida por dos mallas ubicadas cada una cerca de cada cara, de una cuantía no menor de 0,15 % de la sección de hormigón en cada dirección. Dicha armadura tiene por objeto absorber las tensiones de tracción, principalmente inclinadas (aunque reducidas), no absorbidas totalmente por las armaduras del cordón, y mantener reducido el espesor de eventuales fisuras.

#### 2.5.5. Concepción de un modelo resistente y dimensionado según Nylander (Suecia)

Partiendo de observaciones efectuadas en ensayos, H. y J. O. Nylander (Estocolmo) describen en [31] en forma muy clara el comportamiento de las vigas de gran altura de varios tramos en el Estado II, y para vigas continuas con  $l/d \geq 1$  proponen el siguiente procedimiento de cálculo:

Las cargas se reparten en tres zonas, de acuerdo con los sistemas de Fig. 2.35 (hipótesis simplificada).

- Zona 1. Las cargas se dirigen directamente a los apoyos; en la zona de aplicación de la reacción de apoyo es necesaria una armadura contra el astillamiento por tracción.
- Zona 2. Estructura en ménsula (doble voladizo) con tensor en el borde superior.
- Zona 3. Arco con tensor en la parte inferior (armadura del tramo).

Cuando se trata de carga inferior suspendida, en las zonas 2 y 3 es necesario disponer estribos de suspensión que lleguen a la parte superior de la viga.

La repartición de los esfuerzos de tracción en el Estado II puede resultar influida considerablemente según sea la magnitud y posición de la armadura adoptada. La extensión de las zonas 1 y 2 depende en consecuencia de la armadura elegida para el tramo (para  $Z_3$ ). En la Fig.

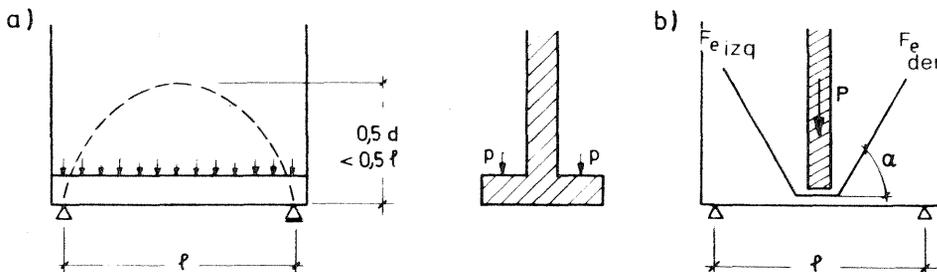


Fig. 2.34. Cargas que deben anclarse en la parte superior de la chapa, mediante armaduras de suspensión.

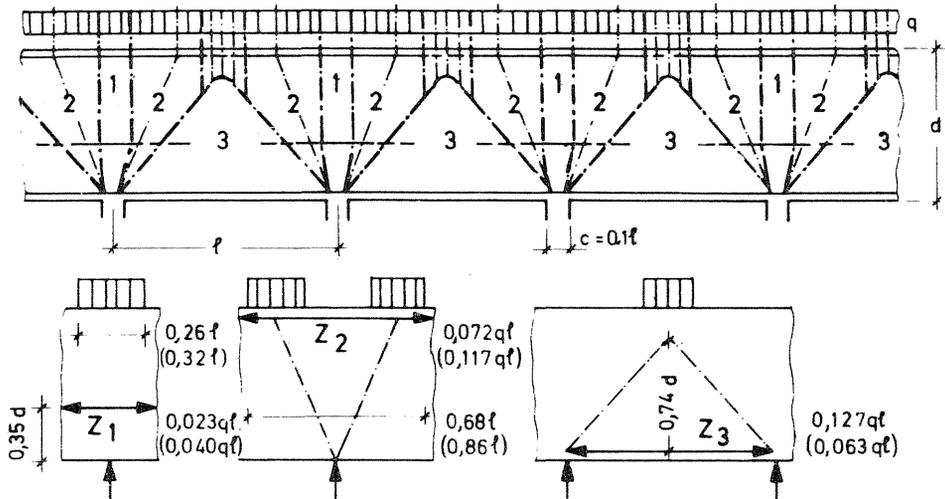


Fig. 2.35. Modelo imaginado para la transmisión de cargas en vigas de gran altura continuas según H. y J. O. Nylander [31]; ejemplos para carga uniforme superior con  $l/d = 1,5$  y  $c/l = 0,1$ . Valores numéricos de  $Z_1$  y  $Z_2$  en función del  $Z_3 = 0,127 ql$  adoptado y (entre paréntesis) para  $Z_3 = 0,063 ql$ .

2.35 se reproducen a título de ejemplo dos reparticiones posibles para carga superior con  $l/d = 1,5$  y  $c/l = 0,1$ .

También hace notar Nylander que para vigas de gran altura no es necesario prever una armadura de corte, como lo es en el caso común de vigas esbeltas.

## 2.6. Tensiones en ménsulas y chapas en voladizo

Las ménsulas han sido analizadas teórica y experimentalmente en Karlsruhe por G. Franz y H. Niedenhoff [32] y posteriormente por A. Mehmel y W. Freitag [33]. De ello se deduce:

En ménsulas de hormigón armado conviene que la altura  $d$  de las mismas sea mayor que su longitud  $l$ , por lo que se analizaron especialmente ménsulas con  $l/d = 0,6$  a  $0,5$ .

La Fig. 2.36 muestra las trayectorias de las tensiones principales en una ménsula empotrada en una columna robusta sin carga, y una carga concentrada en la ménsula a la distancia  $a = 0,5 d$ . Cuando la forma de la ménsula es rectangular, el vértice inferior extremo casi no soporta tensiones, por cuanto en la ménsula la carga es soportada por el cordón superior traccionado y una diagonal ideal comprimida.

Las tensiones de tracción  $\sigma_x$  son prácticamente constantes en la parte superior, sobre toda la longitud  $a$ , es decir que el esfuerzo en el cordón traccionado se mantiene constante entre el punto de aplicación de la carga y el empotramiento. La diagonal ideal comprimida se estrecha en el vértice inferior, las  $\sigma_{II}$  resultan fuertemente inclinadas, de modo que en dicho lugar las  $\sigma_x$  no constituyen una medida de la sollicitación y sólo son determinantes las tensiones de compresión  $\sigma_{II}$ ; las mismas, para el Estado I son mayores que las tensiones de tracción de la parte superior  $\sigma_I \approx \sigma_x$ . Las tensiones principales de tracción y compresión pueden resumirse en los esfuerzos  $D$  y  $Z$  (Fig. 2.37).

En la columna sin carga aparece sobre el lugar de empotramiento de la ménsula, una tracción vertical, por cuanto la columna debe acompañar los acortamientos de la diagonal ideal comprimida. Estas tensiones de tracción, en los casos prácticos, resultan generalmente superadas por las tensiones de compresión originadas en la columna por las cargas que actúan en ésta, por arriba de la ménsula.

La Fig. 2.38 muestra una forma de ménsula adaptada al flujo de tensiones. Sin embargo, por razones estéticas o simplificación constructiva, generalmente se adoptan ménsulas rectangulares.

Existen chapas en voladizo con distintas formas y tipos de sustentación (Fig. 2.39), los que influyen naturalmente sobre la distribución de los esfuerzos internos.

La Fig. 2.40 muestra las trayectorias de las tensiones principales de una viga de gran altura rígidamente empotrada en el suelo, con una parte en voladizo, y la repartición de las tensiones  $\sigma_x$ , semejante a la que corresponde a la sección sobre un apoyo intermedio de una viga de gran altura continua. Si sólo se carga la ménsula aparece entonces una segunda zona de tracción en la parte superior.

La zona traccionada se extiende en una altura de aproximadamente  $1.4 a$  a partir de  $0,6 a$  desde el borde inferior, es decir, que solamente una altura  $d' = 2 a$  colabora en la absorción

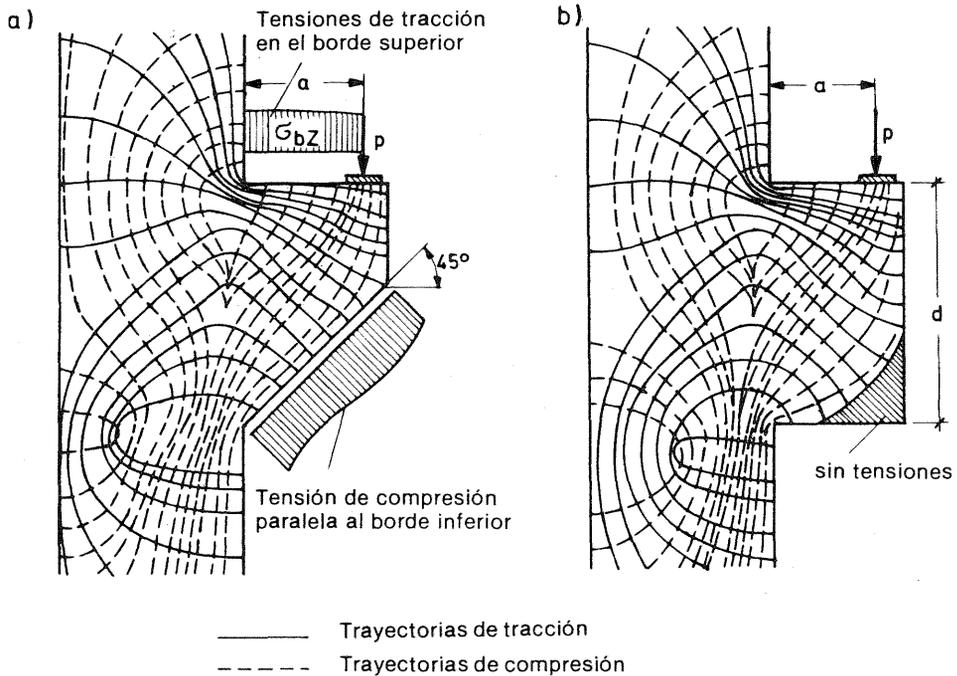


Fig. 2.36. Dirección e intensidad de las tensiones principales en ménsulas, en el caso de  $a/d = 0,5$  [32].

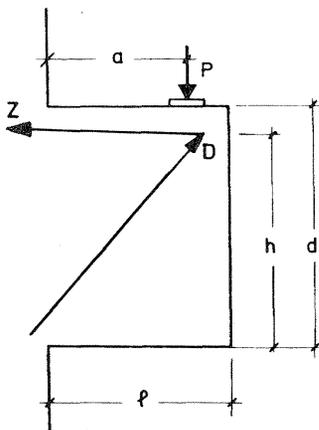


Fig. 2.37. Las tensiones principales de tracción y de compresión pueden, en las ménsulas, componerse en fuerzas Z y D (válido para  $1 > a/d > 0,5$ ).

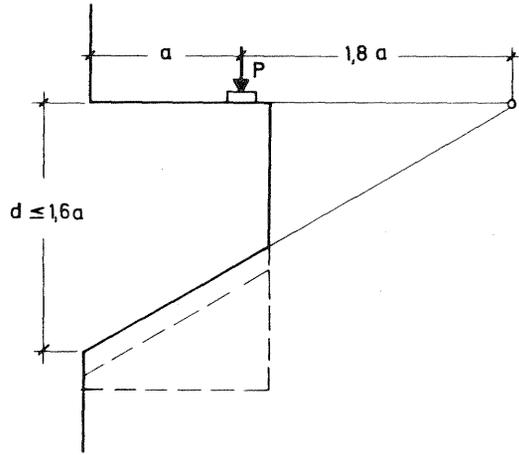


Fig. 2.38. Forma adecuada al flujo de tensiones de una ménsula con una carga concentrada P. El vértice inferior delantero de una ménsula rectangular, prácticamente está libre de tensiones y no colabora.

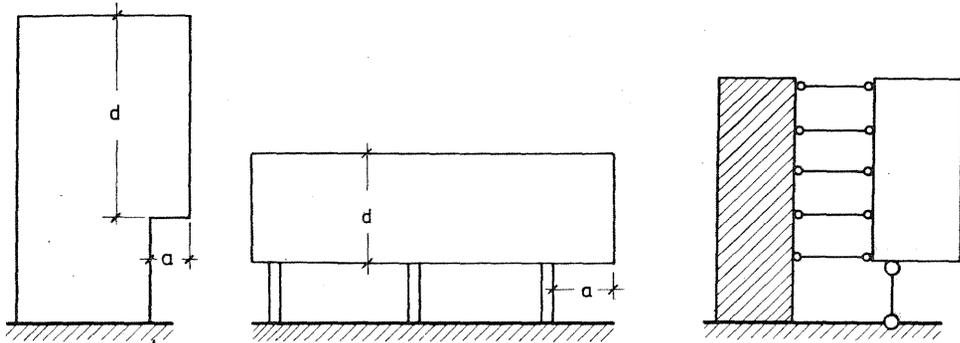


Fig. 2.39. Distintos tipos de ménsulas de gran altura que se presentan en la construcción de edificios.

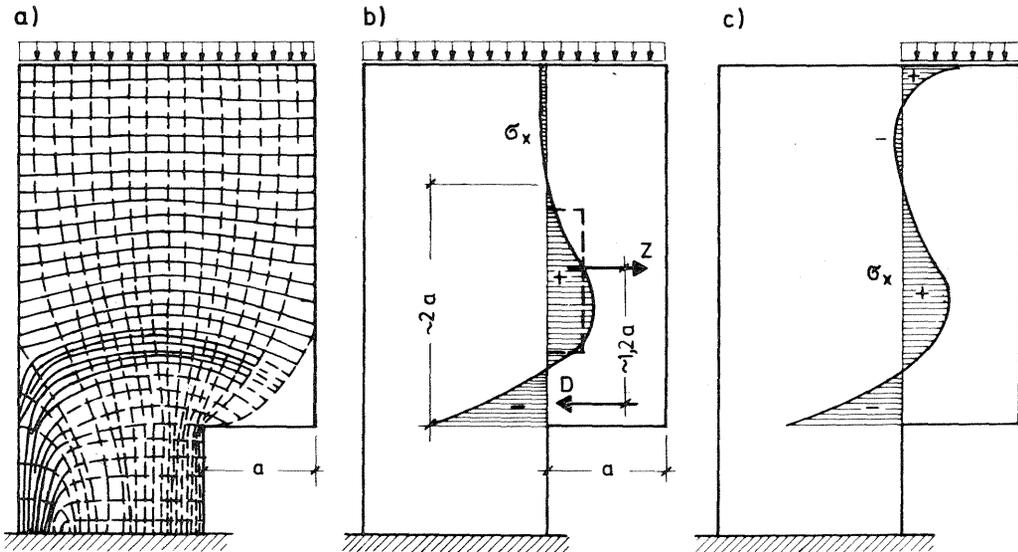


Fig. 2.40. Trayectorias de tensiones principales en una viga de gran altura con ménsula para carga uniforme  $q$  y distribución de las tensiones de tracción  $\sigma_x$  en la sección de empotramiento, para carga total o limitada a la parte en voladizo.

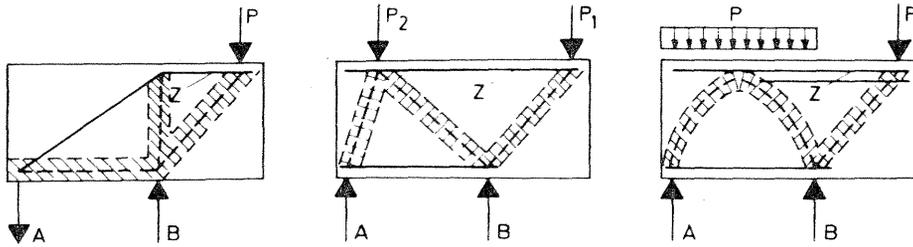


Fig. 2.41. Ejemplos de reticulados imaginarios internos para determinar el esfuerzo de tracción Z en vigas de gran altura en voladizo.

del momento de empotramiento. El brazo elástico interno para el cálculo de Z puede suponerse aproximadamente igual a  $1,2 a$ , cuando  $d > 2$ .

Para otros tipos de apoyo y cargas es posible determinar la distribución de los esfuerzos internos mediante el comportamiento de la chapa expuesto anteriormente. Para el dimensionamiento puede adoptarse como modelo resistente, con suficiente aproximación, sea el reticulado, el arco atirantado o bien otros similares. La Fig. 2.41 muestra algunos ejemplos al respecto. Por otra parte, es posible también influir en los esfuerzos internos correspondientes al Estado II mediante la distribución de la armadura y el dimensionado de la misma. Las armaduras grandes originan mayores esfuerzos. La distribución de esfuerzos internos en el Estado II debe ser tal que satisfaga el principio del mínimo trabajo de deformación. Esto fue demostrado por el noruego T. Hagberg en [34], quien con su investigación ayudó a aclarar la disputa de muchos años, de si era necesario disponer o no, barras inclinadas en las ménsulas.

## 2.7. Criterios de dimensionado para ménsulas y vigas de gran altura en voladizo

Las ménsulas se dimensionan mediante un modelo de reticulado simple que muestra la Fig. 2.42, constituido por una barra traccionada y una diagonal comprimida. Con ello se elimina una "verificación al corte", por cuanto el esfuerzo de corte es absorbido por la diagonal comprimida. El modelo de reticulado muestra también que la barra traccionada no debe ser debilitada por dobladuras y que la correspondiente armadura debe ser cuidadosamente anclada.

Para aumentar la seguridad, el brazo elástico interno se mide a partir del extremo inferior de la diagonal comprimida, por considerarse como el centro de momentos más desfavorable, y se admite igual a  $z = 0,8 h$ . ¡Al estimar h debe tenerse presente que en el cordón traccionado, en general, existen varias capas de armadura! Las ménsulas con  $d/a > 2$  deben dimensionarse de la misma forma que aquellas con  $d = 2a$  o  $h \approx 2$ .

De la Fig. 2.42 se tiene, con  $\operatorname{tg} \alpha = a/z = Z_P/P$

$$Z_{P, U} = \frac{\nu \cdot P \cdot a}{0,8 h} \cong \frac{\nu \cdot P}{1,6}$$

En la misma el valor de  $\nu$  a considerar es 1,75 (falla del acero).

En el apoyo de la ménsula actúa casi siempre, además de la carga vertical P, una fuerza horizontal H debido a reacciones de apoyo o a algún efecto de coacción de la viga que apoya sobre la ménsula. En el caso más desfavorable, el brazo elástico de H se incrementa de  $\Delta h$ .

Del polígono de fuerzas resulta

$$Z_{H, U} = \nu \cdot H \left( 1 + \frac{\Delta h}{0,8 h} \right)$$

En forma aproximada puede admitirse:

$$Z_{H, U} = 1,1 \nu \cdot H$$

con lo cual, cuando actúan simultáneamente las cargas de servicio P y H, resulta:

$$Z_U = 2,2 P \frac{a}{h} + 2,0 H \quad (2.9)$$

Los ensayos demuestran que los estribos horizontales ubicados en el cuarto superior de h pueden incluirse en la armadura del cordón traccionado dada por la Ec. (2.9).

Puede admitirse la existencia de la diagonal comprimida, cuando el espesor b de la ménsula o de la chapa con voladizo se ha dimensionado de forma tal que, para  $\nu$  veces la carga el hormigón no rompa por compresión. Para esta verificación supondremos que la tensión en el hormigón de la diagonal comprimida pueda alcanzar el valor  $0,95 \beta_R$ , suponiendo un volumen de tensiones rectangular. Se supone como sección de la diagonal  $b \cdot c$  con  $c = 0,2 h$ . Para determinar el esfuerzo D en la diagonal comprimida utilizamos el polígono de fuerzas de Fig. 2.43 con  $z = 0,9 h$  y  $\nu = 2,1$  para la rotura del hormigón. (En este caso el brazo elástico z se mide a partir del centro de la diagonal comprimida y por ello resulta mayor que en Fig. 2.42). h no debe tomarse mayor que 2 a.

Se tiene así

$$\nu D \cdot x = \nu P \cdot a + \nu H \cdot \Delta h.$$

Haciendo  $\nu D \leq 0,2 h b \cdot 0,95 \beta_R$  y tomando x de Fig. 2.43 se tiene

$$b \text{ nec.} \approx \frac{6,2 (P + H \frac{\Delta h}{a})}{h \cdot \beta_R} (1,6 + a/h) \text{ con } h \leq 2 a \quad (2.10)$$

Si la diagonal comprimida de una ménsula de altura variable está zunchada por estribos horizontales, muy poco separados, extendidos sobre toda la altura de la misma y perfectamente anclados en su extremo posterior, en ese caso no se produce rotura brusca y es posible reducir el coeficiente de seguridad.

De la ecuación (2.10), haciendo  $z \approx 0,85 h$  se puede deducir, despreciando H, una "tensión de corte" ficticia:

$$\tau = \frac{P}{b \cdot z} = \frac{\beta_R}{6,2 (1,6 + a/h) \cdot 0,85}$$

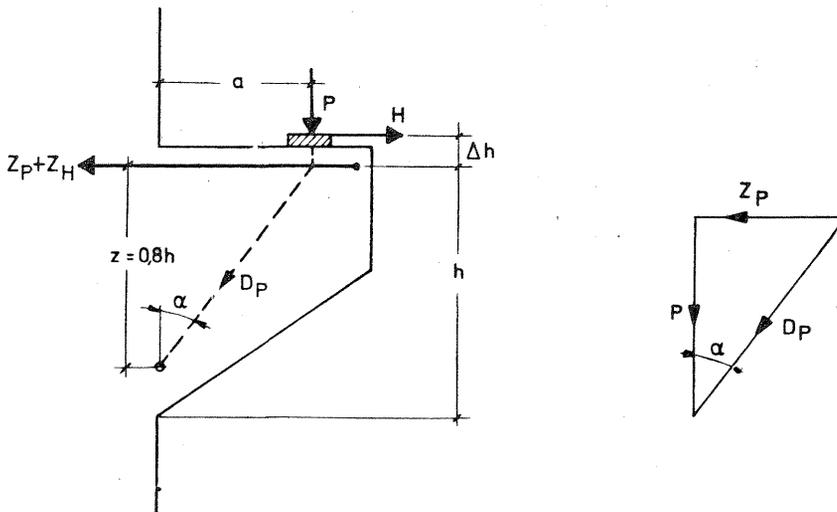


Fig. 2.42. Determinación del esfuerzo de tracción  $Z_U$  de una ménsula mediante un reticulado simple.

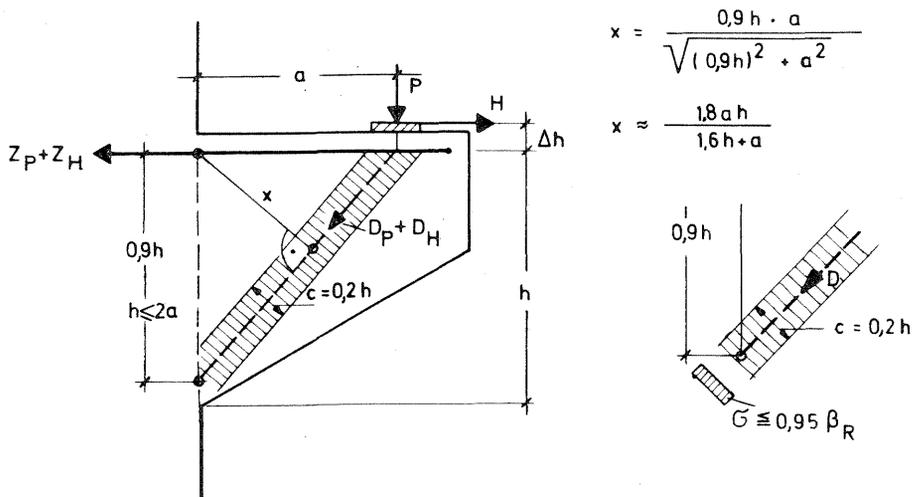


Fig. 2.43. Hipótesis adoptada respecto a la dimensión y posición de la diagonal comprimida de una ménsula.

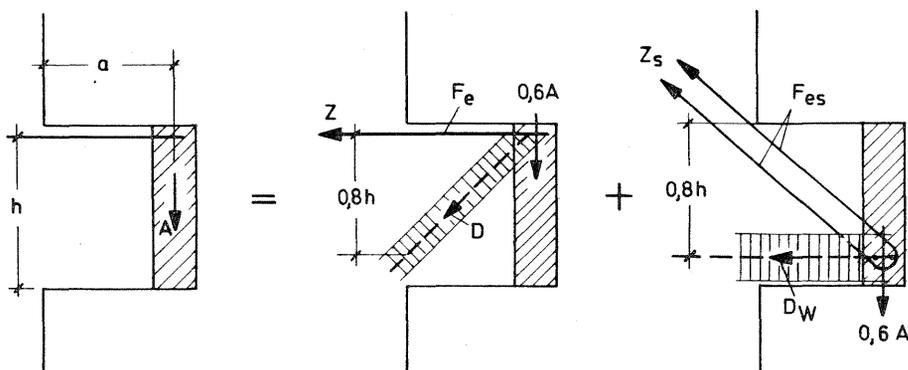


Fig. 2.44. Disponiendo una armadura inclinada en las ménsulas con vigas apoyadas indirectamente para el dimensionado puede admitirse un 60 % de la reacción de apoyo de las vigas como "carga superior" absorbido por la armadura superior horizontal de tracción y otro 60 % de la misma como "colgada" de la armadura inclinada.

Para  $a/h = 1$  resulta  $\tau = \beta_R/13,5$  y para  $a/h = 0,5$ ,  $\tau = \beta_R/11$ . Estos valores son comparables con los de Tabla 14 de DIN 1045. Son algo inferiores a  $\tau_{02}$  (para Bn 250 y Bn 350:  $\tau_{02} \sim \beta_R/10$ ). En consecuencia, ¡en ningún caso es admisible solicitar las ménsulas donde  $\tau = P/bz$  hasta el valor  $\tau_{03}$ !

Las cargas indirectamente aplicadas a las ménsulas o suspendidas inferiormente, exigen una armadura de suspensión, con lo cual se pueden establecer los estados de carga que muestran las Figs. 2.42 y 2.44 — ver también las recomendaciones para la disposición de la armadura en ménsulas en el Tomo III.

Para cargas aplicadas indirectamente y grandes dimensiones, se justifica disponer también una armadura inclinada. En el caso que muestra la Fig. 2.44, de una viga continua indirectamente apoyada sobre una ménsula, es posible admitir que el 60 % de la reacción de apoyo A, por intermedio de una armadura de suspensión, actúa como si estuviera aplicada en la parte superior. En consecuencia, la armadura de suspensión debe dimensionarse, de acuerdo con

Fig. 2.44 para  $0,6 A$  y la armadura superior horizontal de tracción de la ménsula para  $P = 0,6 A$ , según Ec. (2.9). Para aumentar la seguridad, se considera también que el 60 % de la carga de apoyo A como aplicada en la parte inferior, y es absorbida mediante una armadura inclinada y una biela comprimida horizontal  $D_w$ .

Del correspondiente polígono de fuerzas resulta:

$$D_w = \frac{a}{0,8 h} \cdot 0,6 A ; \quad Z_s = \sqrt{D_w^2 + (0,6 A)^2} ;$$

de donde

$$F_{es} = \frac{Z_s}{\beta_s / \nu} \sim 0,6 A \sqrt{1 + 1,55 \left(\frac{a}{h}\right)^2} \quad (2.11)$$

# 3

## Introducción de cargas o fuerzas concentradas

### 3.1. Descripción de las trayectorias de las tensiones

Las cargas concentradas (distribuidas sobre superficies relativamente pequeñas) o las fuerzas, actúan exteriormente a las estructuras (cargas de ruedas, cargas de columnas, reacciones de vínculo, esfuerzos de anclaje de elementos tensores en hormigón pretensado, etc.).

Por razones económicas, se adoptan placas de apoyo o de anclaje pequeñas, utilizando elevadas presiones admisibles.

Estas presiones exteriores  $p$  se expanden en el cuerpo de la estructura y originan un sistema de tensiones principales  $\sigma_I$ ,  $\sigma_{II}$  y  $\sigma_{III}$  con componentes de tracción y compresión transversales a la dirección en que actúa la fuerza, hasta que a una determinada distancia de introducción  $l_e$  (en la dirección de la fuerza) se alcanza una distribución uniforme, lineal o superficial, de tensiones (diagramas lineales de  $\sigma_x$ ) sobre una superficie  $b \cdot d$ . Esta zona de introducción se denomina también zona de perturbación de Saint Venant; dentro de la misma no es posible calcular las tensiones con la teoría corriente de la flexión.

La mejor forma de visualizar las tensiones es mediante las trayectorias de las tensiones principales, para lo cual nos limitaremos a las proyecciones sobre los planos  $x - z$  y  $x - y$  (Fig. 3.1). En las estructuras de hormigón es necesario en este caso prestar especial atención a las tensiones de tracción transversales a la dirección de la fuerza, las denominadas tensiones de fractura por tracción (*bursting stresses*) y de las cuales se determinan los esfuerzos de hendeduras resultantes por tracción, o más simplemente, fuerzas de hendedura. Estas deben ser absorbidas por armaduras, por compresiones o por pretensado. La intensidad de los esfuerzos de hendedura depende de la relación entre la sección  $F = b \cdot d$  de la pieza y la superficie en que actúa la carga  $F_1 = a \cdot c$ ; cuanto mayor sea  $F/F_1$ , es decir, cuanto más deba expandirse la carga hasta que la variación de la tensión  $\sigma_x$  sea lineal, tanto mayores resultan los esfuerzos de hendedura.

Si  $b \approx d$  y la superficie de carga es pequeña y casi centrada, entonces las tensiones transversales de tracción son radiales en todas direcciones y se equilibran mediante tensiones de tracción anulares (*hoop stresses*). Para simplificar la armadura se considera generalmente al esfuerzo de hendedura en sólo dos direcciones  $z$  e  $y$  y actuando conjuntamente, si se arma sólo en dichas direcciones, pero también es posible absorber dichos esfuerzos en forma equivalente, mediante una armadura anular de tracción (armadura en espiral).

Exteriormente a las trayectorias de compresión se originan en los supuestos "vértices muertos" próximos al área cargada tensiones de tracción oblicuas y en las superficies exteriores tensiones de borde de tracción (*spalling stresses*) (Figs. 3.2 y 3.3) las que, de acuerdo con la intensidad y posición de la superficie de carga con respecto al resto de la superficie del elemento, en especial para sollicitación excéntrica, pueden alcanzar valores significativos y tam-

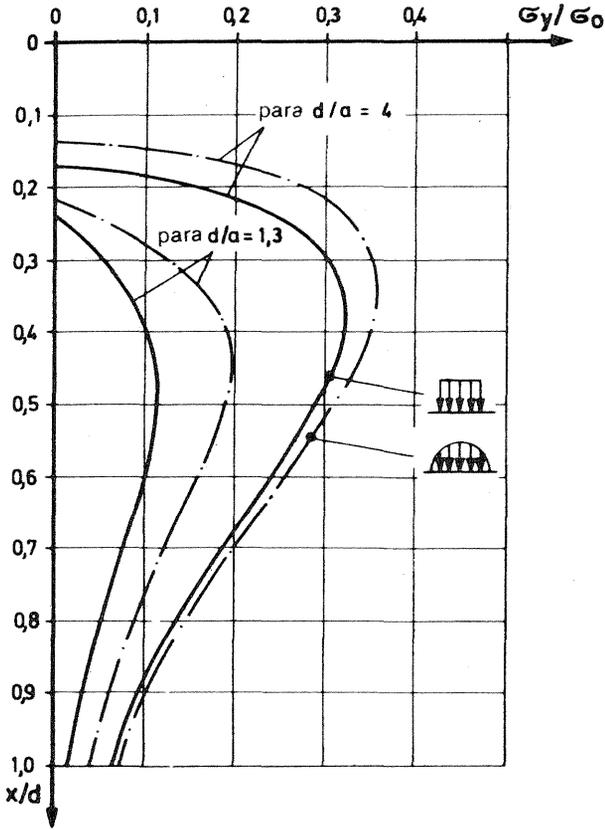


Fig. 3.12. Distribución de las tensiones transversales de tracción para presiones  $p$  de contacto parabólicas y uniformes bajo la placa de apoyo de ancho  $a = 1/4 d$  y  $a = 1/1,3 d$  [40].

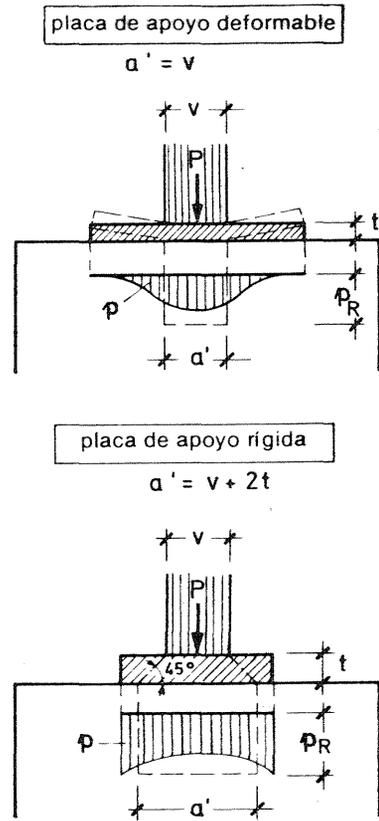


Fig. 3.13. Distribución de presiones de contacto para placas deformables y rígidas, cargadas con columnas angostas de ancho  $v$ .

que conducen a ecuaciones de condición, que resultan poco adecuadas a los efectos prácticos.

### 3.3.1.3. Tensiones en zonas de borde (entornos de vértices)

Las Figs. 3.2 y 3.3 dan una idea de la distribución de las tensiones principales en los entornos de los vértices: en los bordes predomina la tracción en la dirección de las caras, y en el interior aparece tracción a lo largo de las diagonales a  $45^\circ$  de los vértices. Las tensiones de borde de tracción alcanzan valores entre  $0,6$  y  $0,8 \sigma_0$ , es decir, que son mayores que las tensiones de fractura. Los diagramas de tensiones más reducidos y menos profundos originan menores esfuerzos de tracción. Los "picos" de tensiones de tracción se ponen de manifiesto mediante las isobaras según Tesar-Guyon (líneas de iguales tensiones  $\sigma_y$  en el borde  $x = 0$ ) (Fig. 3.3).

M. Sargious [44] ha calculado las superficies de tensiones para distintos casos y determinado así los esfuerzos de tracción. Según dicho trabajo es suficiente calcular la armadura en el borde cargado en las direcciones  $x$  e  $y$  (Fig. 3.14) para

$$\begin{aligned} Z_y &= 0,015 P \\ Z_x &= 0,010 P \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los esfuerzos de tracción en los vértices que se dirigen hacia el interior según las diagonales, pueden ser absorbidos por los esfuerzos de desvío mediante la armadura de borde de los

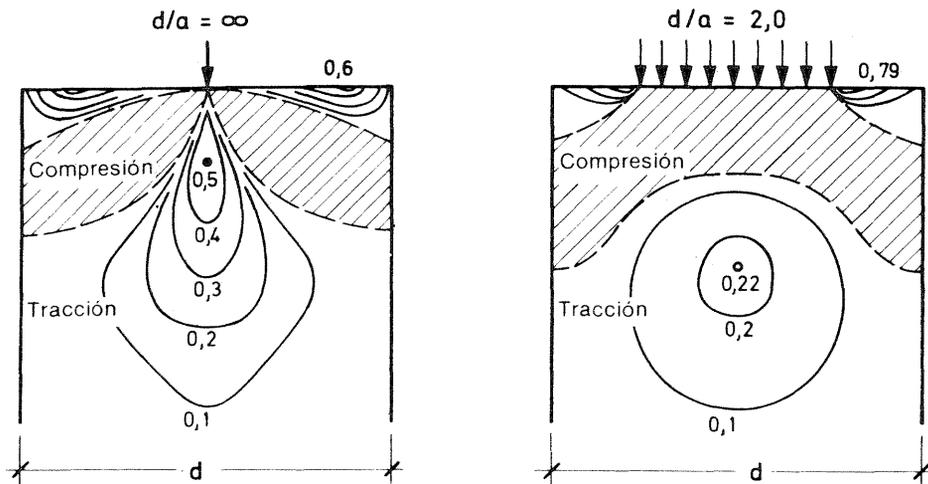


Fig. 3.3. Isobaras de las tensiones  $\sigma_y$  para cargas aplicadas en forma puntual y distribuida (las zonas comprimidas rayadas). Son datos los valores de  $\sigma_y/\sigma_0$  y  $\sigma_0 = P/bd$  [38].

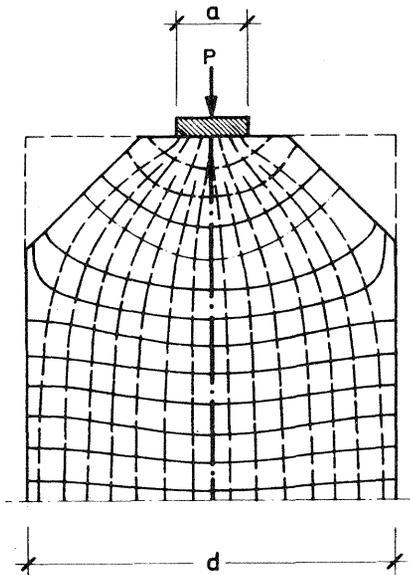


Fig. 3.4. Tensiones principales en un elemento con cantos inclinados a efectos comparativos con Fig. 3.2 izquierda.

bién exigir la colocación de armadura. Dichos vértices podrían romperse, lo cual, sin embargo, no influye en la capacidad portante; se pueden también eliminar los “vértices muertos” (Fig. 3.4).

## 3.2. Métodos para determinar las tensiones

### 3.2.1. Solución teórica

La solución rigurosa para un sólido tridimensional fue obtenida por K. T. Sundara Raja Jyengar [35, 36, 37] basándose en la teoría de la elasticidad tridimensional, obteniendo la solución en forma de un vector de Galerkin, cuyas componentes se representaron mediante series dobles de Fourier. Con anterioridad Y. Guyon [38], D. J. Douglas y N. S. Trahair [39] llegaron a soluciones no del todo satisfactorias.

Para el estado plano de tensiones (estado laminar) se conocían de antemano soluciones de Y. Guyon [38], S. R. Jyengar [40] y W. Schleh [20].

### 3.2.2. Solución mediante elementos finitos

Las múltiples posibilidades de los métodos con elementos finitos espaciales, desarrollados gracias a las grandes computadoras permiten, mediante una adecuada elección de las características y dimensiones de los elementos finitos, determinar en forma exacta la distribución tridimensional para el Estado I. Hasta ahora, dicho método ha sido aplicado en forma sistemática por A. L. Yettram, y K. Robbins [42] a este caso. Muchos institutos de cálculo disponen actualmente de programas adecuados.

### 3.2.3. Solución mediante fotoelasticidad

Para problemas planos (bidimensionales) (chapas) el procedimiento fotoelástico es muy adecuado. M. Tesar [43] obtuvo mediante el mismo los primeros resultados. En el trabajo realizado en Stuttgart por M. Sargious [44] y en los de Estocolmo debidos a R. Hiltcher y G. Florin [47, 49], se alcanzaron resultados de sumo interés para la práctica, que reproduciremos más adelante.

El coeficiente de Poisson no puede dejarse de lado, lo que fue estudiado en [42] por A. L. Yettram y K. Robbins.

### 3.2.4. Determinación de tensiones mediante extensómetros aplicados a modelos

Este procedimiento en el caso de chapas permite actualmente obtener resultados más rápidamente que utilizando fotoelasticidad. Aún no se conocen aplicaciones satisfactorias para el problema que nos ocupa.

### 3.2.5. Mediciones en piezas de hormigón

Hasta ahora es el único método que permite conocer las tensiones para el Estado II (especialmente en las armaduras existentes) y la carga portante y con ella la seguridad deseada. Estos ensayos fueron realizados en Stuttgart [45] con articulaciones de hormigón. En elementos de gran espesor no son suficientes las mediciones realizadas en la superficie, porque pueden conducir a conclusiones muy erróneas.

### 3.2.6. Soluciones simples aproximadas

Este tipo de solución se adecua para calcular la intensidad del esfuerzo de hendedura, estimando los esfuerzos de desviación necesarios para la expansión de las tensiones, ver Sec. 3.3.1.1 (ver también E. Mörsch [46]).

## 3.3. Dimensionado del esfuerzo de hendedura en el caso de aplicación de cargas concentradas o fuerzas, en sistemas bidimensionales

Se habla de una aplicación bidimensional de carga, cuando o bien el elemento de hormigón es delgado, de tipo laminar ( $b$  pequeño en relación a  $d$ ), o cuando la superficie de carga, de longitud  $c$  se extiende totalmente o casi totalmente sobre el espesor  $b$  del elemento. Para los casos de relaciones  $b/d$  mayores y aquellos en los que también  $c \ll b$ , ver Sec. 3.4.

### 3.3.1. La fuerza concentrada centrada

#### 3.3.1.1. Esfuerzo de fractura por tracción para una presión uniforme $p$

La Fig. 3.5 muestra la distribución de las trayectorias de las tensiones principales en dos chapas con distintos  $d/a$ . Puede observarse que las trayectorias de las compresiones longitudinales, a una distancia de penetración  $l_e \approx d$  resultan paralelas; en ese lugar resulta  $\sigma_x = P/bd = Cte = \sigma_0$ . Inmediatamente por debajo de la superficie de carga las trayectorias de compresión, vistas desde afuera, son cóncavas es decir que sus correspondientes esfuerzos de desvío originan en la zona central compresión transversal ( $\sigma_y$  negativa), que eleva la presión absorbible  $p$  por encima de la resistencia a la compresión del hormigón. A una pequeña distancia cambian la curvatura y se vuelven convexas y los correspondientes esfuerzos desviadores originan en el interior tracción transversal ( $\sigma_y$  positiva). El punto de tensión nula

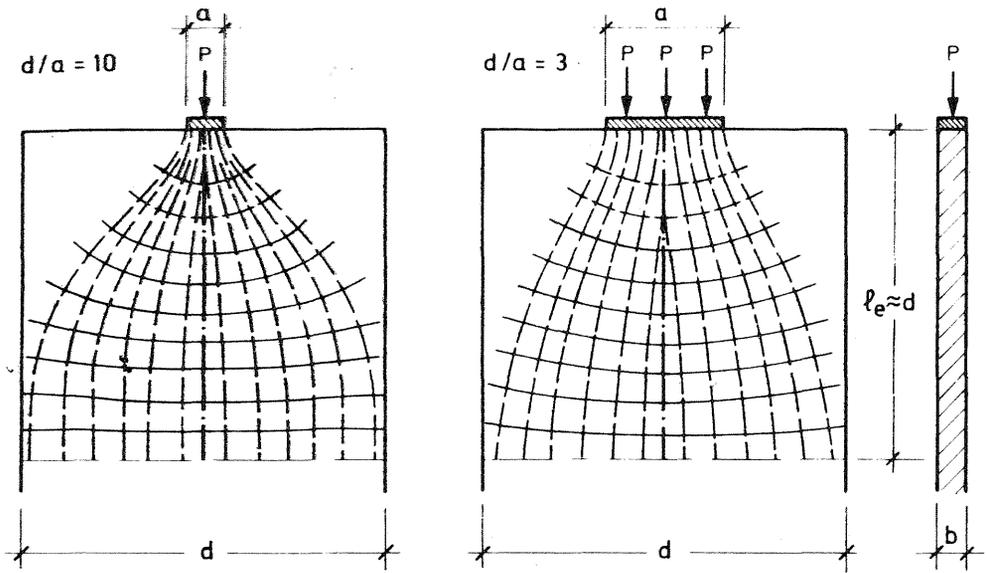


Fig. 3.5. Trayectorias de las tensiones principales en chapas con aplicación de la carga mediante placas de longitudes iguales a 1/10 y 1/3 del ancho de la chapa.

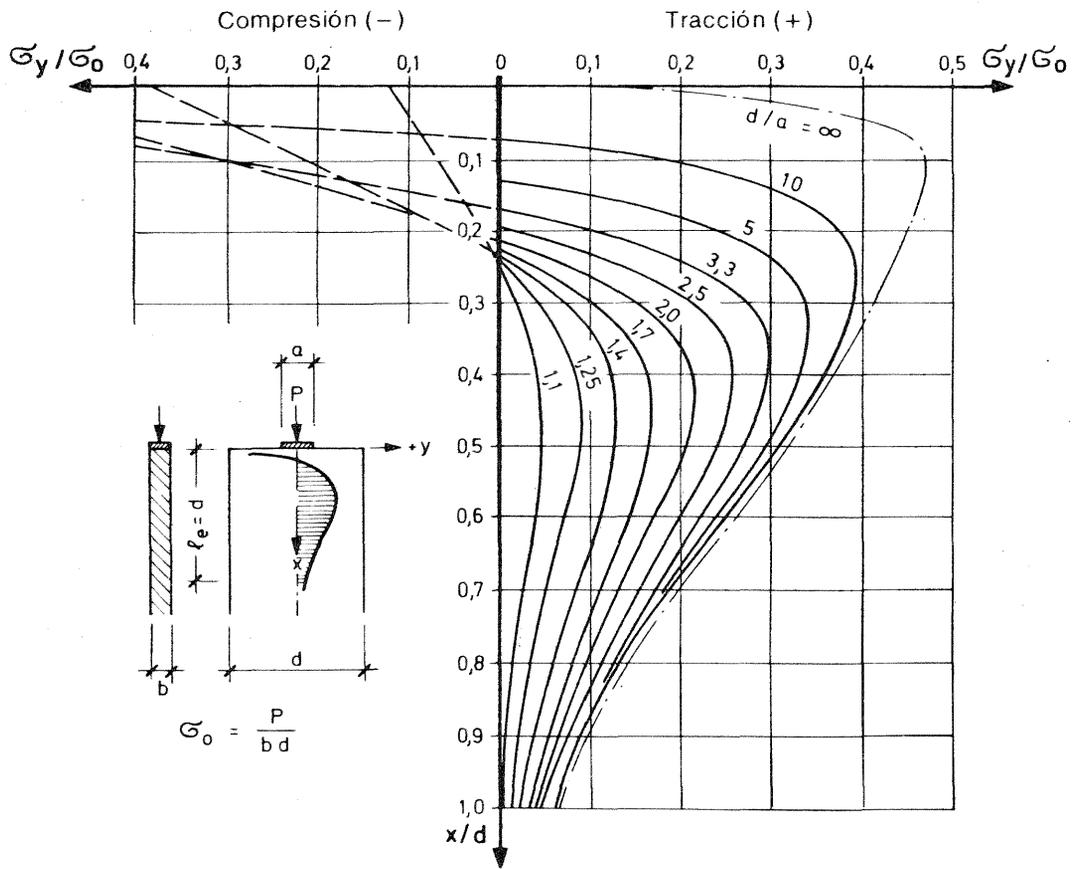


Fig. 3.6. Variación e intensidad de las tensiones transversales  $\sigma_y$ , referidas a  $\sigma_0 = P/bd$ , a lo largo del eje  $x$  para distintas relaciones  $d/a$  [40].

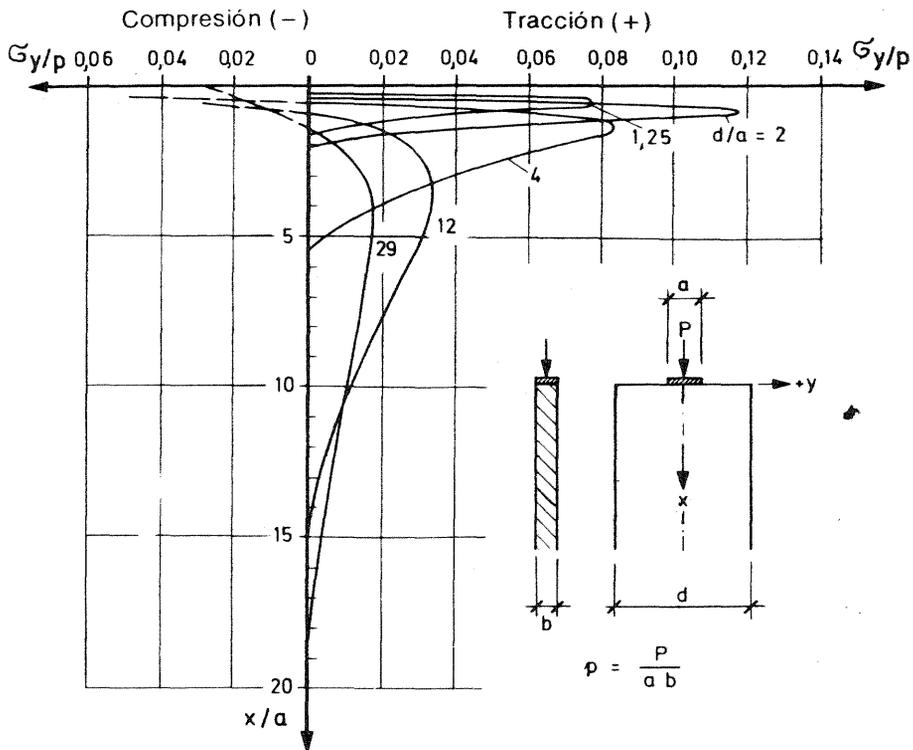


Fig. 3.7. Variación e intensidad de las tensiones transversales de tracción  $\sigma_y$ , referidas a la presión  $p = P/ab$  [47].

$\sigma_y = 0$  sobre el eje  $x$ , y la intensidad de las tensiones  $\sigma_y$  dependen de la relación del ancho  $d$  del elemento al ancho  $a$  de la superficie de carga, es decir de  $d/a$ . La Fig. 3.6 muestra las  $\sigma_y$  referidas a  $\sigma_0 = P/bd$  a lo largo del eje  $x$  (iguales en este caso a las tensiones principales transversales) en función de  $d/a$ . Las superficies  $\int \sigma_y dx$  de las tensiones  $\sigma_y$  positivas y negativas deben, por razones de equilibrio, ser iguales.

Si se relacionan las tensiones de fractura con la presión de la carga  $p = P/ab$ , el máximo se obtiene para  $d/a = 2$ , a una distancia  $x \sim a$  por debajo de la placa de carga, y su valor es del orden de  $0,12 p$  (Fig. 3.7 según R. Hiltcher - G. Florin [47]). El vértice del máximo es angosto y ya para  $d/a = 5$  se tiene  $\sigma_y \approx 0,07 p$ . Para  $d/a \geq 5$  el máximo se presenta para  $x \approx 3 a$  por debajo de la placa de carga.

Según la Fig. 3.6 de la superficie del diagrama de tracción se tiene como esfuerzo de

fractura  $Z = \int \sigma_y dx$ , para el que debe calcularse la correspondiente armadura. La distribución de esta última se obtiene del diagrama de  $+\sigma_y$ . En la Fig. 3.8 figuran las intensidades de  $Z$  referidas a  $P$  y la ubicación de  $\sigma_y = 0$  y de  $\sigma_y$  máx. referida a  $d$  para elementos de longitud ilimitada ( $h > 2 d$ ). Para carga lineal ( $a \rightarrow 0$  y  $d/a \rightarrow \infty$ ) ocurre el valor máximo posible del esfuerzo de fractura con  $Z \text{ máx.} = 0,3 P$ .

El diagrama  $Z/P$  es casi recto, de modo que aproximadamente puede calcularse con la expresión

$$Z \approx 0,3 P \left(1 - \frac{a}{d}\right) \quad (3.1)$$

Dado que es muy raro que resulte  $d/a > 10$ , puede admitirse como expresión aproximada

$$Z \approx 0,25 P \quad (3.2)$$

De la misma resulta como armadura necesaria

$$F_{eZ}^{nec} = \frac{\nu Z}{\beta_S} = \frac{Z}{\sigma_e \text{ adm.}}$$

En el caso de los esfuerzos de fractura se recomienda no adoptar tensiones elevadas en el acero, con el objeto que la fisura correspondiente resulte fina y facilitar el anclaje, p. ej.  $\sigma_e \text{ adm.} = 1800$  a  $2000 \text{ kp/cm}^2$  para carga de servicio con B St 42/50.

El camino propuesto en un principio por E. Mörsh en [46] conduce a una solución análoga a la de la Ec. (3.1). Para ello, según Fig. 3.9 se consideran como resultantes de las tensiones principales, esfuerzos cuyas rectas de acción siguen aproximadamente las trayectorias de las direcciones principales. De la trayectoria quebrada de las mismas se obtiene, mediante un polígono de fuerzas, la fuerza de fractura  $Z$  necesaria para el equilibrio.

De la Fig. 3.9 resulta, para  $h \approx d$ :

$$Z : P/2 = \left( \frac{d}{4} - \frac{a}{4} \right) : \frac{d}{2}$$

de donde

$$Z = 0,25 P \left( 1 - \frac{a}{d} \right) \quad (3.1a)$$

Esta sólo resulta poco seguro para el caso de chapas muy delgadas ( $d/a > 5$ ), en comparación con la solución más rigurosa de Fig. 3.8. El modelo de cálculo utilizado por E. Mörsh, puede resultar a menudo útil en la práctica para el ingeniero.

Los valores antes mencionados son válidos para elementos de longitud  $h > 2d$ . Para prismas más cortos, cuya deformación transversal está impedida en su extremo, los esfuerzos de fractura son menores. Esto fue analizado por R. Hiltcher y G. Florin [47], con los resultados

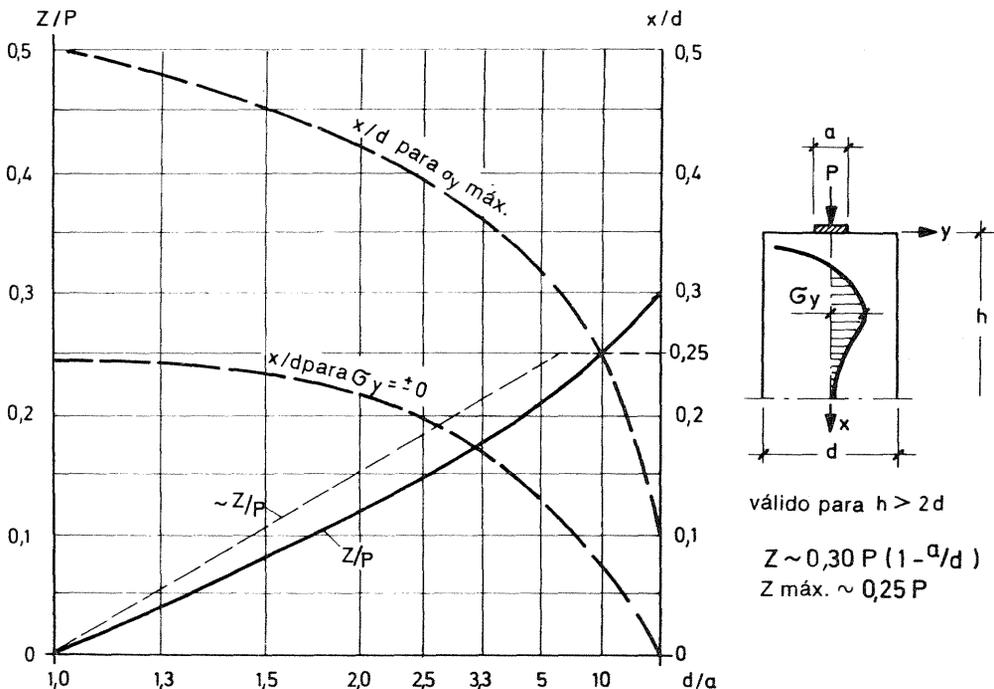


Fig. 3.8. Intensidad de fuerza de hendidura resultante  $Z$ , referida a la fuerza  $P$ . Distancia de la máxima tensión transversal  $\sigma_y$  máx. y del punto donde  $\sigma_y = 0$  medida del borde cargado en chapas con  $h > 2d$  [40].

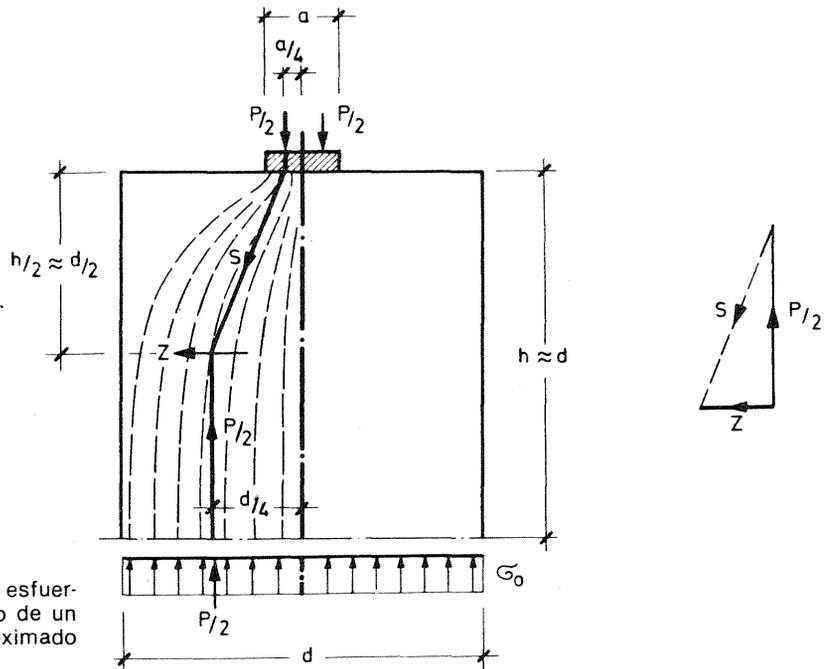


Fig. 3.9. Determinación del esfuerzo de fractura Z partiendo de un polígono de fuerzas aproximado según [46].

que aparecen en Fig. 3.10. Cuando no existe la mencionada restricción (bloques de fundación apoyados en suelos de reducido módulo E) se recomienda adoptar el valor de Z que por lo menos corresponda a  $h/d = 1$ .

### 3.3.1.2. Influencia de una presión p irregularmente distribuida

Bajo las placas de apoyo de caucho u otro material sin rigidez a la flexión, la presión de contacto no es uniforme (como se ha supuesto hasta ahora), cuando el cuerpo que carga es muy rígido y apoya sobre toda la superficie de la placa o la sobrepasa. La repartición de presiones es en este caso, aproximadamente parabólica (Fig. 3.11, izquierda), y para el cual, S. R. Jyengar ha determinado especialmente las tensiones  $\sigma_y$ , Fig. 3.12 [40]. En lo que respecta al esfuerzo de fractura por tracción se está del lado de la seguridad si en lugar del ancho a de la placa de carga, se adopta un valor  $a'$  más reducido, y un  $p_R$  en consecuencia mayor, que debe cumplir la condición  $p_R \cdot a' = P$ .

Cuando placas de apoyo sin rigidez a la flexión están cargadas excéntricamente con cargas distribuidas sobre toda su superficie, la distribución de presiones de contacto sobre el hormigón es la que en forma aproximada muestra la Fig. 3.11 (derecha). Para determinar la tensión de fractura por tracción, se transforma la superficie del diagrama de presiones p mediante una estimación aproximada, en una repartición uniforme de presiones, la que debe satisfacer las condiciones  $p_R = p \text{ máx.}$  y  $P = a' \cdot p_R$ . Simultáneamente además la resultante (en el punto S) debida a las presiones sustitutas debe tener la misma recta de acción que la resultante debida a las presiones reales.

Si el elemento constructivo que transmite la carga (por ejemplo: columna, puntal) es de dimensiones transversales menores que la longitud de los lados de placa de carga, y si ésta es de reducida rigidez a la flexión (Fig. 3.13) en ese caso el esfuerzo de fractura por tracción debe calcularse mediante el ancho v de la columna. Para las placas de apoyo con las rigideces comunes en la práctica se llega a una aproximación suficientemente segura, si se supone que la carga se reparte a través de la placa a  $45^\circ$  hasta alcanzar la superficie del hormigón, de modo que para un espesor de placa de t, se debe considerar  $a = v + 2t$  (Fig. 3.13). Para  $p_R$  se tiene nuevamente que debe cumplir que  $p_R \cdot a' = P$ . El ancho a de la placa sólo puede utilizarse cuando la misma es muy rígida.

A este respecto, N. M. Hawkins ha efectuado investigaciones más exactas en [48], pero

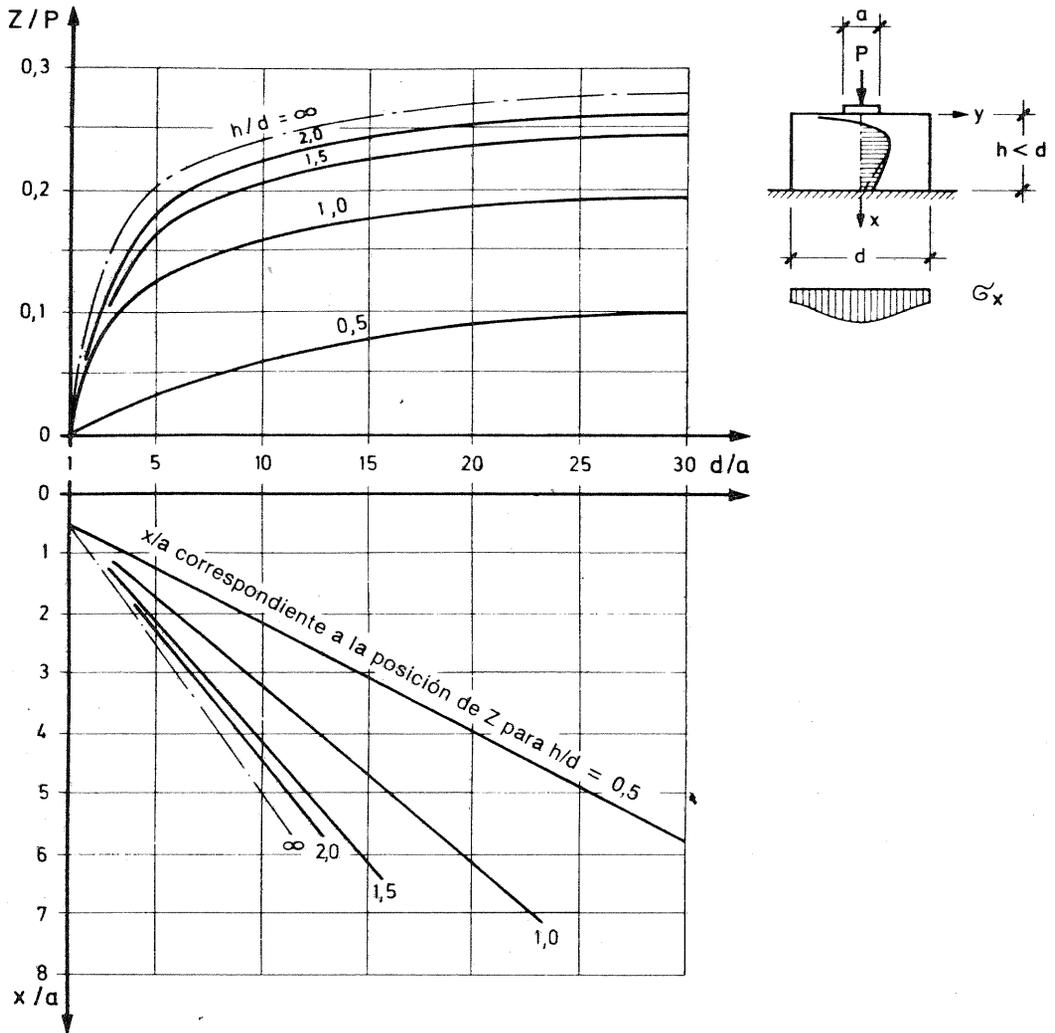


Fig. 3.10. Intensidad del esfuerzo de fractura resultante  $Z$ , referido a la carga  $P$ , y distancia de la misma al borde cargado en chapas de altura reducida [47].

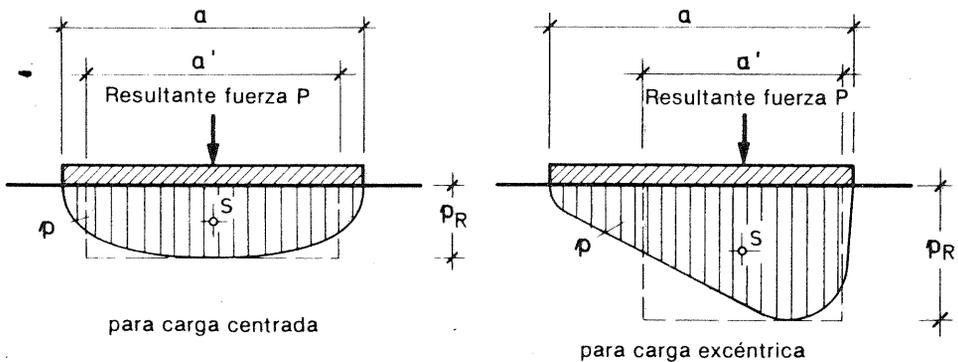


Fig. 3.11. Distribución de las presiones  $p$  de contacto en placas cargadas céntrica y excéntrica, de rigidez finita de anchos  $a$ , y determinación del ancho sustituto  $a'$ .

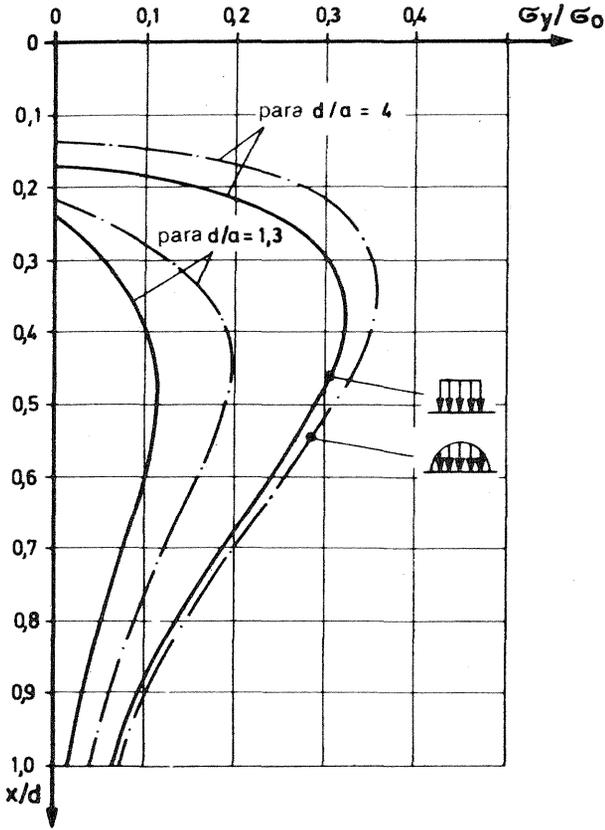


Fig. 3.12. Distribución de las tensiones transversales de tracción para presiones  $p$  de contacto parabólicas y uniformes bajo la placa de apoyo de ancho  $a = 1/4 d$  y  $a = 1/1,3 d$  [40].

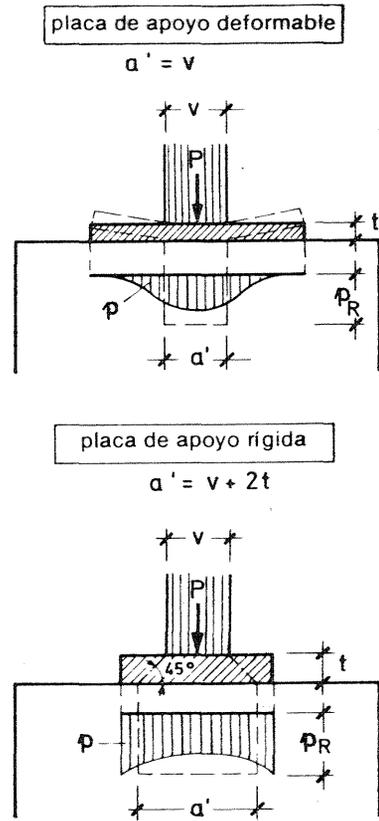


Fig. 3.13. Distribución de presiones de contacto para placas deformables y rígidas, cargadas con columnas angostas de ancho  $v$ .

que conducen a ecuaciones de condición, que resultan poco adecuadas a los efectos prácticos.

### 3.3.1.3. Tensiones en zonas de borde (entornos de vértices)

Las Figs. 3.2 y 3.3 dan una idea de la distribución de las tensiones principales en los entornos de los vértices: en los bordes predomina la tracción en la dirección de las caras, y en el interior aparece tracción a lo largo de las diagonales a  $45^\circ$  de los vértices. Las tensiones de borde de tracción alcanzan valores entre  $0,6$  y  $0,8 \sigma_0$ , es decir, que son mayores que las tensiones de fractura. Los diagramas de tensiones más reducidos y menos profundos originan menores esfuerzos de tracción. Los "picos" de tensiones de tracción se ponen de manifiesto mediante las isobaras según Tesar-Guyon (líneas de iguales tensiones  $\sigma_y$  en el borde  $x = 0$ ) (Fig. 3.3).

M. Sargious [44] ha calculado las superficies de tensiones para distintos casos y determinado así los esfuerzos de tracción. Según dicho trabajo es suficiente calcular la armadura en el borde cargado en las direcciones  $x$  e  $y$  (Fig. 3.14) para

$$\begin{aligned} Z_y &= 0,015 P \\ Z_x &= 0,010 P \end{aligned} \quad (3.3)$$

Los esfuerzos de tracción en los vértices que se dirigen hacia el interior según las diagonales, pueden ser absorbidos por los esfuerzos de desvío mediante la armadura de borde de los

vértices. De acuerdo con los resultados experimentales, no es necesario para ello disponer una armadura adicional. Para grandes esfuerzos en estructuras de grandes dimensiones corresponde, sin embargo, prever una armadura a 45°.

### 3.3.2. Fuerza concentrada excéntrica de dirección $x$

En el caso de fuerzas concentradas excéntricas las tensiones  $\sigma_x$ , para una longitud de contacto  $l_e \approx d$ , varían trapecial o triangularmente y las trayectorias de las tensiones principales son asimétricas (Fig. 3.2). Las tensiones de fractura se desarrollan aproximadamente en la misma forma que si un prisma de ancho y altura iguales a  $d_1$ , estuviera cargado céntricamente. El hecho que las mencionadas tensiones de fractura se limiten a dicho prisma sustituto, puede observarse en las isobaras de  $\sigma_y$  según Guyón (Fig. 3.15). En la práctica, de acuerdo con una sugerencia de Y. Guyon, se utiliza dicho prisma para determinar  $Z$  y la distribución de las  $\sigma_y$  (Fig. 3.16), refiriendo el ancho de la superficie de carga no a  $d$  sino a  $d_1 = 2u$  (donde  $u =$  menor distancia al borde).

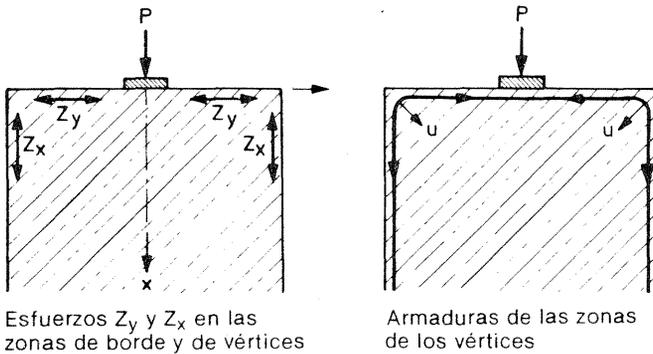


Fig. 3.14. Esfuerzos de tracción  $Z_y$  y  $Z_x$  en los bordes y armadura correspondiente.

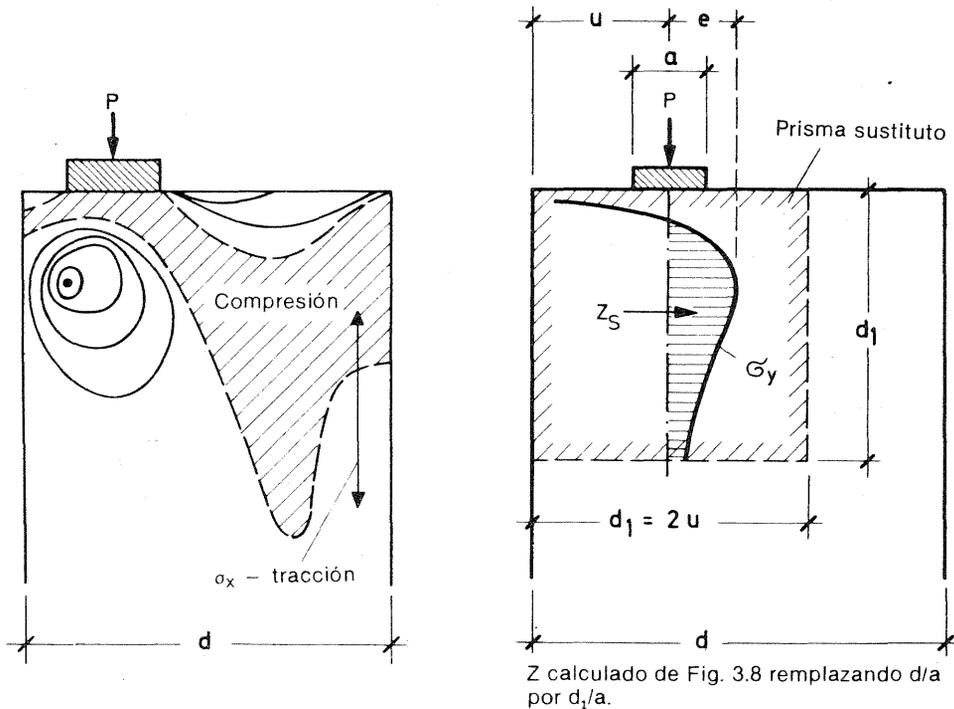


Fig. 3.15. Isobaras de las tensiones  $\sigma_y$  para carga excéntrica [38].

Fig. 3.16. Para carga excéntrica puede calcularse la fuerza de fractura  $Z$  mediante un prisma sustituto de aristas  $d_1$ .

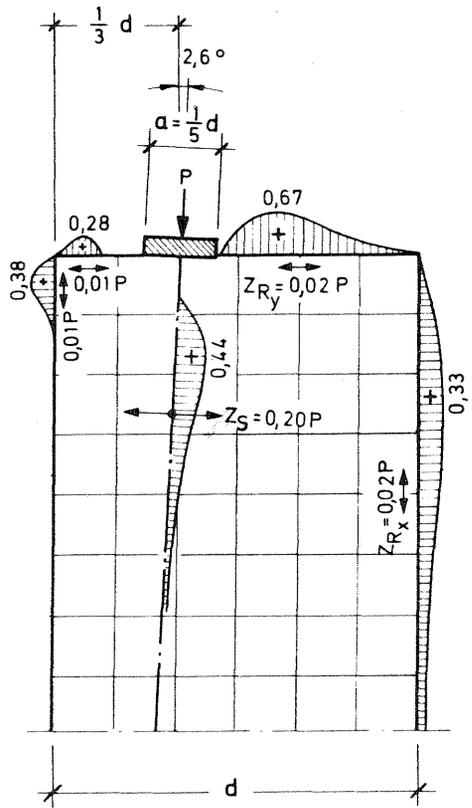


Fig. 3.17. Tensiones principales de tracción (de fractura y de tracción de borde) referidas a  $\sigma_0 = P/bd$ , y esfuerzo total de tracción  $Z$  para carga excéntrica [14].

Al propagarse las tensiones exteriormente al prisma sustituto, pueden originarse tensiones transversales de tracción adicionales pero en general de reducida magnitud.

Al aumentar la excentricidad  $e$ , o también si disminuye la distancia  $u$  de la carga al vértice más próximo, los esfuerzos de fractura en el interior del cuerpo resultan menores, pero las tensiones de tracción en la zona de borde vecina a la carga y en los bordes laterales cercanos a la misma y los esfuerzos de borde  $Z$  resultantes son sin embargo mayores. A este respecto, la Fig. 3.17 muestra los resultados [47] obtenidos en un modelo de ensayo para el que la excentricidad era  $e = 1/6 d$ . Los esfuerzos de tracción en los bordes alcanzaron valores de  $Z_R = 0,02 P$ .

R. Hiltcher y G. Florin [49] determinaron fotoelásticamente la dependencia del esfuerzo de tracción  $Z_R$  en el borde cargado de la relación  $e/d$ , para longitudes de carga relativas  $d/a = 10$  y  $30$ . De Fig. 3.18 se pone de manifiesto que los anchos de carga  $a/d$  influyen sobre la magnitud de  $\sigma_{y,R}$  máx., pero que dicha influencia es despreciable para el esfuerzo de borde de tracción  $Z_R$ . En el caso de grandes excentricidades,  $Z_R$  puede llegar a tener la misma magnitud que el esfuerzo de fractura  $Z_S$  correspondiente a carga centrada superficial de pequeña relación  $a/d$ .

Para el esfuerzo de borde de tracción  $Z_R$ , la Fig. 3.18 muestra su dependencia de la excentricidad relativa  $e/d$ , determinada en forma aproximada por la fórmula siguiente

$$Z_R \approx \frac{0,015 P}{1 - \sqrt{2} e/d} \quad (3.4)$$

En el cuaderno 240 de la DAfStb, se establece como valor  $Z_{Ry} = P(e/d - 1/6) \geq 0$ , que corresponde a la línea punteada de Fig. 3.18, y que conduce en parte a valores de  $Z_R$  del doble de lo necesario.

Mediante las curvas que aparecen en Fig. 3.18 para los dos casos  $d/a = 10$  y  $d/a = 30$ , correspondientes al esfuerzo interno de fractura (en correspondencia con la carga), puede verificarse fácilmente la practicabilidad del método aproximado con prisma sustituto debido a Y. Guyon (Fig. 3.16).

### 3.3.3. Carga concentrada excéntrica, inclinada con respecto al eje x

Esta situación se presenta en el caso de elementos tensores, de trayectoria curva o poligonal, utilizados para pretensar vigas, etc., pero muy raramente en bases de fundación.

A este respecto, nos referiremos al trabajo realizado en Stuttgart por M. Sargious [44]. La Fig. 3.19 reproduce un ejemplo para  $e = d/6$  y  $\alpha = 6,3^\circ$ . Esta inclinación no tiene influencia perceptible sobre las tensiones de fractura.

### 3.3.4. Cargas o fuerzas concentradas, múltiples

Cuando actúan varias cargas en el borde de una chapa, por debajo de cada una de ellas se origina una propagación de tensiones (Fig. 3.20), con tensiones de fractura como en el caso de una única carga concentrada, donde la intensidad y distribución de aquéllas son nueva- mente función de  $d_1/a$ , y que para el caso de 2 cargas, pueden obtenerse mediante prismas substitutos de anchos  $d_1 = 2 \times$  distancia al borde. Si entre las cargas extremas actúan otras cargas, entonces no es posible, mediante el estado actual de los conocimientos, obtener exactamente el ancho de los correspondientes prismas substitutos. Se sugiere calcular el ancho partiendo de las superficies parciales correspondientes a cada carga, del diagrama lineal de  $\sigma_x$  correspondiente a  $x = d$ , con lo que se está del lado de la seguridad (Fig. 3.21). Para cargas de distintos valores, se obtiene de esta manera también la influencia de las relaciones de intensidad de las cargas (o esfuerzos de pretensado) en forma aproximada. Se obtienen así los esfuerzos de fractura con prismas substitutos, de altura y longitud  $d_1, d_2, d_3, \dots$  etcétera.

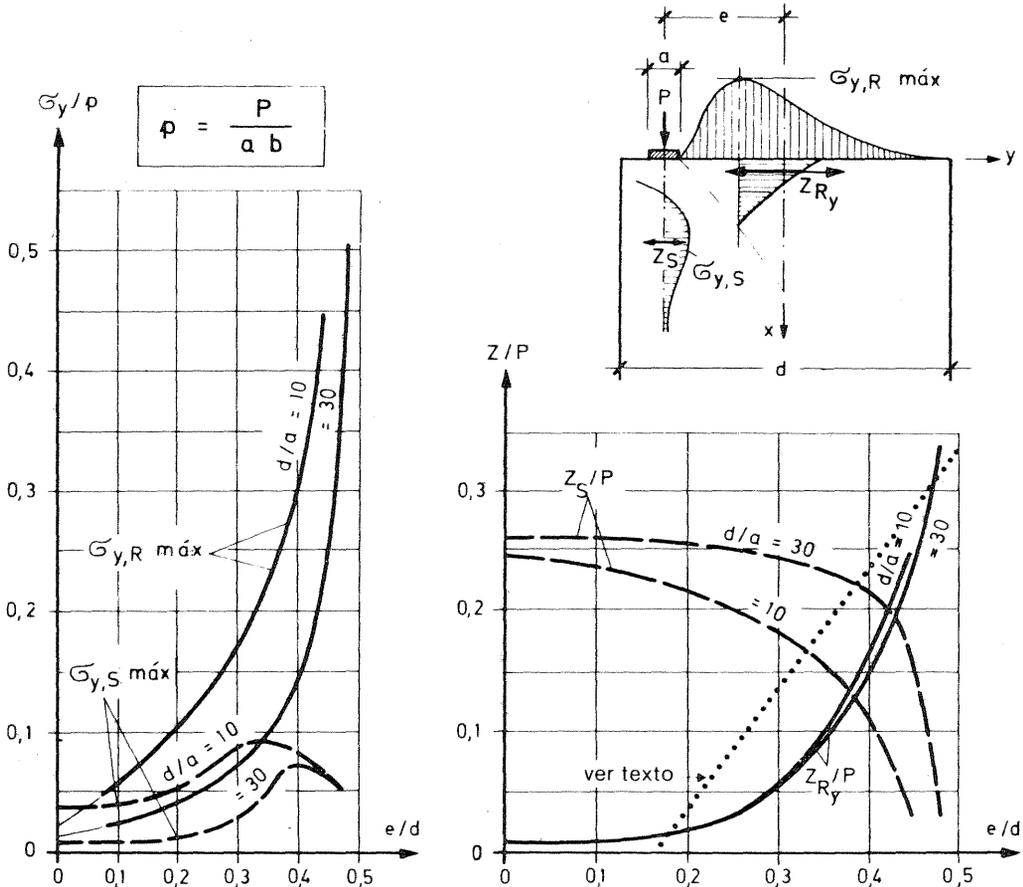


Fig. 3.18. Tensiones de fractura y de borde, de tracción,  $\sigma_{y,S}$  y  $\sigma_{y,R}$ , así como también los esfuerzos resultantes de tracción  $Z_S/P$  y  $Z_R/P$ , referidas a la presión  $p = P/ab$ , en función de la excentricidad  $e/d$  de la carga  $P$  para  $d/a = 10$  y  $d/a = 30$  [49].

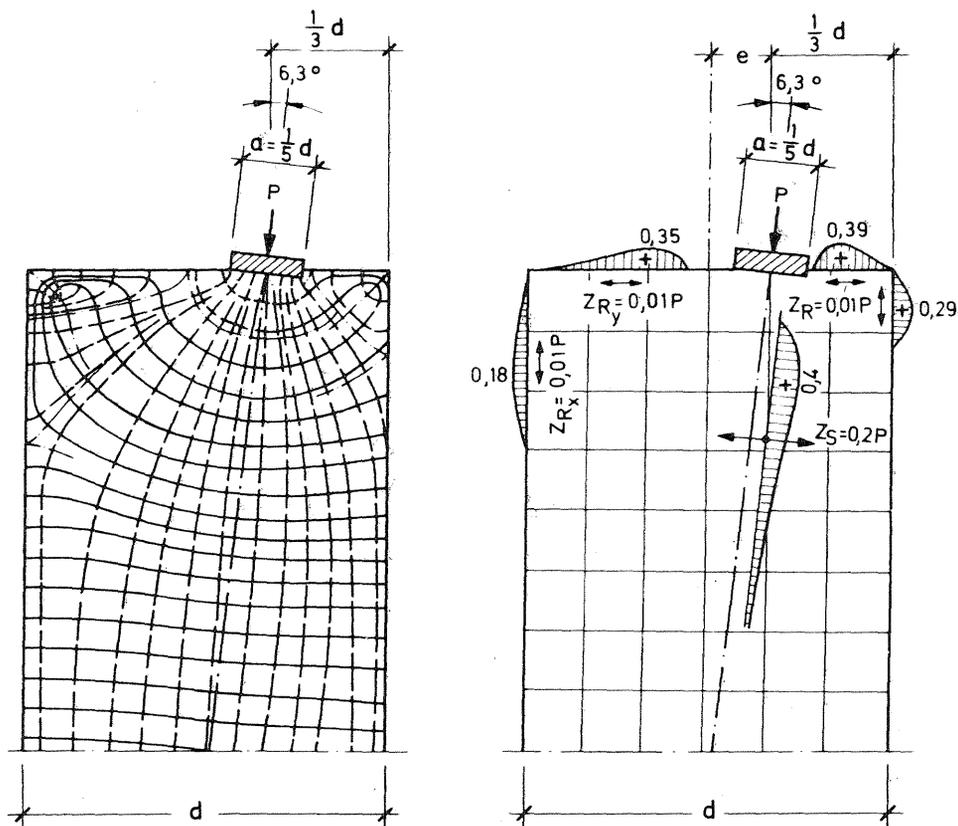


Fig. 3.19. Distribución de las trayectorias de las tensiones principales, de las tensiones de fractura de tracción y de las tensiones de borde más importantes, referidas a  $\sigma_0 = P/bd$ , para carga excéntrica oblicua [44].

Las tensiones de borde y los esfuerzos de tracción de borde  $Z_R$  a lo largo del borde cargado, cuando la separación entre cargas es considerable, pueden alcanzar valores relativamente grandes; en tal caso deben calcularse de acuerdo a las especificaciones para "vigas de gran altura" (ver Cap. 2), en cuyo caso las tensiones en la sección ubicada a  $x = d$ , representan la carga de la chapa, y las cargas aplicadas deben considerarse como las reacciones de vínculo (Fig. 3.22).

De acuerdo con un trabajo de W. Schlee [50] en el caso de chapas, cargadas o pretensadas con distribución periódica —de una altura  $l$  de por lo menos igual al doble de la separación  $d$  entre fuerzas— la tensión de borde  $\sigma_y$  máx. (normal a la dirección de la fuerza) es igual a la diferencia entre la presión  $p$  aplicada en la zona de carga o de pretensado y el valor medio uniformemente repartido de la tensión  $\sigma_m = p \cdot a/d$  (Fig. 3.23). La intensidad del esfuerzo de borde de tracción se obtiene en este caso y en forma aproximada, mediante la siguiente expresión

$$Z_y \sim 0,09 \left[ 1 - 0,9 \left( \frac{a}{d} \right)^2 \right] P \quad (3.5)$$

### 3.3.5. Acción conjunta de los esfuerzos de pretensado y de las reacciones de vínculo en los extremos de vigas de hormigón armado

La reacción de vínculo de una viga disminuye el esfuerzo de fractura originado por las fuerzas de anclaje de los elementos tensores, porque las reacciones de vínculo originan tensiones  $\sigma_y$  de compresión. M. Sargious [44] ha efectuado mediciones fotoelastimétricas en nu-

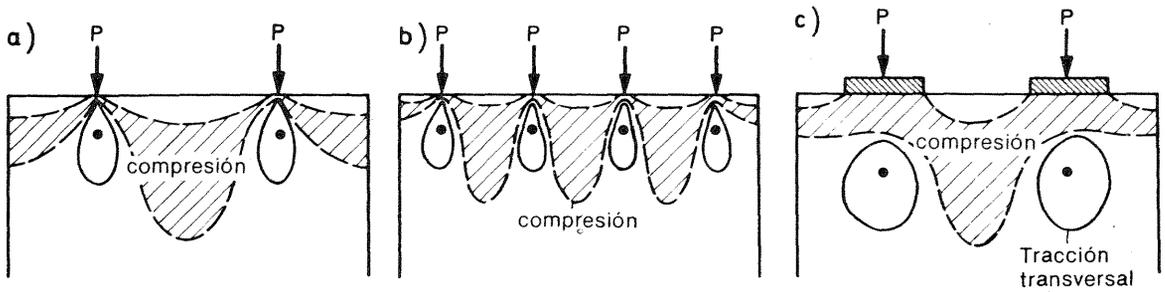


Fig. 3.20. Isobaras de las tensiones  $\sigma_y$  para distintas reparticiones de carga.

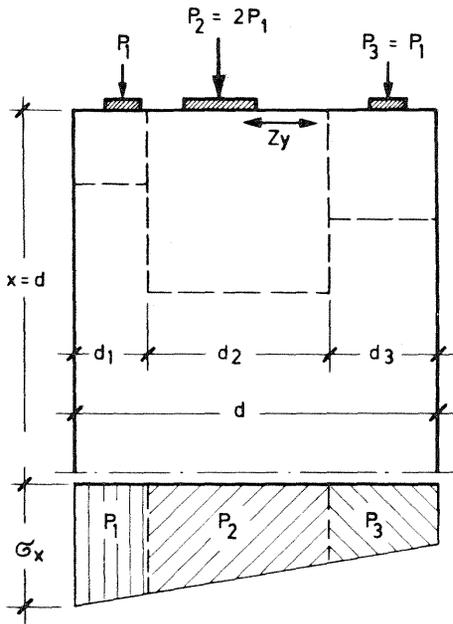


Fig. 3.21. Obtención de los prismas sustitutos partiendo del diagrama de  $\sigma_x$  correspondiente a una distancia  $x = d$  en el caso de varias cargas concentradas de distinta intensidad.

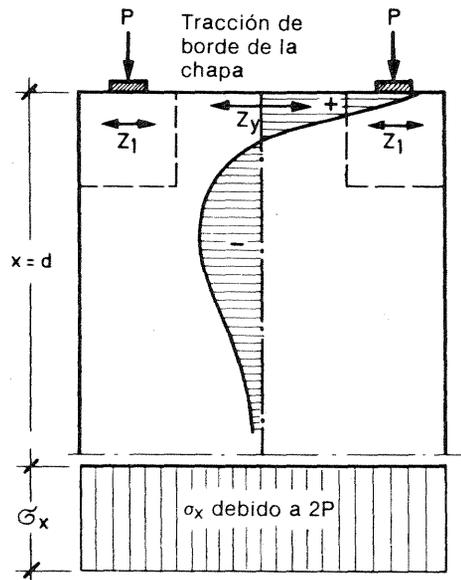


Fig. 3.22. Esfuerzos de borde de tracción entre cargas concentradas, determinados sobre la base de la analogía con la viga de gran altura.

merosos casos y también los ha calculado y evaluado posteriormente mediante elementos finitos (M. Sargious y G. Tadros [51]). También N. Zahlten en [52] hace tiempo que se ocupó de las condiciones especiales que existen en los extremos de las vigas pretensadas. En los diagramas siguientes (Fig. 3.24 a 3.30) se han representado las tensiones de tracción debidas al esfuerzo de pretensado  $P$  a lo largo de las trayectorias de las tensiones principales de compresión. El esfuerzo de fractura  $Z$  se ha considerado como dependiente de  $P$ . Las tensiones de borde de tracción se han representado por sus respectivas resultantes  $Z_1, Z_2, Z_3, \dots$ . Mediante éstas es posible calcular rápidamente las armaduras necesarias.

Debe tenerse presente que para apoyos cercanos al extremo de la viga, al actuar la reacción de apoyo, pueden aparecer en el borde inferior esfuerzos de tracción, que pueden llegar a alcanzar valores de  $Z_A = 0,4 A$  a una distancia del borde  $x_A = 1/12 d$  y reducidas relaciones  $A/P$  (Fig. 3.29).

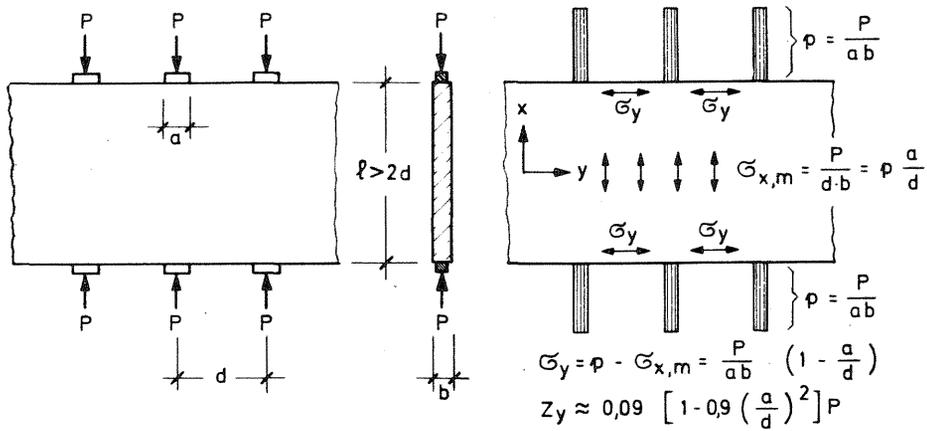


Fig. 3.23. Tensiones en las zonas de borde y esfuerzos de tracción en los bordes de chapas cargadas rítmicamente en lados opuestos [50].

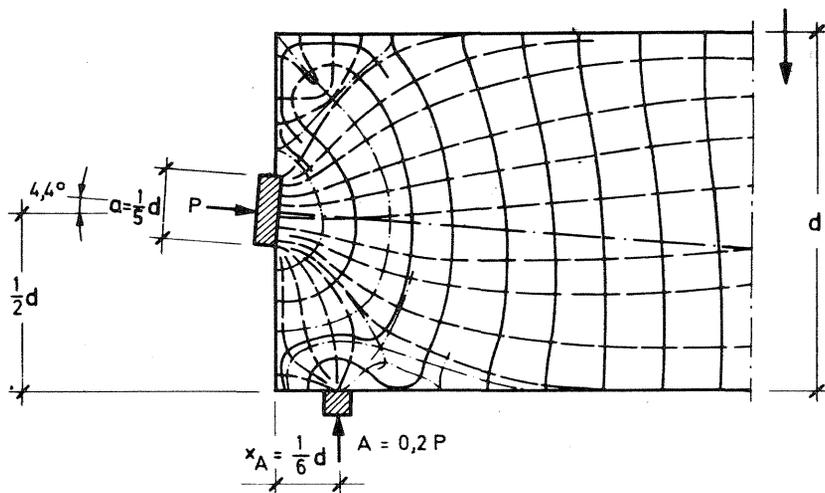


Fig. 3.24. Trayectorias de las tensiones principales en el extremo de una viga pretensada con una fuerza  $P$ , para la acción simultánea de la reacción de vínculo  $A = 0,2 P$  (ancho del apoyo =  $1/12 d$ ).

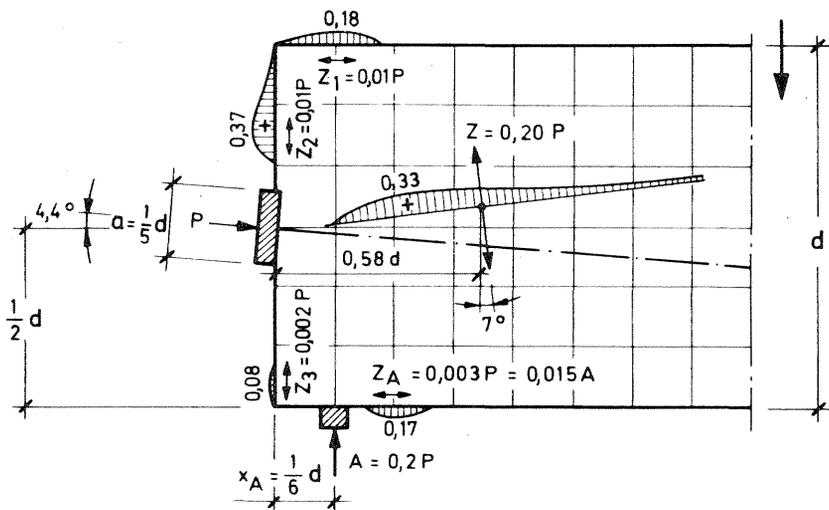


Fig. 3.25. Tensión de tracción de fractura y en las zonas de borde, referidas a  $\sigma_0 = P/bd$ , del modelo de Fig. 3.24.

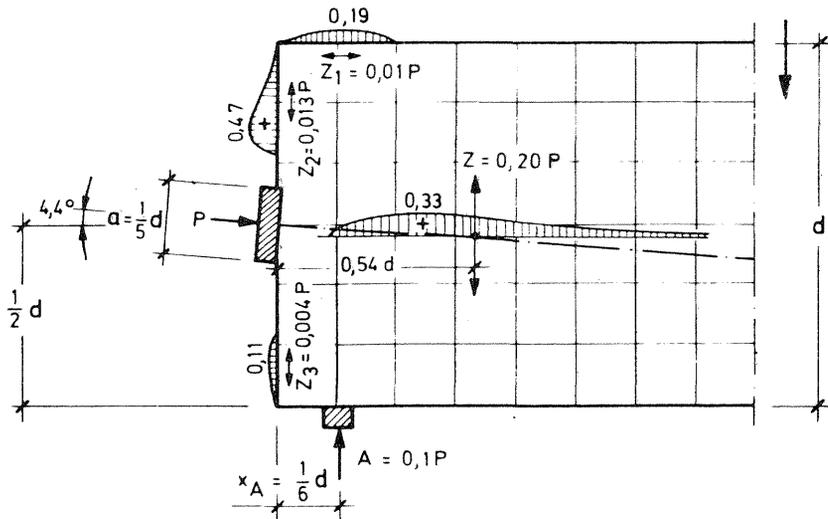


Fig. 3.26. Tensiones de tracción de fractura y de zonas de borde de un modelo similar al de Fig. 3.24, pero con  $A = 0,1 P$ .

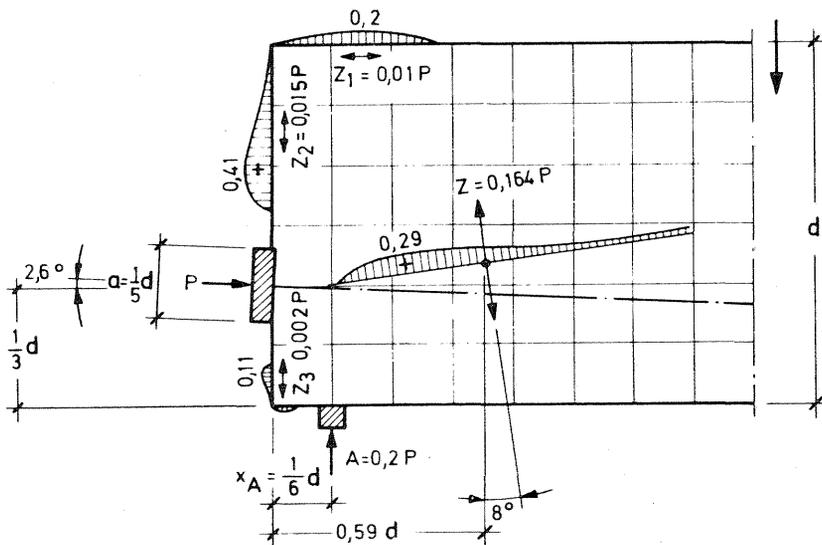


Fig. 3.27. Esfuerzo de pretensado a  $1/3 d$  del borde inferior.

### 3.3.6. Acción conjunta de la aplicación de fuerzas con la flexión de la viga en los apoyos intermedios de vigas continuas

W. Schlee pudo demostrar en [21, 22] que las tensiones en la zona de los apoyos intermedios de vigas continuas o de otros casos similares en que actúen simultáneamente cargas aplicadas y flexión de vigas, pueden obtenerse por superposición de las tensiones obtenidas mediante la teoría de flexión de Navier ( $\sigma_x = M/W$ , repartición lineal) con las correspondientes a la teoría laminar para la sola acción de fuerzas (Fig. 3.31). Para vigas sin esfuerzo normal, por ejemplo sin pretensar, las tensiones de fractura debidas a la reacción de apoyo resultan, en general, sobrecomprimidas por las tensiones de compresión por flexión originadas por los momentos negativos debidos a las cargas (Fig. 3.32). En cambio, en vigas pretensadas, dichas ten-

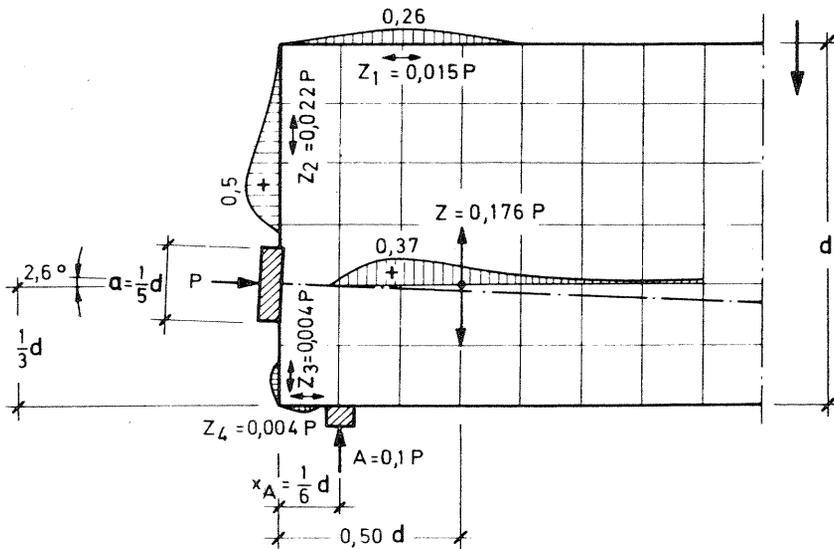


Fig. 3.28. Similar a Fig. 3.26 pero con el esfuerzo de pretensado a  $1/3 d$  del borde inferior.

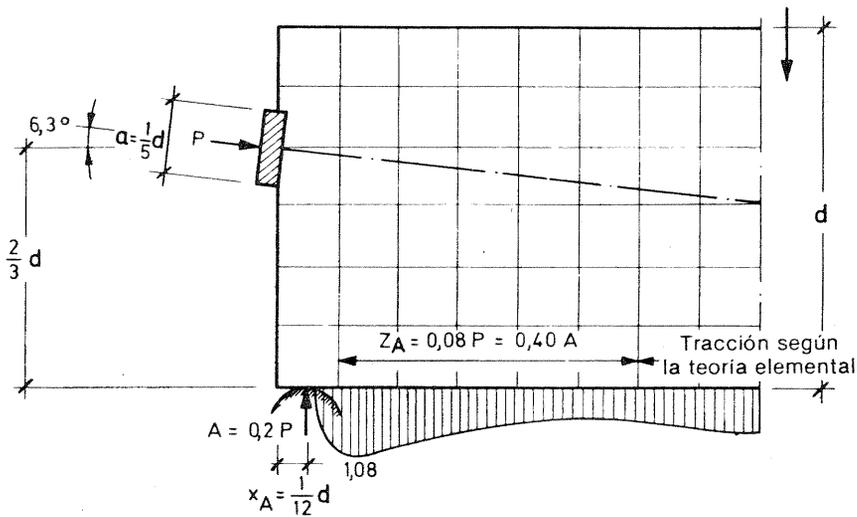


Fig. 3.29. Tensiones de borde de tracción en un modelo con  $A = 0,2 P$  a una distancia  $1/12 d$  del vértice (ancho de apoyo =  $1/24 d$ ) y esfuerzo de pretensado  $P$  a  $2/3 d$ .

siones de compresión por flexión, correspondientes al peso propio, pueden ser muy reducidas en el borde inferior, o aun anularse debido a  $S + K^*$ , de modo que tanto las tensiones de fractura como todas las tensiones de borde originadas por la aplicación de las cargas, continúan siendo de tracción y deben ser absorbidas por armaduras (Fig. 3.33). Ver también a este respecto F. Leonhardt y W. Lippoth [55]. Cuando la curvatura del elemento tensor tiene una extensión mayor que  $a_v = 0,1 l$  ó  $2 d$ , en ese caso se originan en la parte inferior tensiones de borde de tracción sobre una longitud considerable (Fig. 3.33).

\*S = retracción o contracción de fraguado; K = fluencia lenta (*N del T.*).

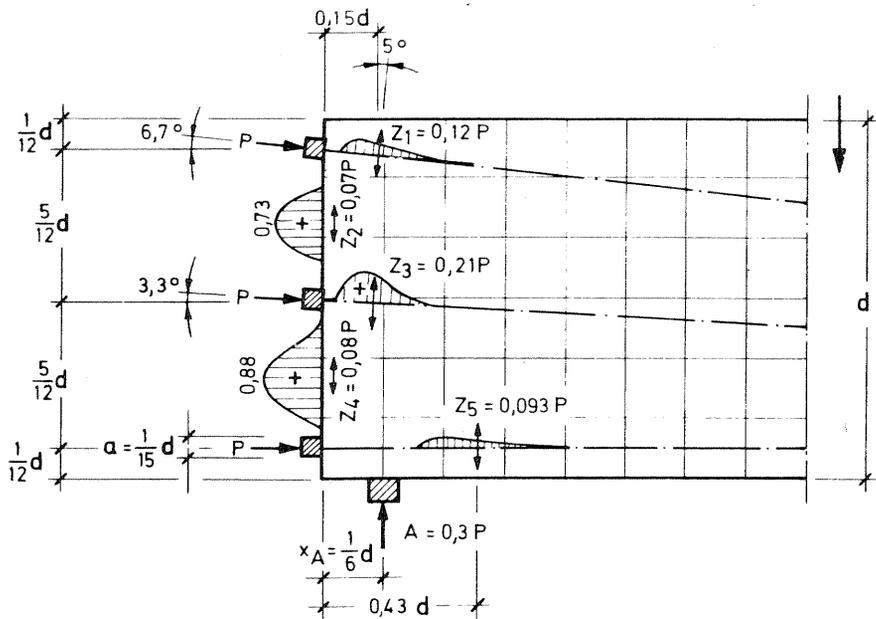
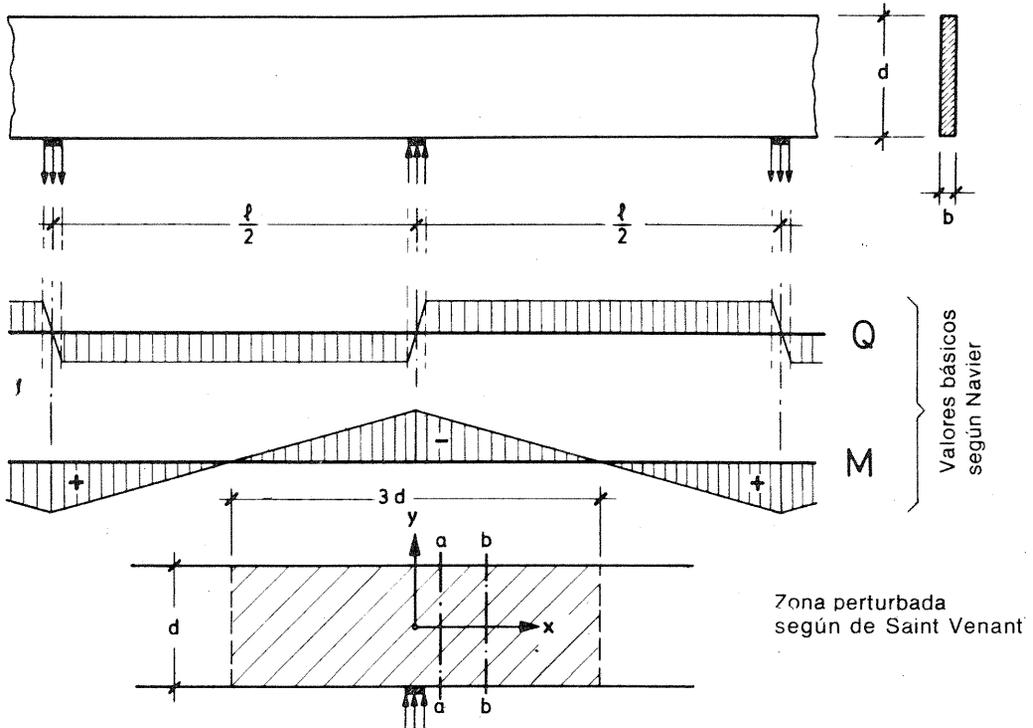
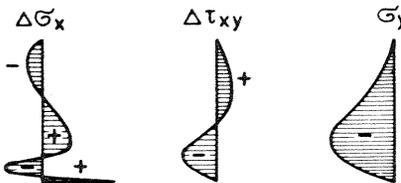


Fig. 3.30. Tensiones de tracción de fractura y en las zonas de borde en un modelo solicitado por tres esfuerzos de pretensado  $P$  con  $a = 1/15 d$  y  $A = 0,3 P$ .



Tensiones adicionales debidas a la presión de apoyo

Sección a - a ( $x = 0,2 d$ )



Sección b - b ( $x = 0,6 d$ )

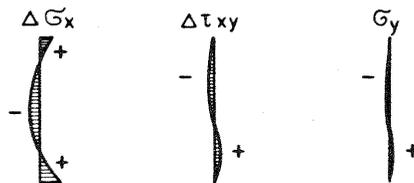
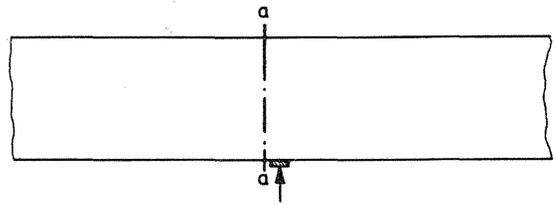


Fig. 3.31. Determinación de los diagramas de tensiones en apoyos intermedios de vigas continuas por superposición según W. Schlee [21].



Tensiones en la sección a - a

debidas a  $g$  o  $g + p$   
sin tensiones previas

debidas a  $g + V$  con  
tensiones previas

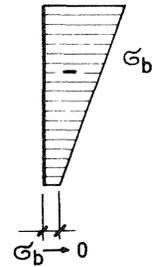
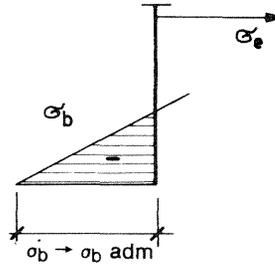


Fig. 3.32. Tensiones en el borde inferior en secciones contiguas de los apoyos intermedios de vigas continuas de hormigón armado y pretensadas.

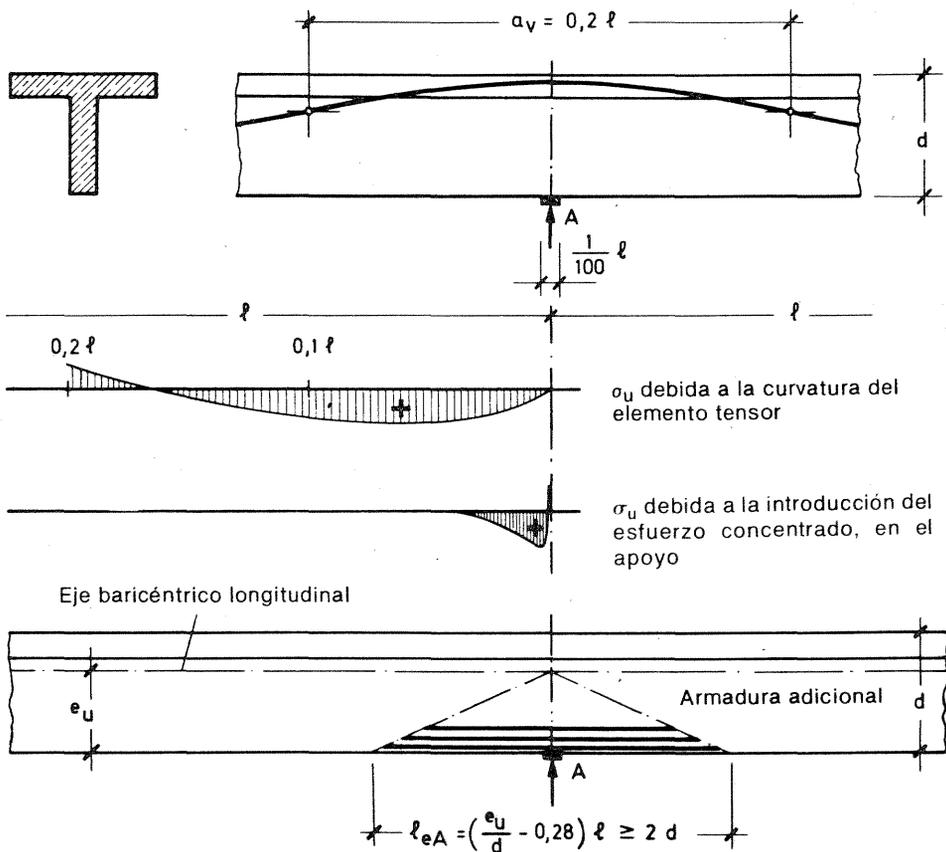


Fig. 3.33. Como, de acuerdo con Fig. 3.32, no existen tensiones de compresión en secciones contiguas a los apoyos intermedios de vigas continuas pretensadas, se originan en dicho lugar tensiones de tracción debidas a la longitud excesiva de la curvatura del elemento tensor y la introducción de la reacción de apoyo, que deben ser absorbidas por armaduras [55].

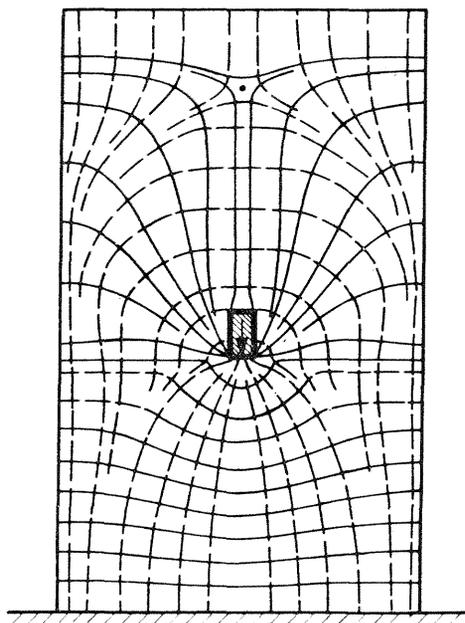


Fig. 3.34. Trayectorias de las tensiones principales en una chapa, solicitada por una carga aplicada en su interior [56].

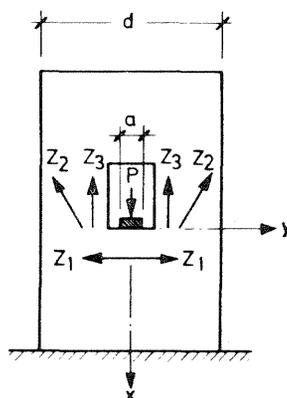
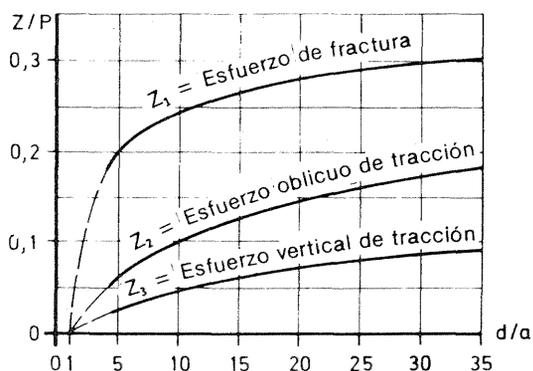


Fig. 3.35. Intensidad de los esfuerzos de fractura  $Z_1$  a  $Z_3$  en una chapa cargada en su interior.

### 3.3.7. Carga concentrada aplicada en el interior de la chapa

En las vigas de gran altura pueden actuar cargas transmitidas por vigas y en estructuras de hormigón pretensado ocurre a menudo que los elementos tensores se anclan dentro de una losa, en el alma de una viga-placa, etc. En tales casos la parte de la chapa situada por detrás del punto de aplicación de la carga colabora en la resistencia y debe en cierta medida ser suspendida. De acuerdo con la investigación realizada en Stuttgart por R. K. Müller y D. W. Schmidt [56] se obtiene la configuración de las trayectorias reproducida en Fig. 3.34. Los esfuerzos de tracción se reúnen en tres grupos  $Z_1$ ,  $Z_2$  y  $Z_3$ , para el dimensionado de la armadura cuyas intensidades, en función de  $d/a$  deben tomarse del diagrama de Fig. 3.35. Las armaduras de suspensión  $Z_2$  y  $Z_3$  deben anclarse hasta una distancia de por lo menos  $2 a_0$  ( $a_0$  = longitud de anclaje para  $\sigma_e$  adm.) a partir del punto de aplicación de la carga. La armadura de fractura  $Z_1$  deberá repartirse en la dirección  $x$  aproximadamente como indican las Figs. 3.6 y 3.7 y prolongarse en la dirección  $y$ , a ambos lados de la recta de acción de la fuerza, de  $d/2$  o por lo menos  $3 a + a_0$ .

En el caso que nos ocupa, es posible aprovechar las mallas de acero que se disponen en

las caras externas para absorber los esfuerzos de tracción. Puede prescindirse de la armadura de suspensión para  $Z_2$  y  $Z_3$ , cuando a la chapa, de espesor  $t$ , corresponde en el punto de aplicación de la carga, una tensión de compresión  $\sigma_x \geq 0,1 p = 0,1 P/at \geq 10 \text{ kp/cm}^2$  en la dirección de la fuerza, y que es suficiente para evitar la formación de fisuras transversales en la zona de aplicación de la carga.

J. Eibl y G. Jvanyi [57] calcularon los esfuerzos de tracción correspondientes a anclajes embutidos en el hormigón de elementos tensores mediante el método de los elementos finitos. Se obtuvieron reducidas tensiones de tracción detrás de la zona de aplicación de la carga. La verificación efectuada en modelos de ensayo mostró que lo que importa en realidad para evitar la formación de fisuras, es el recubrimiento de hormigón de los dispositivos de anclaje. También tiene importancia la disposición relativa de los elementos de anclaje, cuando son varios (nunca en una misma línea, ¡pues produce efecto de arrancamiento!).

Por la aparición de fisuras, la colaboración de la chapa detrás del punto de aplicación de la carga se reduce y el esfuerzo de tracción en la armadura de suspensión disminuye más. Sin embargo, sería un error economizar en dichas armaduras, por cuanto, en dicho lugar, por efecto de la fluencia del hormigón por debajo de la zona de carga, se abrirían demasiado.

### 3.3.8. Esfuerzos aplicados por adherencias a barras de armadura

La aplicación de una carga mediante una barra anclada por adherencia (por ejemplo: acero nervurado para pretensado en bancos) origina esfuerzos de fractura independientes de la ubicación de la barra, que corresponden aproximadamente a los valores dados en 3.3.1.1 para  $d/a = 10$ . De acuerdo con ello, la armadura de fractura debe dimensionarse para

$$Z_S = 0,25 P_{\text{barra}}$$

Las tensiones de fractura se extienden sobre la longitud de transferencia  $l_{\bar{u}}$ , que depende de las calidades de la adherencia (conformación superficial) y del hormigón (Fig. 3.36), que normalmente se establece en los certificados de utilización de los aceros, mediante ensayos. La intensidad del esfuerzo de fractura es independiente de  $l_{\bar{u}}$ . La correspondiente armadura debe distribuirse sobre una longitud de 0,5 a 0,7 de  $l_{\bar{u}}$ , a partir del extremo de la barra.

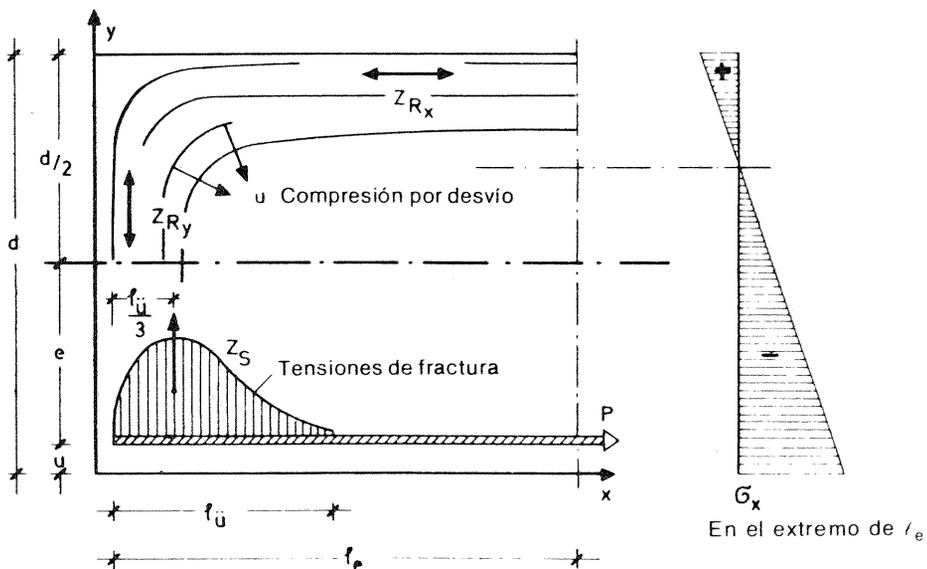


Fig. 3.36. Tensiones de fractura debidas a la introducción de la fuerza  $P$  correspondiente a una barra anclada por adherencia y ubicación de los esfuerzos de fractura y de borde por tracción en un cuerpo de sección rectangular.

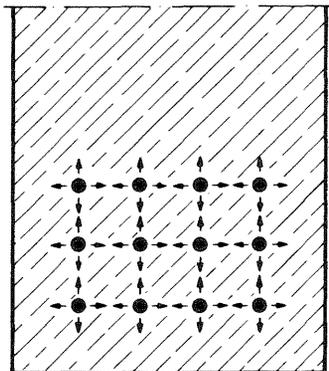


Fig. 3.37. Cuando varios alambres pretensados se anclan por adherencia, los esfuerzos de fractura correspondientes a cada uno de ellos se anulan, en parte, entre sí.

Cuando varias barras o alambres tensores se disponen uno al lado del otro, los esfuerzos de fractura interiores se compensan entre sí y sólo es necesario cubrir los esfuerzos originados por una barra por capa o una fila vertical (Fig. 3.37).

Además del esfuerzo de fractura es necesario tener en cuenta los esfuerzos de borde de tracción y los demás esfuerzos transversales de tracción, originados en la chapa por la propagación de los esfuerzos de anclaje (esfuerzos de tensado). En este caso es determinante, naturalmente, el esfuerzo total de anclaje de todas las barras o alambres.

Los esfuerzos transversales de tracción  $Z_{Ry}$  en el borde pueden calcularse mediante la Fig. 3.18, y actúan aproximadamente en el tercio posterior de la longitud de transferencia  $l_{\bar{u}}$ . Una parte de la armadura de fractura se utiliza generalmente para colaborar en la absorción de dichos esfuerzos de tracción.

Los esfuerzos de borde de tracción  $Z_{Rx}$  dependen de la excentricidad  $e/d$  de la fuerza y se obtienen de la cuña de tracción de las  $\sigma_x$  en el extremo de la longitud de transferencia de la carga  $l_e$ , que para chapas rectangulares debe suponerse aproximadamente igual a  $l_{\bar{u}}/3 + (d - u)$ . J. Plähn y K. Kröll [41] suponen como longitud de transferencia

$$l_e = d \left[ 1 + 0,15 \left( \frac{l_{\bar{u}}}{d} \right)^2 \right]$$

En la zona de transferencia vecina a  $l_{\bar{u}}$ , generalmente es suficiente la armadura transversal mínima corriente, por cuanto el desvío del esfuerzo de tracción de  $Z_{Ry}$  a  $Z_{Rx}$  origina una compresión transversal.

Para secciones T o I, deben vincularse las alas en la forma común mediante una armadura transversal para la transferencia de esfuerzos. En este caso, el esfuerzo transversal de tracción se calcula partiendo del esfuerzo que se transmite al ala en una prolongación de la zona de transferencia, suponiendo diagonales ideales comprimidas a  $45^\circ$  (ver [1a, Sec. 8.6.1]).

### 3.3.9. Transferencia de una fuerza concentrada en una viga-placa

Un estudio realizado en Stuttgart por M. Sargious (Fig. 3.38) muestra las trayectorias de tensiones y los esfuerzos de tracción en el alma originados por una fuerza de tensado  $P$ , aplicada aproximadamente en el baricentro de la sección en T e inclinada. La fuerza tiene que propagarse no sólo en el alma sino también en la placa, lo cual aumenta el esfuerzo de fractura de igual forma que ocurriría si la parte del alma ubicada sobre la fuerza fuera mayor de lo que en realidad es.

Como aproximación se recomienda proceder de la siguiente forma (Fig. 3.39): se calculan las tensiones  $\sigma_x = P/F + P \cdot e/W$  en el extremo de la longitud de transferencia  $l_e$ , donde se supone  $l_e = h_v + b \geq d_0$ . El alma se trata en la forma expresada en Sec. 3.2, con un prisma sustituto de arista  $d_1 = 2 h_v \leq d_0$ . El esfuerzo transversal de tracción en la placa se obtiene de la parte del esfuerzo de pretensado que se transmite a la misma

$$P_{pl} = b \cdot d \cdot \sigma_{x, pl}$$

donde la placa se considerará como de un ancho  $b$  cargada dentro del espesor  $b_0$  del alma. La expansión comienza aproximadamente a la distancia  $x = 0,7 h_v$  del borde de la viga-placa. El esfuerzo de fractura por tracción se calcula partiendo de  $P_{pl}$  para  $b/b_0$  en lugar de  $d/a$  de Fig. 3.8. La armadura transversal debe repartirse en la forma que indica la Fig. 3.6. Si simultáneamente actúa un esfuerzo de corte  $Q$  debido a cargas y reacciones de vínculo de dirección  $y$ , se originan tensiones oblicuas de tracción, que es necesario absorber mediante armaduras adicionales (ver [Tomo I, Sec. 8.6.1]).

En [58] A. L. Yettram y K. Robbins verificaron este procedimiento aproximado con el método de los elementos finitos y comprobaron que el mismo conduce a soluciones ubicadas del lado seguro. En [78] figuran resultados de nuevos ensayos, sobre vigas I, ver apéndice en página 89.

### 3.4. Valores de cálculo de los esfuerzos de fractura para el caso de introducción de cargas o fuerzas concentradas en un sistema tridimensional

La introducción tridimensional ocurre cuando las dimensiones del elemento de hormigón en las direcciones  $z$  e  $y$  son mayores que la placa de carga, de modo que las tensiones se expanden normalmente al eje  $x$  en todas direcciones.

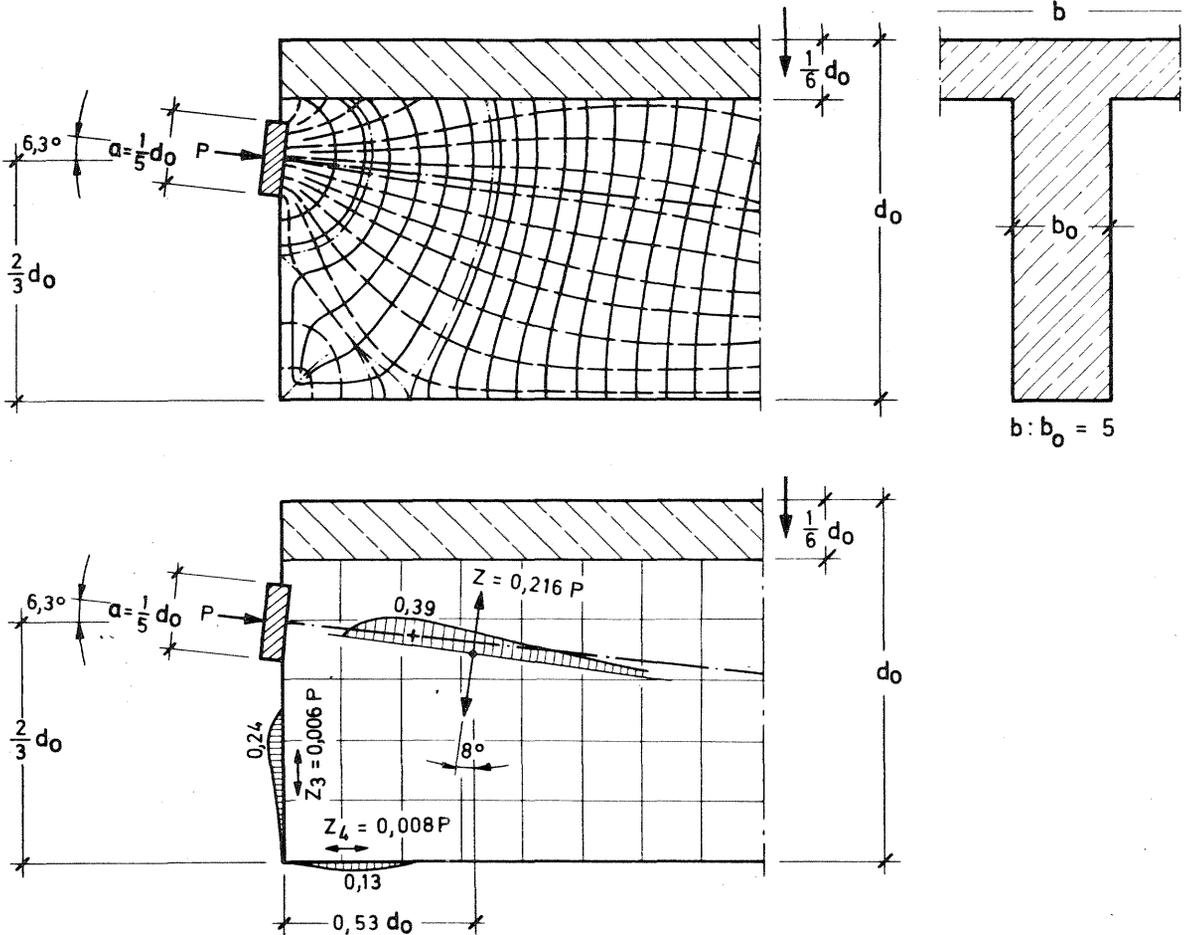


Fig. 3.38. Trayectorias de las tensiones principales (arriba) y tensiones de fractura (abajo) en un modelo de viga-placa con  $P$  aplicada a  $\frac{2}{3} d_0$  del borde inferior y  $b/b_0 = 5$  [44].

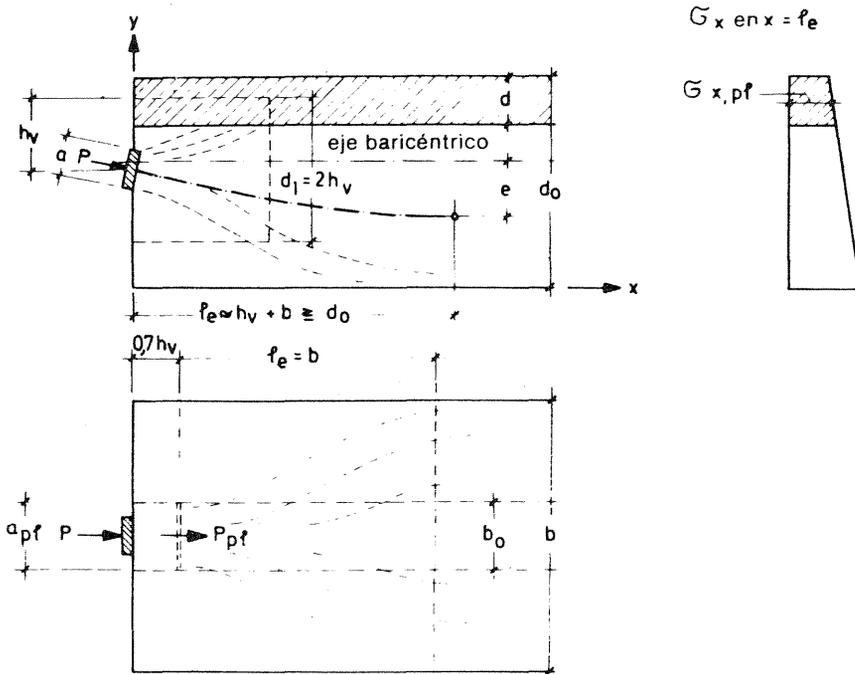


Fig. 3.39. Prisma sustituto para la determinación de las tensiones de fractura en el alma y en la losa de una viga-placa.

### 3.4.1. Carga concentrada centrada

#### 3.4.1.1. Las tensiones y el esfuerzo de fractura

En este caso se utilizan los resultados del cálculo de los esfuerzos de fractura mediante elementos finitos debido a A. L. Yettram y K. Robbins [42] que tienen en cuenta las dimensiones variables  $d$  y  $b$  del bloque de hormigón con  $F = d \cdot b$  y la superficie cargada  $F_1 = a \cdot c$  (Fig. 3.40). Los resultados analíticos publicados por S. R. Jyengar y M. K. Prabhakara en [35] y [37] coinciden ampliamente con los de [42]. Corresponde hacer notar que, en un prisma cuadrado con una carga fuertemente concentrada, p. ejemplo  $F: F_1 = 25$  (Fig. 3.41), las tensiones de fractura  $\sigma_y = \sigma_z$  en la zona del eje son mucho mayores que en la superficie ( $y = z = d/2$ ), sin embargo, entre ambos límites, en el interior, se presentan valores menores aún. Para grandes superficies de carga, p. ej.:  $F: F_1 = 2$  (Fig. 3.42) en cambio las tensiones de fractura son mayores en la parte exterior que en la interior. El máximo de la tensión de fractura queda más cerca de la carga que en el caso bidimensional y difiere en forma pronunciada de los valores calculados para este último. La longitud de perturbación es también de aproximadamente  $l_e \approx d$ , cuando se tiene  $d \geq b$ .

Para el prisma de sección cuadrada, se tiene que la suma de los esfuerzos de fractura correspondientes a cada uno de los planos  $xy$  y  $xz$  en función de  $d/a$  según Fig. 3.43, es aproximadamente igual al caso de Fig. 3.8, de modo que es válida la aproximación de Ec. (3.1 a):

$$Z_y = Z_z \approx 0,25 P \left[ 1 - \frac{a}{d} \right].$$

Las armaduras necesarias para absorber  $Z_y$  y  $Z_z$  deben disponerse tanto en la dirección  $y$  como en la  $z$ ; las Figs. 3.41 y 3.42 dan una indicación sobre la distribución en todas las direcciones. Estrictamente hablando, para grandes relaciones  $F: F_1$  deberían incrementarse, por cuanto en las direcciones diagonales ( $45^\circ$  y  $135^\circ$  respecto del eje  $y$ ) las tensiones principales radiales pueden llegar a diferir hasta de  $45^\circ$  con la dirección de las armaduras, pero en la práctica es posible prescindir de ello.

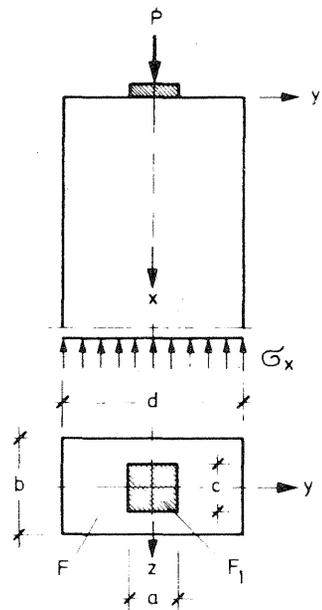
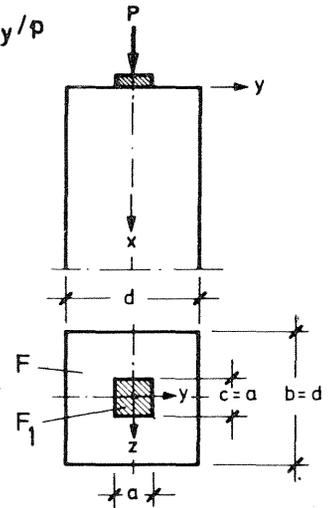
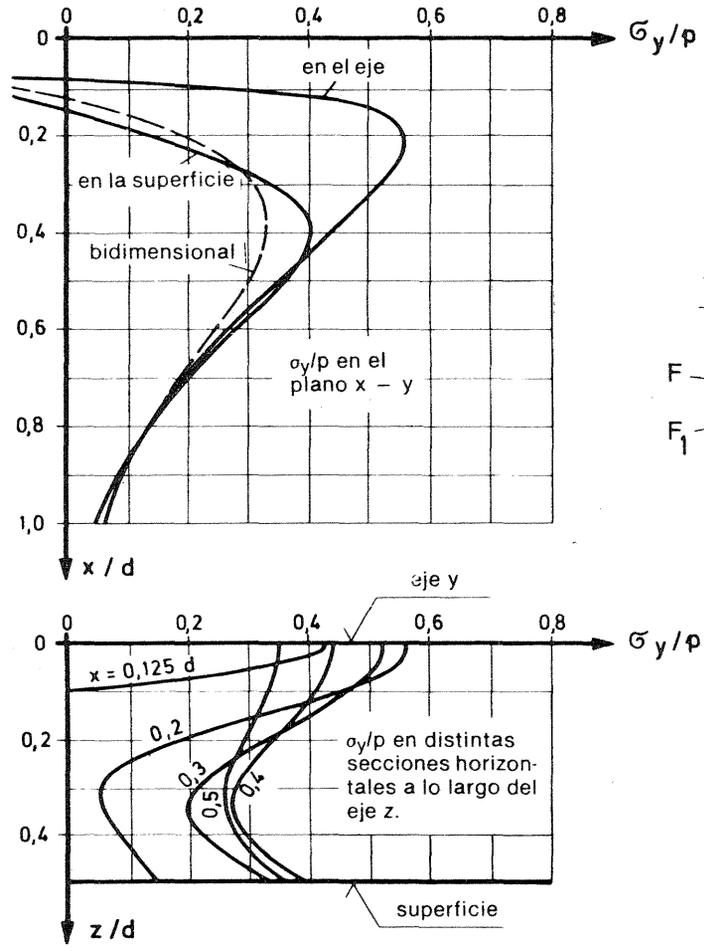


Fig. 3.40. Notación en un cuerpo solicitado por una carga concentrada.



$$d/a = 5$$

$$F/F_1 = 25$$

$$p = \frac{P}{a^2}$$

Fig. 3.41. Distribución de las tensiones de fractura por tracción  $\sigma_y = \sigma_z$  en un prisma de sección cuadrada y  $F/F_1 = 25$ . Arriba: en el eje y en la línea baricéntrica de la superficie de dirección x. Abajo: en secciones horizontales a distintas distancias x, en dirección z [42].

En el caso de cilindros circulares y superficies de carga circulares, R. Hiltcher y G. Florin [59] calcularon las tensiones de fractura y llegaron a la distribución que muestra la Fig. 3.44; los valores máximos de las tensiones de tracción aparecen más cercanos a la superficie de carga que en el caso de chapas de análogas relaciones, pero sin embargo los valores de las tensiones y esfuerzos de tracción son algo menores; ver Fig. 3.7 para la chapa (bidimensional). Los esfuerzos de fractura para el cálculo de la armadura correspondiente deben, sin embargo, suponerse iguales que para el prisma cuadrado, para lo cual lo más adecuado es una armadura helicoidal, que se calcula por analogía con la correspondiente a un cilindro sujeto a presión interior (= esfuerzo de fractura). A este fin puede recurrirse a las ecuaciones deducidas en [1a, Sec. 7.4] para columnas zunchadas de hormigón armado, siempre y cuando se suponga que la armadura helicoidal en el extremo de la zona de fractura por tracción encierre un cuerpo cilíndrico sujeto a presión interior. La influencia de la relación entre el espesor del cuerpo y el tamaño de la placa de carga en general no se tiene en cuenta. Para la columna zunchada se dedujo

$$\Delta N_U = - \frac{1}{\mu} \cdot \frac{\pi d}{2} \cdot \frac{w}{w} \cdot \frac{f_{ew}}{w} \cdot \beta_{Sw}$$

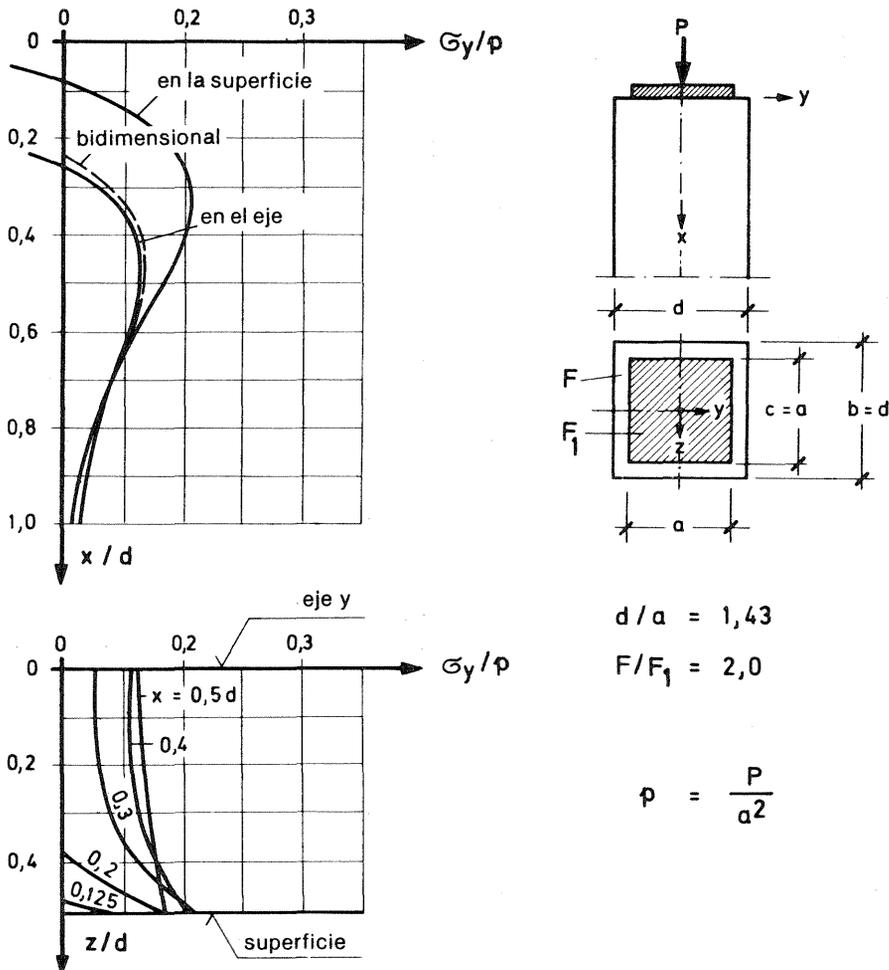


Fig. 3.42. Igual que en Fig. 3.41 pero para un prisma con  $F/F_1 = 2$  [42].

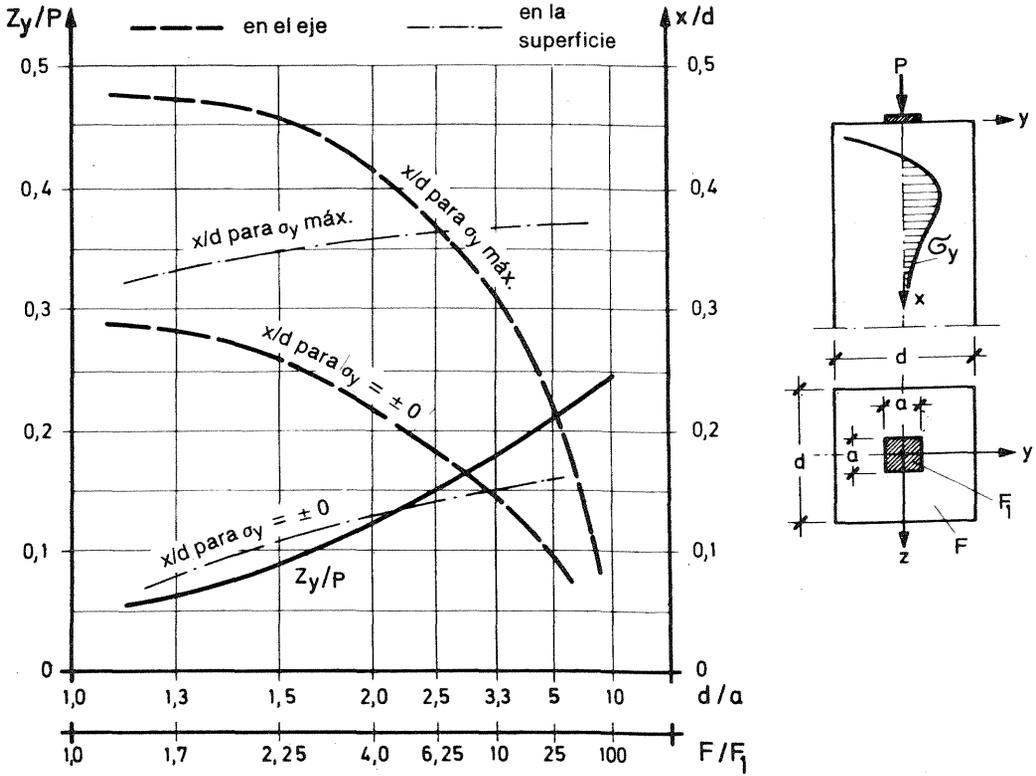


Fig. 3.43. Intensidades de los esfuerzos de fractura por tracción  $Z_y = Z_z$ , referidos a la fuerza  $P$  y distancia  $x/d$  de los puntos donde  $\sigma_y$  es máxima y  $\sigma_y = 0$ , desde el borde superior en el eje y en la superficie de un prisma de sección cuadrada.

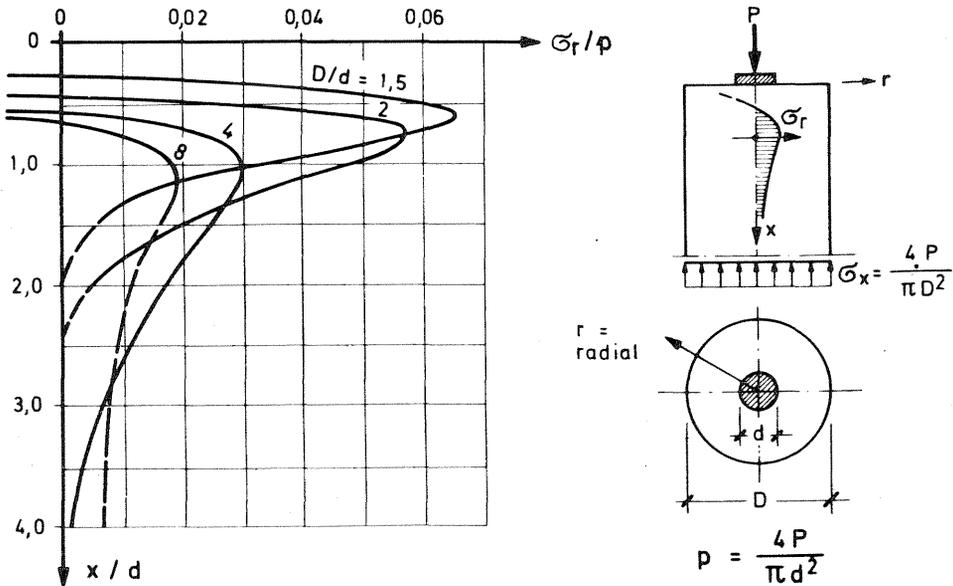


Fig. 3.44. Tensiones de fractura por tracción en el eje de un cuerpo cilíndrico con carga centrada [59].

Con un coeficiente de Poisson  $\mu = 0,2$  se obtiene como ecuación para dimensionar la hélice traccionada

$$f_{ew \text{ nec.}} = \frac{1}{8} \frac{P}{d_w \sigma_e \text{ adm.}} \cdot w \quad (3.6)$$

donde  $f_{ew}$  = sección de la barra helicoidal  
 $d_w$  = diámetro de la espira  
 $w$  = paso de la espira  
 $\sigma_e \text{ adm.}$  = 1800 kp/cm<sup>2</sup> para B St 42/50  
 = 1200 kp/cm<sup>2</sup> para B St 22/34

Para prismas rectangulares de distintas relaciones  $d/a$  y  $b/c$  puede obtenerse la ubicación de la máxima tensión de fractura en el eje y en la superficie, de Fig. 3.45 y en su intensidad de Fig. 3.46. La tensión  $\sigma_z$  máx. se obtiene invirtiendo las relaciones entre los lados. Las tensiones  $\sigma_y$  máx. y  $\sigma_z$  máx. que se originan simultáneamente no son iguales y tampoco ocurren en el mismo sitio  $x$ . La distribución de las tensiones de fractura en el eje se corresponde aproximadamente con la del prisma cuadrado, para cada relación  $d/a$  o  $b/c$ .

Hasta tanto no existan otros resultados experimentales, se admite que los valores de  $Z_y$  y  $Z_z$  se tomen cada uno de ellos, para la totalidad de la carga  $P$ , con las correspondientes relaciones  $d/a$  y  $b/c$  del diagrama de Fig. 3.8, válido para el caso bidimensional.

### 3.4.1.2. Los esfuerzos de tracción en las zonas de borde

Los esfuerzos de tracción en las zonas de borde, obtenidos como suma de las tensiones de borde de tracción en las caras frontales cargadas y en las zonas de esquina, ocurren en la repartición tridimensional en una forma e intensidad casi igual a la descrita en 3.3.1.3.

Si se impide la deformación transversal del bloque de hormigón en las cercanías de la superficie de carga mediante un zunchado y se originan con ello tensiones de compresión radiales, los esfuerzos de tracción en las zonas de borde desaparecen (Fig. 3.47). Por esta razón, se considera que las armaduras helicoidales actúan siempre favorablemente en el caso de anclajes de elementos pretensados y de otras grandes concentraciones de cargas.

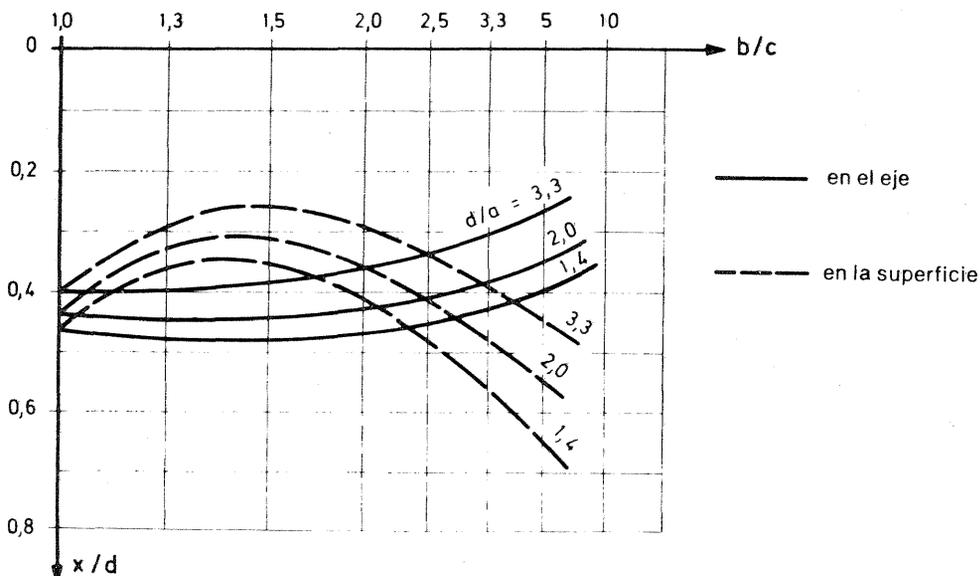


Fig. 3.45. Distancia  $x/d$  de la máxima tensión de fractura por tracción  $\sigma_y$  máx. en el eje y en la superficie de cuerpos prismáticos con distintas relaciones  $d/a$  y  $b/c$  entre la superficie de carga y las dimensiones del prisma [42].

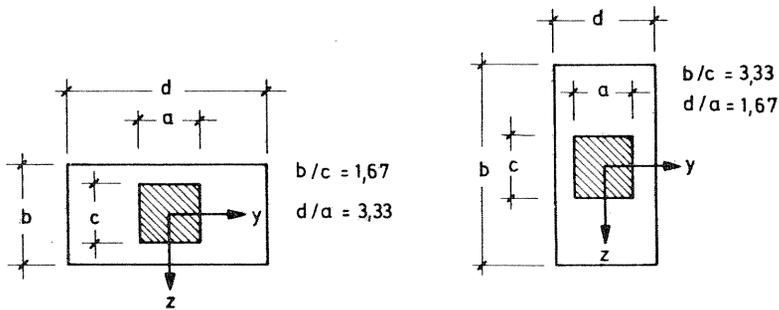
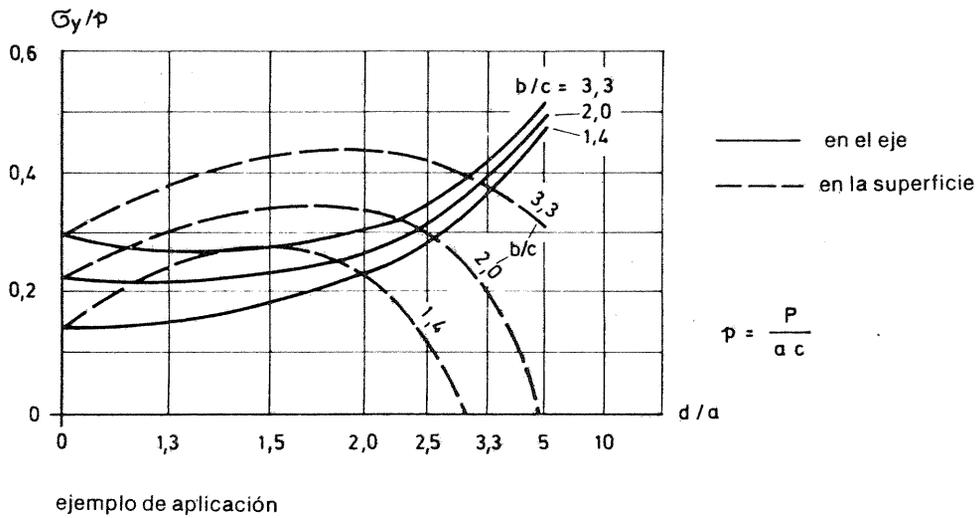


Fig. 3.46. Intensidad de la máxima tensión de fractura por tracción  $\sigma_y/p$  máx. en el eje y en la superficie de un cuerpo prismático; ver Fig. 3.45 [42].

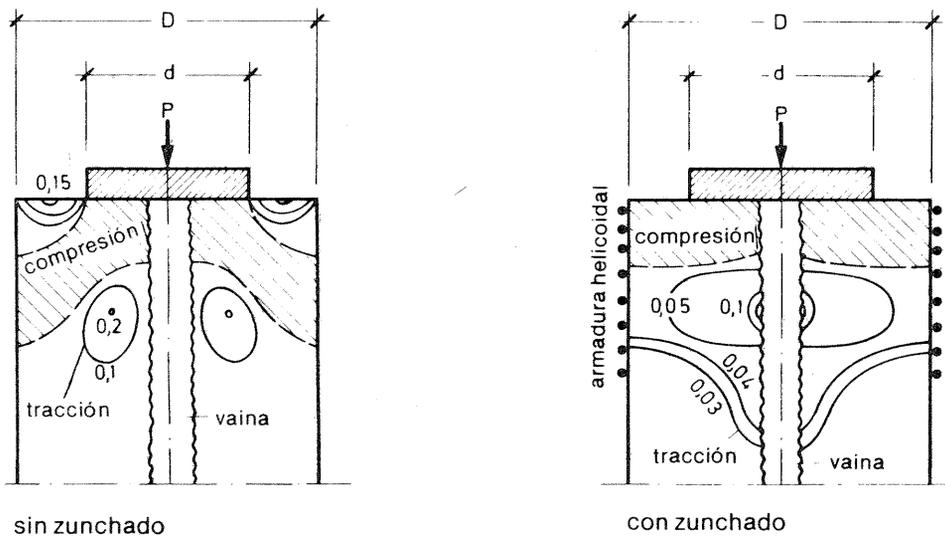


Fig. 3.47. Tensiones en las zonas de borde en un cilindro debilitado por una vaina (izquierda) y su absorción por una fuerte armadura helicoidal (pretensada), (derecha).

### 3.4.2. La carga concentrada excéntrica

Para la introducción tridimensional de cargas concentradas excéntricas, se parte, análogamente como en 3.4.1, utilizando los valores correspondientes a una distribución bidimensional.

### 3.5. Limitación de la presión de contacto en la superficie de carga

Si el área sobre la que actúa una carga es considerablemente menor que la superficie del cuerpo, en ese caso primero se produce la rotura del hormigón por presiones de contacto que son muy superiores a la resistencia cúbica del hormigón, por cuanto debajo de la superficie de carga se origina un estado doble transversal de compresión (es decir que estamos ante una compresión triaxial). Si el cuerpo está protegido contra fractura por tracción, por ejemplo porque sus dimensiones son muy grandes, porque existe compresión exterior en varias direcciones, por estar zunchado o por otro tipo de armaduras transversales, en ese caso, en el hormigón ocurre una rotura localizada cónica debajo de la carga. Este problema ya ha sido estudiado hace tiempo por J. Bauschinger [60] y C. Bach [61]. En ensayos realizados en cilindros con carga axil, armados y sin armar, H. P. Spieth [62] determinó que la presión de contacto límite es función de la relación entre el área de la sección del cuerpo y la superficie de carga, según una ley potencial. Para cuerpos sin armadura se dedujo la siguiente relación (ver Fig. 3.48).

$$p_U = \beta_p \sqrt{\frac{F}{F_1}} \cong 9 \beta_p \quad (3.7)$$

donde  $F$  = área de la sección del cuerpo  
 $F_1$  = superficie de carga

Para hormigón sin armar se recomienda un coeficiente de seguridad  $\nu = 3$ .

Para hormigón armado (zunchado) se obtienen mayores valores de  $p_U$ , según la cuantía y tipo de armadura, con un límite superior mayor que  $9 \beta_p$  [63]. Por ello, por ejemplo, es posible, en el caso de pilotes de acero, prescindir de placas de repartición, de modo que apoyen directamente sobre el hormigón Bn 350 de los cabezales ( $p_U \approx 2500 \text{ kp/cm}^2 \sim \beta_S$  del St 37), (ver ensayos inéditos de U. Smoltzcyk en Stuttgart).

$$p_{\text{adm.}} = \frac{\beta_R}{2,1} \sqrt{\frac{F}{F_1}} \cong 1,4 \beta_R \approx 1,0 \beta_{wN} \quad (3.8)$$

Este valor límite ha sido elegido con mucho cuidado.

Las presiones elevadas superiores a  $p = \beta_R$ , no obstante sólo pueden utilizarse cuando las tensiones transversales de compresión pueden desarrollarse en forma satisfactoria (no existe ninguna tracción transversal debida a otras causas), y cuando las tensiones de fractura por tracción que se originan, son absorbidas mediante armaduras.

En lo que respecta a la magnitud de la superficie  $F$ , debe suponerse que las tensiones de compresión se propagan en una pendiente no menor de 2/1 y concéntricamente entre la superficie de carga  $F_1 = b_1 \cdot d_1$  y la superficie de cálculo  $F = b \cdot d$ . De estas condiciones y del valor límite dado por la Ec. (3.8) surgen las reglas adicionales dadas en la DIN 1045 (ver Fig. 3.49):

- Los baricentros de la superficie de carga  $F_1$  y de la superficie  $F$  de repartición que se tiene en cuenta para el cálculo, deben estar ubicados sobre la recta de acción de la carga.
- La superficie de repartición se introducirá en el cálculo con un valor  $F = b \cdot d = 3 b_1 \cdot 3 d_1$  como máximo.
- La distancia  $h$  entre las superficies de carga y repartición debe ser mayor que  $b - b_1$  o  $d - d_1$  según el caso. De ello resulta, para cuerpos de altura limitada  $h$ , la longitud admisible de los lados de la superficie de repartición  $F$ :

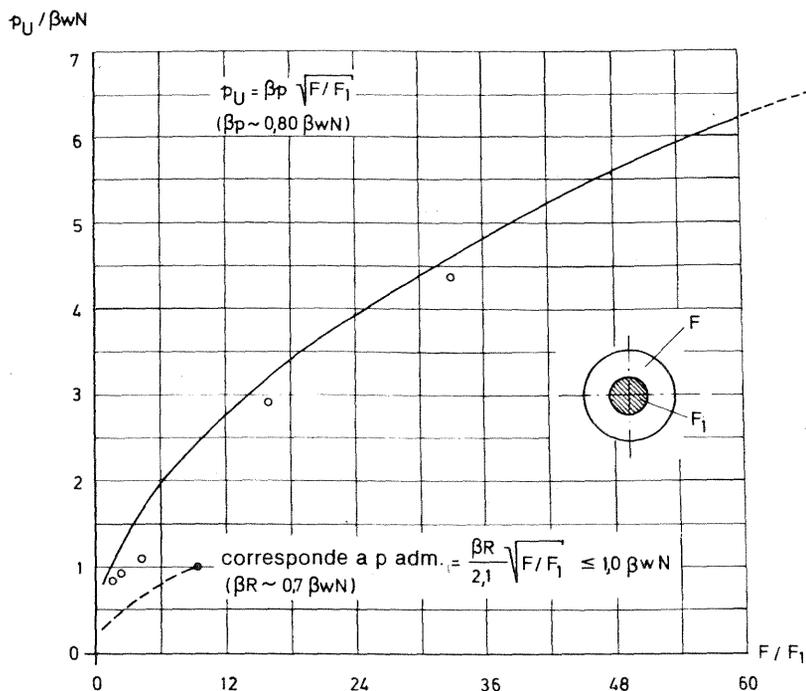


Fig. 3.48. Presión de rotura  $p_U$  según los ensayos de Spieth [62] en cilindros de hormigón con carga axil, sin armadura y su comparación con la Ec. (3.7), así como también con  $p_{adm.}$  según DIN 1045.

$$b_{adm.} \leq h_{exist.} + b_1 \leq 3 b_1 \text{ ó } b_1 + 2 a_b$$

$$y \quad d_{adm.} \leq h_{exist.} + d_1 \leq 3 d_1 \text{ ó } d_1 + 2 a_d \quad (3.9)$$

Si  $h_{exist.}$  es mayor que el doble de la mayor longitud de los lados  $b_1$  ó  $d_1$  de la superficie de carga, en ese caso la Ec. (3.8) conduce al valor límite

$$p_{adm.} \leq 1,4 \beta_R .$$

En lo que respecta a la influencia de una altura del cuerpo  $h$  existente sobre  $p_{adm.}$ , B. Kuyt [64] dio un coeficiente, que actúa en forma similar que la limitación de la superficie de distribución  $F$  según DIN 1045.

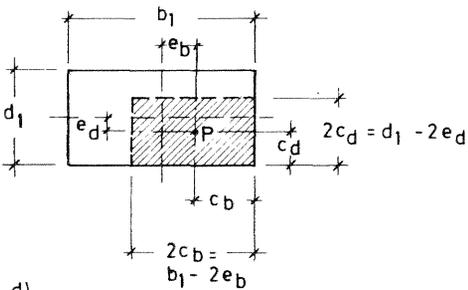
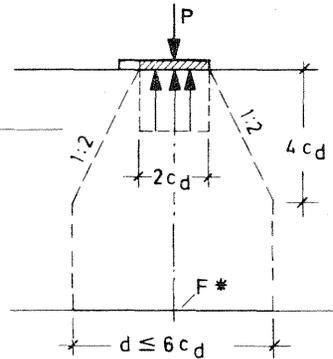
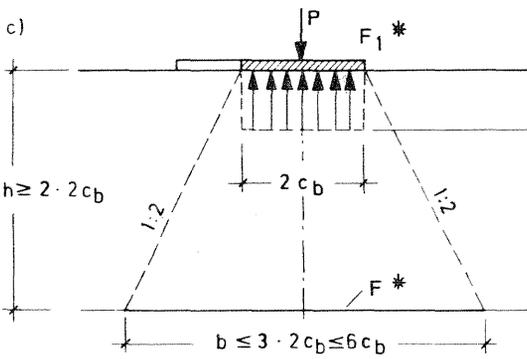
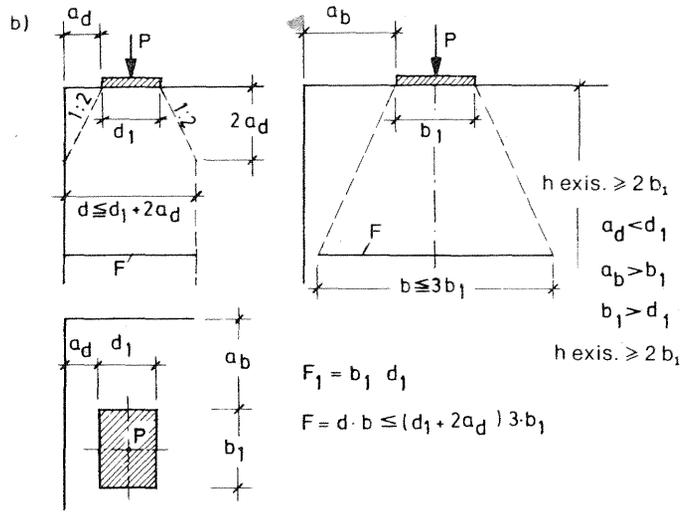
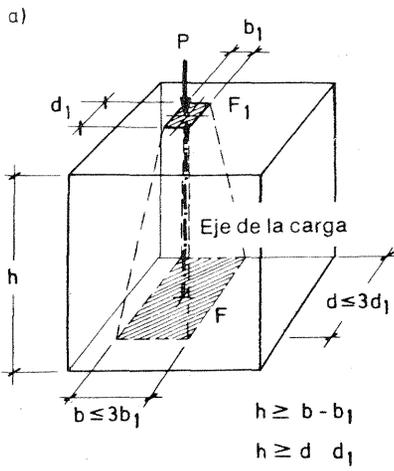
La condición a) influye sobre el área de la superficie de repartición, especialmente para cargas ubicadas tanto en las zonas de borde como de esquina de la superficie del cuerpo (ver Fig. 3.49 b).

Cuando las superficies de distribución de cargas contiguas se superponen, en tal caso la presión admisible  $p$  debe calcularse únicamente para la superficie de distribución  $F$  relativa a  $F_1$ , ubicada a nivel del plano de intersección de las distribuciones (ver Fig. 3.49 d).

### 3.6. Introducción de fuerzas paralelas a la superficie de un elemento de hormigón

#### 3.6.1. Introducción de fuerzas mediante pernos

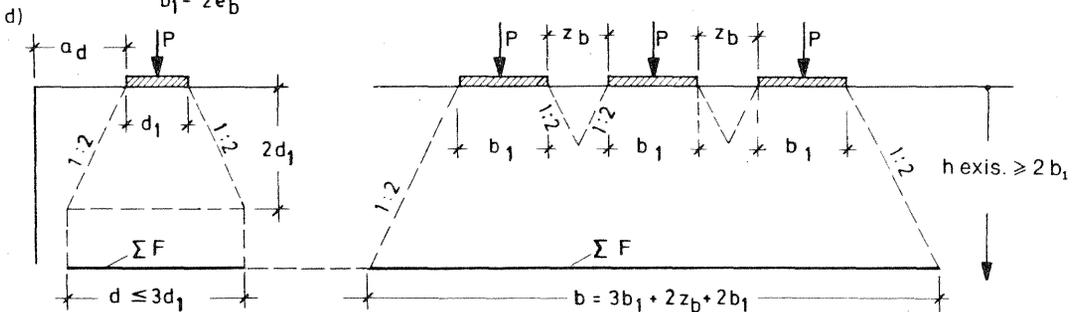
Un perno empotrado en el hormigón actúa como una barra sobre un apoyo elástico continuo (Fig. 3.50). En el borde anterior existe una elevada concentración de tensiones (pico de tensión), que depende de la rigidez a la flexión, de la resistencia del perno y del módulo de elasticidad  $E$  del hormigón (rigidez del apoyo). Para un cálculo analítico confiable, falta cono-



$$p^* = \frac{P}{4c_b \cdot c_d} = \frac{P}{F_1^*}$$

$$F^* \leq 36c_b \cdot c_d$$

$$p^* < p_{adm} = \frac{\beta_R}{2,1} \sqrt{\frac{F^*}{F_1^*}} \leq 1,4 \beta_R$$



$$\Sigma F = 3 \cdot b_1 d_1$$

$$a_d > d_1$$

$$\Sigma F = b \cdot d = 3d_1(5b_1 + 2z_b)$$

$$z_b < 2b_1$$

$$b_1 > d_1$$

$$\frac{P}{b_1 d_1} \leq p_{adm} = \frac{\beta_R}{2,1} \sqrt{\frac{\Sigma F}{\Sigma F_1}}$$

$$h \text{ axis. } > 2b_1$$

cer valores sobre el comportamiento del hormigón para el tipo de sollicitación correspondiente a este caso. Por ello es aceptable tomar como base de la capacidad portante, los resultados experimentales, por ej. los realizados por B. H. Rasmussen [65], quien distingue los siguientes casos:

CASO 1:

Cuando la rotura del hormigón debajo del lugar en que emerge el perno, se impide mediante una placa soldada o una cantonera (Fig. 3.51)

$$P_U = 2,5 \varnothing^2 \sqrt{\beta_p \cdot \beta_S} \quad (3.10)$$

CASO 2:

No se impide la rotura del hormigón:

$$P_U = 1,3 \left( \sqrt{1 - 1,69 \epsilon^2} - 1,3 \epsilon \right) \varnothing^2 \sqrt{\beta_p \cdot \beta_S} \quad (3.11)$$

Cuando la distancia  $e \rightarrow 0$ , la ecuación (3.11) se simplifica, teniéndose

$$P_U = 1,3 \varnothing^2 \sqrt{\beta_p \cdot \beta_S} \quad (3.11 a)$$

En estas fórmulas significan:

$\varnothing$  = diámetro del perno [cm].

$\beta_S$  = límite de escurrimiento del acero del perno [kp/cm<sup>2</sup>]

$\beta_p$  = resistencia prismática del hormigón [kp/cm<sup>2</sup>]

$\epsilon = 3 \frac{e}{\varnothing} \cdot \frac{\beta_p}{\beta_S}$       donde  $e$  = distancia del punto de aplicación de la fuerza  $P$  a la superficie del hormigón

$P_U$  = carga portante [kp]

El perno debe empotrarse de una longitud  $l \geq 6 \varnothing$  y el elemento de hormigón debe ser muy grande con respecto al diámetro del perno o si no, debe ser zunchado.

Los ensayos que condujeron a dichas ecuaciones, se realizaron para distancia  $e$  entre la carga y el hormigón entre 0 y 1,3 cm y diámetros del perno  $\varnothing \leq 2,4$  cm. Las ecuaciones (3.10) y (3.11), rigurosamente hablando, sólo son válidas para dichas relaciones.

B. H. Rasmussen propone para sus ecuaciones un coeficiente de seguridad  $v = 5$ , para asegurar que el corrimiento vertical del perno en donde actúa la carga, para carga de servicio se mantenga en  $v \leq 0,005 \varnothing$ .

De acuerdo con ello resulta  $P_{adm.} = \frac{1}{5} P_U$ .

Para  $\beta_p \sim 0,8 \beta_{wN}$  y acero de  $\beta_S = 2200$  kp/cm<sup>2</sup> y  $\beta_S = 4200$  kp/cm<sup>2</sup> resultan las cargas de servicio que figuran en la tabla 3.1.

En la bibliografía alemana han aparecido recientemente recomendaciones relativas a pernos cargados transversalmente, debidas a M. Wiedenroth en colaboración con Th. Baumann [66]. El diagrama de Fig. 3.52, basado en las normas norteamericanas para el cálculo

Fig. 3.49. Representación de las condiciones contenidas en DIN 1045 para aplicar la Ec. (3.8); a) caso normal; b) placa de carga en el borde del cuerpo; c) placa de carga, con carga excéntrica; d) superficies de repartición que se superponen.

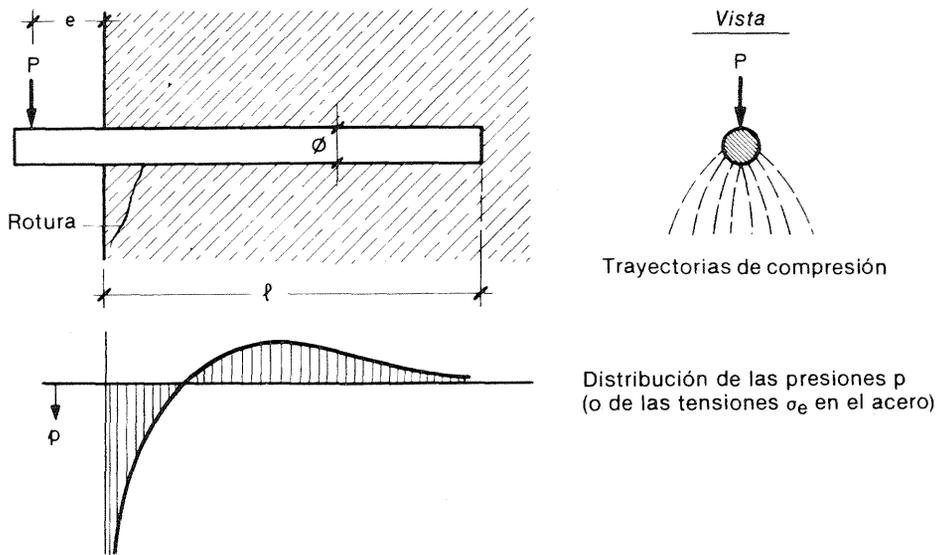


Fig. 3.50. Presiones debidas a un perno empotrado en el hormigón.

Aplicación de la carga	Perno $\phi$ [mm]	en Bn 250 de		en Bn 350 de	
		B St 22/34	B St 42/50	B St 22/34	B St 42/50
con placa ( $e = 0$ ) Ec. (3. 12)	16	0,85	1,15	1,00	1,35
	20	1,30	1,80	1,55	2,15
	25	2,05	2,85	2,45	3,35
sin placa ( $e = 0$ ) Ec. (3. 13a)	16	0,40	0,60	0,50	0,70
	20	0,65	0,95	0,80	1,10
	25	1,05	1,45	1,25	1,75
sin placa ( $e = 1,5$ cm) Ec. (3. 13)	16	0,25	0,45	0,20	0,50
	20	0,45	0,80	0,45	0,85
	25	0,80	1,30	0,80	1,45

Tabla 3.1. Cargas admisibles de servicio  $P$  en Mp para pernos empotrados en hormigón, según B. H. Rasmussen [65].

de pasadores en pavimentos de hormigón, conduce, para Bn 250 y B St 22/34 aproximadamente a las mismas cargas de servicio admisibles que las Ec. (3.11) y (3.11 a).

Los ensayos de K. Sattler [67] para pernos con cabeza para placas de unión con estructuras de acero, condujeron para  $e = 0$  a valores similares.

Quando se trata de cargas reducidas en construcciones civiles, especialmente para estructuras premoldeadas, se utilizan los denominados "pernos expansibles" (Fig. 3.53). Se colocan en agujeros perforados y están proyectados de forma tal que al traccionarlos, la rosca externa de fijación expande la parte interna del perno originándose así la necesaria presión de contacto para absorber los esfuerzos de tracción y las cargas transversales. Para este tipo de perno se exigen certificados especiales de empleo, porque hasta la fecha se están redactando las correspondientes especificaciones.

Conviene recalcar que las cargas portantes que figuran en los prospectos de propaganda, a menudo sólo pueden alcanzarse para situaciones muy favorables.

Por ello, en primer lugar, deben utilizarse elevados coeficientes de seguridad, con los cuales deben cubrirse una serie de factores cuya influencia aún es poco conocida, correspondientes a la ubicación (interior, en el borde o en la esquina de un cuerpo de hormigón, de un único o de varios pernos vecinos) y a la intensidad de la fuerza de expansión (dependiente del momento de torsión con que fue apretada la rosca).

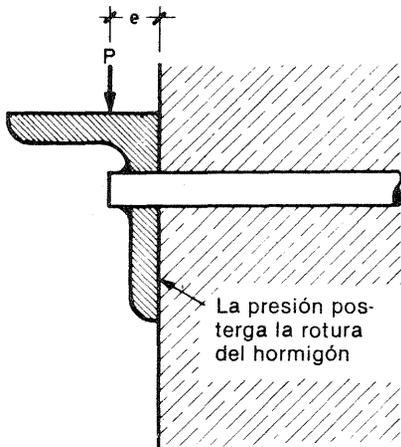


Fig. 3.51. Una cantonera o placa soldadas postergan la rotura del hormigón en el borde anterior del perno.

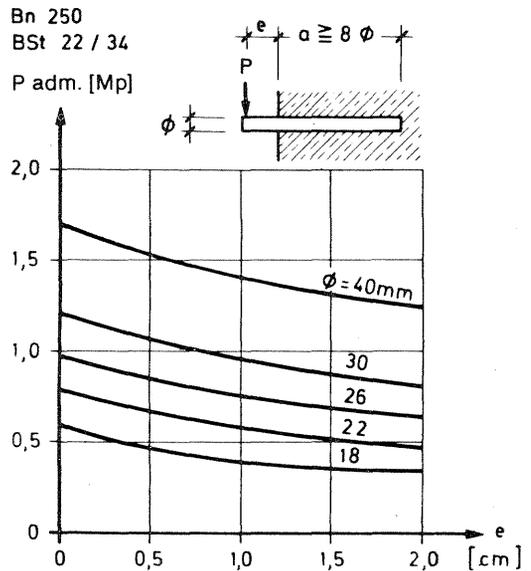


Fig. 3.52. Cargas de servicio admisibles para pernos empotrados sin placa antepuesta en hormigón sin armar.

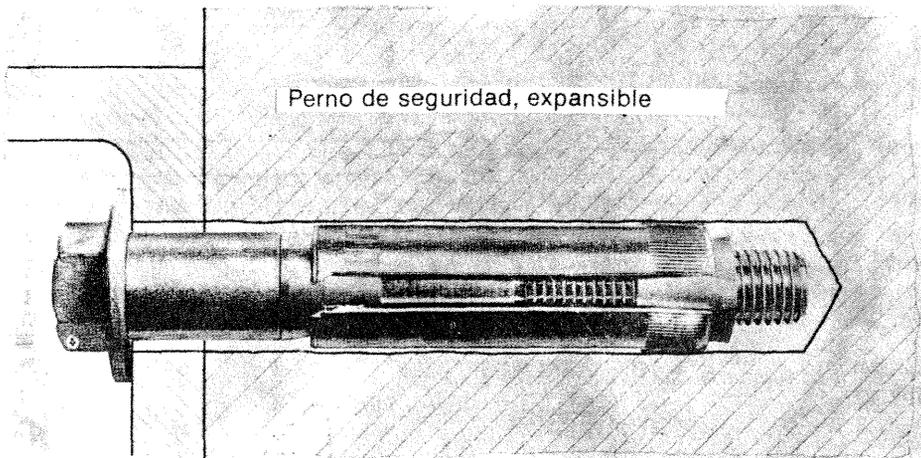


Fig. 3.53. Tipo usual de pernos expansibles [68].

La tabla 3.2 trae los valores recomendados de las cargas admisibles de un tipo de anclaje muy difundido, cuando predomina una sollicitación estática. En los ensayos de aprobación realizados, la aplicación de la carga se realizó mediante una placa intermedia cuadrada de lados iguales a  $4 \varnothing$  y un espesor de  $2 \varnothing$ .

Para algunos tipos nuevos de anclajes, en el agujero perforado perfectamente limpio se introduce en primer lugar un cartucho de vidrio que contiene por separado dos componentes de una resina sintética adhesiva y un poco de arena cuarcítica. Al introducir el anclaje provisto de una rosca continua, se destruye el cartucho y el mortero de resina sintética que se forma llena completamente el espacio entre la pared del agujero y el perno. Una vez endurecido dicho mortero (el tiempo necesario para ello depende considerablemente de la temperatura, p. ej. para  $20^{\circ} \text{C}$ , 30 min.; para  $0^{\circ} \text{C}$ , 6 horas) se alcanza una elevada resistencia a la tracción y corte. R. Sell, en [69], describe ensayos efectuados y criterios de cálculo.

### 3.6.2. Transmisión de esfuerzos mediante compresión previa (pretensado)

Los esfuerzos de gran intensidad paralelos a la superficie del hormigón sólo pueden ser transmitidos por medio de una placa de carga (de acero o de hormigón armado), comprimida contra la superficie de hormigón mediante pernos roscados pretensados. La película de cemento de la superficie del hormigón con la rugosidad natural debida al encofrado, reduce la re-

Diámetro del perno $\varnothing$ [mm]	P adm. [Mp]		Momento torsor necesario [Mp m]
	para Bn 250	Bn 350	
M 12	0,72	0,85	8
M 16	0,92	1,03	20
M 20	1,02	1,12	40

Tabla 3.2. Cargas de servicio P en Mp, admisibles para tracción y para corte con  $e = \varnothing$  aplicables a pernos expansibles corrientes, anclados en hormigón simple y armado según Fig. 3.53 [68].

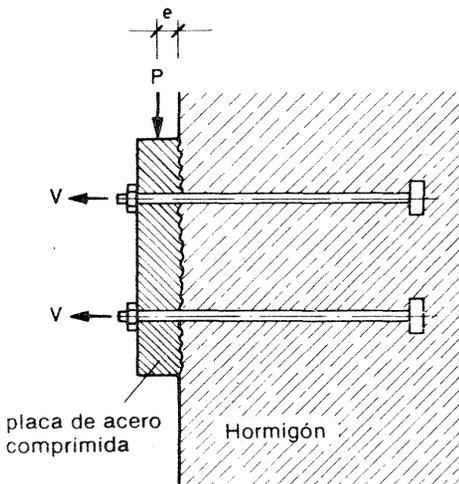


Fig. 3.54. Aumento de la capacidad portante de los pernos mediante una chapa comprimida y endentado de la superficie

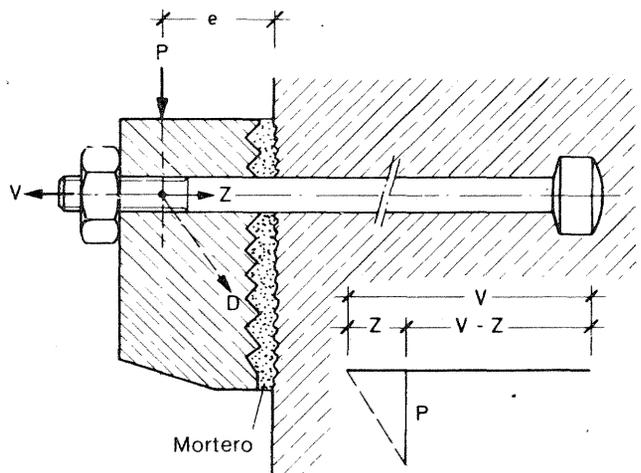


Fig. 3.55. En el caso de pernos ubicados excéntricamente y sometidos a presión previa es necesario tener en cuenta el esfuerzo de tracción por efecto de ménsula.

sistencia al deslizamiento, por lo cual es necesario prever un endentado de las superficies de la junta a comprimir, de modo de originar una adherencia al corte. Para una distancia  $e$  reducida entre la carga y la superficie del hormigón (Fig. 3.54), la fuerza que puede ser transmitida es

$$P \text{ adm.} \approx 0,4 \Sigma V$$

$$(\Sigma V) \text{ nec.} = 2,5 P \quad (3.12)$$

Para separaciones  $e$  mayores, el esfuerzo de pretensado debe actuar en el tercio superior de la "ménsula corta" y los pernos deben complementariamente dimensionarse para el esfuerzo  $Z$  de tracción de la ménsula (Fig. 3.55).

$$V \text{ nec.} = 2,5 P + Z \quad (3.12a)$$

Los pernos de tensión deben, naturalmente, estar suficientemente anclados. La longitud de anclaje, para pernos con placa de anclaje en su extremo, puede determinarse suponiendo que la rotura se produce según un cono de un ángulo al vértice de  $60^\circ$ , donde, en promedio, sólo puede tenerse en cuenta  $1/6$  de la resistencia a la tracción del hormigón, porque, en realidad la tensión en las cercanías de la placa de anclaje es considerablemente mayor y es ahí donde comienza la rotura. Normalmente, la zona de anclaje se arma en dirección normal al esfuerzo de tensado, quedando con ello asegurada.

#### APENDICE A LA SECCION 3.3.9

##### *Tensiones de fractura en el alma de vigas I*

J. Kammenhuber y J. Schneider publicaron en [78] nuevos resultados de ensayos sobre los esfuerzos de fractura por tracción en el alma de vigas I pretensadas. De las dos figuras características, 3.56 y 3.57, que reproducen las isobaras de las tensiones  $\sigma_y$ , se deduce:

Cuando la fuerza concentrada está aplicada en el eje de la viga, en el caso que las alas de la viga sean de dimensiones grandes, se originan en el alma valores mayores de las tensiones que en las chapas, a saber, ya a una distancia de  $0,4 d_0$  del borde con su máximo muy cercano a la identificación entre alma y alas. La zona en que se observan tensiones  $\sigma_y$  remarquables, se prolonga en la dirección  $x$  mucho más que en el caso de chapas de igual altura. De ahí se deduce que la armadura necesaria para absorber las tensiones de fractura debe calcularse para por lo menos  $0,40 P$  y distribuirse sobre una longitud  $x = 0,2$  a  $0,6 d_0$ , que debe anclarse perfectamente en las alas.

Si la carga concentrada actúa con la parte superior del perfil I sobre un ala, entonces los esfuerzos de borde de tracción deben considerarse como en el caso de carga excéntrica según Sec. 3.3.2; naturalmente su intensidad para las relaciones dadas de la sección, son aproximadamente de  $1/4$  de las correspondientes a la chapa de igual altura cargada excéntricamente. En este caso debe tenerse presente que en la unión del ala inferior, las tensiones  $\sigma_y$  exigen disponer una armadura transversal sobre una longitud considerable a efectos de transmitir las tensiones  $\sigma_x$  de tracción al ala inferior.

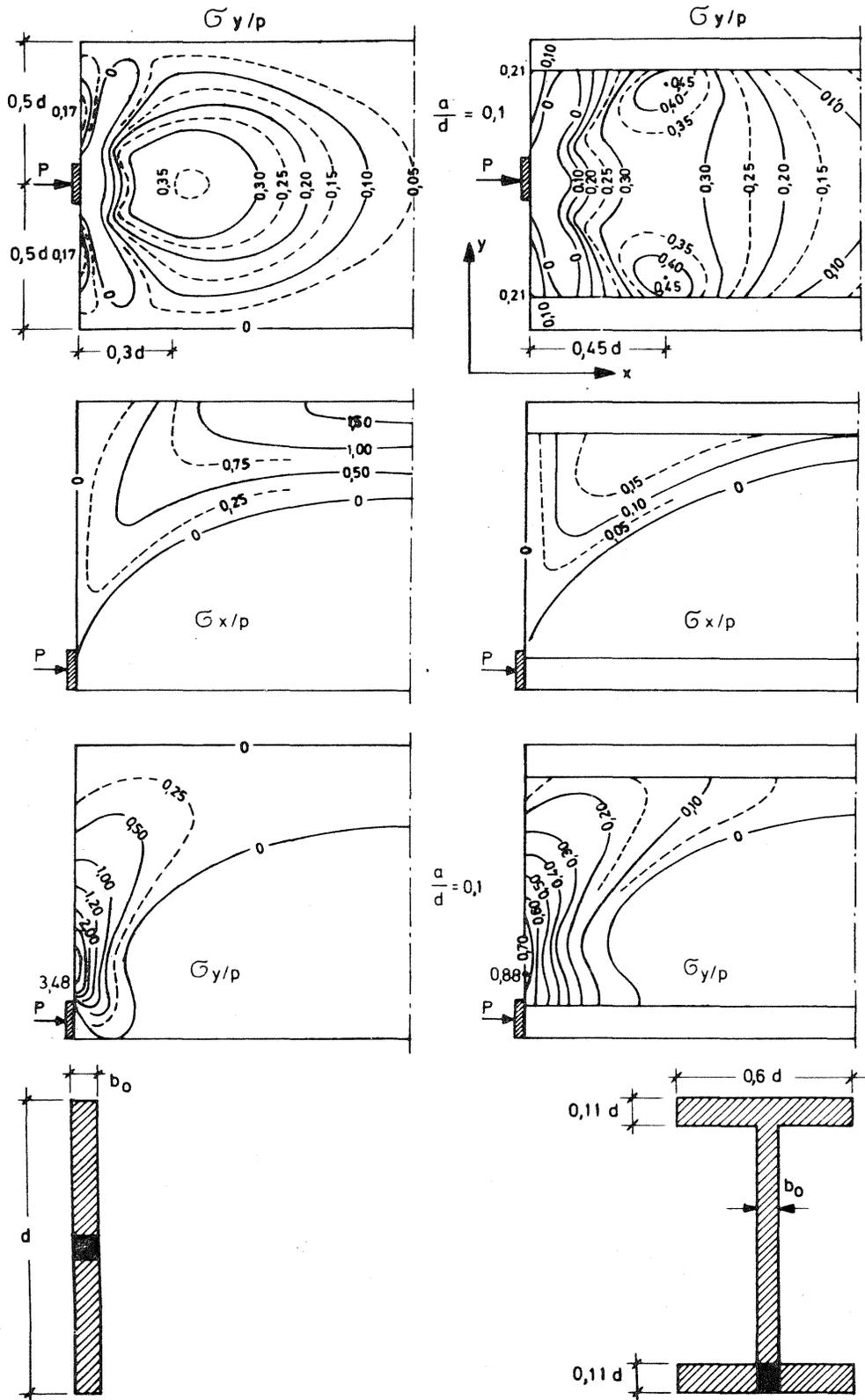


Fig. 3.56. Comparación de las isobaras de las  $\sigma_y$  y  $\sigma_x$  referidas a  $p = P/b_0 d$  en chapas y perfiles I con cargas aplicadas en  $d/2$  y en el borde inferior según [79].

## Articulaciones de hormigón

### 4.1. Descripción

Las articulaciones de hormigón son económicas y fáciles de construir, y permiten grandes rotaciones, cuando se dimensionan y construyen correctamente. No requieren protección contra la corrosión y resisten largo tiempo sin trabajos de conservación.

Las reglas siguientes se apoyan en los ensayos de Stuttgart [45], con ampliaciones en lo que respecta a la rotación admisible, como consecuencia de los ensayos realizados por el EMPA [71] en Zurich.

La forma más apropiada para una articulación lineal de hormigón (que puede rotar alrededor de una línea en sólo una dirección), aparece en Fig. 4.1, donde se indica la notación más importante y la armadura. La estricción de la articulación debe ser de una magnitud tal que el cuello de esta última resulte angosto ( $a$  reducido) y oponga poca resistencia al movimiento de rotación. En realidad, no es necesario disponer una armadura que atraviese el cuello, pero sin embargo en general se coloca una constituida por espigas verticales, la que debe ubicarse en el eje de la articulación. Esta armadura aumenta la resistencia a la rotación en el caso de giros pronunciados.

La resistencia a la rotación se expresa mediante el momento de reacción  $M$ , que origina en el cuello de la articulación una excentricidad  $e = M/N$ . La carga (= esfuerzo axial  $N$ ) se concentra en la articulación, y origina en los cuerpos de la articulación esfuerzos de fractura por tracción  $Z_1$ , en dirección  $y$ , que deben absorberse mediante las correspondientes armaduras (ver Cap. 3).

El cuello de la articulación debe también enangostarse en las caras frontales, para que en dicho lugar el hormigón no estalle por efecto de las elevadas presiones. Con ello se originan esfuerzos de borde de tracción  $Z_3$  y un pequeño esfuerzo de fractura adicional  $Z_2$  en la dirección  $z$ .

La presión admisible o tensión  $\sigma_x$  es tanto mayor cuanto más grande sea la relación  $d/a$  (carga superficial parcial). Por deformaciones del hormigón son posibles pequeños ángulos de giro en el cuerpo de la articulación, pero para grandes rotaciones el hormigón se fisura en el cuello de la misma (Fig. 4.2) y la presión aumenta en consecuencia considerablemente. Sin embargo, el hormigón admite en el borde presiones de hasta  $\sigma_x \approx 8 \beta_p$ , antes de romper. En el caso de carga de larga duración, la fisura se cierra parcialmente debido a las deformaciones plásticas del hormigón, con lo que se reducen la excentricidad  $e$  y el momento de reacción  $M$ . Por esta razón, se distingue, tanto en lo que respecta a la rotación admisible  $\alpha$  como al momento de reacción  $M$ , entre rotación permanente debida a cargas de gran duración, y rotación variable para el caso en que lo sea la carga.

Las articulaciones de hormigón pueden a menudo experimentar rotaciones en sentidos opuestos, es decir  $+\alpha$  y  $-\alpha$ , sin que disminuya su seguridad. En estos casos, el cuello de la articulación se raja totalmente, pero las superficies de la articulación, que se cierran alternadamente, mantienen la totalidad de su capacidad portante. En los ensayos realizados en EMPA [71] en articulaciones de hormigón para un gran puente ferroviario (carga de servicio hasta 450 Mp sobre una articulación cuya estricción tenía una sección de  $15 \times 70 \text{ cm}^2$ ) soportaron hasta

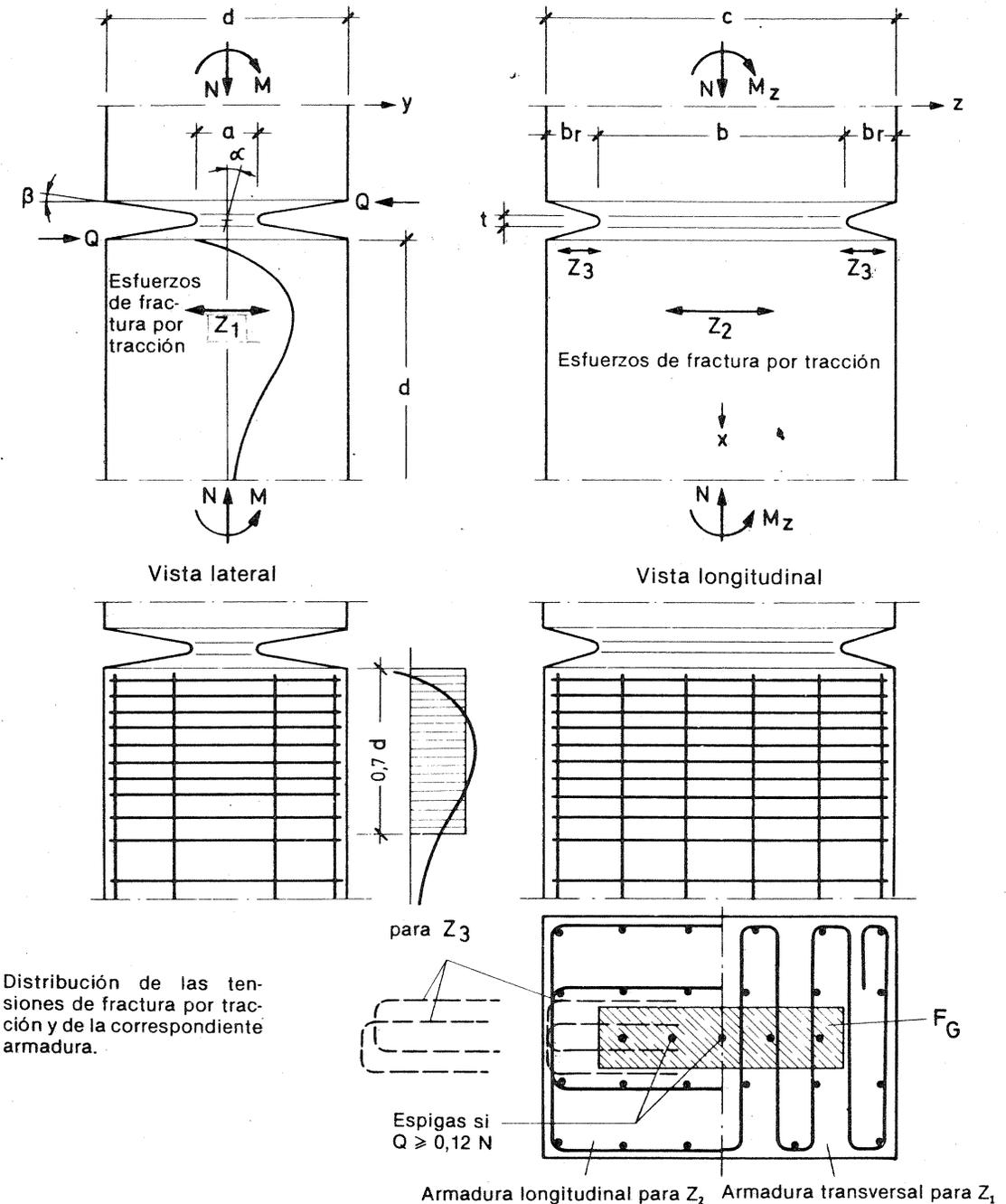


Fig. 4.1. Notación correspondiente a una articulación de hormigón y ejemplos de disposición de la armadura.

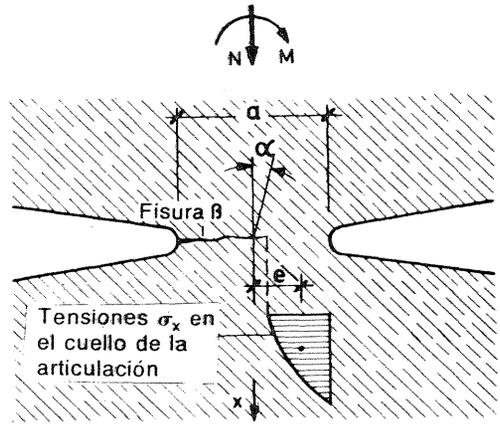


Fig. 4.2. Estado de tensión en el cuello de la articulación, luego de una rotación  $\alpha$  con fisuración.

un millón de repeticiones de rotaciones de  $\pm 12 \text{ ‰}$ . En total se efectuaron 37 millones de rotaciones de distintos valores. Además, para un ensayo estático, la articulación no mostró síntomas de rotura para 900 Mp (2 veces la carga de servicio) y una rotación del 6 ‰, llegándose a la rotura para una rotación máxima del 500 ‰ con  $N = 250 \text{ Mp}$ . Estos ensayos demuestran que las articulaciones de hormigón son capaces de soportar sollicitaciones dinámicas de gran intensidad para grandes rotaciones.

## 4.2. Criterios de dimensionamiento según Mönnig-Netzel

### 4.2.1. Para apoyos lineales con rotaciones en torno a un eje

El área de la superficie del cuello de la articulación  $F_G = a \cdot b$  (sin deducción de las espigas) debe quedar entre los siguientes límites [70]:

$$F_G \text{ mín.} = \frac{N \text{ máx.}}{0,85 \beta_{wN} \left[ 1 + \lambda \left( 1 - 1,47 \frac{\alpha \text{ efec.}}{\sqrt{\beta_{wN}}} \eta \right) \right]} \quad (4.1)$$

$$F_G \text{ máx.} = \frac{N_D}{1,25 \alpha \text{ efec.} \sqrt{\beta_{wN}}} \quad \left[ \text{kp}, \frac{\text{kp}}{\text{cm}^2}, \text{‰}, \text{cm}^2 \right]$$

donde:

$N \text{ máx.}$  = máximo esfuerzo axial para carga de servicio [kp]

$N_D$  = proporción de la carga que actúa en forma permanente, pero a lo sumo 1,5  $N \text{ mín.}$  [kp]

$$\eta = \frac{N \text{ máx.}}{N_D} \geq 1$$

$\beta_{wN}$  = resistencia cúbica garantida del hormigón [kp/cm<sup>2</sup>]

$\alpha \text{ efec.}$  =  $\frac{1}{2} \alpha_D + \alpha_n$  = rotación de la articulación (medida del arco en ‰)

$\alpha_D$  = rotación permanente, que ocurre una sola vez, por ejemplo, debida a pretensado, expansión, contracción, etc.

$\alpha_n$  = rotación que ocurre frecuentemente, debida por ejemplo, a variaciones de temperatura, cargas móviles, etc.

$$\lambda = \left( 1,2 - 4 \frac{a}{d} \right) \leq 0,8$$

Además deben respetarse las siguientes condiciones geométricas (ver Figs. 4.1 y 4.3):

$$\begin{aligned} a &\cong 0,3 d & b_r &\cong 0,7 a \cong 5 \text{ cm} \\ t &\cong 0,2 a \cong 2 \text{ cm} & \text{tg } \beta &\cong 0,1 . \end{aligned}$$

El cuello de la articulación, dentro de la altura  $t$  y en todo su contorno, debe redondearse; si ello no ocurre, posteriormente el hormigón puede resquebrajarse fuera de la zona de redondeo.

La rotación admisible, para un esfuerzo normal  $N_i$  cualquiera entre  $N_D$  y  $N$  máx., es

$$\alpha_i \text{ adm.} = \pm \frac{0,8 N_i}{F_G \sqrt{\beta_w}} \cong 15 \% \text{ para } \beta_{wN} \cong 250 \text{ kp/cm}^2 \quad (4.2)$$

En las dos ecuaciones (4.1), en general para  $\alpha$  efec. se debe, en cada caso, introducir el mismo valor de  $\alpha$  efec. =  $\frac{1}{2} \alpha_D + \alpha_n$ , porque la proporción  $\Delta \alpha_n$  de la rotación correspondiente a  $N$  máx. o, respectivamente  $N_D$ , difieren muy poco en la mayoría de los casos, y el porcentaje mayor corresponde a esfuerzos de pretensado, contracción, dilatación y variaciones de temperatura. Solamente en casos especiales es necesario verificar que se cumpla  $\alpha$  efec.  $\leq \alpha_i$  adm. de acuerdo con Ec. (4.2) para distintos escalones de carga. Si de la Ec. (4.1) no es posible obtener una sección  $F_G \geq F_G$  mín. o respectivamente,  $F_G \leq F_G$  máx., entonces conviene eliminar una parte de la rotación  $\alpha_D$ , por ejemplo, desplazando la base de la articulación de un apoyo pendular (móvil) luego de pretensar la superestructura o mediante otras medidas a adoptar durante el desarrollo de la construcción.

Para absorber los esfuerzos transversales de tracción  $Z_1$  a  $Z_3$ , las armaduras que muestra la Fig. 4.1, para cargas de servicio con  $\sigma_e$  adm. = 1800 kp/cm<sup>2</sup> como máximo, deben dimensionarse para

$$\begin{aligned} Z_1 &= 0,3 N \text{ máx.} \\ Z_2 &= 0,3 \left(1 - \frac{b}{c}\right) N \text{ máx.} \\ Z_3 &= 0,03 \frac{a^2}{F_G} N \text{ máx.} \end{aligned} \quad (4.3)$$

La resistencia a la rotación, que aparece como un momento flexor en el cuerpo de la articulación y origina una excentricidad  $e$ , puede calcularse como un momento relativo

$$m = \frac{e}{a} = \frac{M}{a N}$$

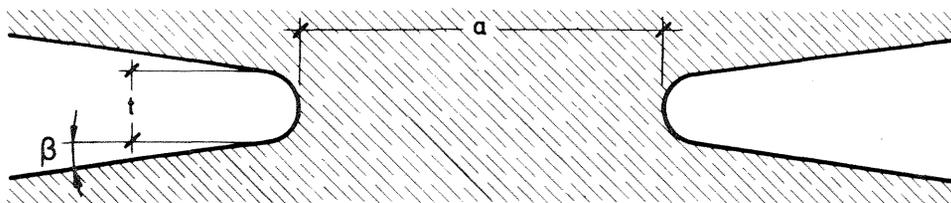


Fig. 4.3. Redondeado del cuello de la articulación

mediante la expresión

$$m = \frac{1}{2} - \frac{1}{9} \sqrt{\frac{1}{\varphi \alpha_{\text{efec.}}}} \quad (4.4)$$

donde  $\varphi = \frac{\sqrt{\beta_w} F_G}{N}$ , (las mismas dimensiones anteriores).

Este valor es válido con o sin espigas débiles. Las espigas de gran sección pueden aumentar la resistencia a la rotación para grandes ángulos de giro con  $m > 1/3$ , de un 20 a un 40 %. Para una rotación permanente  $\alpha_D$ , el momento de recuperación disminuye nuevamente por fluencia diferida, por lo cual, en la Ec. (4.1) puede reducirse el valor  $\alpha_{\text{efec.}}$ , de  $1/2 \alpha_D$ , cuando  $m$ , debido a  $\alpha_{\text{máx.}}$  se mantiene mayor que para  $\alpha_D$  y  $N_D$  solamente.

Las articulaciones de hormigón pueden también absorber considerables esfuerzos de corte  $Q$ ; en este caso, la resultante es inclinada.  $Q \leq 1/8 N$  es admisible sin discusión ( $Q$  y  $N$  deben corresponder al mismo estado de carga!). Para  $Q < 1/4 N$  deben disponerse algunas espigas gruesas en el cuello de la armadura (que pueden dimensionarse en forma empírica mediante la expresión  $F_e \cong \frac{Q}{800} \left[ \frac{\text{kp}}{\text{kp/cm}^2} \right]$ ).

Si  $Q > 1/4 N$  se aconseja recurrir a los ensayos de [45].

Las articulaciones lineales pueden también absorber momentos transversales  $M_z$  (momentos perpendiculares a la dirección de rotación de la articulación) (Fig. 4.4). Hasta una relación  $M_z/N = 1/6 b$ , la superficie de la articulación trabaja en su totalidad a compresión en la dirección  $z$ . Si, empero, actúan simultáneamente rotaciones de dirección  $y$ , se origina una concentración unilateral de tensiones  $\sigma_x$  máx., que puede admitirse sin una verificación especial.

Cuando los momentos transversales son grandes, puede reforzarse la articulación colocando en los extremos muy solicitados de la articulación y en el eje de la misma, barras gruesas de una resistencia del orden de St 42/50 (Fig. 4.5). Para transferir los esfuerzos a las barras de refuerzo, debe asegurarse una buena adherencia, por ejemplo roscando con paso grueso las barras y colocando tuercas en sus extremos. La zona de adherencia debe comenzar recién a una distancia igual a la longitud  $a$  del cuello de la articulación y asegurarse contra la fractura mediante un zunchado. Las barras de refuerzo pueden utilizarse también para absorber esfuerzos de tracción en la articulación originados por  $M_z$ . Cuando simultáneamente se originan grandes rotaciones  $\alpha$  en la dirección  $y$ , las barras de refuerzo deben mantenerse libres de flexión hasta el comienzo de la zona de adherencia mediante un pequeño tubo plástico adecuado (Fig. 4.6), de modo que puedan acompañar la rotación, con tensiones de flexión inferiores a  $0.8 \beta_{0.2}$ .

Es posible transferir a las barras de refuerzo un esfuerzo de compresión que, teniendo en cuenta las elevadas  $\sigma_x$  y las correspondientes grandes  $\epsilon_x$ , puede calcularse con la fórmula  $\sigma_x \text{ máx.} = N/F_G - M_z/W_G$  con una sección de acero correspondiente a  $n = 10$ . En la misma,  $W_G$

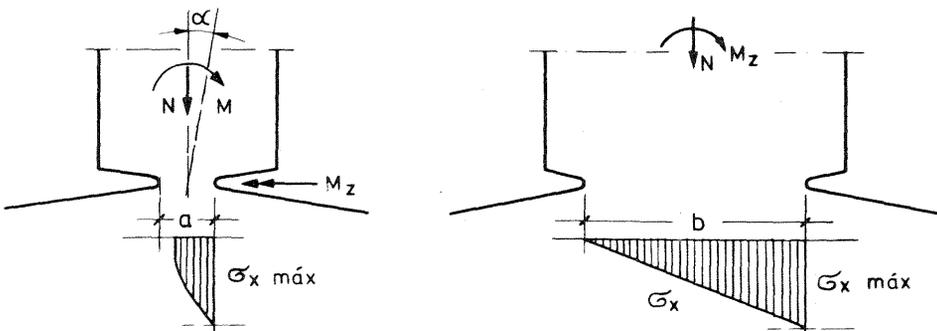


Fig. 4.4. Tensiones en el cuello de una articulación, cuando actúa simultáneamente un momento transversal  $M_z$ .

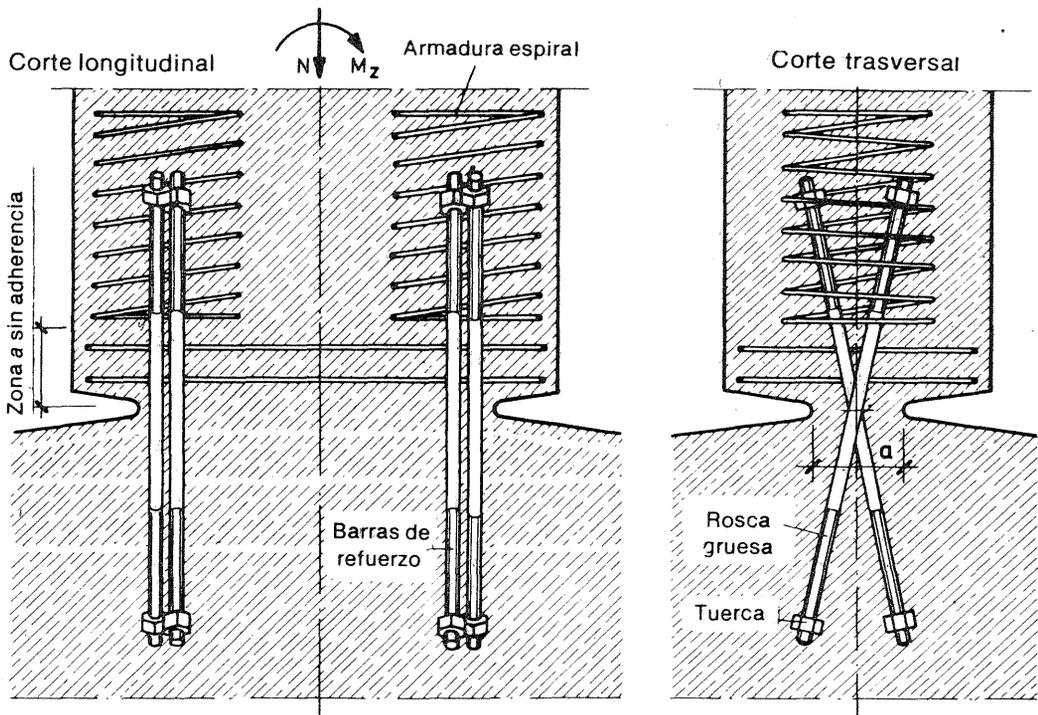


Fig. 4.5. Armadura de una articulación para absorber grandes momentos transversales  $M_z$ .

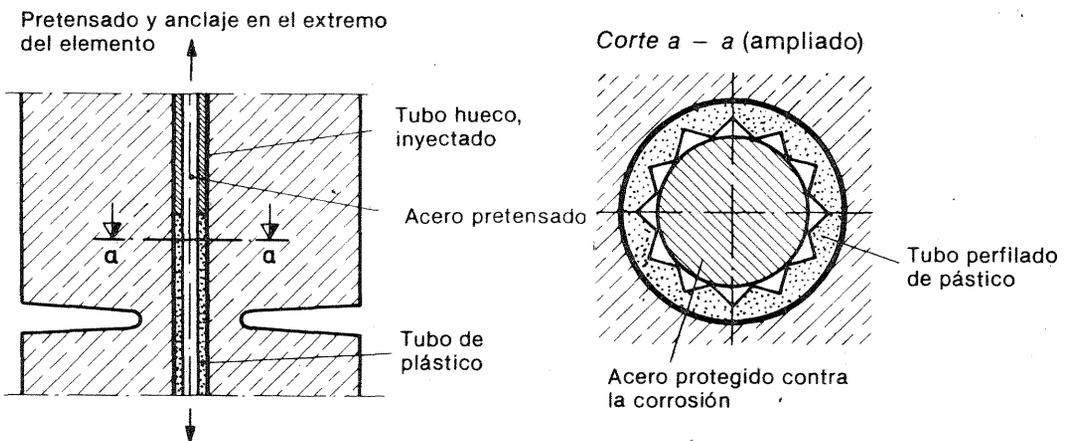


Fig. 4.6. Absorción de los esfuerzos de tracción en armaduras de hormigón mediante barras pretensadas, de longitud libre de tensiones de flexión en la zona del cuello de la articulación.

es el módulo resistente de la sección del cuello de la articulación con respecto al eje transversal, es decir  $W_G = ab^2/6$ .

En el caso de sollicitación por tracción, la descarga de la articulación para la carga de servicio es reducida, debido a que las deformaciones por tracción resultan limitadas por el desarrollo de las deformaciones en la zona comprimida. Las barras de tracción recién se tienen en consideración al proceder a la verificación de la seguridad a la rotura. Los esfuerzos de tracción en las articulaciones, que se presentan en los apoyos pendulares de anclaje, se absorben

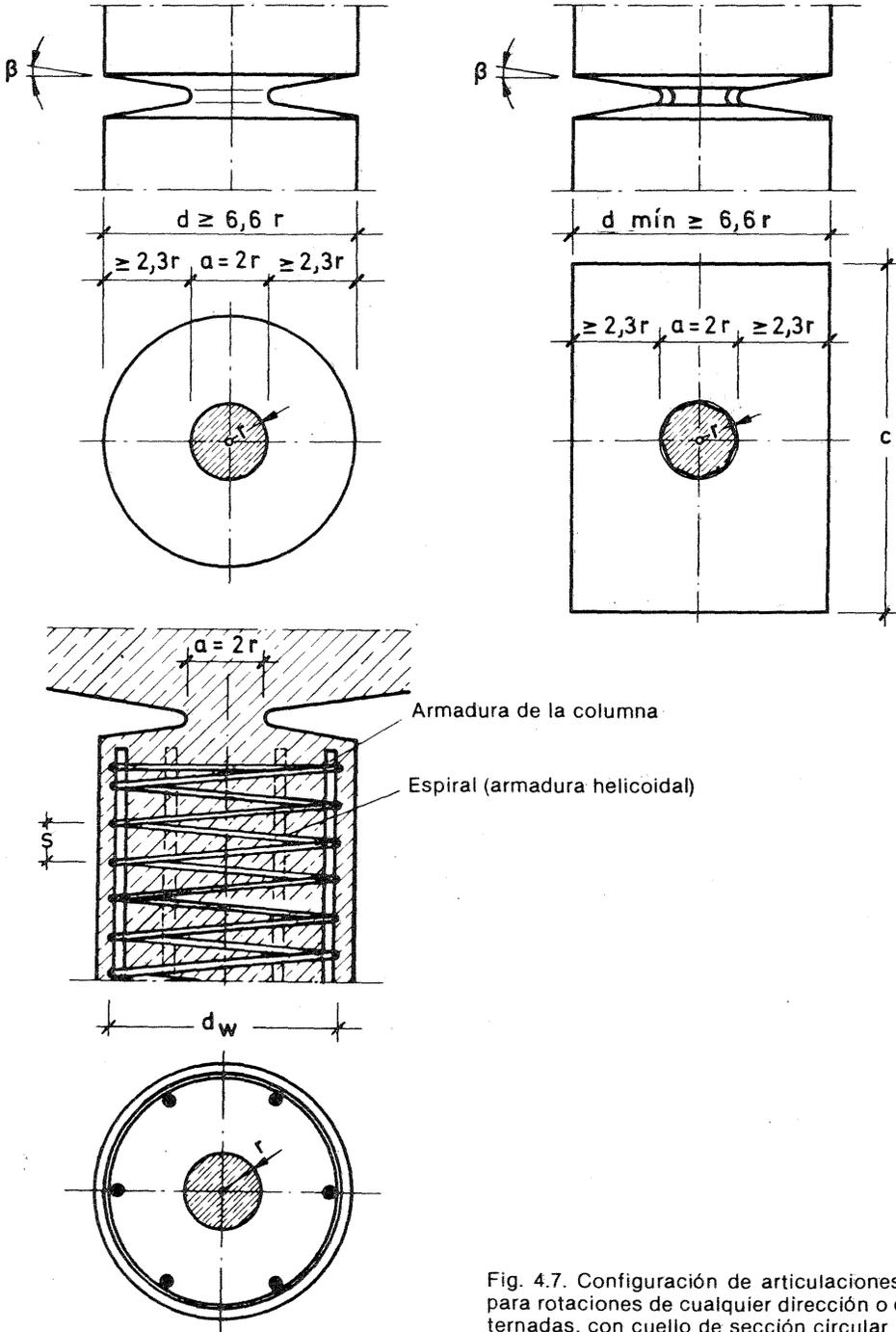


Fig. 4.7. Configuración de articulaciones de hormigón para rotaciones de cualquier dirección o direcciones alternadas, con cuello de sección circular u octogonal.

mejor mediante elementos pretensados, que atraviesan el cuello de la articulación por su eje (Fig. 4.6). El esfuerzo de pretensado debe, en este caso, calcularse de forma tal que, en el cuello de la articulación, para 1,2 veces el esfuerzo de tracción  $N$  no se presenten tensiones de tracción. También en este caso se facilitan las rotaciones con "tramos libres de flexión", para lo cual, naturalmente, los elementos tensores de manojos de alambres son más adecuados que las barras gruesas.

#### 4.2.2. Apoyo puntual para rotaciones de cualquier dirección

La sección del cuello de una articulación sobre la que pueden actuar rotaciones oblicuas o de dirección variable debe ser circular u octogonal (Fig. 4.7) y su diámetro ( $a = 2r$ ) inferior que  $0,3 d$  mín. [70]. Los esfuerzos de fractura se absorben mejor con una armadura en espiral, cuya altura debe ser de por lo menos  $0,7 d$ . La sección  $f_{e,w}$  [cm<sup>2</sup>] de la barra en espiral resulta ser

$$f_{e,w} \approx \frac{1}{8} \frac{N}{d_w \sigma_{e \text{ adm.}}} s \quad (4.5)$$

con  $d_w$  = diámetro de la espiral [cm], con un mínimo de  $2,5 a = 5 r$   
 $s$  = paso [cm].

La sección del cuello de la espiral es suficientemente grande cuando satisface las ecuaciones (4.1) para una sección rectangular equivalente (Fig. 4.8).

$$F_G = 2,4 r^2 \quad \text{con } a = 2r \quad \text{y} \quad b = 1,2r.$$

En este caso, para  $\lambda = (1,2 - 4 a/d)$  debe considerarse siempre el valor menor de  $d$ , del cuerpo de la articulación, independientemente de la dirección de la rotación.

El ángulo admisible  $\alpha$  de rotación puede también calcularse mediante la ecuación (4.2) que corresponde a la superficie rectangular equivalente.

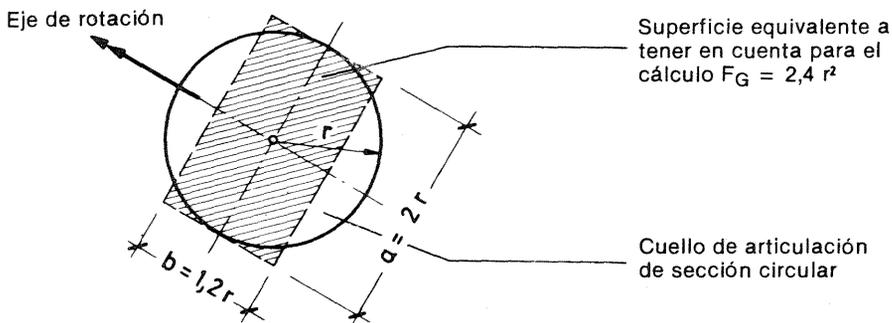


Fig. 4.8. Transformación de la sección circular del cuello de una articulación en un rectángulo equivalente para la aplicación de las ecuaciones (4.1) y (4.2).

# 5

## Punzonado de placas

### 5.1. Observación preliminar

El peligro del punzonado se presenta en el caso de placas cargadas o apoyadas en forma puntual. El comportamiento bajo carga y el tipo de rotura han sido descritos en [1 a, Sec. 5.5.3] refiriéndonos en especial a la configuración de rotura de Fig. 5.26. El dimensionado de losas de fundación contra el punzonado por una carga de columna, se analizó en [1 b, Sec. 16.3.1.3.1] juntamente con las normas para la disposición de la armadura. Para el dimensionado a la flexión se dan indicaciones en [1 b, Sec. 8.3.5]. Los nuevos procedimientos auxiliares debidos a H. Glahn y H. Trost [77] figuran en el Cuaderno, 240 de la DAfStb.

### 5.2. Estado actual de los conocimientos

No existe aún ninguna teoría totalmente satisfactoria y aceptable para el cálculo de la carga de punzonado. Hasta ahora el mejor procedimiento de cálculo fue desarrollado en 1960 por los suecos S. Kinnunen y H. Nylander (K.-N.) de Estocolmo [72, 73], sobre la base de numerosos ensayos y fue adoptado por el CEB. En una disertación en Stuttgart, H. Reimann trató en 1963 [74] de mejorar el procedimiento, pero un trabajo posterior de W. Schaeidt, M. Ladner y A. Rösli, del E.T.H. de Zurich de 1970 [75], dio como resultado que los valores calculados por Reimann eran demasiado elevados. Dicho estudio de Zurich incluye una exposición muy comprensible del procedimiento K.-N., cuya aplicación se facilita mediante diagramas para valores auxiliares. Para verificaciones más exactas, aconsejables para esbelteces  $l/h < 30$ , se recomienda dicha publicación.

Casi todos los trabajos se refieren a las columnas interiores de una losa-hongo solicitada por una carga uniforme, es decir sin excentricidad de la misma. En estructuras aperticadas solicitadas por fuerzas horizontales, debe procederse con cautela. Las columnas de borde y de esquina, para las cuales el peligro de punzonado puede llegar a ser crítico, hasta ahora sólo han sido objeto de unos pocos ensayos, sin que se haya llegado a una teoría suficientemente elaborada para los criterios de dimensionado (ver al respecto, observaciones en [53]).

### 5.3. Modelos del proceso de punzonado sin armadura de corte para columnas interiores con carga centrada

#### 5.3.1. Generalidades

Las trayectorias de los momentos principales para carga uniforme en todos los paños (Fig. 5.1) muestran que, en las zonas vecinas a las columnas interiores de una losa-hongo, am-

Los momentos principales son negativos y su desarrollo es radial y tangencial ( $m_r$  y  $m_t$ ). El punto de momento radial nulo  $m_r$  queda ubicado sobre una circunferencia con centro en el baricentro de la columna y de un radio de aproximadamente  $r_r \approx 0,22 \ell$ . Por ello, es posible considerar un corte de la placa, a lo largo de dicha circunferencia, en cuyo borde sólo actúan esfuerzos de corte  $q_r = P_r / 2 \pi r_r$  y momentos tangenciales reducidos. Por razones de simplicidad se supone que la totalidad de la carga de la placa  $P = P_r$  actúa en el borde de la sección circular (Fig. 5.2). Casi todos los ensayos fueron realizados en dichas secciones circulares de las placas, cargadas en sus bordes.

La distribución de los momentos  $m_r$  y  $m_t$  depende, en la cercanía de los apoyos, de la presión de las columnas. De ensayos efectuados en losas de fundación (ver [1 b, Sec. 16.3.1.3.1]), se sabe que la presión de la columna se concentra en el borde de la misma, lo cual tiene como consecuencia una reducción de los momentos radiales y un incremento de los tangenciales (Fig. 5.3). Los esfuerzos de corte crecen hiperbólicamente hacia la columna (Fig. 5.4), de modo que coinciden valores de  $Q$  muy elevados con los momentos negativos principales según dos direcciones. En consecuencia, estamos ante una sollicitación muy desfavorable.

Los ensayos muestran que (independientemente del tipo de armadura) las deformaciones específicas tangenciales  $\epsilon_t$  en principio son mayores que las radiales  $\epsilon_r$ . Por ello primero se originan fisuras radiales (Fig. 5.5) y recién para niveles de carga elevados, aparecen algunas pocas fisuras circunferenciales, a partir de las más externas de las cuales se desarrollan las superficies inclinadas del cono de punzonado, inclinadas entre  $30$  y  $35^\circ$ . Al mismo tiempo, cerca de la parte inferior queda una zona cónica sujeta a compresión por flexión, en torno a la columna, solicitada triaxialmente por  $\sigma_r$  (radial),  $\sigma_t$  (tangencial) y  $\tau$  (vertical). La componente de corte conduce a una inclinación de la tensión radial. Las deformaciones por compresión en la parte inferior, tanto radiales como tangenciales son aproximadamente iguales. En cuanto aparecen las fisuras anulares, en la zona correspondiente a las mismas la deformación radial de la armadura (en dos direcciones y ortogonal), es mayor que la tangencial (Fig. 5.6).

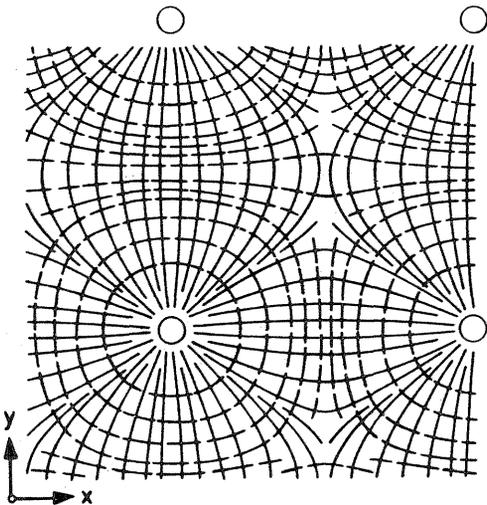


Fig. 5.1. Trayectorias de los momentos principales de una losa-hongo con carga uniforme.

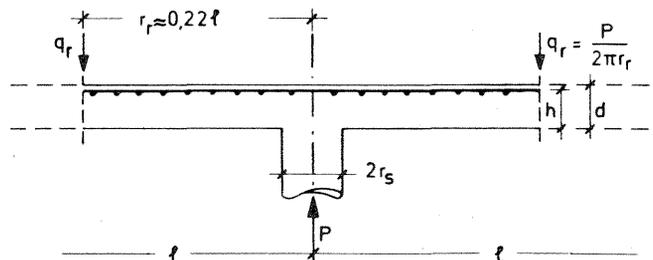


Fig. 5.2. Notación de la parte de la placa considerada en la zona de columnas ( $2 r_r \approx 0,44 \ell$ ).

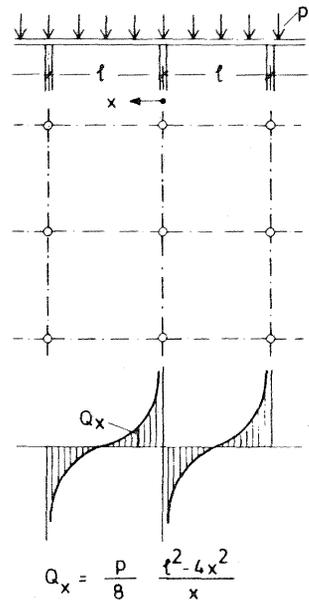
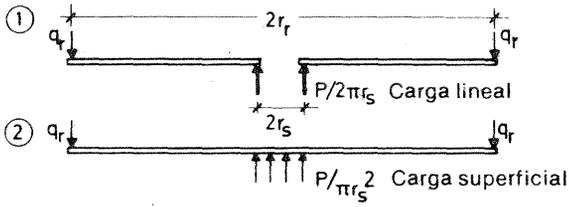


Fig. 5.4. Distribución del esfuerzo de corte en el eje de una losa-hongo.

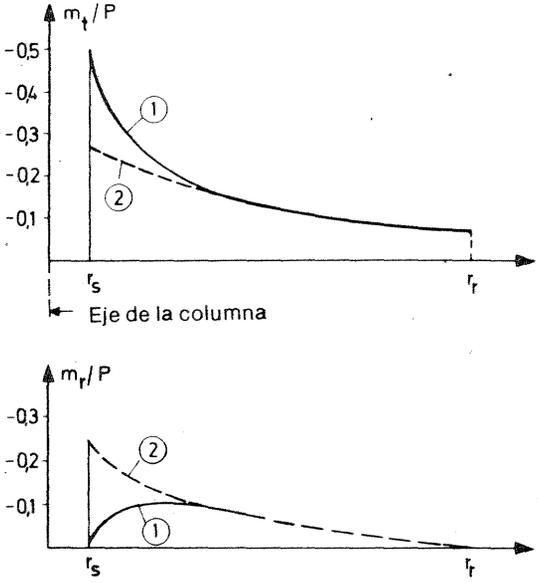
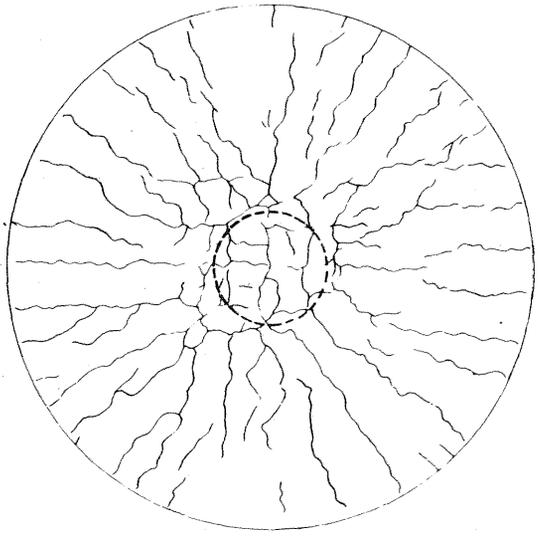
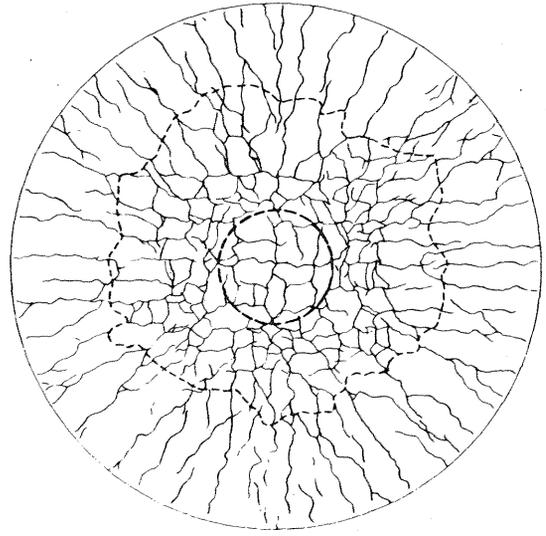


Fig. 5.3. Momentos flexores  $m_t$  y  $m_r$  en placas isótropas: 1) placa anular con apoyo lineal en el borde interior; 2) placa circular con presión de apoyo uniforme sobre la columna.



Para carga de servicio



Poco antes de alcanzarse la carga de rotura

Fig. 5.5. Desarrollo de las fisuras en el entorno de la columna.

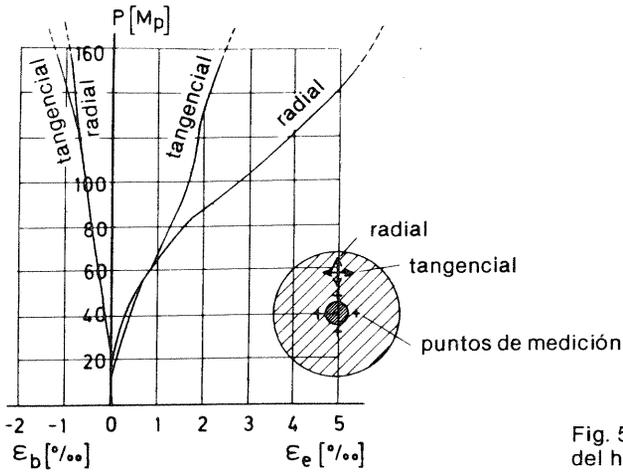


Fig. 5.6. Deformaciones  $\epsilon_e$  de la armadura y  $\epsilon_b$  del hormigón en la zona comprimida.

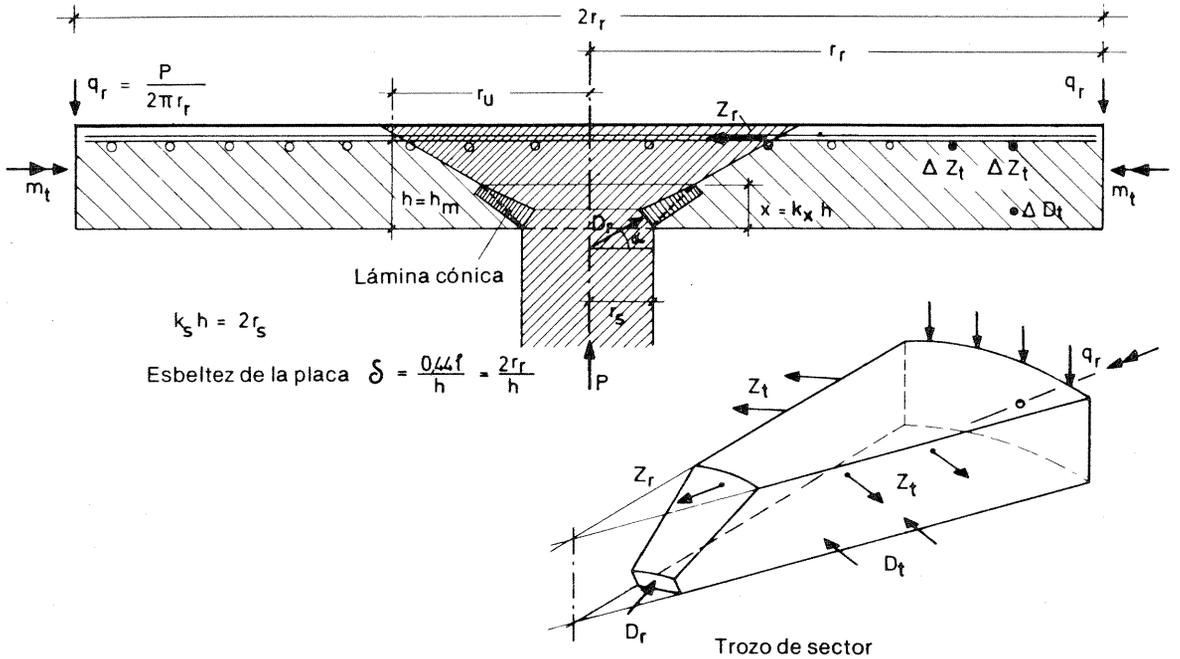


Fig. 5.7. Modelo mecánico (elementos sectoriales) poco antes del comienzo de la rotura, mostrando las fuerzas actuantes.

Partiendo de este proceso, K.-N. establecieron para su método de cálculo el modelo representado en Fig. 5.7. La placa circular se descompone en sectores radiales limitados por las fisuras radiales y la fisura anular muy aplanada, que apoyan en su parte inferior en pequeñas láminas cónicas ubicadas en la cabeza de la columna. En dichos sectores actúan exteriormente la carga  $q_r$ , interiormente los esfuerzos de tracción  $Z_r$  de las barras de la armadura e inferiormente los esfuerzos de compresión  $D_r$  dirigidos tangencialmente hacia arriba. Al sector elemental se lo supone rígido en dirección radial, es decir que, aparte de las fisuras anulares de corte, se supone que no existen fisuras anulares.

### 5.3.2. Carga de punzonado según Kinnunen - Nylander (sin armadura de corte)

De las condiciones geométricas y de equilibrio del sector elemental (ver Fig. 5.7) se deducen dos expresiones para la carga de punzonado, estimando a priori la altura  $x = k_x h$  de la zona comprimida. Al agotarse la resistencia del hormigón resulta

$$P_{U,1} = 1,1 \pi k_s h^2 k_x \frac{1 + \frac{2}{k_s} k_x}{1 + \frac{1}{k_s} k_x} \sigma_K f(\alpha) \quad (5.1)$$

En la misma, 1,1 es un factor de corrección para armaduras en dos direcciones, para adecuar a los resultados experimentales.

$k_s = \frac{2 r_s}{h} =$  Relación entre el diámetro de la columna y el valor medio de la altura útil de la placa en la zona de las columnas;

con  $\beta_w \cong 150$  [kp/cm<sup>2</sup>] resulta para

$$k_s < 2 \quad \sigma_k = 825 \left( 0,35 + 0,3 \frac{\beta_w}{150} \right) (1 - 0,22 k_s)$$

$$k_s \cong 2 \quad \sigma_k = 460 \left( 0,35 + 0,3 \frac{\beta_w}{150} \right);$$

$\sigma_k =$  tensión crítica de compresión al comienzo del punzonado

$f(\alpha) = \frac{\operatorname{tg} \alpha (1 - \operatorname{tg} \alpha)}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha}$ , donde  $\alpha$  debe determinarse de

$$\left[ \left( \frac{2 r_r}{h} - k_s \right) \operatorname{tg} \alpha - 1,8 \right] \frac{1 - \operatorname{tg} \alpha}{1 + \operatorname{tg}^2 \alpha} = 0,383 \left( 1 + \frac{0,3}{k_s} \right) \ell_n \frac{2 r_r/h}{k_s + 0,6}$$

$f(\alpha)$ , para  $2 r_r = 0,44 \ell$  puede tomarse del diagrama de Fig. 5.8.

Otra expresión de  $P_U$  incluye la influencia de la cuantía de armadura, donde juega un papel importante el ancho  $2 r_f$  de la zona donde la armadura comienza a entrar en fluencia.  $r_f$  puede ser menor, igual o mayor que  $r_u$ , radio superior del cono de rotura y depende del ángulo  $\psi$  de inclinación del sector elemental deformado, exterior al cono de rotura, poco antes que ella ocurra.

$$r_f = h \frac{E}{\beta_s} \psi (1 - k_x),$$

donde para  $k_s < 2$   $\psi = 0,0035 \left( 1 + \frac{k_s}{2 k_x} \right) (1 - 0,22 k_s)$

y para  $k_s \cong 2$   $\psi = 0,0019 \left( 1 + \frac{k_s}{2 k_x} \right)$

Para armadura en dos direcciones se admite como radio del cono de punzado

$$r_u = r_s + 1,8 h \quad (\text{corresponde a } \alpha \approx 30^\circ).$$

La carga de punzonado por agotamiento del acero es en consecuencia

para  $r_r \cong r_f \cong r_u$

$$P_{U,2} = 1,1 \cdot 2 \pi \mu \beta_S h^2 \frac{r_f}{r_r - r_s} \left[ 1 + \epsilon_n \left( \frac{r_r}{r_f} \right) \right] \left( 1 - \frac{k_x}{3} \right) \quad (5.2 a)$$

y para  $r_f < r_u$

$$P_{U,2} = 1,1 \cdot 2 \pi \cdot \mu \beta_S h^2 \frac{r_f}{r_r - r_s} \left[ 1 + \epsilon_n \left( \frac{r_r}{r_u} \right) \right] \left( 1 - \frac{k_x}{3} \right) \quad (5.2 b)$$

En ellas, y de acuerdo con la notación ya adoptada para armaduras en dos direcciones, se debe introducir  $\mu = F_{ex}/r_f \cdot h = F_{ey}/r_f \cdot h$ , donde  $F_{ex}$  y  $F_{ey}$  son las secciones de armadura en la zona delimitada por la circunferencia de radio  $r_f$ .

El valor correcto de la carga de punzonado  $P_U$  se obtiene cuando  $x$ , es decir  $k_x$ , se elige de modo tal que de las Ec. (5.1) y (5.2) se obtenga

$$P_{U1} = P_{U2} = P_U$$

Para obtener la carga admisible, se recomienda utilizar un coeficiente de seguridad  $\nu = 2,5$ .

Puede observarse de lo expuesto, cuán complicado es este procedimiento. En la práctica, es posible simplificarlo mediante diagramas, tales como los que figuran en [75].

Si las cargas de punzonado  $P_U$  según Ec. (5.1) y (5.2), referidas a  $h^2$  se representan en función de la cuantía de armadura  $\mu$  para dos esbelteces  $l/h = 25$  y  $l/h = 41$ , se obtienen las curvas de Fig. 5.9. Puede observarse que el aumento de  $P_U$  para valores mayores de  $\mu$ , se man-

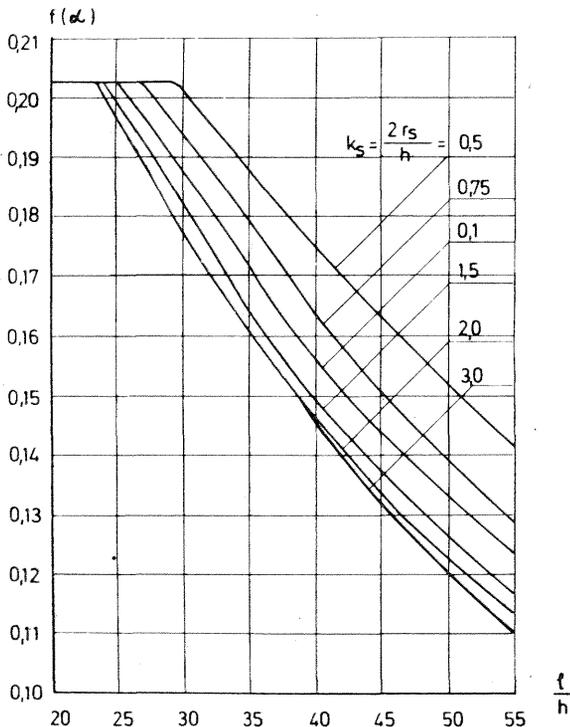


Fig. 5.8. Representación gráfica de la función  $f(\alpha)$  en función de las relaciones  $k_s = 2 r_s/h$  y  $l/h$  [75].

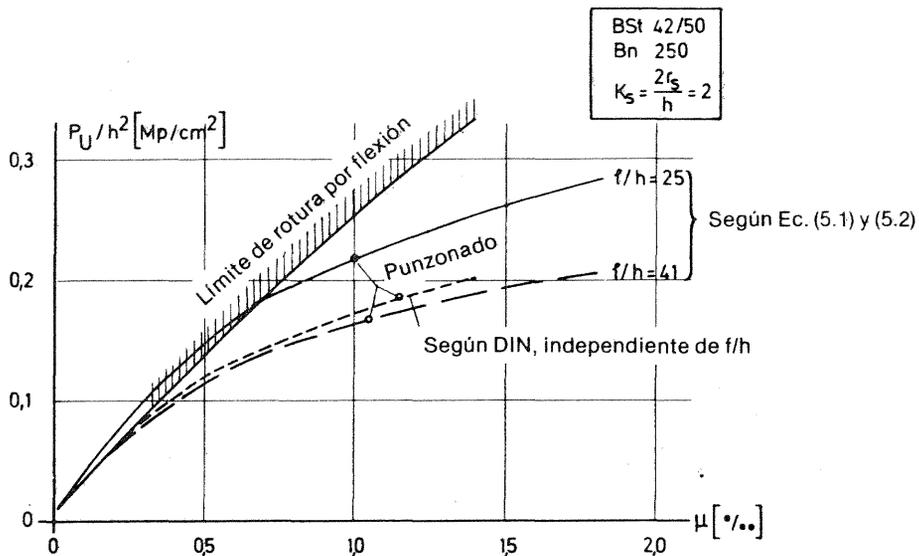


Fig. 5.9. Aumento de la carga de punzonado relativa  $P_U/h^2$  de una columna cilíndrica interior, en función de la cuantía porcentual de armadura  $\mu$  [en %] según Ec. (5.1) y (5.2) comparado con la carga límite calculada según DIN 1045 (1972) para  $\nu = 2,1$  y  $2f_s/h = 2$ .

tiene reducido. A título comparativo, también se reproduce el valor  $P_U = 2,1 P_{adm}$  según DIN 1045. Resulta así ventajosa la verificación exacta para el caso de placas poco esbeltas o cuando existen columnas con refuerzos en las cabezas.

En las expresiones de  $P_U$  no aparece para nada la tensión de corte  $\tau$ , lo que fundamentalmente es correcto, por cuanto el colapso ocurre ya sea porque se alcanza el límite de escurrimiento o porque se llega a la "resistencia a la compresión por resbalamiento" del hormigón, como consecuencia de los grandes momentos flexores en el borde de la columna. El efecto de la tensión de corte está incluido en el ángulo de inclinación  $\alpha$  de las tensiones radiales de compresión. Por lo tanto, es determinante el momento correspondiente a la rotura por corte. Sin embargo, hasta ahora, todas las normas de dimensionado parten de un valor de cálculo  $\tau$ .

#### 5.4. Punzonado en el caso de columnas de borde o esquina

Hasta el momento no existen ni un buen desarrollo teórico ni bases experimentales para dimensionar al punzonado losas de entrepiso con columnas de borde o de esquina.

El problema depende de muchos factores, por cuanto las relaciones de rigidez entre columna y losa pueden diferir mucho y juegan en este caso un papel más importante que en el caso de columnas interiores.

Los momentos principales en la placa difieren mucho a lo largo y normalmente al borde [77]. El momento flexor normal al borde depende en primer término de la rigidez a la flexión de la columna, pero disminuye al acercarse a la rotura, en cuanto aparecen fisuras en la losa. Normalmente, y en lo que respecta al peligro de punzonado, son determinantes los momentos paralelos a los bordes. En consecuencia, el cálculo al punzonado debe realizarse para los máximos momentos flexores y con la correspondiente cuantía  $\mu$  y para una superficie de punzonado reducida (ver Sec. 5.5).

Al proyectar la estructura se recomienda no ubicar las columnas exactamente en el borde de la losa (Fig. 5.10), lo cual facilita la colocación de la armadura y reduce considerablemente el peligro de punzonado. En el caso de columnas muy esbeltas, muy cargadas, sujetas por ello al peligro de pandeo, si se disponen articulaciones tanto en las columnas como en la placa, pueden facilitar y aun mejorar tanto el cálculo como la ejecución (Fig. 5.11).

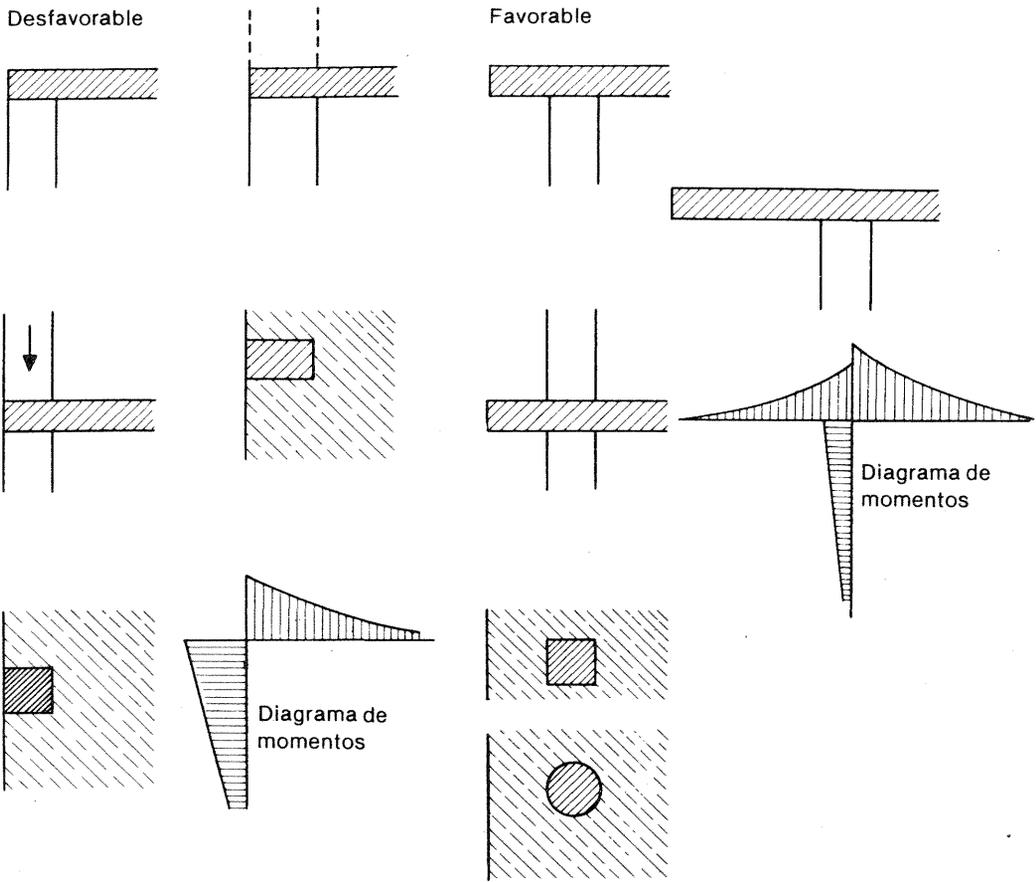


Fig. 5.10. Ubicaciones favorables y desfavorables de las columnas en los bordes de placa.

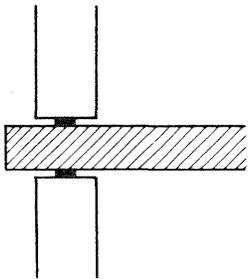


Fig. 5.11. En el caso de columnas muy cargadas ubicadas cerca de los bordes de la losa, deben disponerse articulaciones adecuadas.

### 5.5. Criterios de dimensionado de acuerdo con DIN 1045

#### 5.5.1. Caso normal de columnas interiores

La norma DIN 1045 trae criterios de dimensionado, que se basan en ensayos realizados en Karlsruhe, no publicados y que parten de las cargas de servicio. El valor de cálculo de la tensión de corte referido al esfuerzo de corte  $Q_R$  en la sección circular de diámetro  $d_R = d_s + h$  (Fig. 5.12).

$$\tau_R \text{ exist.} = \frac{Q_R \text{ máx.}}{\pi d_R \cdot h} \quad (5.3)$$

se compara con los valores del cálculo corriente al corte  $\tau_0$  adm. de Tabla 14 de DIN 1045, teniendo en cuenta la cuantía de armadura  $\mu = (f_{ex} + f_{ey}) / 2 \cdot h$  en % /  $2 \cdot h$  y la calidad del acero mediante los valores auxiliares  $\gamma_1$  y  $\gamma_2$ .

Se tiene

$$\begin{aligned} \gamma_1 &= 1,3 \alpha_e \sqrt{\mu} & \text{con } \alpha_e &= 1,0 \text{ para BSt 22/34} \\ \gamma_2 &= 0,45 \alpha_e \sqrt{\mu} & & 1,3 \text{ '' BSt 42/50} \\ & & & 1,4 \text{ '' BSt 50/55} \end{aligned}$$

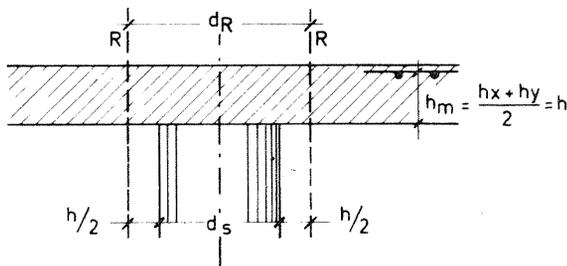
En ellas debe ser,  $\mu \cong 0,5 \%$ , pero a lo sumo  $\mu \leq 25 \frac{R_{wN}}{\beta_S} \leq 1,5 \%$ .

Si resulta  $\tau_R \leq \gamma_1 \cdot \tau_{o11}$ , entonces no es necesaria ninguna armadura al corte.

Si, en cambio  $\tau_R > \gamma_1 \cdot \tau_{o11}$ , es necesario disponer una armadura de corte para  $0,75 Q_R$  máx.

El límite superior es  $\tau_R \leq \gamma_2 \cdot \tau_{o2}$ .

Si la armadura corriente a la flexión conduce a  $\tau_R > \gamma_1 \tau_{o11}$ , es necesario en primer término aumentar  $\mu$  y con ello  $\gamma_1$ , pero el mayor valor de  $\mu$  sólo se colocará en el ancho del cono de punzonado ( $d_s + 3,6 h$ ) (Fig. 5.13).



Columnas rectangulares

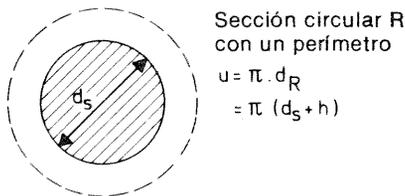
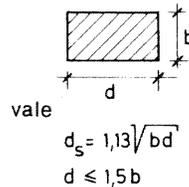
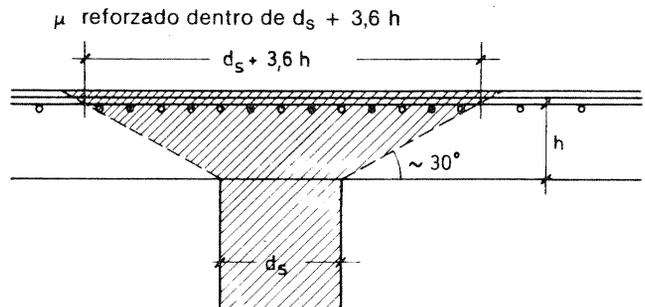


Fig. 5.12. Ubicación y tamaño de la sección circular para la determinación de  $\tau_R$  según DIN 1045. Para columnas rectangulares con  $d > 1,5 b$ , no se conocen datos, porque faltan ensayos. Se recomienda para el cálculo tomar  $d = 1,5 b$ .

Fig. 5.13. Armadura reforzada para aumentar la seguridad al punzonado, que debe ubicarse en la zona del cono de punzonado con un diámetro de  $d_s + 3,6 h$ .



Si  $\mu$  máx. adm. no es suficiente, entonces es necesario aumentar el espesor de la placa en la columna.

### 5.5.2. Sobre la armadura de corte

La cantidad necesaria de la armadura de corte según DIN 1045, que debe calcularse para  $0,75 Q_R$ , independientemente de la magnitud de la sollicitación al corte, es relativamente grande. Esta armadura es eficaz únicamente, de acuerdo con los criterios establecidos en [1 b, Sección 8.3.5.1], cuando se la distribuye en numerosas barras delgadas, perfectamente ancladas. La colocación de una armadura de este tipo es cara. En el caso de losas delgadas, aumenta muy poco la carga portante, debido a deficiencias de anclaje. Para losas con  $d < 30$  cm se aconseja por ello prescindir de una armadura de corte aumentando en cambio ya sea  $\mu$  o  $d$  en la zona de la cabeza de la columna, o también colocar un collar de acero (ver Sec. 5.5.5) o finalmente realizar una verificación más exacta según K.-N. de acuerdo con [73] o [75].

### 5.5.3. Columnas de borde o de esquina

Para las columnas de borde o esquina vale la misma verificación de Sec. 5.5.1, pero reemplazando  $u = \pi d_R$ , por valores reducidos del perímetro de la sección circular para el cálculo de  $\tau_R$  según Ec. (5.3),

$$\begin{aligned} \text{en columnas de borde } u' &= 0,6 \pi d_R. \\ \text{en columnas de esquina } u'' &= 0,3 \pi d_R. \end{aligned}$$

Estos valores deben utilizarse cuando la losa no sobresale del borde de la columna. Si —apartándose de lo establecido en DIN 1045— la parte de losa que sobresale es de  $0,3 l_x$  o  $0,3 l_y$  (DIN 1045 establece  $0,5 l_x$ ), entonces es posible calcular con la totalidad del perímetro  $u = \pi d_R$ . Cuando la parte que sobresale es menor puede interpolarse linealmente entre los valores límites. Aparte de ello, en columnas de borde para tener en cuenta el momento flexor, en general debe aumentarse el valor calculado de  $\tau_R$  en un 40 %.

### 5.5.4. Aberturas en placas y canaletas para instalaciones

Cualquier espacio hueco dentro del cono de punzonado de  $30^\circ$ , aumenta el peligro de punzonado, especialmente cuando la abertura llega directamente hasta la columna, debilitando con ello la zona comprimida por flexión. Por ello, la DIN 1045 establece limitaciones estrictas acerca de las dimensiones y ubicación de las aberturas, resumidas en Fig. 5.14.

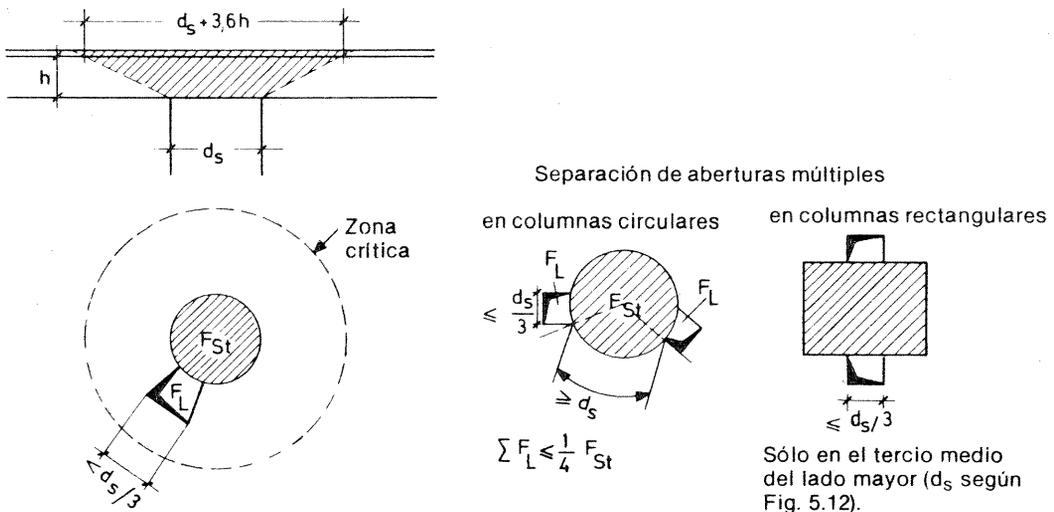


Fig. 5.14. Criterios para limitar el tamaño y ubicación de aberturas en placas, cerca de las columnas.

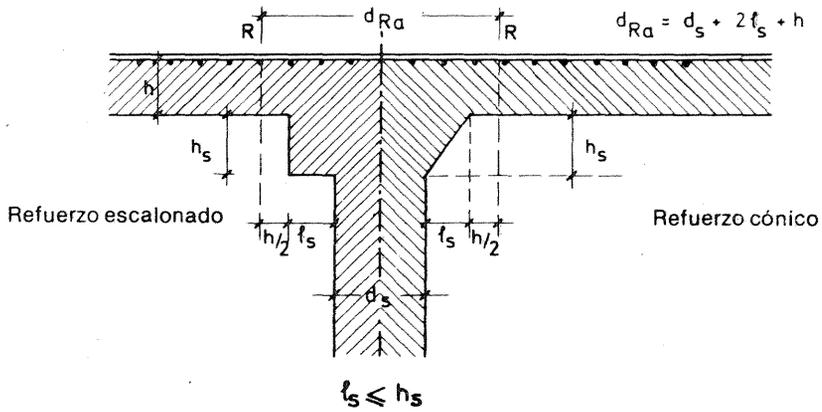


Fig. 5.15. Dimensiones y ubicación de la sección circular para la determinación de  $\tau_p$  en los refuerzos de cabeza de columna con  $l_s \leq h_s$  (para columnas rectangulares ver la DIN 1045).

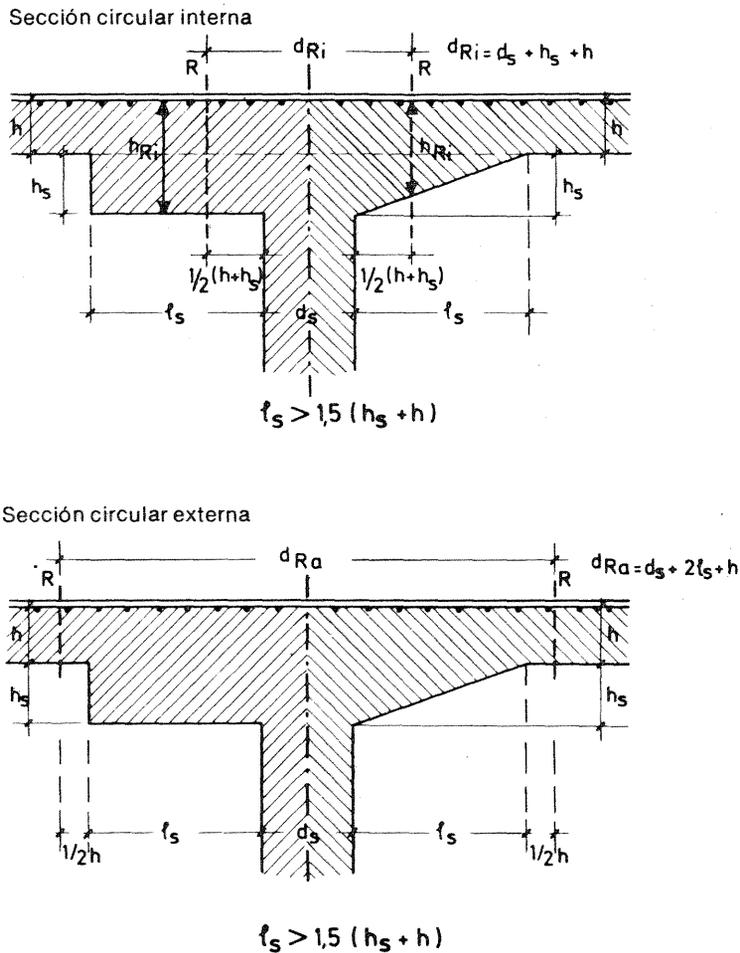


Fig. 5.16. Para refuerzos de cabeza de columna con  $l_s > 1,5 (h_s + h)$  deben verificarse los valores de la tensión  $\tau_p$  en 2 secciones circulares de diámetros  $d_{Ri}$  y  $d_{Ra}$ .

$$\tau_R \text{ debe aumentarse mediante el factor } \kappa = 1 + 0,5 \frac{\Sigma F_L}{0,25 F_{St}} \quad (5.4)$$

### 5.5.5. Refuerzos en las cabezas de columnas, losas-hongo, collares de acero

Reforzando las cabezas de las columnas es posible aumentar de  $2 l_s$  el eventual cono de punzonado, cuando el ancho del refuerzo es  $l_s \leq h_s$  (Fig. 5.15). En este caso la verificación se efectúa como si toda la columna tuviera el diámetro  $d_s + 2 l_s$ .

En lo posible, los refuerzos de las cabezas de columnas deben dimensionarse de modo tal que en una sección circular exterior al refuerzo de un diámetro  $d_{Ra}$ , sin armadura de corte, no exista peligro de punzonado. Si para ello se adopta  $l_s > 1,5 (h_s + h)$ , entonces debe efectuarse una verificación adicional en una sección circular interior de diámetro  $d_{Ri}$  en la zona del refuerzo según Fig. 5.16. En este caso debería elegirse  $h_s$  de un espesor tal, que también en este caso con  $d_{Ri}$  y  $h_{Ri}$ , el valor  $\tau_R$  resulte inferior a  $\gamma_1 \tau_{011}$ . Para refuerzos tronco-cónicos, sólo puede considerarse como altura útil el valor  $h_{Ri}$  correspondiente a la sección circular de acuerdo con la Fig. 5.16, arriba a la derecha.

Cuando  $l_s > h_s$  pero  $< 1,5 (h_s + h)$ , en ese caso la sección circular determinante tiene un diámetro  $d_R = d_s + 2 h_s + h$ . Si la misma resulta exterior al refuerzo, para la determinación de  $\tau_R$  es aplicable la altura útil  $h$  de la placa; en cambio si cae dentro del refuerzo, se puede considerar como altura útil la medida a partir del cono inscripto (ver Fig. 5.16, arriba a la derecha). Es, sin embargo, necesario realizar una verificación adicional con  $d_{Ra}$  como en el caso en que  $l_s > 1,5 (h_s + h)$ .

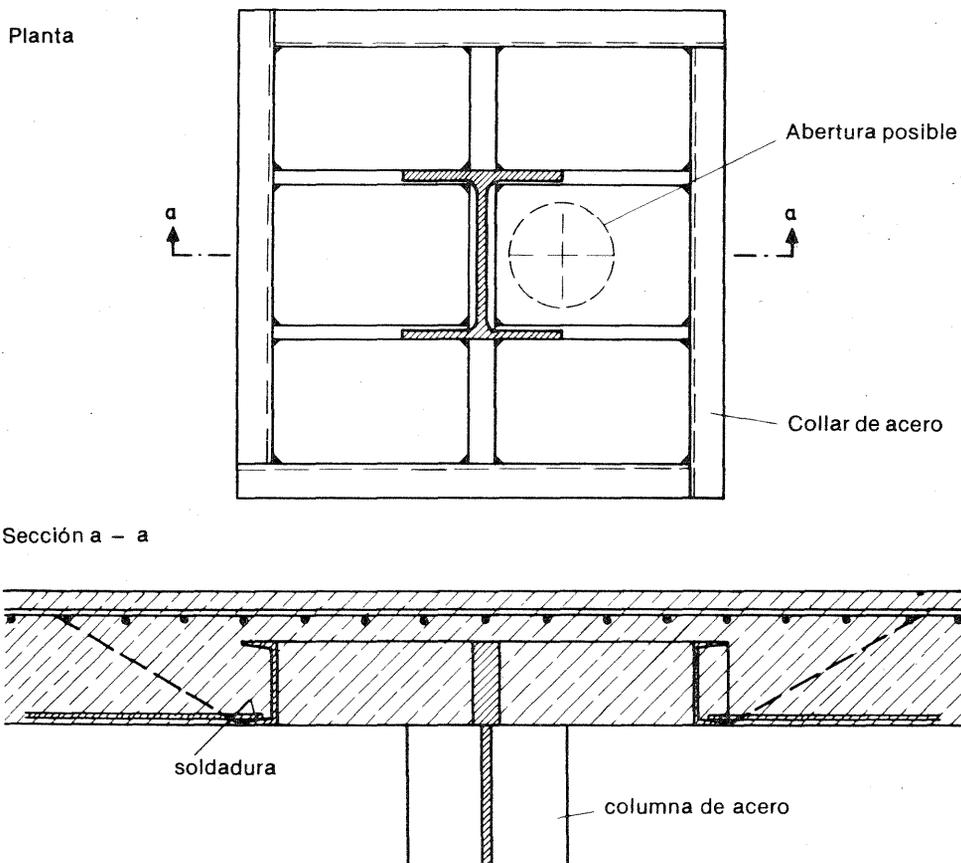


Fig. 5.17 a. Collar de acero constituido por perfiles (Geilinger Stahlbau) en una columna metálica.

Empleando collares de acero (Fig. 5.17), la placa plana puede reforzarse dentro de su espesor de modo tal que la rotura por punzonado ocurra no en la columna, sino en torno al collar de acero. Por ello, la verificación puede realizarse en forma análoga a la de la columna rectangular, como si la sección de la columna fuera la abarcada por el collar (verificación efectuada con los ensayos realizados por EMPA para Geilinger Stahlbau 1973). El collar de acero debe dimensionarse para la carga lineal solicitante  $q_R = Q_R/u$ . En lo que respecta a la cuantía de armadura  $\mu$  debe utilizarse únicamente la que corresponde a la superficie de punzonado y esté perfectamente anclada fuera del borde superior de la sección de punzonado. Los collares de acero permiten la ejecución de aberturas relativamente grandes en la placa, cuyas dimensiones no están comprendidas dentro de las limitaciones indicadas en 5.5.4.

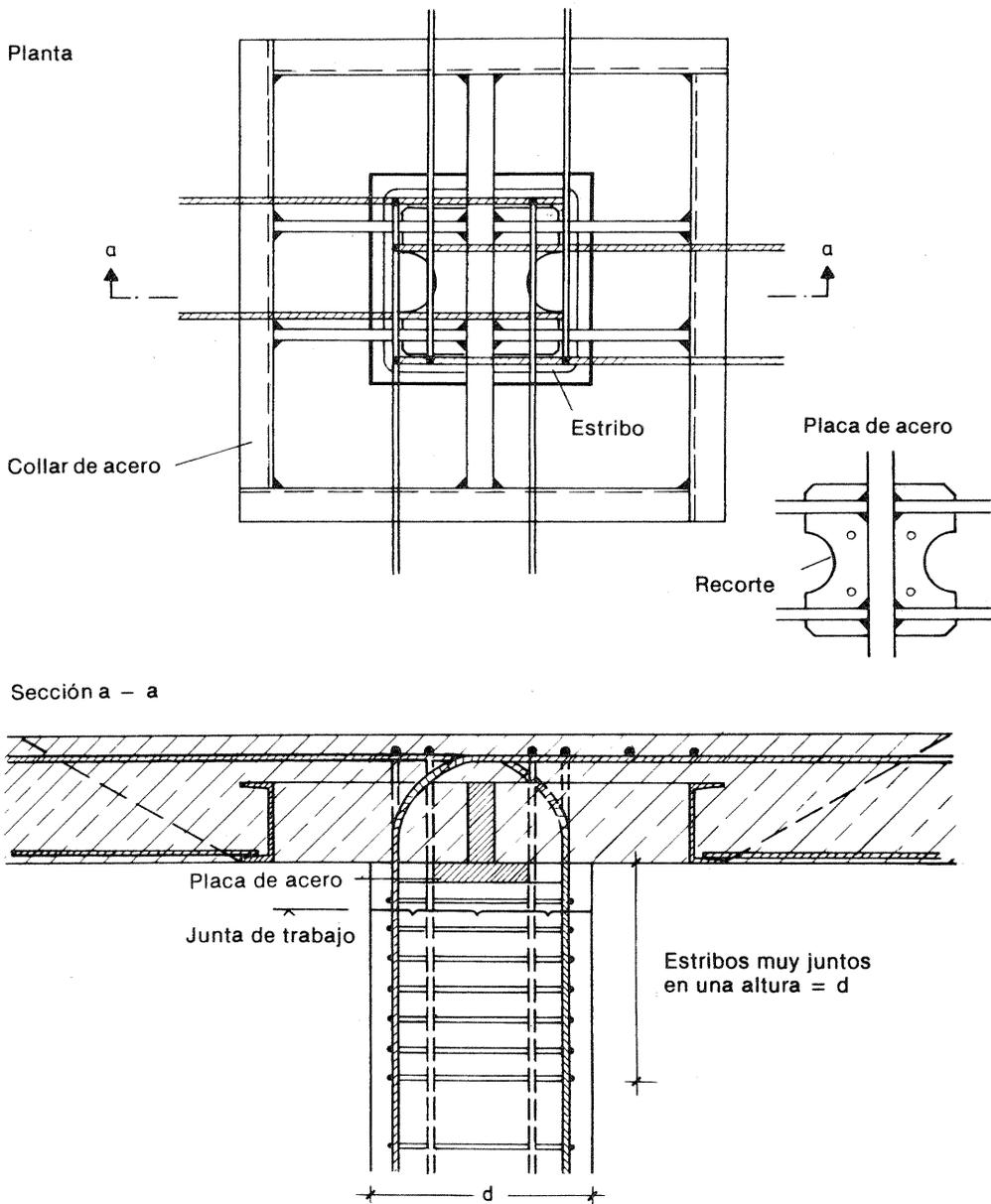


Fig. 5.17 b. Collar de acero constituido por perfiles (Geilinger Stahlbau) en una columna de hormigón (la armadura de la placa no ha sido totalmente representada).

# 6

## Dimensionado para cargas oscilantes o repetidas con frecuencia

### 6.1. Criterios básicos

Para "cargas oscilantes" y su tratamiento, faltan aún en las normas para hipótesis de carga (DIN 1055) y para hormigón armado (DIN 1045) definiciones exactas y criterios unificados. Por ello, en lo que sigue se tratará de desarrollar criterios que satisfagan con seguridad las exigencias usuales en las estructuras.

La carga oscilante (dinámica) (*oscillating or fatigue loading*), para el dimensionado solo cabe distinguirla de la "carga estática predominante", cuando una parte  $p_f$  de la carga, que juntamente con el peso propio  $g$ , corresponda a más del 60 % de la carga estática admisible de servicio ( $g + p$ ), actúe muy repetida, o en forma oscilante. "Muy repetida" significa que por lo menos se produzcan 500.000 reiteraciones dentro del período de vida útil supuesto para la estructura. A este respecto corresponde en primer término aclarar, si y qué parte de la carga útil  $p_f$  queda comprendida dentro de dicha hipótesis.

En estructuras de edificios una carga oscilante de este tipo se presenta casi exclusivamente en edificios industriales, donde actúan máquinas pesadas que originen grandes vibraciones.

En construcción de puentes, de acuerdo con la DIN 1072, para tránsito carretero podrá considerarse como oscilante del 20 al 40 % como máximo de la carga total, que se eleva para tránsito ferroviario del 40 al 60 % de la carga máxima del tren tipo, según la naturaleza y densidad del tránsito. A este respecto, están en estudio análisis estadísticos. Para cubiertas de sótanos en las entradas a fábricas o depósitos, se adopta el mismo criterio que para puentes carreteros, pero no para cubiertas que sólo ocasionalmente deban soportar camiones o vehículos de bomberos. En cambio, deben considerarse sujetos a cargas oscilantes los carriles de circulación de playas de estacionamiento [79] para automotores. Corresponde hacer notar que el hormigón, el acero y la adherencia presentan distintas respuestas a las sollicitaciones oscilantes y que dichas sollicitaciones se manifiestan en todos los constituyentes del elemento de hormigón armado (p. ejemplo, tanto en la armadura longitudinal como en los estribos).

La carga oscilante no debe afectar ni a la capacidad portante ni a la de utilización. La capacidad portante de las estructuras de hormigón armado resulta considerablemente disminuida por las cargas oscilantes, alcanzándose un mínimo luego de unas  $2 \times 10^6$  repeticiones (Diagramas de Wöhler). La seguridad contra la rotura por fatiga o contra un colapso por cargas oscilantes puede ser menor que para el caso de carga estática. Factores de mayoración de cargas comprendidas entre 1,2 y 1,3 son suficientes según sea la extensión de los daños que puede causar el colapso.

En las consideraciones relativas a la seguridad debe tenerse presente que una estructura, ensayada en un principio para cargas oscilantes y en la que no hubo rotura, al aumentar una

sola vez la carga, puede alcanzar la carga estática de rotura sin que se produzcan mayores daños.

Desde el punto de vista de los materiales, debe tenerse en cuenta la resistencia a la fatiga del hormigón (ver [1 a, Sec. 2.8.1.6]) y además adoptarse un coeficiente de seguridad comprendido entre 1,3 y 1,4. Para tensiones básicas reducidas, la resistencia a la fatiga del hormigón es sólo de aproximadamente  $2 \sigma_a = 0,5$  a  $0,6 \beta_p$ .

La resistencia a la fatiga del acero de la armadura dentro del hormigón depende del tipo de acero, de su calidad, forma de la nervadura, eventuales soldaduras y en las dobladuras de la curvatura del diámetro del mandril empleado (ver [1 a, Sec. 3.2.1.2]). Varía entre  $2 \sigma_a = 2000$  y  $900 \text{ kp/cm}^2$  y debe cubrirse con un coeficiente de seguridad entre 1,1 y 1,2. El tipo de acero y tratamiento deben también elegirse cuidadosamente, cuando se trata de sollicitaciones oscilantes elevadas.

La resistencia a la fatiga de la adherencia es el punto más débil del hormigón armado en el caso de cargas oscilantes. Ha sido poco investigada; influye fundamentalmente sobre la capacidad de uso, porque en este caso el ancho de las fisuras crece en forma ostensible y sobrepasan fácilmente el tamaño admisible. Las estructuras de hormigón armado sollicitadas por cargas oscilantes deben, por ello, armarse fundamentalmente con pequeña separación de barras, de modo que las fisuras resulten de ancho pequeño (ver [1 c]).

La capacidad de uso puede además resultar influida por un incremento de las deformaciones (p. ej. deflexiones). Las cargas oscilantes aceleran en cierta medida las deformaciones por fluencia diferida.

Nuevos ensayos realizados por S. Soretz, Viena 1974 [80], condujeron para Rippentor-stahl St 42/50 en vigas con B 320, dimensionadas y con distribución de armaduras de acuerdo con la práctica corriente, a resistencias a la fatiga considerablemente mayores que los valores establecidos por G. Rehm y que para las tensiones actuales correspondientes a las cargas de servicio, no permiten suponer una rotura por fatiga, siempre que la armadura sea nervurada y haya sido proyectada para anchos menores de las fisuras.

Cuando se trata de una fuerte carga oscilante, se recomiendan tensiones previas, es decir utilizar hormigón pretensado, el que posee una excelente resistencia a la fatiga.

## 6.2. Criterios de dimensionado

1. Determínese o adóptese la parte de carga útil  $p_F$  que presumiblemente se repita más de 500.000 veces.
2. Calcúlese según Sec. 6.3 la amplitud de oscilación de las tensiones que ocurren para la carga de servicio

$$2 \sigma_{aL} = \sigma_{g+p_F} - \sigma_g \quad (6.1)$$

3. Verifíquese para el hormigón, acero y adherencia si

$$\nu_L \cdot 2 \sigma_{aL} \leq \frac{2 \sigma_{aM}}{\nu_M} \quad (6.2)$$

donde  $2 \sigma_{aM}$  es la resistencia a la fatiga del hormigón, acero o adherencia para una amplitud de oscilación de  $2 \sigma_{aL}$  para una tensión inferior  $\sigma_g$  y una tensión superior  $\sigma_{g+p_F}$ .

$\nu_L$  es el coeficiente de seguridad de la carga 1,2 a 1,3

$\nu_M$  es el coeficiente de seguridad del material:

para hormigón: 1,3 a 1,4

para el acero : 1,1 a 1,2

Quando no se satisfaga esta condición, entonces es necesario aumentar las secciones.

4. Verifíquese si para peso propio + carga útil total, se cumplen las exigencias de seguridad para carga estática según las reglas establecidas en [1 a].

Dichas reglas deben aplicarse tanto a la armadura de tracción por flexión y al hormigón de la zona comprimida, como también a la armadura transversal para corte y torsión.

En lo que respecta a la disposición de la armadura, la cantidad necesaria determinada para la misma debe distribuirse en barras de reducida separación, de modo que se cumplan las reglas para la limitación de fisuras según [1 c]. En este caso no deben utilizarse las aproximaciones groseras basadas en las reglas de la DIN, sino la fórmula para  $w_{95} \% \text{ máx.}$  con los coeficientes  $k$ , donde, a los efectos de tener en cuenta la repetición de cargas para sollicitación dinámica, debe tomarse  $k_s = 1,4$ .

### 6.3. Determinación de tensiones para carga de servicio

Los criterios de Sec. 6.2 utilizan los valores de las tensiones en el hormigón y el acero para cargas de servicio, mientras que en la verificación de la capacidad portante  $\sigma$  en el dimensionado según Cap. 7 en [1 a] sólo aparecen en el cálculo deformaciones límites de ambos materiales para  $\nu$  veces la carga de servicio. Dado que no existe proporcionalidad entre cargas y tensiones como consecuencia de la no linealidad de las relaciones  $\sigma - \epsilon$  de los materiales, no es posible obtener directamente las tensiones para carga de servicio de los resultados del dimensionado a rotura.

Aclaremos esto con un ejemplo. El momento correspondiente a la carga portante en una sección de hormigón armado con zona comprimida de hormigón rectangular, para deformaciones  $\epsilon_{e,U} = + 5 \text{ ‰}$  y  $\epsilon_{b,U} = - 3,5 \text{ ‰}$  es  $M_U = 1,75 \cdot M_{g+p} = 0,276 bh^2 \beta_R$  con  $\nu = 1,75$ . La armadura correspondiente tiene una sección  $F_e \text{ nec.} = 0,333 bh \beta_R / \beta_S$ . La misma sección experimental, sin embargo, por efecto del momento debido a la carga de servicio  $M_{g+p}$ , solamente las deformaciones

$$\epsilon_e = 1,1 \text{ ‰} \left( = \frac{1}{4,55} \epsilon_{e,U} \right) \quad \text{y} \quad \epsilon_b = - 0,73 \text{ ‰} \left( = \frac{1}{4,79} \epsilon_{b,U} \right).$$

Para determinar dichas deformaciones para la carga de servicio son, en principio, válidos los mismos criterios que para el dimensionado: conservación de las secciones planas, equilibrio expresado por  $\Sigma N = 0$  y  $\Sigma M = 0$ . Para el hormigón armado puede utilizarse la misma relación  $\sigma - \epsilon$  que para el dimensionado (ver Fig. 7.5 en [1 a]). Puede observarse que en los casos que se presentan en la práctica,  $\epsilon_e$  queda siempre dentro de la zona elástica, de modo que  $\sigma_e = \epsilon_e \cdot E_e$  mantiene su validez. En cambio, en el hormigón no es correcto para la determinación de tensiones debidas a las cargas de servicio, partir del diagrama parabólico-rectangular correspondiente a la distribución de tensiones en la zona comprimida de Fig. 7.3 en [1 a], por cuanto este diagrama incluye influencias plásticas en función del tiempo (fluencia lenta) y reducciones correspondientes a una fracción del 5 % de la resistencia. Por ello se propone admitir una repartición de las tensiones de compresión del hormigón puramente parabólica según Fig. 6.1, con valor máximo de  $\epsilon_b = - 2,0 \text{ ‰}$ . Simultáneamente, dicho máximo puede obtenerse partiendo del valor medio de la resistencia prismática, o sea la "resistencia seriada"  $\beta_{p,S}$ . Aproximadamente, es posible deducir para todas las calidades de hormigón un valor máximo uniforme del diagrama  $\sigma - \epsilon$  del hormigón, mediante las siguientes relaciones:

$$\beta_{p,S} = 0,85 \beta_{w,S}; \quad \beta_{w,S} = \beta_{w,N} + 50 \text{ kp/cm}^2; \quad \beta_R = 0,7 \beta_{wN}.$$

Para los hormigones de calidades Bn 150 a Bn 350, simplificando se tiene

$$\beta_{p,S} \approx \frac{1}{0,7} \beta_R = 1,43 \beta_R \quad (6.3)$$

con  $\beta_R$  según DIN 1045 o también Fig. 7.3 de [1 a]. Esta expresión también es aplicable a los hormigones de calidades superiores a las indicadas, quedando siempre del lado de la seguridad.

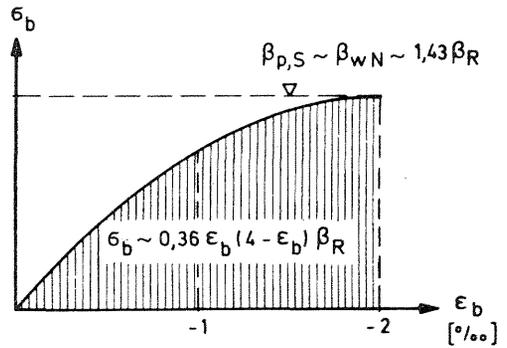


Fig. 6.1. Diagrama  $\sigma - \epsilon$  del hormigón, que debe utilizarse para la verificación de tensiones debidas a la carga de servicio.

De las deformaciones  $\epsilon_b$  calculadas a partir de las condiciones de equilibrio, se deduce mediante el diagrama de Fig. 6.1 la tensión en el hormigón

$$\sigma_b = \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{0,7} \beta_R \epsilon_b (4 - \epsilon_b) = 0,36 \epsilon_b (4 - \epsilon_b) \beta_R \quad (6.4)$$

En el ejemplo anterior se tiene, para Bn 250, B St 42/50, por efecto de  $M_g + p$  las tensiones  $\sigma_e = 1,1 \cdot 2,1 = 2,31 \text{ Mp/cm}^2$  ( $= 1/1,82 \beta_S$ ) y  $\sigma_b = 0,36 \cdot 0,73 (4 - 0,73) \cdot 175 = 150 \text{ kp/cm}^2$  ( $1/1,17 \beta_R$ ), es decir que para el hormigón los valores son considerablemente mayores que lo que era de esperar de la relación  $M_g + p/M_R$ .

Para la utilización en la práctica de estos principios básicos en la determinación de tensiones, deberían establecerse nuevos elementos auxiliares, para evitar cálculos complejos (por iteración). Una propuesta a este respecto aparece en Fig. 6.2, que permite leer directamente las tensiones relativas para carga de servicio  $\sigma_e/\beta_S$  y  $\sigma_b/\beta_R$  para el caso de zonas rectangulares de compresión del hormigón y deformaciones  $\epsilon_e, \epsilon_b$  correspondientes a  $\nu$  veces la carga, superiores a 3 ‰ ( $\nu = 1.75$ ), partiendo del momento relativo producido por la carga de servicio  $m = M_g + p/b h^2 \beta_R$  y la cuantía mecánica de armadura  $\bar{\mu} = (F_e/b \cdot h) \cdot \beta_S/\beta_R$ .

Con un diagrama de este tipo es posible calcular en forma simple a partir de la parte oscilante  $\Delta M$  del momento debido a la carga de servicio, las correspondientes variaciones de tensiones  $2 \sigma_{aL} = \sigma_g + pF - \sigma_g$ .

#### 6.4. Verificación para carga oscilante según DIN 1045

En la Sec. 17.1.3 de la DIN 1045 se admite, en lugar de la verificación exacta según Sec. 6.2 y 6.3, una aproximación en la que sólo es necesario tener en cuenta la amplitud de oscilación en el acero  $2 \sigma_{a,e}$ , y una repartición lineal de las tensiones en el hormigón en la zona comprimida. Esta hipótesis conduce al antiguo método  $n$  corriente, donde  $n = E_e/E_b$  es independiente de la magnitud de la carga. La Fig. 6.3 muestra las reparticiones de las deformaciones y tensiones, de las que sin mayores dificultades es posible deducir las ecuaciones (6.5) a (6.8) para secciones rectangulares con armadura simple.

$$x = \frac{n \cdot F_e}{b} \left[ -1 + \sqrt{1 + \frac{2 b h}{n \cdot F_e}} \right] \quad (6.5)$$

$$\sigma_e = \frac{M}{z \cdot F_e} \quad (6.7)$$

$$z = h - \frac{x}{3} \quad (6.6)$$

$$\sigma_b = \frac{2 M}{b z x} \quad (6.8)$$

Mientras que las tensiones obtenidas mediante este procedimiento son aproximadamente de la misma intensidad que las que resultan de aplicar el método de Sec. 6.3, en cambio

las tensiones en el hormigón son menos cercanas a la realidad y, por ejemplo, para  $n = 7$  (con el  $E_b$  correspondiente al Bn 250) resultan hasta un 20 % mayores que las de Fig. 6.2

En secciones con armadura comprimida y para el caso de flexión compuesta, en el cuaderno 220 de la DAfStb ("Dimensionado de elementos estructurales de hormigón y hormigón armado") figuran más ecuaciones.

Para una simplificación mayor, la DIN 1045 permite para estos cálculos y para todas las calidades de hormigón utilizar como único valor  $n = 10$ . Especial importancia para la determinación de las tensiones en el acero  $\sigma_e$  tiene la Ec. (6.7), que para el caso de flexión compuesta puede usarse en la forma siguiente, utilizando el brazo elástico  $z$  del dimensionado para carga portante (ver [1 a, Cap. 7]):

$$\sigma_e = \frac{1}{F_e} \left( \frac{M_e}{z} + N \right) \quad (6.7a)$$

$$M_e = M - N \cdot y_e$$

Según DIN 1045 podrán utilizarse para "cargas no predominantemente estáticas" —ver también DIN 1055, Hoja 3— únicamente aquellos tipos de acero, cuya aptitud haya sido verificada. A este respecto debe prestarse especial atención cuando se trate de mallas soldadas (¡se requiere aprobación especial!).

Para el acero B St 22/34 GU no es necesario realizar ninguna verificación.

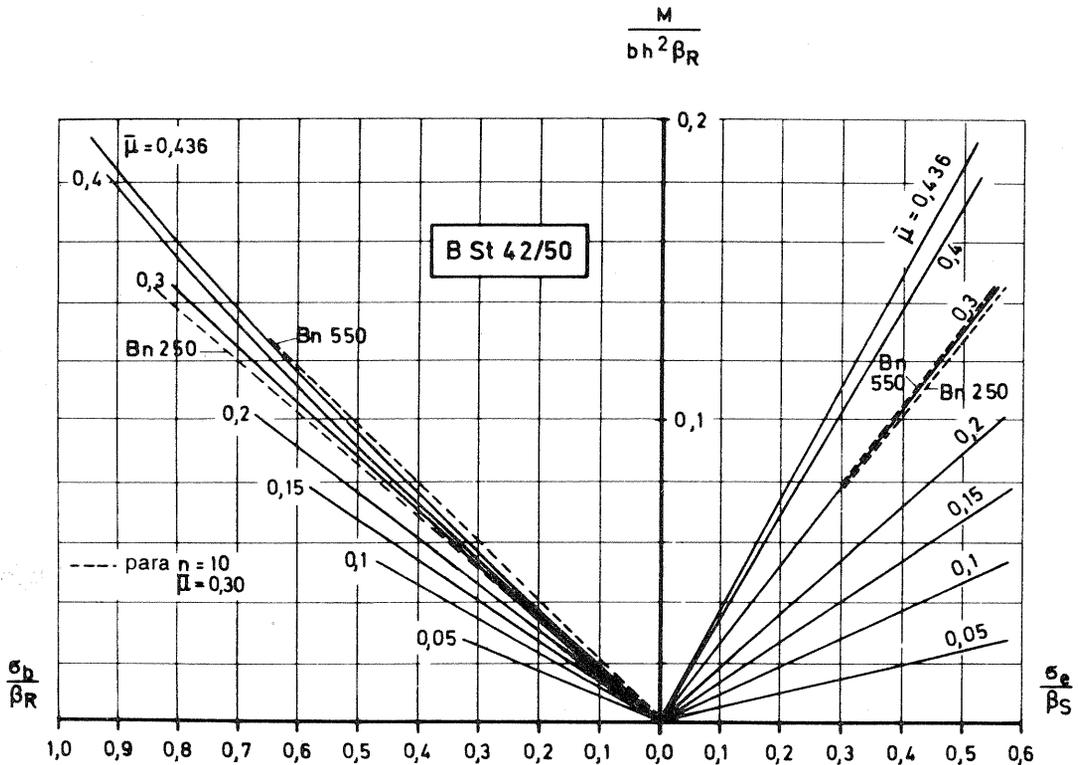


Fig. 6.2. Diagrama para determinar las tensiones en el hormigón y en el acero originadas por el momento debido a las cargas de servicio  $M_{g+p}$  en función de la cuantía mecánica, para secciones rectangulares con B St 42/50 ( $\mu = F_e/bh \cdot \beta_S/\beta_R$ ).

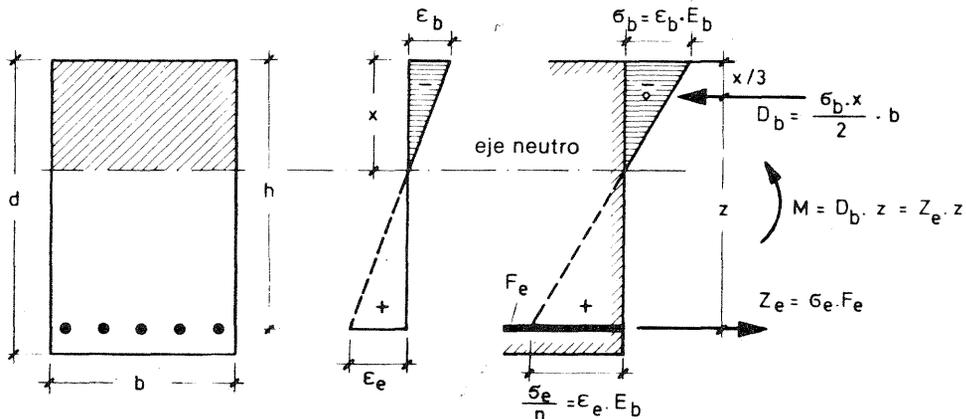


Fig. 6.3. Valores geométricos, tensiones y esfuerzos característicos en secciones con zona comprimida rectangular solicitadas a flexión simple y para carga de servicio (método n).

Cuando se emplea B St 42/50, para carga de servicio la amplitud de oscilación  $2 \sigma_a$  no debe superar los siguientes valores:

en barras rectas, o dobladas con  $d_B > 25 \varnothing$ :  $2 \sigma_{a,e} \leq 1800 \text{ kp/cm}^2$ ,

en barras dobladas con gran curvatura o en estribos:  $2 \sigma_{a,e} \leq 1400 \text{ kp/cm}^2$ .

en mallas de acero soldadas para hormigón producidas por fábricas responsables:

$$2 \sigma_{a,e} \leq 800 \text{ kp/cm}^2.$$

Como según Ec. (6.7), en el caso de flexión simple  $\sigma_e$  es proporcional a  $M$ , cuando se use B St 42/50 es suficiente, en lugar de una verificación de tensiones, mantener para barras rectas el incremento  $\Delta M$  del momento originado por la repetición de cargas,  $\leq 0,75 M$  máx. y para barras dobladas  $\leq 0,6 M$  máx. Para los estribos puede, análogamente y para simplificar la verificación, suponerse que, como consecuencia de la repetición de cargas,  $\Delta Q$  se mantenga  $\leq 0,6 Q$  máx.

De acuerdo con los criterios fijados por la DIN 1045, para cargas no preponderantemente estáticas, es posible tener en cuenta también las siguientes limitaciones:

nó se debe utilizar "cubrimiento al corte reducido" (esta exigencia no se justifica en realidad, por cuanto las tensiones en la armadura de corte para carga de servicio no son proporcionales, es decir que son menores que las que resultarían de  $M_Q + p_F/M_U$ );

debe efectuarse la verificación de la limitación del ancho de las fisuras (ver al respecto [1 c]);

los valores de cálculo de las tensiones admisibles de adherencia  $\tau_1 \text{ adm.}$ , deben ser menores que para carga estática (ver [1 a, Sec. 4.4]).

En [81] se dan valiosas sugerencias para un cálculo cercano a la realidad, relativas al comportamiento bajo carga de elementos estructurales de hormigón armado sujetos a elevadas sollicitaciones dinámicas.

# 7

## Hormigón liviano para estructuras portantes

### 7.1. Observación preliminar. Tipos de hormigón liviano

En estas "lecciones" siempre se ha entendido por hormigón aquel de estructura compacta, constituida por agregados naturales (arena, canto rodado, piedra partida) con peso unitario  $\rho$  comprendido entre 2,0 y 2,8 t/m<sup>3</sup>, denominado hormigón normal. Existen también hormigones pesados, cuyos agregados de barita, magnetita o viruta de acero, con  $\rho > 2,8$  hasta unas 3,8 t/m<sup>3</sup>, utilizado como balasto o protección contra radiaciones, pero raramente para estructuras, y hormigón liviano (*light weight concrete*) con  $\rho \leq 2,0$  t/m<sup>3</sup> (= 2,0 kg/dm<sup>3</sup>, dimensiones según DIN 1048).

El grupo de los hormigones livianos se divide en:

1. Hormigón liviano con estructura cerrada, constituido por agregados porosos de  $\rho = 0,8$  a 2,0 kg/dm<sup>3</sup> y  $\beta_w = 100$  a 350 kp/cm<sup>2</sup> (Fig. 7.1).
2. Hormigón liviano con poros grandes entre agregados densos (textura abierta), por ejemplo los llamados hormigones de granulometría uniforme, con agregados de 4 – 8 ó 8 – 12 mm, unidos por muy poco mortero de cemento (Fig. 7.2). Sus pesos unitarios varían entre 1,0 y 2,0 kg/dm<sup>3</sup> para  $\beta_w = 25$  a 200 kp/cm<sup>2</sup>.
3. Hormigón liviano de agregados porosos y estructura porosa (Fig. 7.3), por ejemplo, hormigón de piedra pómez para bloques de mampostería, con pesos unitarios comprendidos entre 0,7 y 1,4 kg/dm<sup>3</sup> y  $\beta_w$  de 20 a 100 kp/cm<sup>2</sup>.
4. Hormigón liviano sin agregados gruesos y mortero de grano fino y poros uniformemente repartidos, como el gasbetón, obtenido a partir de agentes productores de gas (polvo de aluminio en reacción con cemento o peróxido de hidrógeno + cloruro de calcio) o también hormigón espumoso fabricado mediante espuma (Fig. 7.4). Sus pesos unitarios varían de 0,4 a 1,0 kg/dm<sup>3</sup> con  $\beta_w = 10$  a 100 kp/cm<sup>2</sup>.
5. Hormigón liviano con agregados no minerales tales como granos esféricos de espuma sintética, por ejemplo Styropor, Polystyrol, embebidos en mortero de cemento compacto con pesos unitarios entre 0,3 y 0,8 kg/dm<sup>3</sup> y resistencias muy reducidas.

Los hormigones livianos con resistencias inferiores a  $\beta_w = 150$  kp/cm<sup>2</sup> se utilizan, por sus propiedades de aislantes térmicos, para paredes de bloques (macizos o huecos) (DIN 1053 juntamente con DIN 18151 y 18152 [88 a – c]) o como hormigón de relleno. Cuanto menor sea su peso, tanto mejores son sus propiedades de aislación térmica. Las paredes portantes de hormigón moldeado in situ deben dimensionarse de acuerdo con DIN 4232. Con ellas es posible construir casas altas, cuyo ejemplo más antiguo es el edificio Max-Kade, para vivienda estudiantil, construido en Stuttgart en 1949. cuyas paredes portantes exteriores son de 37 cm

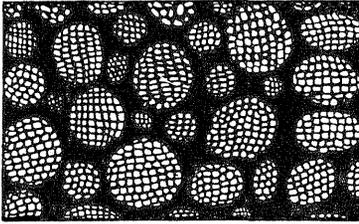


Fig. 7.1. Hormigón liviano de textura compacta con agregados porosos.

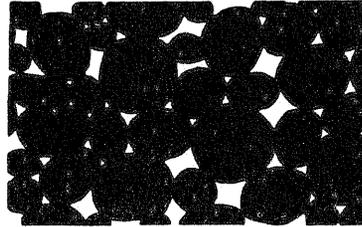


Fig. 7.2. Hormigón liviano con agregados compactos y textura abierta.

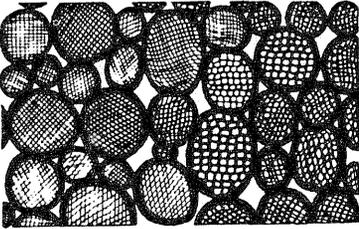


Fig. 7.3. Hormigón liviano de agregados porosos y textura abierta.

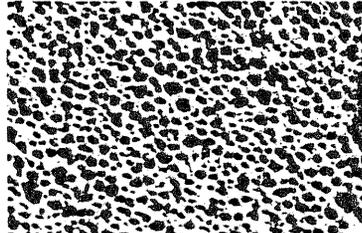


Fig. 7.4. Gasbeton (hormigón gaseoso) (Industrias Hebel).

de espesor y 25 cm las interiores, de hormigón moldeado de cascote de ladrillo de granulometría discontinua; su peso unitario varía entre 1,6 a 1,2 kg/dm<sup>3</sup> y  $\beta_w = 100$  a 30 kp/cm<sup>2</sup>, disminuyendo con la altura. Entre estos hormigones livianos sólo se utilizan para elementos resistentes a flexión el gasbeton (por ejemplo Siporex, Ytong, Hebel-Gasbeton) y el hormigón de piedra pómez de  $\rho \geq 0,8$  kg/dm<sup>3</sup> y  $\beta \geq 100$  kp/cm<sup>2</sup> (placas para entresijos y techos). A este respecto existen reglamentaciones especiales para el dimensionado, en DIN 4223 y en las certificaciones de empleo correspondientes.

En lo que sigue trataremos más en detalle sólo el hormigón liviano del primer grupo, por cuanto el mismo, considerado como "hormigón liviano para construcciones", puede ser armado o pretensado y por lo tanto es importante desde el punto de vista estructural.

## 7.2. Agregados y dosificación del hormigón liviano para estructuras

### 7.2.1. Agregados porosos

Los agregados porosos naturales son de origen volcánico como la piedra pómez y el "Lavalit" y su resistencia es reducida. Por esta razón se desarrollaron agregados porosos artificiales partiendo de arcillas y pizarras de composición y granulometrías adecuadas que, sometidas a altas temperaturas en hornos rotativos, se expanden. La expansión se produce por la formación de gases procedentes de componentes naturales o adiciones que facilitan su formación, lo que origina la formación de poros. Los granos expandidos se calientan hasta la temperatura de sinterización del material, es decir unos 1100° C, para que las paredes de los poros endurezcan lo más posible. De esta forma se obtienen agregados livianos (*light weight aggregate*) de arcilla expandida (*expanded clay*) o pizarra expandida (*expanded shale*), que para un peso reducido tienen suficiente resistencia para construir estructuras [82].

Históricamente cabe hacer notar que la pizarra expandida fue producida por primera vez en 1917 por S. J. Hayde en los Estados Unidos (Haydite). De ahí pasó el procedimiento a través de Dinamarca a Europa (más o menos en 1940 en Silesia para la construcción de barcos por Fa. Dywidag). En los Estados Unidos y en Rusia (como Keramsit), su uso se desarrolló desde hace mucho tiempo. En Alemania, recién en 1966 se comenzó su fabricación bajo las denominaciones de Leca, Liapor (Fig. 7.5), Berwilit, Norlit, etc.

Los agregados livianos para hormigón liviano estructural deben (según DIN 4226) tener las siguientes propiedades:

1. Forma compacta, en lo posible redondeada, con superficie de estructura cerrada.
2. Poros finos, uniformemente distribuidos.
3. Paredes de los poros endurecidos por sinterización, y con ello estables a las variaciones térmicas y volumétricas
4. Gran rigidez y granos con resistencia propia.

La mejor forma de alcanzar la homogeneidad necesaria de estas propiedades es mediante la molienda de la materia prima, por ejemplo arcilla opalina con la adición de un agente expansivo, seleccionada en un plato de granulación hasta alcanzar el tamaño deseado de los granos y luego la cocción en hornos rotativos. Los agregados son relativamente caros, lo que influye sobre la economía del hormigón liviano.

Las propiedades de los distintos productos difieren entre sí. Lamentablemente no existen aún ensayos de calidad normalizados ni una división de calidades. Por ello, para cada utilización en gran escala, debe primeramente exigirse ensayos de adecuabilidad en probetas de hormigón liviano. En tal caso tienen importancia las siguientes propiedades de los agregados.

*Peso unitario de los granos*  $\rho_{rk} = \text{Masa/Volumen del grano seco del agregado}$ . Según sea la proporción de poros su valor oscila entre 0,7 y 1,4 kg/dm<sup>3</sup>; para hormigones destinados a estructuras portantes no son adecuados agregados más livianos. Generalmente  $\rho_{rk}$  es más elevado para granos de tamaño menor que 8 mm que para granos mayores. El contenido de poros varía entre un 74 y un 45 %.

*La rigidez de los granos* no puede ser determinada por la deformación de un grano aislado. Para ello se mide el módulo de elasticidad dinámico E mediante un ensayo con ultrasonido. Según F. R. Schütz [82, pág. 23] depende de  $\rho_{rk}$  y su valor, para agregados de calidad de diámetros comprendidos entre 12 y 16 mm es aproximadamente.

$$E_k \text{ din.} = 80\,000 \cdot \rho_{rk}^2 [\text{kp/cm}^2] \text{ con } \rho_{rk} \text{ en } [\text{kg/dm}^3]$$

*La resistencia característica de los granos*, en especial la resistencia a la compresión, tampoco puede determinarse individualmente en los mismos. Se deduce de ensayos de compresión sobre cubos de hormigón de granulometría y resistencia del mortero conocidas

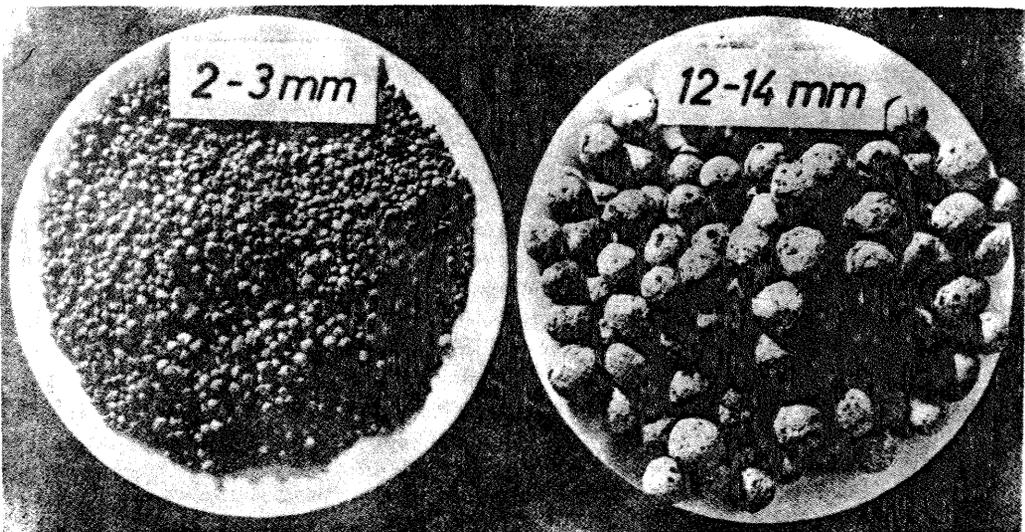


Fig. 7.5. Granulometrías de agregados de arcilla expandida.

[82, pág. 25], [85 a], DIN 4226, Hoja 3. La resistencia propia del grano, de acuerdo con dichos ensayos, varía mucho, teniéndose para  $\rho_{rk} = 0,7 \text{ kg/dm}^3$ ,  $145 \text{ kp/cm}^2$ , y para Liapor con  $\rho_{rk} = 1,4 \text{ kg/dm}^3$  más de  $600 \text{ kp/cm}^2$ .

*Absorción de agua.* Teniendo en cuenta que los poros no son absolutamente herméticos, las arcillas y pizarras expandidas usadas como agregados, absorben agua en distintas proporciones, lo cual, para hormigones livianos tiene importancia desde muchos puntos de vista. La absorción de agua se determina según [85 a], porcentualmente en peso. H. Weigler recomienda en [82, pág. 29] expresar la absorción de agua porcentualmente en volumen mediante la expresión

$$A_w = \frac{m_w}{m_t} \cdot \frac{\rho_{rk}}{\rho_w (\approx 1,0)} \cdot 100$$

En la misma se tiene  $m_t$  = masa de la muestra seca del agregado.

$m_w$  = masa de la muestra de agregado después de 30 min. de inmersión en agua.

La absorción de agua  $A_w$ , en este ensayo, queda comprendida más o menos entre 5 y 15 % en vol., pero para inmersiones de mayor duración puede llegar hasta alrededor del 60 al 90 %.

Para hormigón liviano, los agregados deben ser producidos dentro de las siguientes granulometrías:

0 - 2	2 - 8	8 - 16	16 - 25 mm
0 - 4	4 - 8		

### 7.2.2. Granulometría y preparación del hormigón liviano

En lo que respecta a la granulometría pueden emplearse las curvas continuas de DIN 1045, por ejemplo, la curva B. Los mejores resultados (en lo que respecta a la resistencia para pesos unitarios reducidos) se obtienen utilizando mucho grano grueso de 8 a 16 o 16 a 25 mm y muy pocos granos de relleno pequeños (2 a 8 mm) y mortero de alta resistencia con agregados de 0 a 2 ó 0 a 4 mm (o sea granulometría discontinua), porque los granos gruesos reducen el peso y la resistencia del mortero es decisiva para la del hormigón. Teniendo en cuenta que los agregados livianos < 2 mm aumentan innecesariamente el contenido de agua de la mezcla y reducen con ello la resistencia del mortero, es preferible utilizar arena natural de 0 a 2 mm. Para obtener una trabajabilidad aceptable se requiere un mayor contenido de finos que cuando se utilizan agregados naturales; por ello el aumento del contenido de cemento debe ser considerable o, eventualmente, remplazado por polvo de piedra o trass (puzolana). Para hormigones armados livianos debe considerarse un  $Z_{\text{min.}} = 300 \text{ kg/m}^3$ .

Los agregados con  $\rho_{rk} < 0,9 \text{ kg/dm}^3$  tienden a subir a la superficie al efectuarse la mezcla, lo que debe impedirse utilizando una consistencia seca y mortero rico, de ahí que la consistencia  $K_3$  no resulta adecuada para hormigón liviano. El contenido de agua depende también de la capacidad de absorción de los agregados, que es mejor que antes del mezclado se humedezcan perfectamente. Si ello no ocurre, entonces debe aumentarse algo el contenido de agua, con el objeto de que la consistencia, durante la colocación del hormigón no se reduzca demasiado por efecto de la absorción de agua por los poros. La consistencia se mide mejor con el factor  $v$  de consistencia (según DIN 1048) que con el índice de expansión. Para la compactación los más apropiados son los vibradores de inmersión con agujas de diámetros entre 50 y 70 mm y frecuencias de 9.000 a 12.000 oscilaciones/min., que deben introducirse cada 20 a 25 cm (Para mayor información ver [82, pág. 82]).

### 7.3. Flujo de esfuerzos en el hormigón liviano

El flujo de esfuerzos en el hormigón liviano se diferencia fundamentalmente del correspondiente a un hormigón normal. En el hormigón liviano, el mortero endurecido es más rígido que los agregados; en cambio en el hormigón normal, la dureza de los agregados es mayor que

la del mortero. Por ello, en el hormigón normal, los esfuerzos internos de compresión se transmiten preferentemente de grano a grano; en cambio, en el hormigón liviano lo hacen por el mortero que rodea a los granos. M. Lusche [83] ha visualizado esto mediante trayectorias de las tensiones principales determinadas fotoelásticamente (Fig. 7.6). La curvatura de las trayectorias de compresión conduce, en el hormigón normal, a tracciones transversales en las superficies laterales de los granos duros, y en el hormigón liviano a tracciones transversales en el mortero encima y debajo de los granos "débiles" y aun en los granos mismos, lo que origina planos de fractura (Fig. 7.7). Esto también aclara por qué en prismas comprimidos de hormigón, las fisuras se forman en la dirección de la carga. (En [1 a, Sec. 2.8.1.1] se da otra explicación de las "fisuras de fractura", que de acuerdo con el trabajo de Lusche resulta errónea). Las resistencias de los hormigones livianos dependen por ello de la resistencia del mortero y de su estructura interna, especialmente también de la forma de los granos, de su separación y repartición, que influyen sobre la capacidad de carga de la estructura interna del mortero.

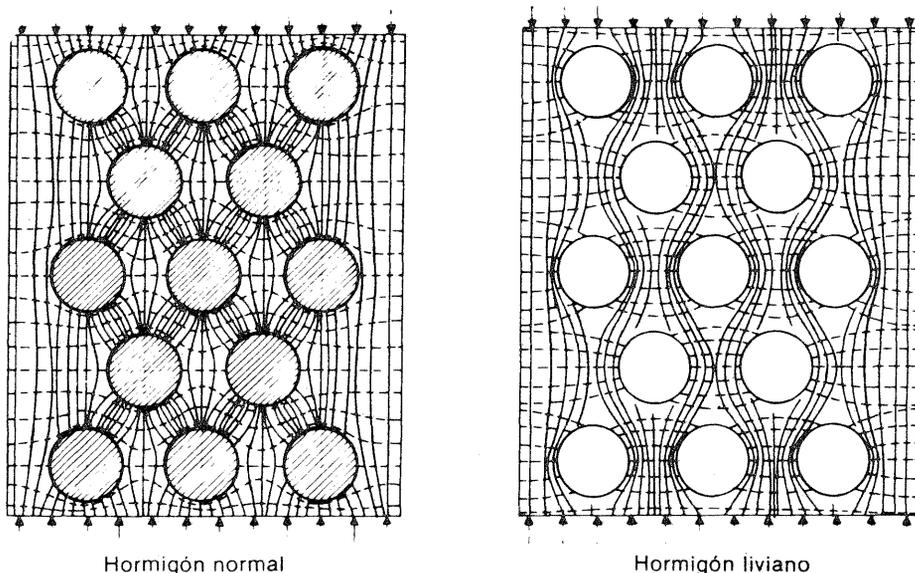


Fig. 7.6. Trayectorias de las tensiones principales en modelos de hormigón normal y un hormigón liviano de estructura cerrada [83].

La resistencia del mortero debe ser del 40 al 50 % mayor que la resistencia a la compresión prevista para el hormigón liviano. La diferencia en las trayectorias de las tensiones internas conduce a distintas propiedades resistentes, que deben tenerse presente cuando se trata de hormigón estructural y que resumiremos a continuación.

#### 7.4. Clases de hormigón liviano

El hormigón liviano (en lo que sigue LB) se divide lo mismo que el hormigón normal en clases, según su resistencia pero, además, en clases según su peso unitario. Ambos conocimientos se requieren tanto para distinguir como para dimensionar elementos estructurales de hormigón liviano. Para un peso unitario prefijado para el hormigón  $\rho_{rb}$  (seco) con agregados livianos de distintas resistencias de los granos, en la Fig. 7.8 se indican las resistencias cúbicas a la compresión  $\beta_{w28}$  que es posible alcanzar.

Los pesos unitarios  $\rho_{rb}$  se han dividido en las clases correspondientes a 1,0 - 1,2 - 1,4 - 1,6 - 1,8 y 2,0 kg/dm<sup>3</sup>, donde, en cada caso la cifra corresponde al límite superior del peso unitario del hormigón. Para los pesos propios a tener en cuenta en el cálculo (pesos de cálculo), es necesario considerar un aumento de 0,05 kg/dm<sup>3</sup> para el agua de absorción y para la armadura un incremento adicional entre 0,07 y 0,15, generalmente 0,10 kg/dm<sup>3</sup>.

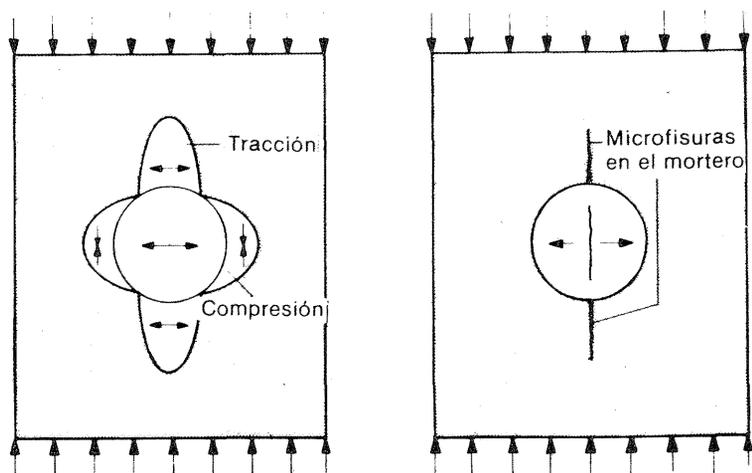


Fig. 7.7. Repartición de tensiones y formación de microfisuras en la zona de un grano de un modelo de hormigón liviano.

Las clases de resistencias para hormigón armado liviano son L Bn 100 - 150 - 250 - 350 - 450, determinadas mediante el valor de  $\beta_{w28}$ , donde al igual que para el hormigón normal, la resistencia seriada (valor medio) debe ser de 50 kp/cm<sup>2</sup> mayor que la resistencia característica  $\beta_{wN}$ . Para las resistencias L Bn 450 y L Bn 550, que pueden alcanzarse con Liapor 8, se requiere una autorización especial de la autoridad competente.

En los hormigones livianos la relación entre la resistencia prismática y la cúbica a compresión es aproximadamente la misma que para el hormigón normal ( $\beta_p \sim 0,85 \beta_w$ ). La resistencia a cargas de larga duración del LB, puede (en lugar del 80 % del NB) como consecuencia de redistribución de esfuerzos por fluencia lenta del mortero de cemento, reducirse a un 70 o 75 % de la resistencia a cargas de corta duración. Para el establecimiento de las resistencias de cálculo, sin embargo, esta propiedad no ha sido tomada en cuenta.

## 7.5. Diferencias más importantes entre las propiedades de los hormigones livianos y normales

### 7.5.1. Resistencia a la tracción

Las resistencias a la tracción por flexión y por fractura del LB tienen una dispersión mayor que para el hormigón normal, porque dependen considerablemente de la resistencia de los granos y de su forma. Para las clases de resistencia inferior hasta L Bn 250, en promedio son de valores mayores que los correspondientes a hormigones normales; en cambio resultan inferiores para las resistencias mayores, porque por encima de  $\beta_w = 350$  kp/cm<sup>2</sup> la resistencia propia de los granos de hormigón es determinante. Las relaciones siguientes conducen a valores ubicados dentro del tercio inferior de los límites de dispersión:

$$\beta_{BZ} \approx 1,0 \sqrt[3]{\beta_w^2} \quad \beta_{SpZ} \approx 0,5 \sqrt[3]{\beta_w^2} \quad (7.1)$$

y corresponden a lo establecido en [1 a] para hormigón normal. En algunos ensayos efectuados con reducidas resistencias propias de los granos, la resistencia a tracción por fractura fue de un 20 a un 30 % inferior que para el hormigón normal.

### 7.5.2. Resistencia para cargas distribuidas parciales

Algunos ensayos efectuados en Munich [82, pág. 150] demostraron que la menor resistencia propia de los granos de los agregados para hormigón liviano, reducía su capacidad por-

tante para cargas distribuidas parciales con respecto a la correspondiente al hormigón normal. La presión de rotura  $p_U$  debajo de una superficie de carga centrada  $F_1$  sobre un prisma de sección  $F$  aumenta sólo en función de  $\sqrt[3]{\frac{F_1}{F}}$  y no como en el caso del hormigón normal, donde lo hace en función de  $\sqrt{\frac{F_1}{F}}$  (ver Sec. 3.5). Por ello, la presión de contacto admisible a considerar es

$$p_{adm.} = \frac{\beta_R}{2,1} \sqrt[3]{\frac{F_1}{F}} \leq \beta_R \quad (7.2)$$

( $\beta_R$  igual que para el hormigón normal según DIN 1045)

Las cargas de superficie parciales se presentan también para cargas lineales, como ocurre en los anclajes de barras de armadura con ganchos o lazos. Ensayos efectuados a este respecto mostraron sorpresivamente que en este caso se obtuvieron para hormigón liviano valores más favorables que para hormigón normal, de modo que no existe razón alguna para modificar los radios de curvatura para doblar las barras. Sin embargo es necesario aumentar la distancia a los bordes de los ganchos y lazos de la armadura como consecuencia de la menor resistencia a la fractura por tracción del hormigón liviano con respecto al hormigón normal.

### 7.5.3. Resistencia por adherencia

Ensayos de arrancamiento efectuados con barras de acero nervurado para hormigón de  $\varnothing 12$  mm y  $\varnothing 26$  mm dieron como resultado que el esfuerzo de tracción para producir un deslizamiento de 0,01 o de 0,1 mm, es más del doble en el hormigón liviano que el correspondiente al hormigón normal. El aumento para barras de  $\varnothing 12$  mm es mayor que para las de  $\varnothing 26$  mm, porque para diámetros reducidos la sollicitación a la adherencia por corte queda ubicada casi totalmente en la masa de mortero, mientras que para diámetros mayores, los agregados livianos

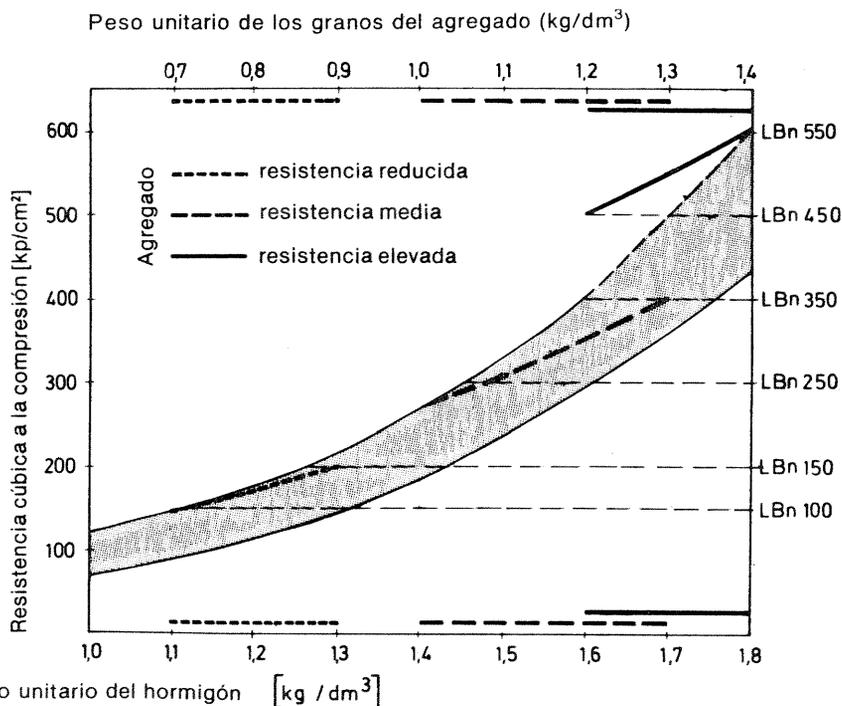


Fig. 7.8. Relación entre el peso unitario de los granos y el del hormigón con la resistencia cúbica de hormigones livianos de estructura compacta (según H. Weigler).

de menor resistencia se introducen en los "dientes de hormigón" entre nervaduras del acero y reducen con ello la resistencia al corte puro. La razón de esta mayor resistencia por adherencia reside en el hecho que, a igualdad de resistencias a la compresión de un hormigón liviano y otro normal, en el primero existe una mayor resistencia del mortero.

Sin embargo, cuando la adherencia peligró por efecto de fractura (o hendedura), entonces, cuando existe compresión normal a la barra o en la dirección de la misma, el efecto de la tracción trasversal descrito en Sec. 7.3 puede aumentar el peligro de fractura y hacer peligrar la adherencia. En zonas de tensiones de adherencia elevadas en barras de  $\varnothing > 18$  mm, se recomienda por ello disponer una armadura transversal adecuada. El efecto favorable de la resistencia a la adherencia permite utilizar anclajes por adherencia de la armadura pretensada en bancos de pretensado como con hormigón normal. También la adherencia tiene un efecto favorable sobre el comportamiento a la fisuración, la separación de fisuras y su ancho, etcétera.

#### 7.5.4. Deformaciones, relación $\sigma - \epsilon$ , módulo E para cargas de corta duración

Los diagramas tensión-deformación para sollicitaciones de compresión de corta duración en prismas (duración de la carga aproximadamente 10 min. hasta alcanzar la rotura), tienen un desarrollo, a igual clase de resistencia, que para el hormigón liviano es más inclinado y de mayor extensión que para hormigón normal, y la deformación de rotura, con  $\epsilon_b$  máx.  $\geq 2,5 \%$  del 20 al 30 % mayor (Fig. 7.9).

La menor superficie del diagrama de tensiones en la zona comprimida se equilibra, en cierto modo, mediante un mayor valor de  $\epsilon_b$  máx. Esto también resultó de los ensayos con cargas de corta duración en vigas-placa realizados por el OGI de Stuttgart.

El módulo de elasticidad E (según DIN 1048 para  $\sigma_b \sim 1/3 \beta_p$ ) depende no sólo de la resistencia a la compresión, sino también del peso unitario del hormigón  $\rho_{rb}$  y de la naturaleza de los agregados (arcilla expandida, pizarra expandida). H. Weigler [82, pág. 102] da las fórmulas siguientes.

$$\begin{aligned} \text{para hormigón de arcilla expandida } E_{LB}^T &\approx 59000 + 2340 \sqrt{\rho_{rb}^3 \beta_w} \quad [\text{kp/cm}^2] \\ \text{para hormigón de pizarra expandida } E_{LB}^S &\approx 85300 + 2380 \sqrt{\rho_{rb}^3 \beta_w} \quad [\text{kp/cm}^2] \end{aligned} \quad (7.3)$$

con  $\rho_{rb}$  (en  $\text{kg/dm}^3$ ) y  $\beta_w$  (en  $\text{kp/cm}^2$ ) a 28 días, con secado al aire.

El agregado de arena natural se tiene en cuenta por el aumento de  $\rho_{rb}$ . Puede suponerse una dispersión de  $\pm 10 \%$ . Los valores del módulo E que aparecen en las normas [84], que sólo dependen del peso unitario, son groseros valores estimados. En las mismas normas se recomienda por ello (en el caso de estructuras de hormigón normal o liviano, hiperestáticas, es una exigencia) determinarlo experimentalmente.

Los muy reducidos valores del módulo E de los hormigones livianos en comparación con los correspondientes a un hormigón normal, en general tienen un efecto favorable. Todos los esfuerzos característicos de coacción (inducidos) resultan menores y las estructuras son menos propensas a la fisuración por dichas causas. Las deformaciones por flexión sólo son un poco mayores, debido a la mayor altura de la zona comprimida por flexión y por ello la deformación de borde  $\epsilon_b$  y en consecuencia la curvatura resultan menores.

#### 7.5.5. Expansión, retracción y fluencia lenta

El agua contenida en los poros de los agregados origina un curado húmedo del mortero en todo el interior del hormigón liviano, lo cual, cuando se impide el desecamiento, por ejemplo, impermeabilizando la superficie con Antisol, y en los primeros 100 a 300 días, con exposición al aire a  $20^\circ \text{C}$  y 60 % de humedad relativa ambiente, conduce a una expansión del hormigón del orden de  $\epsilon_s = + 10 \cdot 10^{-5}$  (Fig. 7.10). Con protección contra la evaporación, el hormigón expande en el transcurso del tiempo hasta  $\epsilon_s = + 35 \cdot 10^{-5}$ . Con esta expan-

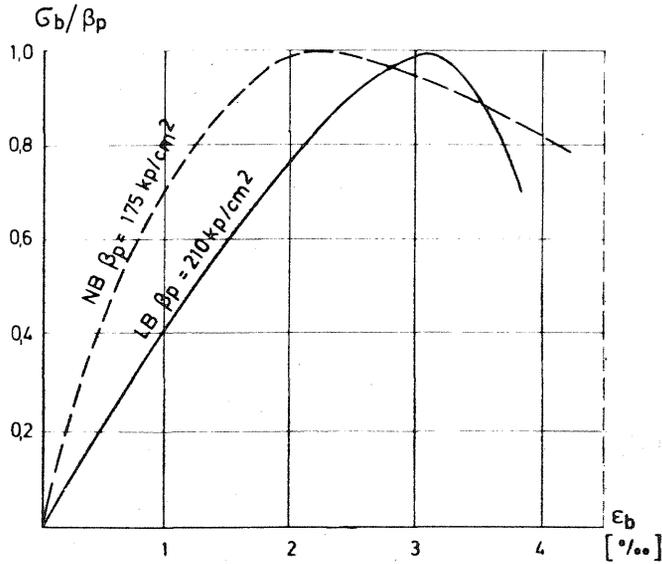


Fig. 7.9. Diagramas  $\sigma - \epsilon$  medidos en un hormigón normal Bn 250 con  $q_{tr} = 2,15 \text{ kg/dm}^3$  y en un hormigón liviano L Bn 250 (agregado de arcilla expandida) con  $q_{tr} = 1,3 \text{ kg/dm}^3$  [87].

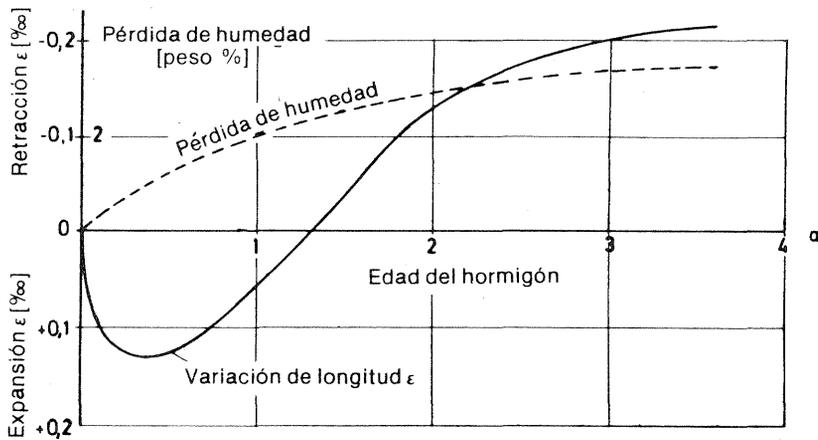


Fig. 7.10. Expansión y retracción en cilindros descargados de hormigón liviano (con agregado de arcilla expandida) [82].

sión debe contarse en el interior de grandes masas de hormigón y sobre todo en climas muy húmedos.

Los valores finales de la retracción (o contracción), con  $\epsilon_{sx} = 25 \cdot 10^{-5}$  hasta  $30 \cdot 10^{-5}$  quedan por debajo de los correspondientes a prismas de secado libre, para los cuales se alcanza  $\epsilon_{sx} = -35$  hasta  $-40 \cdot 10^{-5}$ . La fuerte reducción del valor final de la retracción mediante el factor  $k_2$  en el caso del hormigón normal, que depende de la duración del curado húmedo y del espesor  $d_w$  del elemento, no es por ello admisible para el hormigón liviano. La evolución en el tiempo de la retracción del hormigón liviano, en comparación con el de un hormigón normal equivalente puede observarse en la Fig. 7.11.

Para secciones delgadas y agregados poco húmedos, la expansión es reducida y la retracción se desarrolla análogamente que para un hormigón normal pero, sin embargo, para

un mismo contenido de cemento, con pizarra expandida es algo menor (Fig. 7.12). Las retracciones finales tienen una dispersión mayor que en el caso del hormigón normal.

La forma de las curvas de fluencia lenta del hormigón liviano es prácticamente la misma que para el hormigón normal (Fig. 7.13). La medida de la fluencia lenta  $\alpha_k = \epsilon_k / \sigma D$  (en  $10^{-6} \text{ cm}^2/\text{kp}$ ) en el caso del hormigón liviano depende menos de la edad (grado de madurez) al comienzo de la carga que para el hormigón normal, porque el agua de absorción actúa como curado. El valor final de la fluencia lenta, en el caso de protección total contra el secado, resulta no obstante de sólo un 20 % menor que el caso del curado al aire con una humedad relativa ambiente de  $\sim 60 \%$ .

La magnitud de la fluencia lenta final  $\alpha_{k\infty}$ , para iguales  $\beta_w$ , es en el hormigón liviano algo menor o igual que para el hormigón normal, es decir que no es mayor que la relación inversa de los módulos E,  $E_{NB}/E_{LB}$ . Esto significa que los valores de la fluencia lenta  $\varphi = \epsilon_k / \epsilon_{el}$

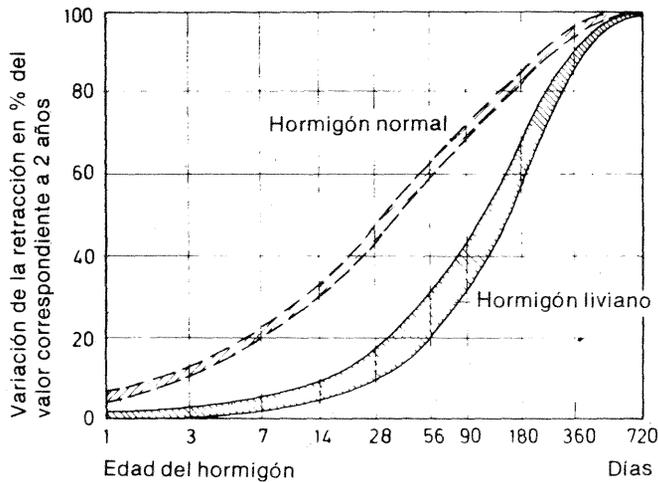


Fig. 7.11. Comparación de la variación en el tiempo de la retracción del hormigón liviano con el hormigón normal.

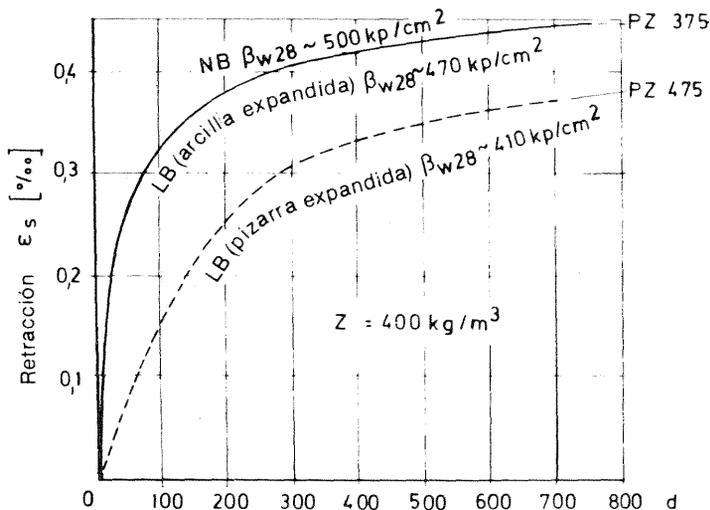


Fig. 7.12. Desarrollo de la contracción de fraguado en hormigones normales y livianos con agregado de pizarra y arcilla expandida y un mismo contenido de cemento  $Z = 400 \text{ kg/m}^3$ , PZ 375 [82].

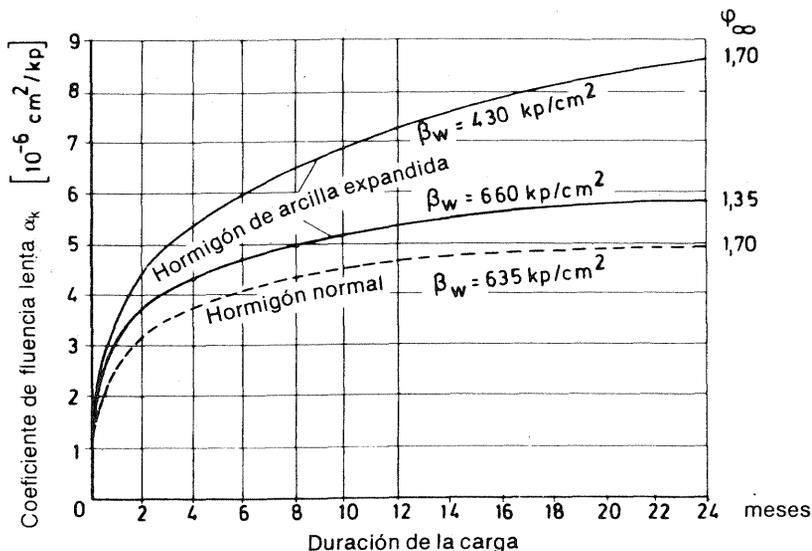


Fig. 7.13. Variación de la fluencia lenta de hormigones normales y livianos expresados en función del coeficiente de fluencia lenta  $\alpha_k = \epsilon_k / \sigma_D$  con  $\sigma_D = 1/3 \beta_w$ . Edad al comienzo de la carga. 28 días [82]

es menor en el hormigón liviano que en el normal y a saber aproximadamente en la relación de los módulos E, porque

$$\varphi = \frac{\sigma_D \cdot \alpha_k}{\epsilon_{el}} = \alpha_k E_b$$

Para el cálculo de la fluencia lenta mediante  $\varphi$ , es necesario por ello en el caso del hormigón simple utilizar un valor reducido

$$\varphi_{LB} = \xi \frac{E_{LB}}{E_{NB}} \varphi_{NB} \quad (7.4)$$

donde  $\xi = 0,7$  a  $1,0$  y el  $E_{NB}$  correspondiente a un mismo  $\beta_w$ ; en las directivas [84] se indica en cambio  $\xi = 1,2$ .

Las deformaciones lentas del hormigón liviano son grandes para probetas cargadas a edad temprana. Por lo tanto, cuando las deformaciones originadas por la fluencia lenta fueran perjudiciales, los hormigones livianos sólo deben ser sujetos a cargas de larga duración cuando posean un elevado grado de madurez. La humedad propia de los granos del agregado, hace que la influencia del espesor activo de la pieza  $d_w$  sea menor que en el hormigón normal.

### 7.5.6. Comportamiento térmico del hormigón liviano

El coeficiente de dilatación térmica lineal  $\alpha_T$  del hormigón liviano para un reducido contenido de humedad varía entre  $8$  y  $10 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ , y se reduce por humedecimiento hasta  $6,5 \cdot 10^{-6}/^\circ\text{C}$ . La conductibilidad térmica del hormigón liviano depende en gran medida del peso unitario y del contenido de humedad; en las autorizaciones complementarias de la DIN 4108 aparecen los valores de cálculo  $\lambda$  en función del tipo de peso unitario.

El coeficiente de conductibilidad térmica  $\lambda$  para  $\rho_{td} = 1,4 \text{ kg/dm}^3$  y humedad en equilibrio (aproximadamente 5 % en vol.), con  $\lambda \approx 0,5$  a  $0,6 \text{ kcal/m}^\circ\text{C}$ , queda por debajo de  $1/3$  del valor correspondiente al hormigón normal con agregado grueso del Rhin y  $\rho = 2,2 \text{ t/m}^3$  ( $\lambda_{NB} = 1,75$

kcal/mh°C). De ahí surge la gran reducción en la conductibilidad térmica debida a los agregados livianos, que actúa favorablemente en la resistencia al fuego, p. ejemplo como protección de la armadura de un calentamiento rápido. La elevada influencia negativa de la saturación puede observarse en Fig. 7.14, en base a la resistencia a la transmisión de calor  $1/\lambda$  de una pared de 1 m de espesor, para un hormigón liviano con  $\rho_{tr, tr} \sim 1,45 \text{ kg/dm}^3$ , donde corresponde tener presente que un 5 % en vol. del contenido de humedad, como humedad en equilibrio, es inevitable en climas húmedos.

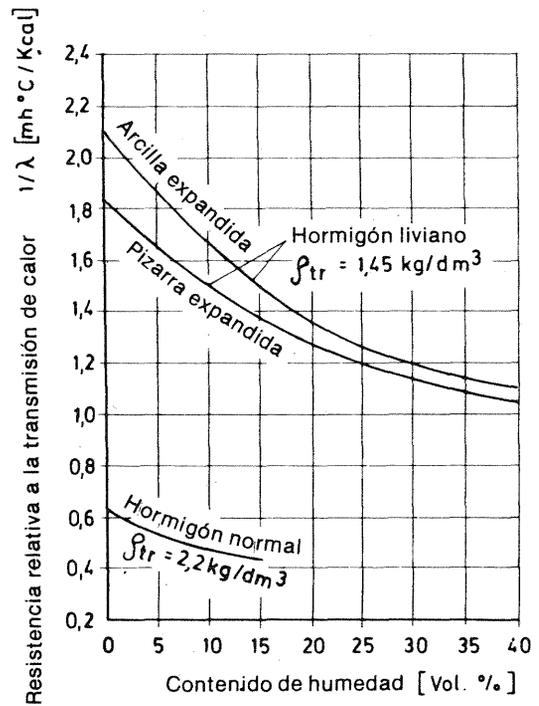


Fig. 7.14. Resistencia a la transmisión del calor  $1/\lambda$  referido a la unidad de espesor para hormigones con agregados naturales y agregados livianos ( $\rho_{tr} = 1,45 \text{ kg/dm}^3$ ) en función del contenido de humedad porcentual en volumen [82].

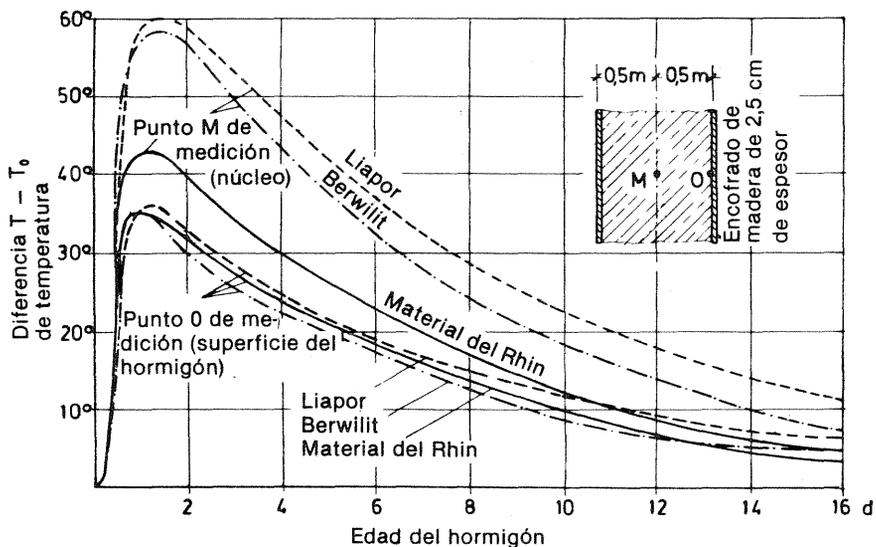


Fig. 7.15. Variación de las diferencias de temperatura con relación al aire exterior  $T_0 \sim 20^\circ \text{ C}$  como consecuencia de la hidratación en el núcleo y en la superficie de secciones de placas de 1 m de espesor de hormigones normales y livianos [82].

La reducida conductibilidad térmica conduce naturalmente a que el calor de hidratación del cemento originado durante el fraguado del mismo, se disipe más lentamente que en el hormigón normal y por ello, en las estructuras de mucho espesor se originen temperaturas más elevadas y tensiones propias de origen térmico (Fig. 7.15). De ahí que para hormigón liviano deberían protegerse las superficies exteriores contra enfriamiento y nunca utilizar cementos F de alta resistencia inicial, cuando el espesor de la estructura sobrepase 60 a 80 cm.

#### 7.5.7. Protección de la armadura contra la corrosión

El mortero rico en cemento y de alta resistencia del hormigón liviano resulta favorable como protección contra la corrosión, siempre que el recubrimiento de las barras de acero esté bien compactado. Sin embargo, lamentablemente, la mayoría de los agregados livianos poseen poca resistencia a la difusión de gases, de modo que el anhídrido carbónico puede penetrar hasta la película de cemento que recubre las barras, cuando los granos abarcan casi la totalidad del espesor del recubrimiento. De acuerdo con ello puede perderse la protección básica de la pasta endurecida de cemento por carbonatación de la misma y con ello originarse corrosión de la armadura. Por estas razones, el recubrimiento de hormigón necesario de las barras de acero debe aumentarse con un valor que depende del  $\varnothing$  máx. de los granos, en general 5 mm (ver Tabla 3 en [84]).

### 7.6. Conclusiones sobre el dimensionado de hormigón liviano con armadura (hormigón armado liviano y hormigón pretensado liviano)

Las diferencias entre las propiedades resistentes del hormigón normal y el hormigón liviano, exigen criterios de cálculo distintos, que se enuncian en las "Especificaciones para hormigón liviano simple y armado con estructura cerrada", edición de junio de 1973 [84]. En la práctica, estas especificaciones deben tenerse en cuenta para el proyecto de estructuras de hormigón liviano. Las excepciones a la norma deben ser previamente aprobadas por la autoridad competente.

Corresponde destacar las siguientes particularidades:

Para estructuras sólo se utilizarán las calidades de hormigón L Bn  $\geq 150$ , L Bn 100 sólo es admisible para paredes portantes armadas. Para paredes sin armadura, de acuerdo con DIN 4232, también puede emplearse L Bn  $< 100$ .

Como armadura, y de acuerdo con DIN 488, solo pueden emplearse barras nervuradas para hormigón hasta  $\varnothing 22$  mm y mallas de acero soldadas para hormigón formadas por barras perfiladas o nervuradas.

El recubrimiento de la armadura depende del diámetro de las barras y del tamaño máximo del agregado grueso, de acuerdo con las condiciones ambientales y tipo de estructura.

El módulo de elasticidad es independiente del tipo de agregado y de la clase de la resistencia (ver a este respecto 7.5.4). La utilización de valores más exactos, determinados preferentemente por ensayos, se recomienda para aquellos casos donde las deformaciones o los esfuerzos de coacción (inducidos) juegan un rol importante.

Lo establecido en las especificaciones sobre retracción y fluencia lenta, de acuerdo con las nuevas investigaciones [86] se apartan en parte esencialmente del comportamiento real. En especial la fluencia lenta, con ello resulta considerablemente sobrevalorada (hasta un 40 %). Si por lo tanto la retracción y la fluencia lenta juegan un papel importante en el comportamiento de la estructura (p. ejemplo en hormigón liviano pretensado), se recomienda recurrir a resultados experimentales más recientes. Debe observarse que, en el desarrollo con el tiempo de la retracción y la fluencia lenta de acuerdo con lo establecido en Sec. 7.5.5, no debe suponerse en todos los casos afinidad con el hormigón normal.

Para el dimensionado a la flexión en lo que respecta a la repartición de tensiones en la zona comprimida, debe partirse de una parábola de 2° grado, de acuerdo con Fig. 7.16, para el diagrama  $\sigma - \epsilon$ , con  $\epsilon_b \text{ máx.} = - 2,0 \text{ ‰}$  y  $\sigma_b \text{ máx.} = \beta_R$ . Con ello se limita el aprovechamiento de la zona comprimida por flexión. Mientras tanto para poder utilizar las tablas de cálculo del Cuaderno 220 de la DAfStb, se admite utilizar para secciones con zona comprimida rectangular, el diagrama parabólico-rectangular de repartición de tensiones que aparece en la DIN 1045

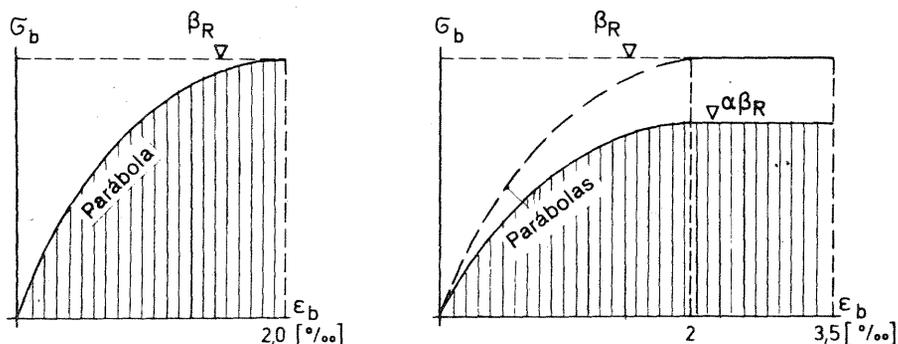


Fig. 7.16. Repartición de tensiones en la zona comprimida a tener en cuenta para el dimensionado a la flexión de secciones de hormigón liviano; a la izquierda: especificaciones de 1973 [84]; a la derecha: para utilizar las tablas de cálculo en el caso de zona comprimida rectangular y especificaciones de 1975.

[1 a, Fig. 7.3], siempre que el valor extremo  $\beta_R$  o el ancho  $b$  de la zona comprimida del hormigón, se reduzca mediante un factor  $\alpha$ . En tal caso se tiene

$$\alpha = 1,0 - e/d \cong 0,8 \quad (7.5)$$

También en el caso de secciones de vigas-placa con  $b/b_0 > 5$  y  $d/h \leq 0,22$  pueden utilizarse las fórmulas aproximadas conocidas si en lugar de  $\beta_R$  se introduce el valor reducido  $\alpha\beta_R$ .

De acuerdo con los resultados de nuevos ensayos, E. Grasser (Día del Hormigón, 1975) de Munich, propone calcular tanto para flexión simple como compuesta con el diagrama parabólico-rectangular correspondiente al hormigón normal, pero con  $\alpha = 0,9$ .

En lo que respecta al dimensionado al corte y a la torsión, los  $\tau_{011}$  adm. deben reducirse al 80 % de los valores dados por Tabla 14 de DIN 1045 para hormigón normal, porque en losas sin armadura de corte la menor resistencia ofrecida por la trabazón de los granos reduce la capacidad portante al corte. Dicha reducción para  $d > 20$  cm puede tenerse en cuenta mediante los coeficientes  $k_1$  y  $k_2$ .

En las estructuras con armadura para el corte, en los ensayos realizados en Stuttgart se constató que la reducida rigidez de las diagonales ideales comprimidas (¡bajo  $E_{LB}$ !) conducía a una sollicitación de la armadura de corte de un 5 a un 10 % mayor. De acuerdo con ello, sería suficiente un aumento del 10 % de la  $F_{eS}$  nec. de acuerdo con la DIN 1045.

Las normas prevén un aumento del 15 % de la sección de la armadura de corte, cuando la cuantía de ésta es reducida y una disminución del valor de  $\tau_{012}$ , como en el caso de losas sin armadura de corte. Los límites superiores de la tensión de corte  $\tau_{03}$ , que dependen de la resistencia a la compresión del hormigón en las diagonales ideales comprimidas, se mantienen iguales que para el hormigón normal.

El dimensionado de elementos comprimidos es el mismo que para el hormigón normal, siempre que no exista peligro de pandeo. Cuando existe peligro de pandeo hay que tener presente la influencia desfavorable del reducido valor del módulo  $E$ . Por ello se limita la máxima esbeltez a  $\lambda \leq 70$ . Las cargas admisibles de acuerdo con la DIN 1045, Sec. 17.4.3, deben, salvo algunas excepciones, reducirse mediante el coeficiente  $\eta = (5/6 + e/d) (1,2 - 0,2 \lambda/70) \leq 1,0$ , donde  $e$  corresponde a la máxima excentricidad prevista en el tercio medio de la longitud de pandeo. Las excepciones, para las que no es necesario aplicar el coeficiente de reducción  $\eta$ , se refieren a secciones con zona comprimida rectangular en las que se utilizó para el cálculo el diagrama parabólico-rectangular de tensiones con el valor máximo reducido a  $\alpha\beta_R$ . En este caso, sin embargo, en la expresión de  $\alpha$ , en lugar de  $e$  debe utilizarse la excentricidad incrementada  $e + f$  (ver al respecto [1 a, Sec. 10.5.3]).

La influencia de un zunchado en el aumento de carga no debe tenerse en cuenta en el caso de columnas de hormigón liviano.

En lo que se refiere a presión admisible en el caso de cargas parciales superficiales, véase Sec. 7.5.2.

Para deflexiones debidas a cargas de servicio deben tenerse en cuenta los valores reales del módulo E. No es posible dimensionar las vigas de hormigón liviano tan esbeltas como las de hormigón normal, si la capacidad de utilización resulta influida por la deflexión.

Las tensiones admisibles de adherencia y las longitudes de anclaje y empalme por superposición, son las mismas que las establecidas por DIN 1045 para hormigón normal. En el caso de mallas soldadas deben tenerse en cuenta algunas diferencias.

No existen aún reglas generales válidas para el dimensionado y utilización del hormigón liviano pretensado. Antes de planear estructuras de hormigón liviano pretensado, el proyectista debe familiarizarse perfectamente con los resultados de las más recientes investigaciones y solicitar la correspondiente autorización de la autoridad competente.

## 7.7. Sobre la economía de las estructuras de hormigón liviano

Los agregados y el manipuleo del hormigón liviano resultan más caros que para el hormigón normal. Estos mayores costos pueden compensarse por la economía que resulta del peso más reducido y la menor conductibilidad térmica. El menor peso conduce a una economía de acero para armadura, a menores secciones de los elementos portantes y dimensiones más reducidas de las fundaciones. Estos aspectos resultan favorables sobre todo en el caso de grandes luces, estructuras elevadas y terreno de fundación malo. El reducido peso propio puede ser también favorable para elementos prefabricados, porque para una determinada capacidad de carga de los equipos y grúas, es posible manipular unidades de mayor tamaño, por ejemplo grandes vigas para cubiertas o puentes. La aislación térmica que proporciona el hormigón liviano permite economizar en la aislación térmica y climática en edificios (por ejemplo, las paredes portantes de hormigón liviano L Bn 100, de peso unitario 1,0 sin necesidad de revoque exterior aislante) y en la protección contra el fuego.

Hasta el momento, en Alemania la economía ha sido poco frecuente, el volumen de producción de agregados livianos adecuados es aún escaso, la distancia de transporte es en general grande y algunas limitaciones impuestas por las normas encarecen innecesariamente las estructuras.

## 7.8. Aplicaciones

En los Estados Unidos ya se han ejecutado numerosas obras de gran magnitud y muchas estructuras prefabricadas de hormigón liviano, especialmente donde no existe ni piedra partida ni canto rodado naturales, los que deben transportarse desde largas distancias. Desde un punto de vista técnico, las estructuras de hormigón liviano prefabricadas de grandes dimensiones para edificios y sobre todo para puentes de hormigón pretensado, resultan a menudo ventajosas y de interés para el proyectista.

Algunas de las principales aplicaciones son:

el primer puente carretero de hormigón liviano de Europa: en Gittelde ( $l = 12,5 - 15,1 - 12,5$  m);

el puente peatonal sobre un brazo del Rin en Schierstein,  $l = 96,4$  m;

el puente carretero sobre el lago Fühlinger en Colonia,  $l = 136$  m;

tres puentes carreteros sobre el canal Maas-Waal, cuyo tramo central de  $l = 112$  m tiene 105 m de hormigón liviano;

vigas de cubierta del estadio de hielo artificial en Augsburg,  $l = 62$  m;

hangar de mantenimiento para Jumbos, Aeropuerto de Frankfurt, cubierta suspendida de  $l = 135$  m.

## Bibliografía

- 1 a Leonhardt, F. ; Mönnig, E. : Vorlesungen über Massivbau. Erster Teil: Grundlagen zur Bemessung im Stahlbetonbau. (Hay trad. esp.: Estructuras de hormigón armado. I. Bases para el dimensionado de estructuras de hormigón armado. Buenos Aires, El Ateneo, 1985.)
- b Leonhardt, F. ; Mönnig, E. : Vorlesungen über Massivbau. Dritter Teil: Grundlagen zum Bewehren im Stahlbetonbau. (Hay trad. esp.: III. Bases para el armado de estructuras de hormigón armado. Buenos Aires, El Ateneo, 1985.)
- c Leonhardt, F. ; Mönnig, E. : Vorlesungen über Massivbau. Viertes Teil: Verformungen und Rissebeschränkung im Stahlbetonbau. (Hay trad. esp.: IV. Verificación de la capacidad de uso. Buenos Aires, El Ateneo, 1985.)
- 2 Suenson, E. : Eisenbetonbewehrung unter einem Winkel mit der Richtung der Normalkraft.  
Beton und Eisen 21 (1922), H. 10, S. 145 - 149
- 3 Leitz, H. : Eisenbewehrte Platten bei allgemeinem Biegunszustand.  
Die Bautechnik 1 (1923), H. 16, S. 155 - 157; H. 17, S. 163 - 167
- 4 Leitz, H. : Bewehrung von Scheiben und Platten.  
Intern. Kongr. f. Beton u. Eisenbeton, Berlin, 1930
- 5 Flügge, W. : Statik und Dynamik der Schalen.  
1. Aufl., Berlin, Springer, 1934
- 6 Scholz, G. : Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken.  
Beton- und Stahlbetonbau 53 (1958), H. 10, S. 250 - 255
- 7 Peter, J. : Zur Bewehrung von Scheiben und Schalen für Hauptspannungen schiefwinklig zur Bewehrungsrichtung.  
Diss. TH Stuttgart, 1964  
und: Die Bautechnik 43 (1966), H. 5, S. 149 - 154; H. 7, S. 240-248
- 8 Ebner, F. : Über den Einfluß der Richtungsabweichung der Bewehrung von der Hauptspannungsrichtung auf das Tragverhalten von Stahlbetonplatten.  
Diss. TH Karlsruhe, 1963
- 9 Ebner, F. : Zur Bemessung von Stahlbetonplatten mit von der Richtung der Hauptzugspannung abweichender Bewehrungsrichtung.  
in: Aus Theorie und Praxis des Stahlbetonbaus, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1969, S. 127 - 134
- 10 Lenschow, R. J. und Sozen, M. A. : A yield criterion for reinforced concrete under biaxial moments and forces.  
Civ. Eng. Studies, Struct. Research Series No. 311, University of Illinois, Juli 1966,  
und: A yield criterion for reinforced concrete slabs.  
Journ. ACI, Proc. Vol. 64 (1967), No. 5, p. 266 - 273
- 11 Wästlund, G. ; Hallbjörn, L. : Beitrag zum Studium der Durchbiegung und des Bruch-

- momentes von Stahlbetonplatten mit schiefer Bewehrung.  
in: Aus Theorie und Praxis des Stahlbetonbaus, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1969, S. 135 - 138
- 12 Baumann, Th.: Tragwirkung orthogonaler Bewehrungsnetze beliebiger Richtung in Flächentragwerken aus Stahlbeton.  
DAfStb., H. 217, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1972
- 13 Baumann, Th.: Zur Frage der Netzbewehrung von Flächentragwerken.  
Der Bauingenieur 47 (1972), H. 10, S. 367 - 377
- 14 Girkmann, K.: Flächentragwerke.  
6. Aufl., Wien, Springer, 1963
- 15 Dischinger, F.: Beitrag zur Theorie der Halbscheibe und des wandartigen Balkens.  
Abhandl. IVBH., Bd. I, Zürich, 1932
- 16 Bay, H.: Wandartige Träger und Bogenscheibe.  
Stuttgart, Konrad Wittwer, 1960
- 17 Zienkiewicz, O. C.; Cheung, Y. L.: The finite element method in structural and continuum mechanics.  
London, Mc Graw-Hill, 1967
- 18 Cervenka, V.: Inelastic finite element analysis of reinforced concrete panels under in plane loads.  
Thesis Univ. Colorado, 1970
- 19 Müller, R. K.: Handbuch der Modellstatik.  
Berlin, Springer, 1971
- 20 Schleeh, W.: Die Rechteckscheibe mit beliebiger Belastung der kurzen Ränder.  
Beton- u. Stahlbetonbau 56 (1961), H. 3, S. 72 - 83
- 21 Schleeh, W.: Ein einfaches Verfahren zur Lösung von Scheibenaufgaben.  
Beton- u. Stahlbetonbau 59 (1964); H. 3, S. 49 - 56; H. 4, S. 91 - 94; H. 5, S. 111 - 119
- 22 Schleeh, W.: Die statisch unbestimmt gestützte durchlaufende Scheibe.  
Beton- u. Stahlbetonbau 60 (1965), S. 2, S. 25 - 34 und Ergänzung H. 7, S. 180
- 23 Schleeh, W.: Die Randstörungen in der technischen Biegelehre.  
Beton- u. Stahlbetonbau 61 (1966), H. 1, S. 10 - 19
- 24 Leonhardt, F.; Walther, R.: Wandartige Träger.  
DAfStb., H. 178, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1966
- 25 El-Behairy, S.: Spannungszustand wandartiger Träger mit im Innern angreifenden Einzelkräften.  
Beton- u. Stahlbetonbau 63 (1968), H. 10, S. 228 - 230
- 26 Linse, H.: Wandartige Träger mit Pfeilvorsprüngen.  
Die Bautechnik 38 (1961), H. 6, S. 191 - 197; H. 8, S. 264 - 268
- 27 Rosenhaupt, S.: Beitrag zur Berechnung von Scheiben mit seitlichen Versteifungen.  
Die Bautechnik 41 (1964), H. 2, S. 48 - 51
- 28 Bay, H.: Die Schubkräfte im randversteiften wandartigen Träger.  
Der Bauingenieur 39 (1964), H. 10, S. 406 - 408
- 29 Thon, R.: Beitrag zur Berechnung und Bemessung durchlaufender wandartiger Träger.  
Beton- u. Stahlbetonbau 53 (1958), S. 12, S. 297 - 306
- 30 Pfeiffer, G.: Beitrag zur Berechnung und Bemessung von über den Auflagern verstärkten wandartigen Durchlaufträgern.  
Diss. TH Hannover, 1965
- 31 Nylander, H.; Nylander, J. O.: Högar balkar (deep beams)  
Divis. of Building Statics, Royal Inst. Technology, Stockholm,  
Bull. No. 64, 65, 66, 68, 69 (1967)
- 32 Franz, G.; Niedenhoff, H.: Die Bewehrung von Konsolen und gedrunenen Balken.  
Beton- u. Stahlbetonbau 58 (1963), H. 5, S. 112 - 120
- 33 Mehmel, A.; Freitag, W.: Tragfähigkeitsversuche an Stahlbetonkonsolen.  
Der Bauingenieur 42 (1967), H. 10, S. 362 - 369
- 34 Hagberg, T.: Zur Bemessung der Konsole.  
Beton- u. Stahlbetonbau 61 (1966), H. 3, S. 68 - 72

- 35 Jyengar, K. T. S. R. ; Prabhakara, M. K. : A three-dimensional elasticity solution for rectangular prism under end loads.  
Zeitschr. f. angew. Mathem. u. Mechn. (ZAMM) 49 (1969), H. 6, S. 321 - 332
- 36 Jyengar, K. T. S. R. ; Yogananda, C. V. : A three-dimensional stress distribution problem in the anchorage zone of a post-tensioned concrete beam.  
Mag. Concr. Res. , Vol. 18 (1966), No. 55, p. 75 - 84
- 37 Jyengar, K. T. S. R. ; Prabhakara, M. K. : Anchor zone stresses in prestressed concrete beams.  
Proc. ASCE, Struct. Div. , Vol. 97 (1971), No. ST 3, p. 807 - 824
- 38 Guyon, Y. : Contraintes dans les pièces prismatiques soumises à des forces appliquées sur leurs bases, au voisinage de ces bases.  
Abh. IVBH XI (1951), S. 165 - 226
- 39 Douglas, D. J. ; Trahair, N. S. : An examination of the stresses in the anchorage zone of a post-tensioned prestressed concrete beam.  
Mag. Concr. Res. , Vol. 12 (1960), No. 34, p. 9 - 18
- 40 Jyengar, K. T. S. R. : Der Spannungszustand in einem elastischen Halbstreifen und seine technischen Anwendungen.  
Diss. TH Hannover, 1960  
und: Two-dimensional theories of anchorage zone stresses in post-tensioned prestressed concrete beams.  
Journ. ACI, Proc. Vol. 59 (1962), No. 10, p. 1443 - 1466
- 41 Plähn, J. ; Kröll, K. : Der Spannungszustand im Eintragungsbereich des Spannbettbalkens.  
Beitrag z. 7. Kongreß FIP (New York 1974)
- 42 Yettram, A. L. ; Robbins, K. : Anchorage zone stressed in axially post-tensioned members of uniform rectangular section.  
Mag. Concr. Res. , Vol. 21 (1969), No. 67, S. 102 - 112
- 43 Tesar, V. : Determination expérimentale des tensions dans les extrémités des pièces prismatiques munies d'une semi-articulation.  
Abh. IVBH I (1932), S. 497 - 506
- 44 Sargious, M. : Beitrag zur Ermittlung der Hauptzugspannungen am Endauflager vorgespannter Betonbalken.  
Diss. TH Stuttgart, 1960  
und: Hauptzugkräfte am Endauflager vorgespannter Betonbalken.  
Die Bautechnik 38 (1961), H. 3, S. 91 - 97
- 45 Leonhardt, F. ; Reimann, H. : Betongelenke, Versuchsbericht und Vorschläge zur Bemessung und konstruktiven Ausbildung.  
DAfStb. , H. 175, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1965
- 46 Mörsch, E. : Über die Berechnung der Gelenkquader.  
Beton u. Eisen 23 (1924), H. 12, S. 156 - 161
- 47 Hiltcher, R. ; Florin, G. : Darstellung der Spaltzugspannungen unter einer konzentrierten Last (Druckplatte) nach Guyon-Jyengar und nach Hiltcher und Florin.  
Die Bautechnik 47 (1967), H. 6, S. 196 - 200
- 48 Hawkins, H. J. : The bearing strength of concrete loaded through rigid plates.  
Mag. Concr. Res. , Vol. 20 (1968), No. 62, p. 31 - 40  
und: The bearing strength of concrete loaded through flexible plates.  
Mag. Concr. Res. , Vol. 20 (1968), No. 63, p. 95 - 102
- 49 Hiltcher, R. ; Florin, G. : Spalt- und Abreißzugspannungen in rechteckigen Scheiben, die durch eine Last in verschiedenem Abstand von einer Scheibenecke belastet sind.  
Die Bautechnik 40 (1963), H. 12, S. 401 - 408
- 50 Schlee, W. : Die Rissesicherheit in den Randzonen periodisch vorgespannter Scheiben.  
Beton- u. Stahlbetonbau 55 (1960), H. 4, S. 93 - 95
- 51 Sargious, M. ; Tadros, G. S. : Stresses in prestressed concrete stepped cantilevers under concentrated loads.  
Beitrag z. 6. Kongreß FIP (Prag 1970)  
und: Step and loads effect on stresses in prestressed concrete short brackets.

- 52 Zahlten, N.: Journ. ACI, Proc. Vol. 69 (1971), No. 11, p. 861 - 866  
Spannungszustände in Scheiben im Einleitungsbereich konzentrierter Lasten.  
Diss. TH Hannover, 1964
- 53 Herzog, M.: Wichtige Sonderfälle des Durchstanzens von Stahlbeton- und Spannbetonplatten nach Versuchen.  
Der Bauingenieur 49 (1974), H. 9, S. 333 - 342
- 54 Schütt, H.: Über das Tragvermögen wandartiger Stahlbetonträger.  
Beton- u. Stahlbetonbau 51 (1956), H. 10, S. 220 - 224  
(s. auch Diss. TH Hannover, 1953)
- 55 Leonhardt, F.; Lippoth, W.: Folgerungen aus Schäden an Spannbetonbrücken.  
Beton- u. Stahlbetonbau 65 (1970), H. 10, S. 231 - 244 u. 66 (1971), H. 3, S. 72
- 56 Müller, R. K.; Schmidt, D. W.: Zugkräfte in einer Scheibe, die durch eine zentrische Einzellast in einer rechteckigen Öffnung belastet wird.  
Die Bautechnik 41 (1964), H. 5, S. 174 - 176
- 57 Eibl, J.; Ivanyi, G.: Spanngliedverankerungen im Inneren eines Trägersteges  
Beitrag z. 6. Kongreß FIP (Prag 1970)  
und: Innenverankerungen im Spannbetonbau.  
DAfStb., H. 223, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1973
- 58 Yettram, A. L.; Robbins, K.: Anchorage zone stresses in post-tensioned uniform members with eccentric and multiple anchorages.  
Mag. Concr. Res., Vol. 22 (1970), No. 73, p. 209 - 218
- 59 Hiltcher, R.; Florin, G.: Spaltzugspannungen in kreiszylindrischen Säulen, die durch eine kreisförmige Flächenlast zentral-axial belastet sind.  
Die Bautechnik 49 (1972), H. 3, S. 90 - 94
- 60 Bauschinger, J.: Mitteilungen aus dem Mech. Techn. Laboratorium München,  
H. 6 (1976)
- 61 Bach, C.; Baumann, R.: Elastizität und Festigkeit.  
9. Aufl. Berlin, Springer, 1924
- 62 Spieth, H.: Das Verhalten von Beton unter hoher örtlicher Pressung.  
Beton- u. Stahlbetonbau 56 (1961), H. 11, S. 257 - 263  
und  
Das Verhalten von Beton unter hoher örtlicher Pressung und Teilbelastung unter besonderer Berücksichtigung von Spannbetonverankerungen.  
Diss. TH Stuttgart, 1959
- 63 Pohle, W.: Lastübertragung auf Stahlpfähle.  
Der Bauingenieur 26 (1951), H. 9, S. 257 - 259  
und: Konzentrierte Lasteintragung im Beton.  
DAfStb., H. 122, Berlin, W. Ernst u. Sohn, 1957
- 64 Kuyt, B.: De bezwijklast van partieel belaste oplegblokken van ongewapend beton.  
Cement 21 (1969), H. 7, S. 316 - 320  
und: Breuksterkte van oplegblokken.  
Cement 23 (1971), H. 7, S. 321 - 323
- 65 Rasmussen, B. H.: Betonindstøbt tvaer belastede boltes og dornes baereevne.  
Bygningstatiske Meddelelser, Kopenhagen, 1963  
Auszug in: Halász, R. v.: Industrialisierung der Bautechnik.  
Düsseldorf, Werner-Verlag, 1966, S. 216 - 218
- 66 Wiedenroth, M.: Einspanntiefe und zulässige Belastung eines in einen Betonkörper eingespannten Stabes.  
Die Bautechnik 48 (1971), H. 12, S. 426 - 429 und Zeitschrift Baumann, Th. in 50 (1973), H. 1, S. 35 - 36
- 67 Sattler, K.: Betrachtungen über neuere Verhältnisse im Verbundbau.  
Der Bauingenieur 37 (1962), H. 1, S. 1 - 8
- 68 .... Verwendungsregelung für Liebig-Sicherheitsdübel.  
Firma Liebig Pfungstadt, 1972
- 69 Sell, R.: Tragfähigkeit von mit Reaktionsharzmörtelpatronen versetzten Betonankern und deren Berechnung.  
Die Bautechnik 50 (1973), H. 10, S. 333 - 340

- 70 Mönning, E.; Netzel, D.: Zur Bemessung von Betongelenken.  
Der Bauingenieur 44 (1969), H. 12, S. 433 - 439
- 71 Fessler, E.O.: Die EMPA-Versuche an armierten Betongelenken für den Hardturm-Viadukt.  
Schweiz. Bauzeitung 85 (1967), H. 34, S. 623 - 630
- 72 Kinnunen, S.; Nylander, H.: Punching of concrete slabs without shear reinforcement.  
Transact. Roy. Inst. of Techn., Stockholm, Nr. 158, 1960, Civ. Engin. 3
- 73 Kinnunen, S.: Punching of concrete slabs with two-way reinforcement.  
Transact. Roy. Inst. of Techn., Stockholm, No. 198, 1963, Civ. Engin. 6
- 74 Reimann, H.: Zur Bemessung von dünnen Plattendecken auf Stützen ohne Kopf gegen Durchstanzen.  
Diss. TH Stuttgart, 1963
- 75 Schaeidt, W.; Ladner, M.; Rösli, A.: Berechnung von Flachdecken auf Durchstanzen.  
Techn. Forschg. - u. Beratungsstelle d. Schweiz. Zementindustrie, Wildegg, 1970. Lizenz: Beton-Verlag, Düsseldorf
- 76 Moe, J.: Shearing strength of reinforced concrete slabs and footings under concentrated loads.  
Portl. Cem. Ass., Devel. Dep., Bull. D 47, April 1961  
Ergebnis siehe auch in: Shear and diagonal tension.  
Rep. ACI-ASCE, Comm. 326, Part 3: Slabs and footings  
Journ. ACI, Proc. Vol. 59 (1962), No. 3, p. 353 - 395
- 77 Glahn, H.; Trost, H.: Zur Berechnung von Pilzdecken.  
Der Bauingenieur 49 (1974), H. 4, S. 122 - 132
- 78 Kammenhuber, J.; Schneider, J.: Arbeitsunterlagen für die Berechnung vorgespannter Konstruktionen.  
Ra-Verlag, Rapperswil, 1974
- 79 König, G.; Marten, K.: Festlegen von Berechnungslasten und Kombinationsregeln.  
in: Sicherheit von Betonbauten, Arbeitstagung, Berlin  
Wiesbaden, Deutsch. Beton-Verein, 1973
- 80 Soretz, S.: Beitrag zur Ermüdungsfestigkeit von Stahlbeton.  
Tor-Isteg-Steel-Corporation  
Luxembourg, Heft 57, Wien, Okt. 1974
- 81 Stangenberg, F.: Berechnung von Stahlbetonbauteilen für dynamische Beanspruchungen bis zur Tragfähigkeitsgrenze.  
Konstruktiver Ingenieurbau-Berichte, H. 16, Essen, Vulkan-Verlag, 1973
- 82 Weigler, H.; Karl, S.: Stahlleichtbeton-Herstellung, Eigenschaften, Ausführung.  
Bauverlag, Wiesbaden, 1972
- 83 Wischers, G.; Lusche, M.: Einfluß der inneren Spannungsverteilung auf das Tragverhalten von druckbeanspruchtem Normal- und Leichtbeton.  
beton 22 (1972), H. 8, S. 343 - 347; H. 9, S. 397 - 403
- 84 .... Richtlinien für Leichtbeton und Stahlleichtbeton mit geschlossenem Gefüge (Fassung 1973)  
DAfStb. -Sonderheft, Beuth-Vertrieb, Berlin, 1973
- 85 a .... Merkblatt I für Leichtbeton und Stahlleichtbeton mit geschlossenem Gefüge: Betonprüfung zur Überwachung der Leichtzuschlagherstellung (Fassg. 1974)  
beton 24 (1974), H. 7, S. 265 - 267
- b .... Merkblatt II für Leichtbeton und Stahlleichtbeton mit geschlossenem Gefüge: Zusammensetzung und Eignungsprüfung (Fassg. 1974)  
beton 24 (1974), H. 7, S. 268-269; H. 8, S. 297 - 299
- c .... Merkblatt III für Leichtbeton und Stahlleichtbeton mit geschlossenem Gefüge: Herstellen und Verarbeiten (Fassg. 1974)  
beton 24 (1974), H. 8, S. 299 - 302
- 86 Weigler, H.: Leicht-, Stahlleicht- und Spannleichtbeton.  
betonfertigteilverforum (1974), Nr. 8, S. 3 - 9
- 87 .... Manuel Lightweight Concrete (Sec. Draft 1972)  
CEB Bull. No. 85, Paris, 1972
- 88 a DIN 1053 (E 1973) Mauerwerk; Berechnung und Ausführung  
b DIN 18151 (E 1973) Hohlblocksteine aus Leichtbeton  
c DIN 18152 (1971) Vollsteine aus Leichtbeton

